Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Matheus Genaro Dantas Xavier

Inferência Bayesiana de Parâmetros Fundamentais de Estrelas Be por meio de Observações Espectroscópicas

São Paulo
2020

Matheus Genaro Dantas Xavier

Inferência Bayesiana de Parâmetros Fundamentais de Estrelas Be por meio de Observações Espectroscópicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Astronomia.

Vertente: Pesquisa Básica

Orientador: Prof. Dr. Alex Cavaliéri Carciofi

São Paulo

2020

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Alex Carciofi, o apoio acadêmico durante toda minha graduação, proporcionando-me excelentes oportunidades de pesquisa desde o início. Estendo meus agradecimentos aos colegas do grupo Beacon, que me ajudaram no percurso e puderam tornar este trabalho melhor. Obrigado também às professoras Jane Gregorio-Hetem e Vera Jatenco pelos valiosos comentários e correções nesta monografia.

Agradeço à Fapesp o financiamento deste trabalho (n^o 2018/05326-05), contribuindo consideravelmente para minha formação.

Assim como agradeço aos professores que tive ao longo desta graduação, em disciplinas do IAG, IF e IME. Guardarei muitas histórias e boas lembranças dos episódios (ora cômicos, ora trágicos) que vivenciei.

Nada disso seria o mesmo sem as pessoas que conheci nos últimos anos e os amigos que fiz neste período. Em particular, a Luciana, com quem compartilhei momentos especiais inesquecíveis. Sua companhia sempre me trouxe muita alegria e tornou toda essa experiência mais divertida.

Esta monografia foi escrita em LaTeX com a classe IAGTESE, para teses e dissertações do IAG.

Resumo

A pesquisa em estrelas Be – objetos da sequência principal em rápida rotação que, ejetando material em órbita, formam um disco de "decréscimo" viscoso – depende da combinação de diferentes técnicas observacionais e teóricas para caracterizar completamente as propriedades de tais estrelas. Por meio do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), é possível inferir simultaneamente um grande número de parâmetros a partir de modelos computacionais e um conjunto de observações (em particular, de natureza espectroscópica). Adota-se, assim, a abordagem Bayesiana.

Este trabalho tem como objetivo aprofundar a determinação de parâmetros relativos à estrela (massa, taxa de rotação, idade e ângulo de inclinação), introduzindo linhas fotosféricas do hidrogênio (Hα, Hβ, Hγ e Hδ) em uma grade de modelos estelares já existente. A partir disso, procura-se examinar as consequências para a inferência dos parâmetros quando as observações de linha são combinadas com dados da distribuição de energia espectral no ultravioleta (UV).

A combinação de linhas com o UV possibilitou uma redução substancial das incertezas e um ganho de acurácia. Além disso, esta melhora se deu sem o uso de *priores* informativos na distância e em $v \sin i$, os quais nem sempre são confiáveis. A comparação das simulações de MCMC através de mapas de densidade de probabilidade também mostra que a combinação de observáveis permite explorar novas regiões no espaço de parâmetros. Assim, em geral, a simulação combinada encontra picos de probabilidade em regiões intermediárias em relação às simulações individuais.

Os melhores resultados foram alcançados com a simulação que combina o fluxo no UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ. Assim, recomenda-se o uso de toda a informação disponível no processo de inferência. Neste sentido, a inclusão de outras linhas, além do hidrogênio,

pode ser um próximo passo importante para o refinamento da determinação de parâmetros estelares.

Abstract

The research on Be stars – rapid rotating main sequence objects that, ejecting material into orbit, form a viscous "decretion" disk – depends on the combination of different observational and theoretical techniques to fully characterize the properties of these stars. Through Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods, it is possible to simultaneously infer a large number of parameters from computational models and a set of observations (in particular, of spectroscopic nature). Therefore, we use the Bayesian approach.

This work has the objective of improving the determination of parameters relative to the star (mass, rotation rate, age and inclination angle), introducing photospheric hydrogen lines (Hα, Hβ, Hγ e Hδ) in a pre-existing grid of stellar models. From that, we seek to examine the consequences for the inference when line observations are combined with data from the spectral energy distribution in the ultraviolet (UV).

The combination between lines and the UV allowed for a substantial reduction in uncertainties and an accuracy gain. Besides, this improvement was achieved without informative priors on distance and $v \sin i$, which are not always reliable. The comparison of different MCMC simulations through probability density maps also shows that the combination of observables enables the search of models in new sets of the parameter space. Thus, in general, the combined simulation finds probability peaks in intermediate regions in relation to the individual simulations.

The best results were achieved with the simulation that combines the UV flux with the Hα, Hβ and Hγ lines. Therefore, we recommend the use of all available information during the inference process. Furthermore, the inclusion of other lines, besides the hydrogen, may be an important next step for the improvement of the stellar parameters determination.

Lista de Figuras

1.1 Largura característica (Δ) da linha He I $\lambda\,4471$, em função da taxa de rotação, para quatro diferentes valores de $\sin i$. Gráfico extraído de Townsend et al. (2004). 20

2.1 Evolução temporal da largura equivalente (EW) da linha Hα em emissão para a estrela α Eri. Dados digitalizados da Figura 15 de Vinicius et al. (2006). 25

2.2 Amostra de espectros sintéticos para a linha Hα, variando a massa da estrela e fixando a taxa de rotação em $W = 0.74$, inclinação em $\cos i = 0.33$ e idade em $t/tms = 1.00$. 27

2.3 Perfil observado da linha Hα para a estrela Achernar contendo uma densidade grande de linhas telúricas. 29

2.4 Amostra de espectros sintéticos para a linha Hα, variando a taxa de rotação W da estrela e fixando a massa em $M = 7\,\mathrm{M}_{\odot}$, a inclinação em $\cos i = 0.33$ e a idade em $t/tms = 1.00$. 30

3.1 Diagramas de caixa para as simulações de MCMC realizadas. 32

3.2 Observação da linha Hδ no intervalo de comprimento de onda compatível com os modelos BeAtlas. 33

3.3 Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados do UV. 35

3.4 Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados da linha Hα e do UV. 36

3.5 Mapas de densidade de probabilidade (no espaço de massa e taxa de rotação) para as simulações individuais das linhas, UV e a combinação entre os dois. 38
3.6 Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados da linha Hβ e do UV. A grade de modelos foi restringida para apenas taxas de rotação $W > 0.6$. 39
3.7 Mapa de densidade de probabilidade da massa e taxa de rotação para a simulação da Figura 3.6. 40
3.8 Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 25000 passos usando dados das linhas Hα, Hβ e Hγ, além do UV. 41
3.9 Ajuste de uma seleção aleatória de modelos da distribuição posterior com resíduos sobrepostos nas regiões do UV, Hα, Hβ e Hγ. 42
3.10 Mapa de densidade de probabilidade da massa e taxa de rotação para a simulação da Figura 3.8 sobrepostas às simulações individuais de linha e UV. 44

A.1 *Corner plot* da simulação com as linhas Hα e Hβ utilizando 100 *walkers* e 5000 passos. 54
A.2 *Corner plot* da simulação com as linhas Hα e Hγ utilizando 100 *walkers* e 5000 passos. 55
A.3 Comparação de uma simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hα. 56
A.4 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hα. 57
A.5 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hβ. 58
A.6 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hγ. 59
A.7 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hδ. 60
A.8 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hβ e o UV. 61
A.9 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hγ e o UV. 62
A.10 Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hδ e o UV. 63
A.11 Evolução das cadeias conforme o número de passos para cada parâmetro da simulação da Figura 3.8, que combina o UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ. . 64

Lista de Tabelas

2.1 Valores de referência dos parâmetros de α Eri. 23
2.2 Parâmetros estelares para a grade fotosférica do BeAtlas. 26

3.1 Resultados da simulação que combina UV, Hα, Hβ e Hγ (Figuras 3.8 e 3.9). 43

Sumário

1. Introdução 17
1.1 Estrelas Be: características e modelagem 17
1.2 Objetivos do trabalho 20

2. Materiais e Métodos 23
2.1 Achernar 23
2.2 Dados observacionais 24
2.3 Grade BeAtlas 24
2.4 Pacote BEMCEE e Inferência Bayesiana 26
2.5 Incertezas e correções nos dados 29

3. Resultados e Discussão 31
3.1 Panorama comparativo geral 31
3.2 Combinação de linhas com o UV 34
3.3 Combinação Hα+Hβ+Hγ+UV 40

4. Conclusões 45

Referências 47

Apêndice 51

A. Simulações com EMCEE 53

Capítulo 1

Introdução

A percepção de que as estrelas no céu noturno são como sóis muito distantes, particularmente desde a primeira medida de paralaxe estelar no século XIX e os trabalhos pioneiros de espectroscopia – notadamente a observação por Joseph Fraunhofer de linhas escuras no espectro solar –, transformou completamente a Astronomia. A partir da análise sistemática de espectros estelares e a classificação em tipos espectrais, uma nova porta abriu-se para investigar propriedades de categorias de estrelas. Paralelamente, o conhecimento do caráter eletromagnético da radiação e a descrição quântica da interação da luz com a matéria permitiram atrelar as características observacionais a uma descrição física destes objetos. Não demorou muito, no entanto, para se descobrir que muitas estrelas não são como nosso Sol. Algumas delas desafiam nossa imaginação devido às suas peculiaridades intrínsecas, como as estrelas Be.

1.1 Estrelas Be: características e modelagem

Com alguma generalidade, estrelas Be são classificadas como estrelas não supergigantes que, em algum momento de sua vida, apresentaram linhas da série de Balmer em emissão (definição originalmente apresentada por Jaschek et al. 1981 e complementada por Collins 1987). Tal descrição acaba por incluir outras estrelas com linhas de emissão, como estrelas Herbig (estrelas jovens de tipo espectral A ou B com acréscimo de material circunstelar) e binárias com transferência de massa (ver Rivinius et al., 2013). Por isto, o termo "estrelas Be clássicas" é também utilizado para excluir outras categorias que sejam compatíveis com a definição geral, incorporando as características físicas que as distinguem de outros grupos.

As estrelas Be clássicas[1] apresentam linhas de Balmer em emissão (especialmente em Hα e Hβ) devido à presença de um disco circunstelar puramente gasoso (i.e., sem grãos de poeira). Este disco é formado durante a sequência principal por episódios de ejeção de matéria: o chamado "fenômeno Be" (Rivinius et al., 2013). Porém, o mecanismo responsável por este fenômeno ainda não é totalmente compreendido, constituindo-se um dos problemas em aberto da área.

A dinâmica dos discos, por outro lado, é bem descrita pelo modelo de "Disco de Decréscimo Viscoso" (VDD)[2]. Este modelo, inicialmente proposto por Lee et al. (1991), é compatível com a observação do caráter Kepleriano da velocidade de rotação (velocidade azimutal $v_\phi \propto r^{-1/2}$), no qual a viscosidade tem um papel central em governar o crescimento e dissipação do disco. A aplicação do VDD ao estudo de estrelas Be tem sido bem sucedida em descrever as características observacionais, como mostra a análise multitécnica de Klement et al. (2015), combinando dados polarimétricos, espectroscópicos e interferométricos da estrela β CMi.

Estrelas Be também são notáveis graças à variabilidade intrínseca em diversas escalas de tempo (anos a minutos). Esta variabilidade é perceptível, além das mudanças em perfis de linha, através da fotometria. Assim, o estudo de curvas de luz é uma abordagem possível para vincular características como a viscosidade do disco e a taxa de ejeção de matéria, como realizado por Rímulo et al. (2018) para objetos da Pequena Nuvem de Magalhães. A variabilidade em escalas de tempo menores também está associada a pulsações não-radiais, cuja conexão com o fenômeno Be é uma questão em aberto. Este assunto é explorado em Baade et al. (2016) ao combinar fotometria e espectroscopia, associando modos de pulsação a episódios de perda de massa. No entanto, a compreensão do fenômeno Be, assim como uma descrição completa do disco, é incompleta sem uma caracterização adequada da estrela central e sua fotosfera.

Estrelas Be são a classe de objetos não-degenerados de mais rápida rotação (Townsend et al., 2004). Essa rotação é responsável por um achatamento geométrico, provocando um aumento expressivo do raio no equador ($R_{\rm eq}$) em relação ao raio medido na direção dos polos ($R_{\rm pole}$). Por exemplo, Domiciano de Souza et al. (2003) mediram por interferometria

[1] Deixarei de usar o adjetivo "clássico" a partir daqui.

[2] Em inglês, *Viscous Decretion Disk*, onde *decretion* refere-se ao fato de, diferentemente dos discos de acreção, os discos em estrelas Be serem formados por material proveniente do corpo central.

um achatamento ($R_{\rm eq}/R_{\rm pole}$) de 1.56 ± 0.05 para a estrela α Eridani (HD10144, também conhecida como Achernar). É possível, no entanto, que este achatamento esteja superestimado, devido à presença de um disco residual na época das observações, como discutido por Carciofi et al. (2008). De fato, conforme a aproximação de Roche (Seção 2.3), espera-se um limite de $R_{\rm eq}/R_{\rm pole} = 1.5$ para uma estrela em rotação crítica, i.e., quando a velocidade de rotação no equador se iguala à velocidade de órbita Kepleriana circular (Rivinius et al., 2013).

Uma consequência importante do achatamento é a dependência da temperatura e gravidade superficial com a latitude, dado que no equador a temperatura será menor do que nas regiões polares. Devido à relação crescente entre fluxo e temperatura, a contribuição do equador para o fluxo total da estrela será reduzida, tornando esta região relativamente mais "escura". Este fenômeno – conhecido como escurecimento gravitacional – foi inicialmente descrito por von Zeipel (1924), o qual notou que, em equilíbrio radiativo, uma estrela em rotação possui uma temperatura local ($T_{\rm eff}$) proporcional à raiz quarta da gravidade superficial efetiva ($g_{\rm eff}$). Lucy (1967), por outro lado, deduziu que, para estrelas com camadas sub-fotosféricas convectivas, a proporcionalidade se dá à potência 0.08 da gravidade efetiva. De maneira mais geral, Espinosa Lara e Rieutord (2011) formularam essa relação em termos do coeficiente β de escurecimento gravitacional, tal que

$$T_{\rm eff} \propto g_{\rm eff}^{\beta}\,, \tag{1.1}$$

onde β é uma função da taxa de rotação estelar.

Decorre do escurecimento gravitacional que a determinação da velocidade de rotação equatorial projetada ($v \sin i$) – comumente medida através do alargamento das linhas fotosféricas de absorção –, pode ser subestimada caso se adote uma relação linear entre a velocidade de rotação e a largura de uma dada linha (Townsend et al., 2004). Métodos de determinação da velocidade de rotação de estrelas tipo A (Royer et al., 2002) são, de modo geral, baseados na medida da largura à meia altura (FWHM)[3] e comparados com um catálogo de $v \sin i$, como o elaborado por Slettebak et al. (1975). Outra abordagem possível é aplicar uma deconvolução no perfil de linha, separando-o em um perfil devido ao alargamento intrínseco e outro devido ao alargamento Doppler, obtendo a velocidade de rotação a partir deste último. Ambos os métodos, no entanto, são inadequados para

[3] Do inglês, *full width at half maximum*.

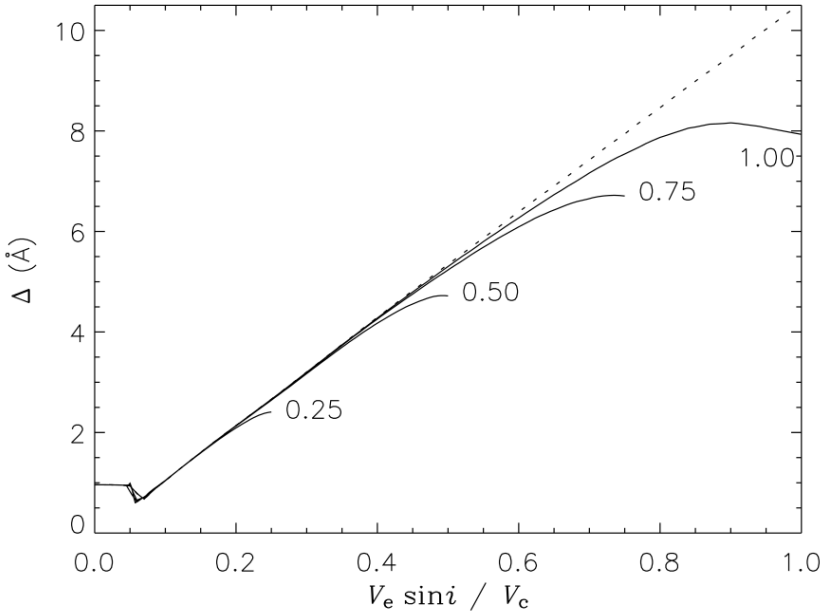


Figura 1.1: Largura característica (Δ) da linha He I λ4471, em função da taxa de rotação, para quatro diferentes valores de $\sin i$ (0.25, 0.5, 0.75 e 1.00). A linha pontilhada corresponde ao modelo no qual a estrela permanece esférica e uniforme na temperatura e em gravidade superficial. Gráfico extraído de Townsend et al. (2004).

estrelas de alta rotação, como as estrelas Be. Townsend et al. (2004) discutem que, para rotações próximas à velocidade crítica, a largura da linha é pouco sensível a mudanças na taxa de rotação, como é possível ver na Figura 1.1, extraída do mesmo artigo. Por conta da região equatorial possuir a velocidade rotacional mais elevada, maior deveria ser sua contribuição para o alargamento da linha. Contudo, como o escurecimento gravitacional reduz a temperatura e, portanto, o fluxo emitido nesta região, a menor contribuição das regiões de alta rotação reduz a largura observada da linha. Assim, um viés sistemático pode ser introduzido na direção de rotação subcrítica se o escurecimento gravitacional não é devidamente levado em consideração na modelagem.

1.2 Objetivos do trabalho

Para caracterizar uma estrela em rotação são necessários ao menos quatro parâmetros físicos (tais como o raio medido na direção dos polos, $R_{\rm pole}$, e sua temperatura efetiva, a massa e a taxa de rotação), além da inclinação do objeto relativamente ao observador (Rivinius et al., 2013). Contrasta-se a isto a necessidade de tipicamente dois parâmetros para estrelas sem rotação (como a temperatura efetiva e gravidade superficial, $\log g$), devido

à ausência de escurecimento gravitacional e achatamento rotacional. Em consequência, a tarefa de determinação de parâmetros de estrelas Be ocorre em um espaço de maior dimensionalidade, exigindo o uso de métodos capazes de inferir um conjunto grande de parâmetros de maneira eficiente.

Mota (2019) e Rubio (2019) desenvolveram um método com o qual, a partir de um conjunto de observações (espectros e dados de polarização), é possível realizar a determinação simultânea de um conjunto de parâmetros de estrelas Be, sejam relativos ao disco (como densidade e raio) ou relativos à estrela em si (massa, taxa de rotação e idade). Para isto, são utilizadas simulações de Monte Carlo via cadeia de Markov (MCMC) e um conjunto de modelos sintéticos pré-computados (a grade BeAtlas, Seção 2.3), obtendo-se a distribuição de probabilidade dos parâmetros numa abordagem Bayesiana. Esta abordagem permite, além disso, utilizar *priores* informativos (tais como a distância e a velocidade de rotação projetada, $v \sin i$). Contudo, no trabalho de Mota (2019) só foi implementado o ajuste da distribuição de energia espectral (SED[4]), do ultravioleta ao rádio. Assim, o presente trabalho estende esse método para incluir, na grade de modelos, o perfil de linhas fotosféricas do hidrogênio, ampliando o conjunto de observáveis que permitam melhor caracterizar a estrela central.

Um dos resultados encontrados por Mota (2019) foi uma alta correlação entre parâmetros estelares e do disco, particularmente percebendo que características do disco são melhor vinculadas quando há um bom conhecimento sobre a estrela em si. A inclusão de linhas de absorção, por sua vez, permite ampliar este conhecimento por ser uma fonte de informação diretamente da fotosfera. Além disso, pelo perfil de linha ser um indicativo da taxa de rotação estelar, a metodologia permite que não seja necessária a utilização de $v \sin i$ como uma informação *a priori* em nossa inferência – a qual pode estar sujeita a erros sistemáticos, como discutido previamente.

O principal objetivo deste trabalho é a investigação sobre o papel que a inclusão de linhas do hidrogênio possui na redução das incertezas dos parâmetros inferidos. Assim, busca-se determinar qual a melhor combinação de linhas com a SED para caracterizar estrelas Be. Como principal foco de estudo, a metodologia foi aplicada à estrela α Eri, com a qual é possível comparar os resultados com os valores publicados na literatura e avaliar as qualidades e limitações dessa abordagem.

[4] Do inglês, *Spectral Energy Distribution*.

No Capítulo 2 é apresentada em detalhes a metodologia utilizada e, em seguida, são discutidos os resultados obtidos no Capítulo 3. Por fim, conclui-se com as as principais considerações e perspectivas de continuidade no Capítulo 4.

Capítulo 2

Materiais e Métodos

Neste capítulo são apresentadas as características da estrela estudada, os dados utilizados, os modelos computacionais e o pacote estatístico para realizar a inferência dos parâmetros.

2.1 Achernar

Como objeto de estudo, adotou-se a estrela Achernar (α Eri, HD10144). Esta escolha está apoiada no fato de ser uma estrela Be muito pesquisada na literatura (e.g. Domiciano de Souza et al. 2003; Vinicius et al. 2006; Rivinius et al. 2013; Domiciano de Souza et al. 2014) e seus parâmetros serem relativamente bem conhecidos (os valores de referência adotados constam na Tabela 2.1). Um destaque é o trabalho de Domiciano de Souza et al. (2014), que utilizou dados de interferometria para ajustar modelos fotosféricos com o pacote `emcee` (Seção 2.4), obtendo do ajuste o ângulo de inclinação e o achatamento (razão entre raio medido no equador e no polo da estrela), como mostra a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Valores de referência dos parâmetros de α Eri. $R_{\rm eq}/R_{\rm pole}$ corresponde à razão entre o raio medido no equador e no polo, W a taxa de rotação, definida na Seção 2.3, e i é o ângulo de inclinação da estrela medido a partir do polo. W foi calculado a partir da Equação 2.1.

Parâmetro	**Valor de referência**	**Fonte**
Massa ($M_\odot$)	6.1	Harmanec (1988)
$R_{\rm eq}/R_{\rm polo}$	1.352	Domiciano de Souza et al. (2014)
W	0.84	Domiciano de Souza et al. (2014)
i (°)	$60.6^{+7.1}_{-3.9}$	Domiciano de Souza et al. (2014)
Distância (pc)	42.75	van Leeuwen (2007)

2.2 Dados observacionais

Na análise, foram utilizados dois tipos de dados: espectros do ultravioleta (UV) do satélite IUE[1] e um espectro de alta resolução do espectrógrafo FEROS[2] para as linhas do hidrogênio, normalizado em relação ao contínuo. É importante para o objetivo de inferir parâmetros da estrela que os dados correspondam a uma fase sem disco, particularmente para o espectro em alta resolução. Isto porque queremos modelar o perfil puramente fotosférico das linhas (utilizando modelos sem disco); desta forma, é desejável que não haja emissão. Neste sentido, para os dados de linhas, consideramos o espectro de 11 de janeiro de 2000 como o espectro de referência fotosférica. Isto está de acordo com Domiciano de Souza et al. (2014), seguindo a análise realizada por Rivinius et al. (2013) sobre a variabilidade fotosférica das linhas do hidrogênio em Achernar, que identificaram nas observações de 2000 a inexistência de emissão em Hα, sugerindo a ausência de qualquer disco detectável.

Em relação aos dados do UV, foram adotadas observações do ano de 1989, seguindo a análise feita por Vinicius et al. (2006), que aponta a emissão desprezível em Hα neste ano (Figura 2.1). De fato, a presença de um disco, quando tênue, tem pouca influência no fluxo do ultravioleta, pois a radiação absorvida pelo gás circunstelar é reprocessada e reemitida em comprimentos de onda maiores. Vieira et al. (2015) desenvolveram um modelo de emissão do contínuo para o disco, mostrando que a emissão comporta-se como uma pseudofotosfera, cujo raio efetivo cresce em conjunto com o comprimento de onda emitido. Assim, para comprimentos de onda menores, como o UV, o tamanho da pseudofotosfera é reduzido, resultando em uma menor contribuição do disco para o fluxo total nesses intervalos.

2.3 Grade BeAtlas

Ao longo dos anos, uma extensa grade de modelos estelares – denominada BeAtlas – tem sido construída a partir do código de transporte radiativo HDUST (Carciofi e Bjorkman, 2006), cobrindo o espaço de parâmetros relevante ao estudo de estrelas Be. Esta grade é subdividida em um conjunto de modelos fotosféricos (utilizada neste trabalho) e outro

[1] "*International Ultraviolet Explorer*", em operação entre 1978 e 1996.

[2] "*Fiberfed Extended Range Optical Spectograph*" utilizado no telescópio de 1,52 m em La Silla (ESO).

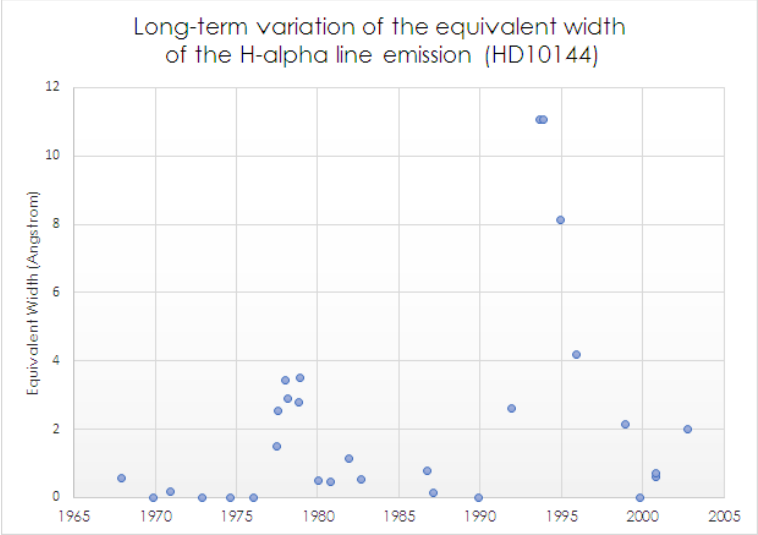


Figura 2.1: Evolução temporal da largura equivalente (EW) da linha Hα em emissão para a estrela α Eri. Dados digitalizados da Figura 15 de Vinicius et al. (2006).

conjunto contendo modelos com disco circunstelar. Em relação à grade fotosférica, ela é constituída por 550 modelos, dados pela combinação de diferentes valores de massa, taxa de rotação e idade, computados para 10 valores de inclinação (como descrito na Tabela 2.2), o que resulta em um total de 5500 espectros teóricos. A taxa de rotação W é definida como $v_{\rm eq}/v_{\rm orb}$, onde $v_{\rm eq}$ é velocidade de rotação no equador e $v_{\rm orb}$ a velocidade orbital nesta região (i.e., a velocidade de uma partícula para, no equador, realizar uma órbita Kepleriana circular). Desta forma, a "rotação crítica" ocorre quando estas velocidades se igualam, tornando $W = 1$. A idade, por sua vez, é medida como a fração do tempo de vida, t, e o tempo de vida total na sequência principal, $t_{\rm ms}$.

Nossos modelos supõem a aproximação de Roche[3], o que significa que a estrela é descrita por uma rotação rígida e sua forma determinada por uma superfície equipotencial (dada pelo equilíbrio entre a força gravitacional e a força centrífuga no referencial da estrela). Neste modelo, é possível obter uma relação entre a velocidade de rotação e o achatamento da estrela (Rímulo et al., 2018),

$$\frac{R_{\rm eq}}{R_{\rm pole}} = 1 + 0.5W^2\,. \tag{2.1}$$

Para gerar os modelos, o código HDUST necessita de cinco parâmetros de entrada: a massa, taxa de rotação, raio medido no polo, luminosidade e expoente β do escurecimento gravitacional (Equação 1.1). Contudo, é possível ganhar eficiência computacional

[3] Uma descrição detalhada sobre o modelo pode ser encontrada em Kopal (1987).

Tabela 2.2 - Parâmetros estelares para a grade fotosférica do BeAtlas, onde $W = v_{\rm eq}/v_{\rm orb}$ é a razão entre a velocidade de rotação no equador e a velocidade orbital nesta região, $t/t_{\rm ms}$ é a fração do tempo gasto na sequência principal e i é a inclinação a partir do polo da estrela.

Parâmetros	**Lista de valores**
Massa ($M_\odot$)	1.7, 2, 2.5, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 20
W	0.00, 0.33, 0.47, 0.57, 0.66, 0.74, 0.81, 0.87, 0.93, 0.99
$t/t_{\rm ms}$	0, 0.25, 0.5, 0.75, 1
$\cos i$	0, 0.11, 0.22, 0.33, 0.44, 0.55, 0.66, 0.77, 0.88, 1.0

reduzindo o número de parâmetros físicos na grade final. Assim, foram adotados vínculos teóricos para relacionar alguns parâmetros. Conforme Espinosa Lara e Rieutord (2011), é possível obter o expoente β a partir do achatamento, o qual se relaciona com a taxa de rotação através da Equação 2.1. Além disso, são utilizados os modelos de estrutura e evolução estelar de Geneva (Ekström et al., 2008; Georgy et al., 2013; Granada et al., 2013). Com estes modelos, é possível relacionar o raio medido no polo e luminosidade com a massa e a taxa de rotação, permitindo caracterizar as estrelas Be apenas com três parâmetros (massa, taxa de rotação e idade).

Por fim, em cada um dos modelos é calculado o espectro sintético da estrela. O BeAtlas cobre diversos intervalos da distribuição de energia espectral (SED), mas para o presente trabalho apenas a região do UV (no intervalo $0.1 - 0.35\,\mu$m) e as linhas Balmer Hα, Hβ, Hγ e Hδ estão sendo utilizadas, pois são os observáveis disponíveis mais relevantes para caracterizar a fotosfera. Na Figura 2.2 é possível visualizar uma amostra de espectros teóricos de Hα para diferentes valores de massa. As linhas foram computadas num intervalo de $\pm 2500\,{\rm km\,s^{-1}}$ em relação ao comprimento de onda central com resolução espectral $R = \lambda/\Delta\lambda = 20000$, utilizando as instalações do Laboratório de Astroinformática (LAi-IAG)[4].

2.4 Pacote BEMCEE e Inferência Bayesiana

A conexão entre os dados observacionais e a grade de modelos do BeAtlas é feita pela abordagem Bayesiana. A partir de um conjunto de parâmetros, θ, o teorema de Bayes afirma a proporcionalidade entre a probabilidade dos parâmetros condicional aos dados observacionais (também chamada de probabilidade posterior, $p(\theta|dados)$, ou simplesmente

[4] Veja `https://lai.iag.usp.br/` para mais informações sobre os equipamentos.

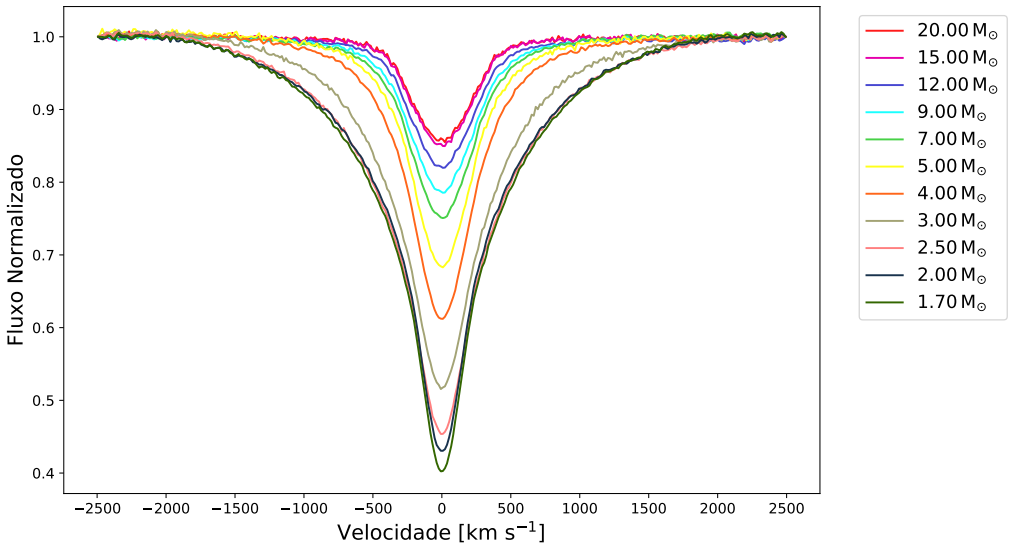


Figura 2.2: Amostra de espectros sintéticos para a linha Hα, variando a massa da estrela e fixando a taxa de rotação em $W = 0.74$, inclinação em $\cos i = 0.33$ e idade em $t/tms = 1.00$. Note o aumento da força da linha para massas menores (tipos espectrais próximos a A0).

posterior) com a verossimilhança, $p(dados|\theta)$. A relação entre estas grandezas é dada pela probabilidade *a priori* – ou *prior*, $p(\theta)$ – e a probabilidade incondicional dos dados, $p(dados)$, ou evidência, que atua, para nossos propósitos, como uma constante de normalização. Em termos matemáticos,

$$p(\theta|dados) = \frac{p(dados|\theta) \cdot p(\theta)}{p(dados)} \,. \tag{2.2}$$

Assim, a inferência Bayesiana consiste em conhecer a probabilidade posterior a partir de uma função de verossimilhança e qualquer conhecimento prévio existente sobre os parâmetros. Para isto, a amostragem da probabilidade posterior é feita pelo pacote estatístico em Python `emcee`[5] (Foreman-Mackey et al., 2013). Este código implementa uma simulação de Monte Carlo via cadeia de Markov (MCMC) amostrando a probabilidade posterior através de um algoritmo análogo ao de Metropolis-Hastings[6], com o diferencial de ser computacionalmente mais eficiente e permitir a paralelização da simulação das cadeias.

Essencialmente, o programa `emcee` inicializa um conjunto de *walkers* no espaço de parâmetros: cada um deles parte de uma escolha aleatória do conjunto de parâmetros e constitui um processo estocástico que "caminha" a cada iteração. Isto é, um novo conjunto

[5] Documentação disponível em `https://emcee.readthedocs.io/en/stable/`.

[6] Uma introdução a este algoritmo clássico pode ser encontrada em Chib e Greenberg (1995).

de parâmetros é sorteado e a decisão de aceitar ou rejeitar a nova posição do *walker* é dada pela geração de números aleatórios e um critério de comparação associado à probabilidade posterior. Este procedimento constrói um passeio aleatório enviesado, com a característica de uma cadeia de Markov (a probabilidade da escolha do próximo conjunto de valores depende da posição atual e não do caminho percorrido até então). Após um grande número de iterações, tem-se a convergência dessas cadeias, constituindo uma amostragem estatisticamente significativa da probabilidade posterior. A partir dela é possível calcular valores esperados e estimar a incerteza dos parâmetros.

Para utilizar esses procedimentos, foram desenvolvidos por Mota (2019) e Rubio (2019) um programa em Python que estrutura a leitura dos arquivos de dados, dos modelos e a inicialização do `emcee`, fornecendo a forma funcional da verossimilhança e probabilidade *a priori* para viabilizar a simulação de MCMC. Este pacote, ao qual nos referimos como BEMCEE, foi adaptado neste trabalho para se tornar compatível com a grade fotosférica e realizar a inferência usando o conjunto de linhas fotosféricas. De maneira geral, a função verossimilhança, que realiza a comparação entre as observações e modelos, foi definida da seguinte forma,

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{\log F_{\rm obs} - \log F_{\rm mod}}{\sigma \log F_{\rm obs}} \right)^2 , \tag{2.3}$$

onde $F_{\rm obs}$ corresponde ao fluxo observado, enquanto o índice *mod* refere-se aos modelos interpolados para o conjunto de parâmetros de um dado *walker* e $\sigma \log F$ são as incertezas do logaritmo das observações.

No entanto, ao combinar diferentes observáveis, a simples soma do χ^2 correspondente à linha com o calculado para o UV, por exemplo, poderia atribuir um peso excessivo ao ajuste da linha. Afinal, com um número maior de pontos, seu χ^2 seria naturalmente maior. Para lidar com isso, os χ^2 de diferentes observáveis são ponderados pelo número de pontos, N, de cada um, de modo que a função de verossimilhança final é constituída pela soma de χ^2 reduzidos,

$$\chi^2 = (\frac{\chi^2_{UV}}{N_{UV}} + \frac{\chi^2_{H\alpha}}{N_{H\alpha}} + \frac{\chi^2_{H\beta}}{N_{H\beta}} + \frac{\chi^2_{H\gamma}}{N_{H\gamma}} + \frac{\chi^2_{H\delta}}{N_{H\delta}}) * (N_{UV} + N_{H\alpha} + N_{H\beta} + N_{H\gamma} + N_{H\delta}). \tag{2.4}$$

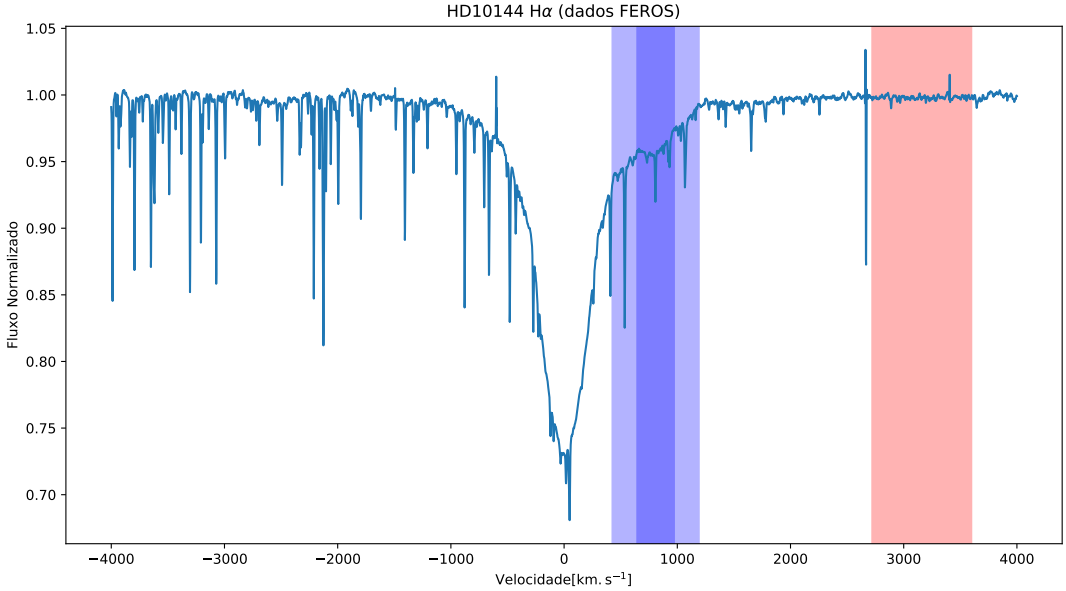


Figura 2.3: Perfil observado da linha Hα para a estrela Achernar contendo uma densidade grande de linhas telúricas. A região em vermelho corresponde ao trecho do contínuo usado para estimar a incerteza dos dados, cujo critério foi escolher uma região suficientemente próxima da linha que não apresentasse muitas linhas telúricas. Nota-se também no espectro alguns picos de emissão, possivelmente devidos a raios cósmicos. A região azul corresponde às linhas C II λ6578.1 e λ6582.9, removida das simulações.

2.5 *Incertezas e correções nos dados*

Nas simulações com perfil de linha, é necessário estimar previamente a incerteza do fluxo normalizado, pois esta não estava disponível no espectro FEROS utilizado. Assim, foi escolhida uma região do contínuo próxima à linha, como ilustra a região em vermelho da Figura 2.3 no caso de Hα. Neste intervalo, então, foi realizado um ajuste de uma lei de potências, que foi subtraída do espectro observado. A partir do desvio padrão dos resíduos, obtivemos uma medida de flutuação do fluxo normalizado, interpretada como a incerteza dos dados. O resultado foi uma incerteza da ordem de 0.20% por elemento de comprimento de onda.

Uma dificuldade para o uso do espectro em Hα foi a constatação de que as observações fotosféricas disponíveis estão expressivamente afetadas pela presença de linhas telúricas, como visto na Figura 2.3. Por conta destas características não fazerem parte de nossos modelos, foi necessário removê-las previamente sem afetar o perfil fotosférico original. De fato, tentativas de realizar a simulação de MCMC com a presença da absorção telúrica resultaram, por exemplo, em um viés para menores valores da taxa de rotação. Como

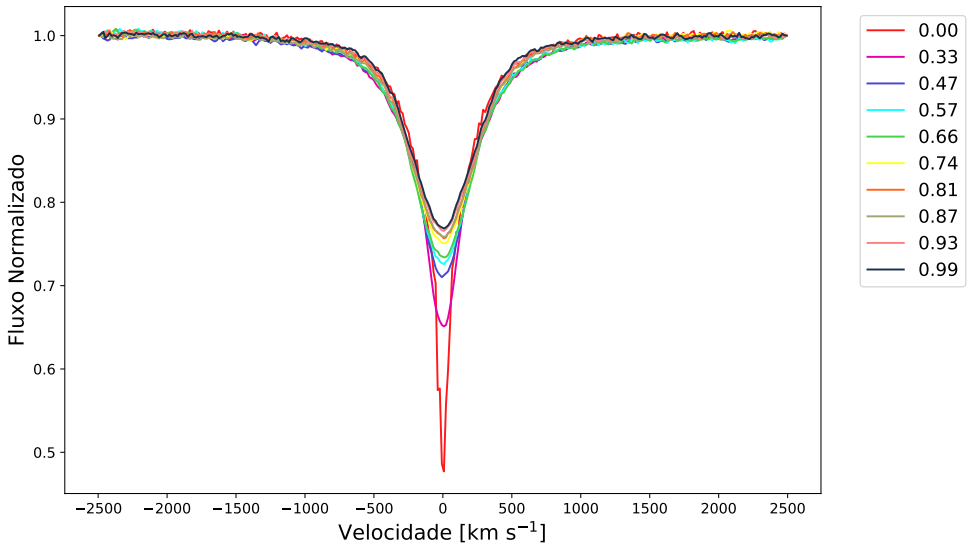


Figura 2.4: Amostra de espectros sintéticos para a linha Hα, variando a taxa de rotação W da estrela (entre 0 e 0.99) e fixando a massa em $M = 7\,\mathrm{M}_\odot$, a inclinação em $\cos i = 0.33$ e aidade em $t/tms = 1.00$. O perfil de linha é bastante insensível para $W > 0.66$.

é possível notar na Figura 2.4, a profundidade no centro da linha cresce, em relação ao contínuo, para taxas de rotação menores. A absorção telúrica próxima ao centro de Hα (Figura 2.3), portanto, provoca um pequeno viés para rotações mais lentas – o que é incompatível com o esperado para a estrela Achernar. A remoção destas linhas foi realizada por um método que identifica pontos a uma distância maior que 5σ da mediana, em uma caixa móvel, iterativamente retirando-os. Trata-se, assim, de um método de remoção de *outliers* para um conjunto de dados ordenados, denominado de *sigma-clip*.

Na Figura 2.3 também é perceptível uma absorção adicional na região da asa (faixa azul). Isto se deve à presença de duas linhas de C II. Como os modelos utilizados consideram apenas o hidrogênio como fonte de opacidade e trata-se de um pequeno intervalo em comprimento de onda, optou-se também por remover esta região dos espectros ajustados. Nos testes realizados, isto melhorou sensivelmente os resultados, colocando os valores de massa, taxa de rotação e idade mais próximos dos valores de referência, como mostra a Figura A.3 no Apêndice. Assim, o procedimento foi adotado em todas as simulações seguintes.

Capítulo 3

Resultados e Discussão

Nesta seção são apresentados e discutidos os principais resultados da inferência de parâmetros da estrela α Eri. Inicialmente, expõe-se um resumo das simulações feitas, com as principais descobertas e conclusões. Em seguida, são detalhadas as simulações que combinam uma linha com o ultravioleta, finalizando com a simulação que produziu a melhor inferência dos parâmetros.

3.1 Panorama comparativo geral

Considerando cinco diferentes observáveis (a SED do UV e quatro linhas fotosféricas do hidrogênio), existem 31 formas de combiná-los em simulações. Porém, para não sobrecarregar a análise, apenas uma parcela destas possibilidades foi selecionada.

Em geral, as simulações foram feitas com 100 *walkers* e 5000 passos (com 1000 passos a mais de uma fase de queima, ou *burn-in*[1]). Tais valores foram considerados adequados em termos de convergência das cadeias e obtenção de um número suficiente de amostras. Além disso, esta consistência permite uma comparação mais direta entre os resultados. No entanto, para a combinação do UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ foi realizada uma simulação mais longa, tomando 25000 passos. A combinação destes observáveis produziu os melhores resultados em termos de precisão e acurácia, de modo que uma simulação mais longa foi adotada para assegurar a confiança estatística na inferência. Detalhes podem ser encontrados na Seção 3.3.

Cada simulação tem como resultado a geração de amostras da probabilidade posterior, a partir das quais a marginalização produz as distribuições de cada parâmetro do modelo

[1] Exploração inicial do espaço de parâmetros pelos *walkers*, para fins de convergência, descartada da amostragem.

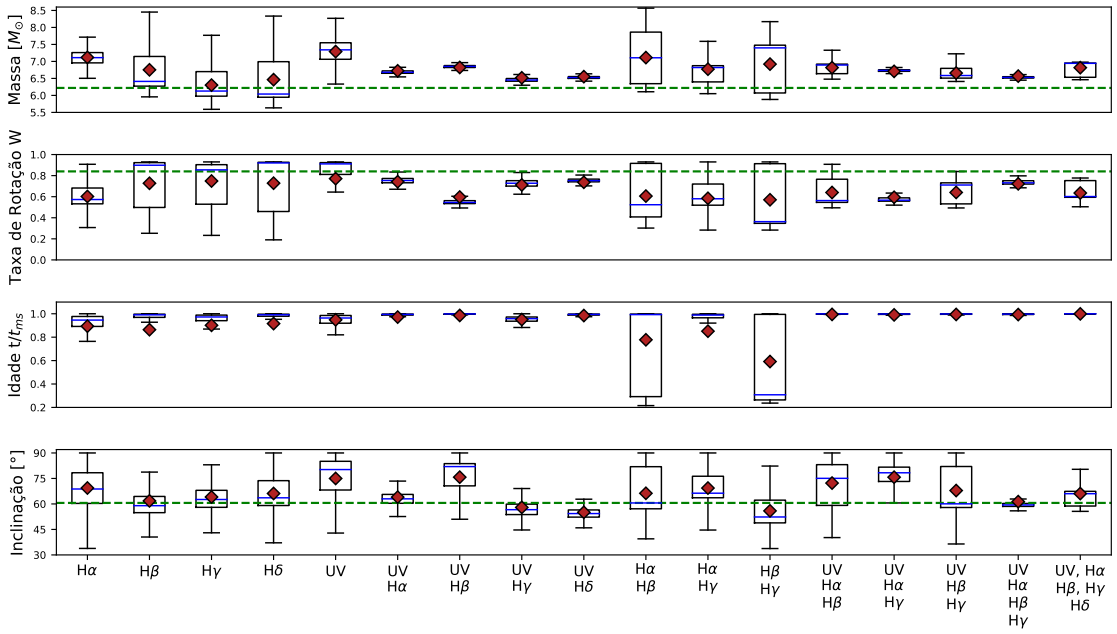


Figura 3.1: Diagramas de caixa para as simulações de MCMC realizadas. Na figura, cada coluna corresponde a uma simulação distinta para diferentes combinações de observáveis. Por sua vez, as linhas são relativas a cada parâmetro (massa, taxa de rotação W, idade t/t_{ms}, inclinação) e as caixas representam as distribuições. O traço azul corresponde ao valor da mediana, enquanto o losango representa a posição da média. Por fim, a linha verde tracejada corresponde aos valores de referência conforme a Tabela 2.1.

separadamente. Um resumo destas distribuições encontra-se nos diagramas de caixa da Figura 3.1. Em cada diagrama, os limites da caixa são definidos pelo primeiro e terceiro quartis da distribuição, enquanto os segmentos de reta verticais correspondem aos limites da distribuição dentro de um intervalo de 1.5 vezes a distância interquartil[2]. Também estão representados os valores de referência (Tabela 2.1) nas linhas verdes tracejadas e os valores médios e medianos no losango vermelho e traço azul, respectivamente. Os diagramas, assim, são melhor aproveitados em uma comparação qualitativa da posição e largura de cada distribuição.

Pode-se notar que a combinação das linhas com o UV, em geral, reduz as incertezas nos parâmetros, produzindo distribuições menos alargadas. Também há um ganho de acurácia, em particular para a massa, que é mais notável em comparação com as simulações que usam o UV e Hα separadamente. No entanto, a combinação de linhas entre si, sem informações sobre o contínuo, resulta em distribuições mais alargadas e até de múltiplos picos. É o caso das simulações que combinam duas linhas, como Hα+Hβ e Hα+Hγ (ver

[2] Diferença entre o primeiro e terceiro quartis.

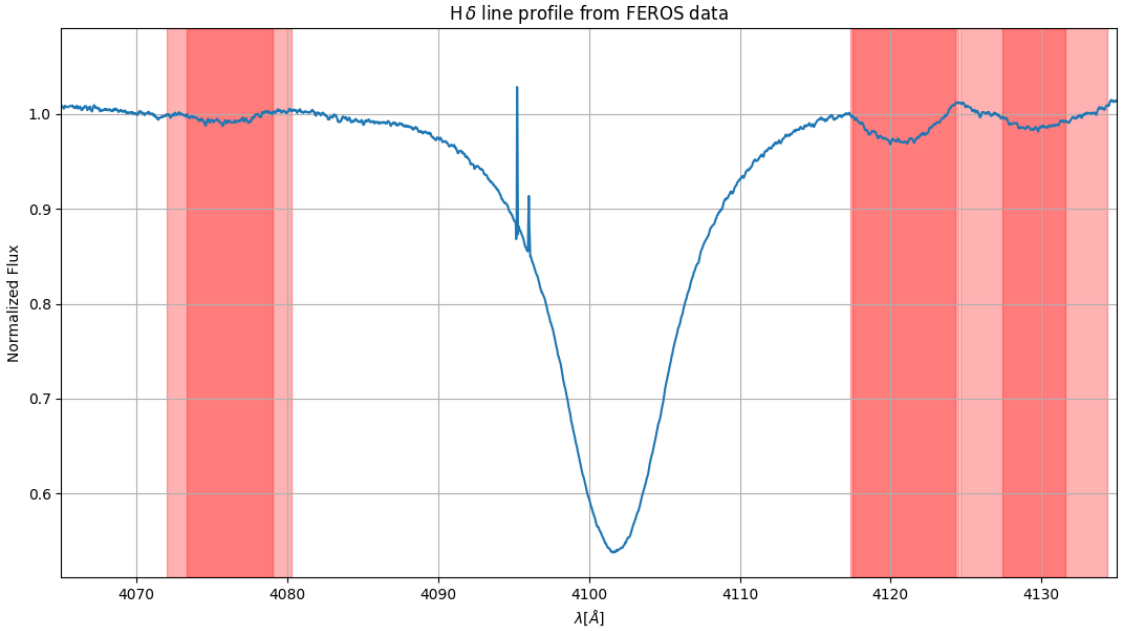


Figura 3.2: Observação da linha Hδ no intervalo de comprimento de onda compatível com os modelos BeAtlas. As regiões vermelhas indicam os intervalos com linhas metálicas de absorção (Si II λ4075.5, λ4076.8 e λ4130.9; He I λ4120.8 e λ4121).

Apêndice, Figuras A.1 e A.2), nas quais os parâmetros W e $t/t_{\rm ms}$ estão distribuídos em diversas regiões disjuntas, ao invés de pertencerem a uma distribuição unimodal. Esta degenerescência (diversos modelos compatíveis com dada observação) não é incomum para ajustes de linha, pois o perfil fotosférico de uma estrela em alta rotação com escurecimento gravitacional pode ser pouco sensível a variações em W, como sugere a Figura 2.4. Além disso, as simulações com Hβ e Hγ, individualmente, resultam em taxas de rotação maiores do que a obtida com Hα, apesar da maior incerteza.

Em geral, as simulações foram consistentes em indicar um estágio evolutivo próximo ao fim da sequência principal para a estrela α Eri e também uma inclinação compatível com o valor de referência. Como mencionado, os melhores resultados foram obtidos na combinação UV+Hα+Hβ+Hγ em termos de precisão e acurácia. Neste caso, a inclusão de mais uma linha, Hδ, não representou nenhum ganho visível, por conta do perfil observado – em particular nas regiões de asa –, conter a absorção de linhas metálicas alargadas pela rotação, como mostra a Figura 3.2. Diferentemente do caso com Hα, a remoção destas regiões não foi realizada, pois um intervalo grande da linha seria perdido.

3.2 Combinação de linhas com o UV

Para melhor demonstrar o impacto da inclusão de linhas fotosféricas na inferência bayesiana, apresentam-se inicialmente os resultados utilizando apenas a informação do ultravioleta, na Figura 3.3. Trata-se de um *corner plot*, o qual contém as distribuições marginais de probabilidade dos parâmetros. Na diagonal principal constam as distribuições marginais em uma dimensão, enquanto as outras caixas apresentam as correspondentes distribuições em duas dimensões para pares de parâmetros. As linhas vermelha e azul correspondem aos valores médio e a mediano, respectivamente. Por fim, as incertezas (indicadas pelas linhas verticais tracejadas) referem-se à região de 68% de maior densidade do posterior (*highest posterior density region*, HPD). Isto é, trata-se do menor intervalo que contém 68% da distribuição. Os valores acima dos histogramas, portanto, representam a mediana do HPD e os limites superior e inferior do intervalo. Nos testes realizados, o HPD trouxe uma melhor representação das distribuições, em comparação com a mediana, pois tende a centralizar o intervalo nas proximidades do pico de probabilidade, mesmo em distribuições assimétricas.

A Figura 3.3 revela que a maioria dos parâmetros possui distribuições alargadas, em particular a massa, idade, inclinação e distância. Além disso, a inclinação ($84^{\circ}{}^{+6}_{-11}$) e massa ($7.41^{+0.29}_{-0.36}\,\mathrm{M}_{\odot}$) não estão com boa acurácia, dado que os valores esperados (Tabela 2.1) são menores que os obtidos. Como o valor de referência da inclinação é baseado em estudos interferométricos (Domiciano de Souza et al., 2014), a discrepância é um sinal de alerta de que os outros parâmetros devem ter sido afetados por correlações implícitas. Nota-se, por exemplo, que, apesar da pequena incerteza para a taxa de rotação ($W = 0.920^{+0.010}_{-0.068}$), existe uma correlação entre inclinações menores que 80° e taxas de rotação menores que 0.90, segundo a distribuição bidimensional na Figura 3.3.

Assim, a perda de acurácia devida a parâmetros pouco vinculados reflete na qualidade do ajuste, indicado no canto superior direito da Figura 3.3. A partir de uma seleção aleatória de modelos da distribuição posterior, é possível notar que há um grande espalhamento nos resíduos, inclusive com alguns modelos estando sistematicamente acima das observações.

A adição de Hα na inferência resolve muitas destas questões, melhor vinculando os modelos da região ultravioleta aos dados. Como se vê na Figura 3.4, o valor da massa

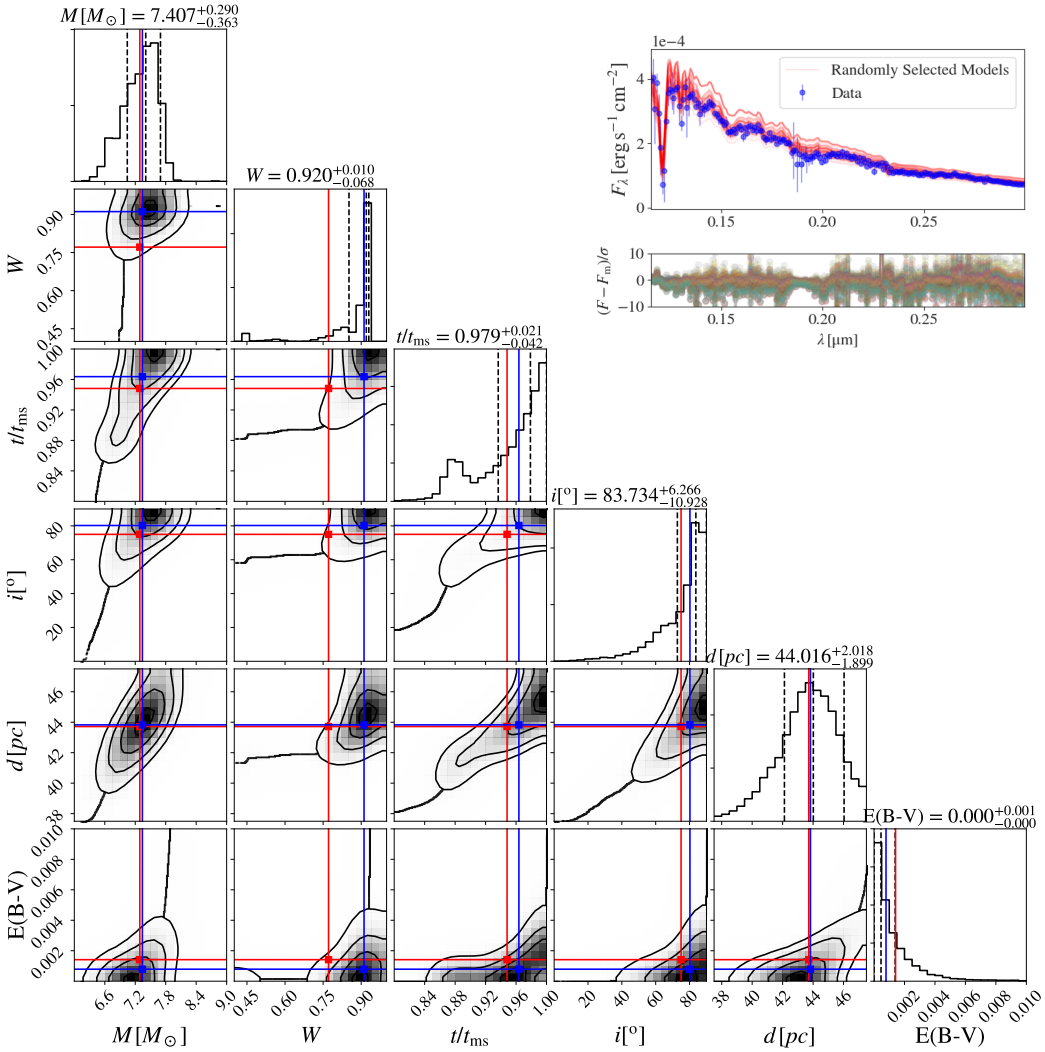


Figura 3.3: Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados do UV. Valores dos parâmetros correspondem ao ponto central do HPD e a incerteza é dada pelo intervalo de confiança de 68%. Além disso, as linhas azul e vermelha indicam os valores mediano e médio das distribuições. Por fim, no canto superior direito, apresenta-se uma seleção aleatória de modelos sobreposta às observações, com os correspondentes resíduos.

converge para $6.673^{+0.053}_{-0.050}\,\mathrm{M}_\odot$, o que não apenas reflete um ganho de acurácia em relação aos valores de referência, mas também um ganho substancial em precisão, com as incertezas diminuindo em uma ordem de grandeza em relação à simulação apenas com o contínuo. O mesmo ocorre para o parâmetro de distância que, vale ressaltar, é vinculado apenas pela SED do UV. Além disso, a inclinação passa a ser compatível com a referência de $60.6^{\circ}{}^{+7.1}_{-3.9}$ (Domiciano de Souza et al., 2014), o que possivelmente contribuiu para a convergência da taxa de rotação em um patamar mais baixo, de $0.752^{+0.029}_{-0.031}$.

Quando se compara o ajuste do UV entre as Figuras 3.3 e 3.4, é perceptível o aumento de qualidade, com um espalhamento menor dos resíduos e sem um comportamento sistemático

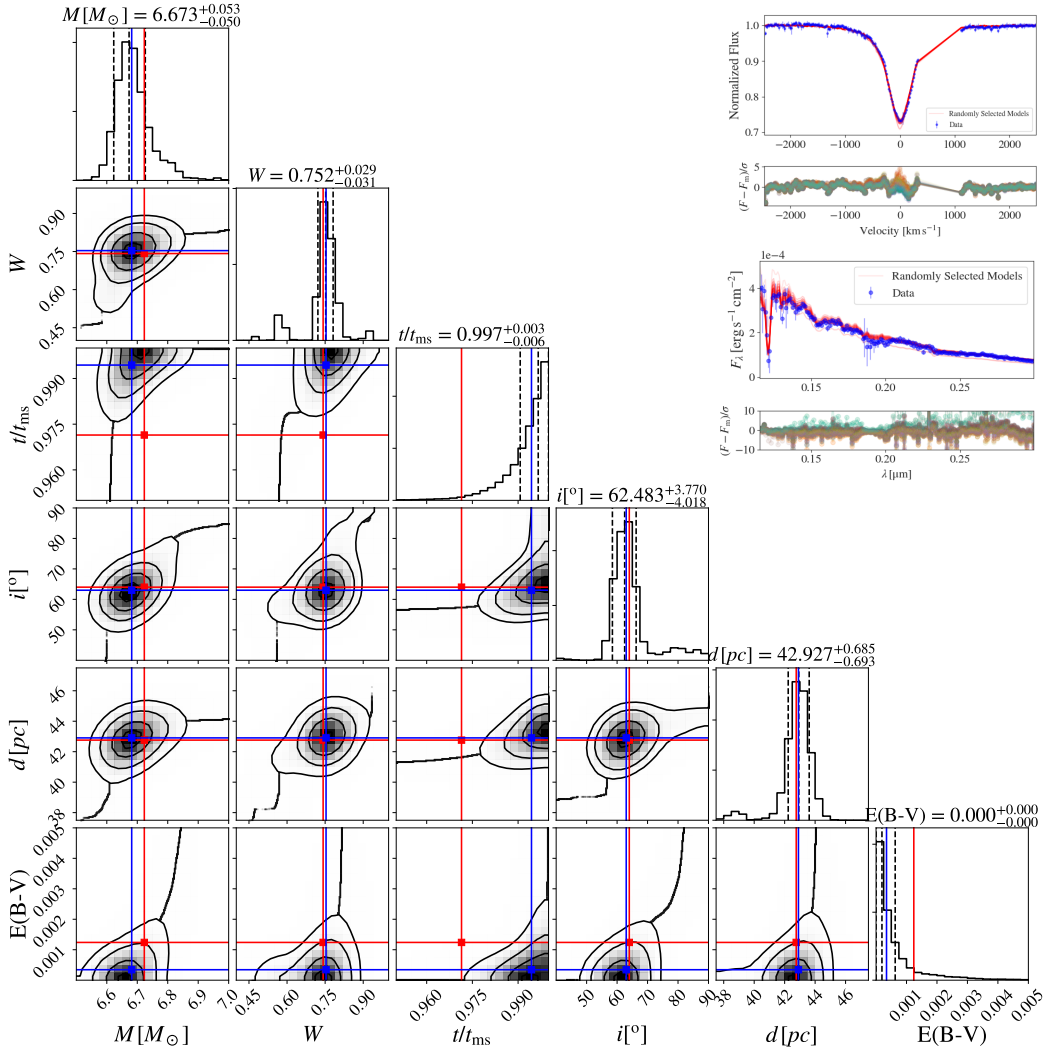


Figura 3.4: Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados da linha Hα e do UV. Valores dos parâmetros correspondem ao ponto central do HPD e a incerteza é dada pelo intervalo de confiança de 68%. Além disso, as linhas azul e vermelha indicam os valores mediano e médio das distribuições. Por fim, no canto direito, mostra-se o ajuste de uma seleção aleatória de modelos com os resíduos abaixo sobrepostos.

nos modelos. Pelo fato dos modelos extraídos aleatoriamente não diferirem muito entre si – tanto no ajuste da linha quanto do UV –, há indícios de que a cadeia de MCMC está suficientemente convergida. Por fim, nos resíduos de Hα na Figura 3.4 há uma estrutura em forma de "w" na região central da linha, indicando uma sistemática nos modelos utilizados. Esta estrutura também está presente nas outras linhas e provavelmente se deve às simplificações do modelo adotado.

O principal sucesso desta simulação e contribuição em relação ao trabalho prévio de Mota (2019) e Rubio (2019) consiste em vincularmos parâmetros como a inclinação, massa e distância sem o uso de *priores* informativos. Tipicamente, simulações com o UV e outras

regiões do contínuo dependiam do uso de *priores* gaussianos para $v \sin i$ e a inclinação. Agora, é possível utilizarmos a informação das linhas fotosféricas no lugar destes *priores* – o que é particularmente útil quando uma estrela desconhecida for estudada.

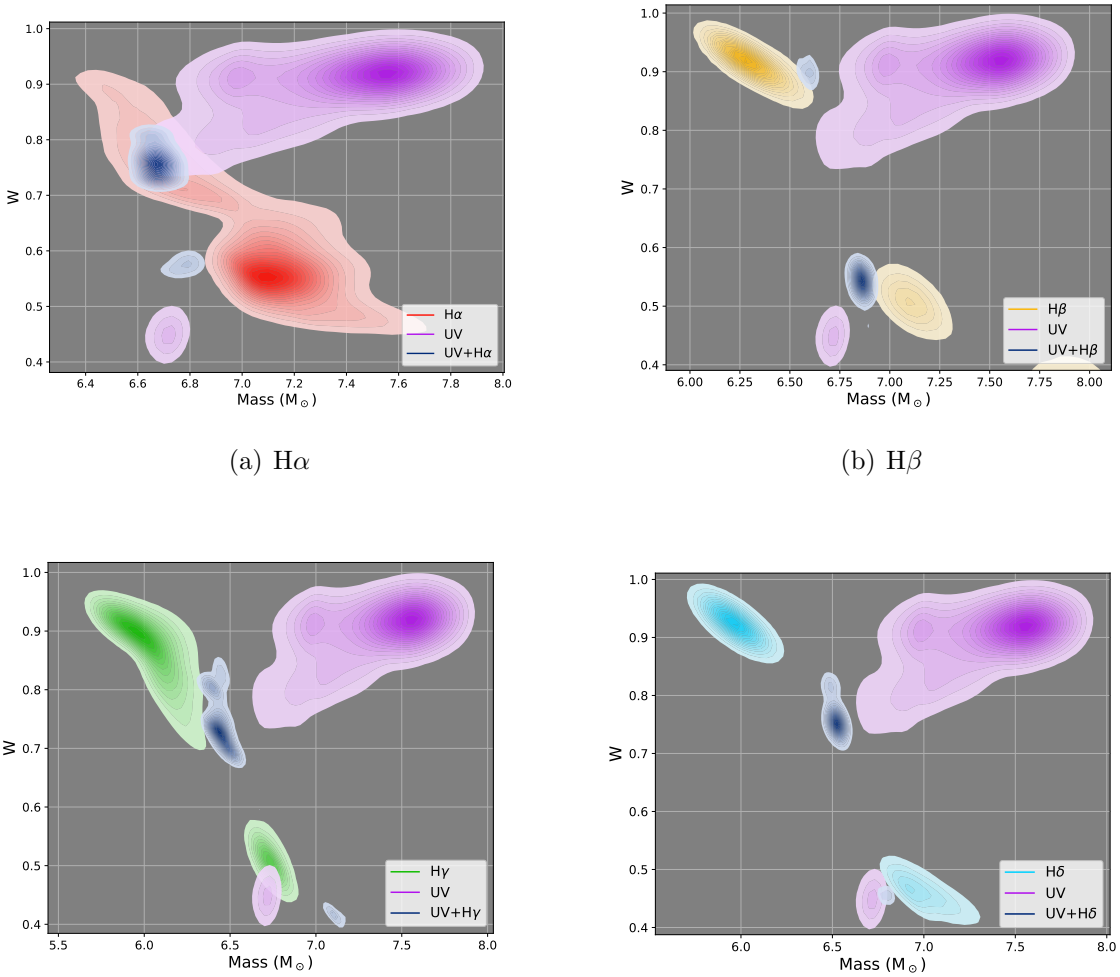
O efeito da combinação das linhas com o UV pode também ser analisado através de mapas de densidade mais detalhados do que aqueles disponíveis nos *corner plots*. Na Figura 3.5 são mostradas as distribuições de massa e taxa de rotação obtidas por uma estimativa de densidade kernel[3], onde são sobrepostas em cada subfigura os resultados das simulações de linha, UV e da inferência combinada. Os *corner plots* das respectivas simulações podem ser encontrados no Apêndice, Figuras A.4 a A.10.

É possível notar na Figura 3.5(a) que existe uma região de sobreposição entre os posteriores das simulações com Hα e UV que não corresponde ao pico de probabilidade de nenhuma delas individualmente. Esta região de massa menor que $7\,\mathrm{M}_\odot$ e $W > 0.7$ é, no entanto, o pico de probabilidade da simulação que combina os observáveis. A combinação de Hα com o UV, portanto, permite que uma região do espaço de parâmetros que seria considerada de baixa probabilidade com apenas um observável torne-se a melhor combinação de parâmetros que é capaz de explicar simultaneamente o conjunto das observações. As Figuras 3.5(b), 3.5(c) e 3.5(d) complementam este aspecto ao revelar que nem sempre existem regiões de sobreposição. Neste caso, a combinação dos observáveis encontra conjuntos no espaço de parâmetros que se distribuem de maneira intermediária entre as simulações individuais.

Em geral, o ajuste apenas com uma linha encontra múltiplas regiões de alta probabilidade que estão desconectadas entre si. Ao menos para Hβ, Hγ e Hδ tais regiões estão bem localizadas e em um formato quase elíptico, sinalizando baixas incertezas. Hα é o caso destoante, no qual a simulação individual produziu uma distribuição alargada e de formato tortuoso. Isto pode estar associado à perda de simetria do perfil de linha ao se remover o intervalo de absorção de C II na região da asa. Contudo, comparando os quatro painéis da Figura 3.5, é possível identificar uma característica em comum: duas principais regiões de concentração dos posteriores. Uma delas está associada a altas taxas de rotação ($W > 0.7$) com massas menores ($6.5\,\mathrm{M}_\odot$ ou menos), enquanto a outra relaciona-se com baixas taxas de rotação ($W < 0.6$) e massas maiores que 6.5 ou $7\,\mathrm{M}_\odot$.

A região de menor massa e maior W corresponde ao intervalo de parâmetros esperados

[3] Função `kdeplot` da biblioteca Seaborn (`https://seaborn.pydata.org/index.html`).



(a) Hα (b) Hβ

(c) Hγ (d) Hδ

Figura 3.5: Mapas de densidade de probabilidade (no espaço de massa e taxa de rotação) para as simulações individuais das linhas, UV e a combinação entre os dois, identificadas por cores distintas, conforme as legendas.

para α Eri, enquanto a segunda não é fisicamente admissível para uma estrela Be em alta rotação. Dentre as simulações, apenas no caso de Hβ a combinação da linha com o UV identificou a segunda região como a de maior probabilidade. Assim, nem sempre a combinação de observáveis produz resultados adequados. No entanto, ao utilizar toda a informação disponível, é possível discernir os diferentes máximos de probabilidade. Neste caso, três de quatro simulações indicaram valores maiores para a taxa de rotação e menores para a massa. É razoável, então, adicionar um *prior* não informativo para a taxa de rotação, aceitando apenas modelos com $W > 0.60$ na simulação combinada de Hβ com o UV. Quando isto é feito, obtém-se o *corner* da Figura 3.6 e o mapa de densidade da Figura

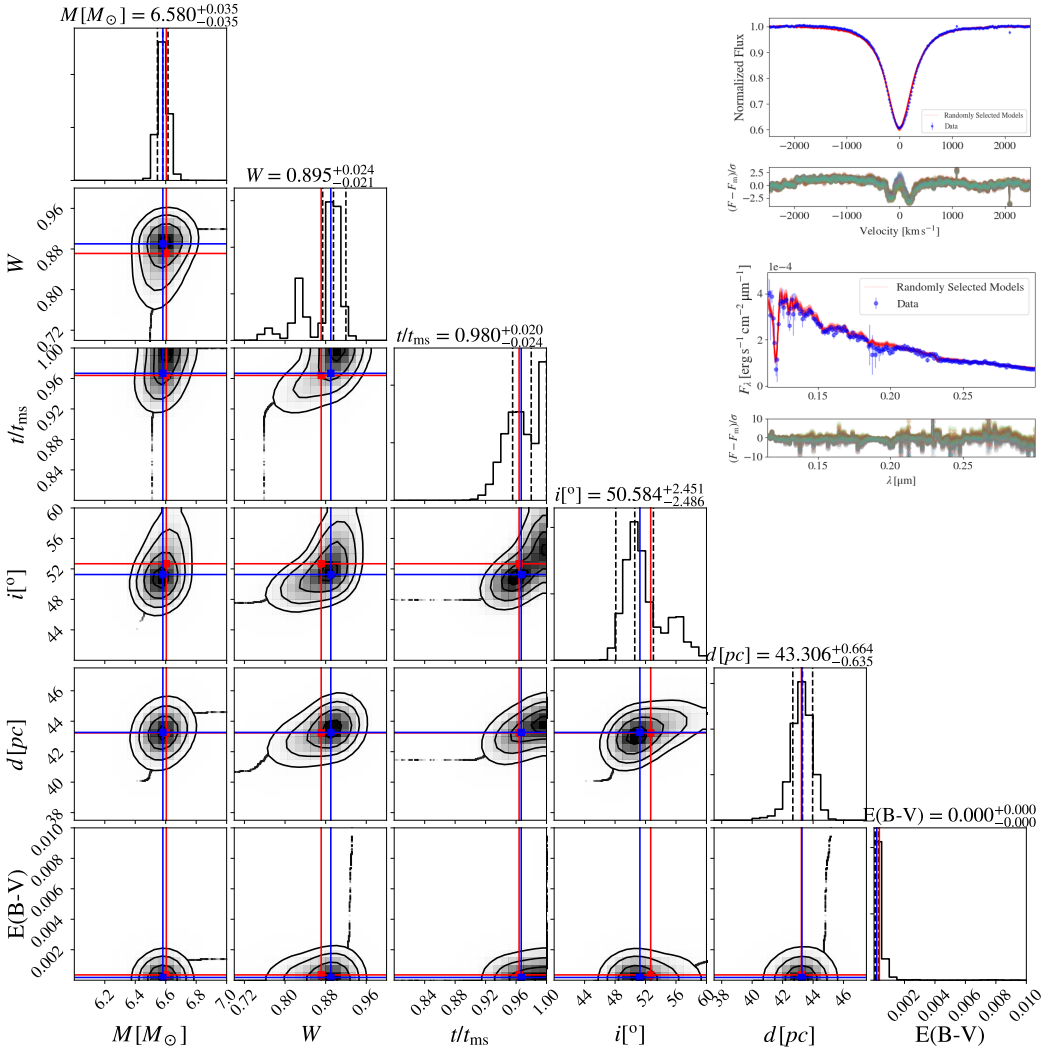


Figura 3.6: Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 5000 passos usando dados da linha Hβ e do UV. A grade de modelos foi restringida para apenas taxas de rotação $W > 0.6$.

3.7.

Neste caso, a simulação combinada de Hβ com o UV resultou em valores consistentes para a massa e distância em comparação com a simulação de Hα e os valores de referência. Tal como visto anteriormente, a combinação reduz as incertezas em relação à simulação feita apenas com o UV e também apresenta um melhor vínculo dos modelos, como se vê no gráfico de ajustes (Figura 3.6). Há, no entanto, uma leve discrepância na inclinação, que não foi muito bem determinada por esta linha. Além disso, a simulação com Hβ resultou em uma taxa de rotação elevada, próxima a 0.90. Outros picos de menor probabilidade são visíveis no histograma deste parâmetro na Figura 3.6 e também nas elipses azuis menores da Figura 3.7. A menor delas, é interessante notar, está próxima aos valores obtidos na simulação que combina a linha Hα e o UV, em cerca de $W \approx 0.75$ e $M \approx 6.6\,\mathrm{M}_\odot$.

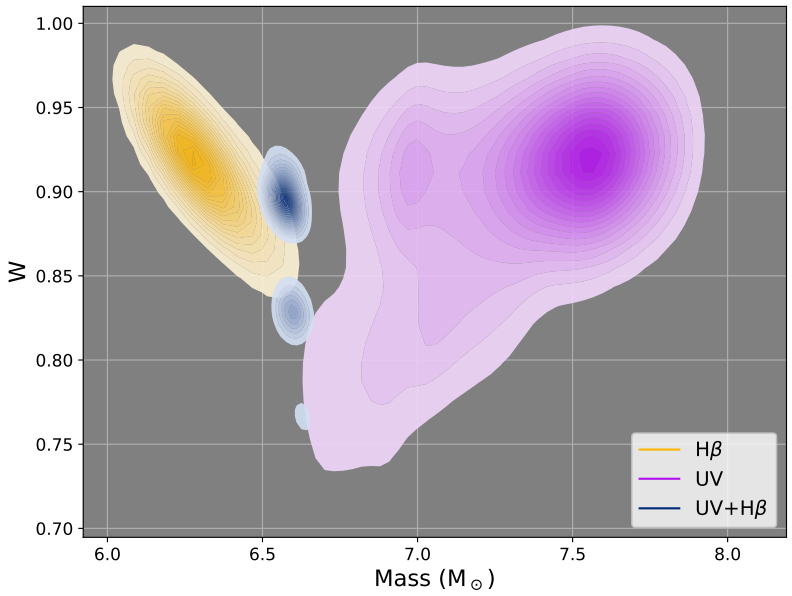


Figura 3.7: Mapa de densidade de probabilidade da massa e taxa de rotação para a simulação da Figura 3.6, para a qual só foram considerados modelos com $W > 0.6$.

Desta forma, diferentes linhas acabam por vincular os parâmetros de maneiras distintas. Isto reforça a tese de que a análise conjunta de diferentes observáveis permite alcançar resultados que se complementam, atingindo maior precisão e possivelmente mais acurácia na caracterização de uma estrela.

3.3 Combinação Hα+Hβ+Hγ+UV

A combinação simultânea do UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ produziu os resultados das Figuras 3.8 e 3.9. A convergência das cadeias pode ser visualizada no Apêndice na Figura A.11. Todas as distribuições marginais possuem um pico bem definido, ainda que existam regiões de baixa probabilidade para outras combinações de parâmetros (por exemplo para massas um pouco maiores e W um pouco menor). Assim, a combinação de observáveis não necessariamente elimina mínimos secundários e pode inclusive evidenciar outras regiões plausíveis para os parâmetros da estrela.

Consideramos esta como a melhor simulação deste trabalho por conta do processo de inferência levar em consideração toda a informação útil disponível nos espectros e os parâmetros obtidos possuírem boa acurácia. Além disso, a Figura 3.9 mostra que modelos extraídos aleatoriamente são consistentes em gerar uma boa representação simultânea dos

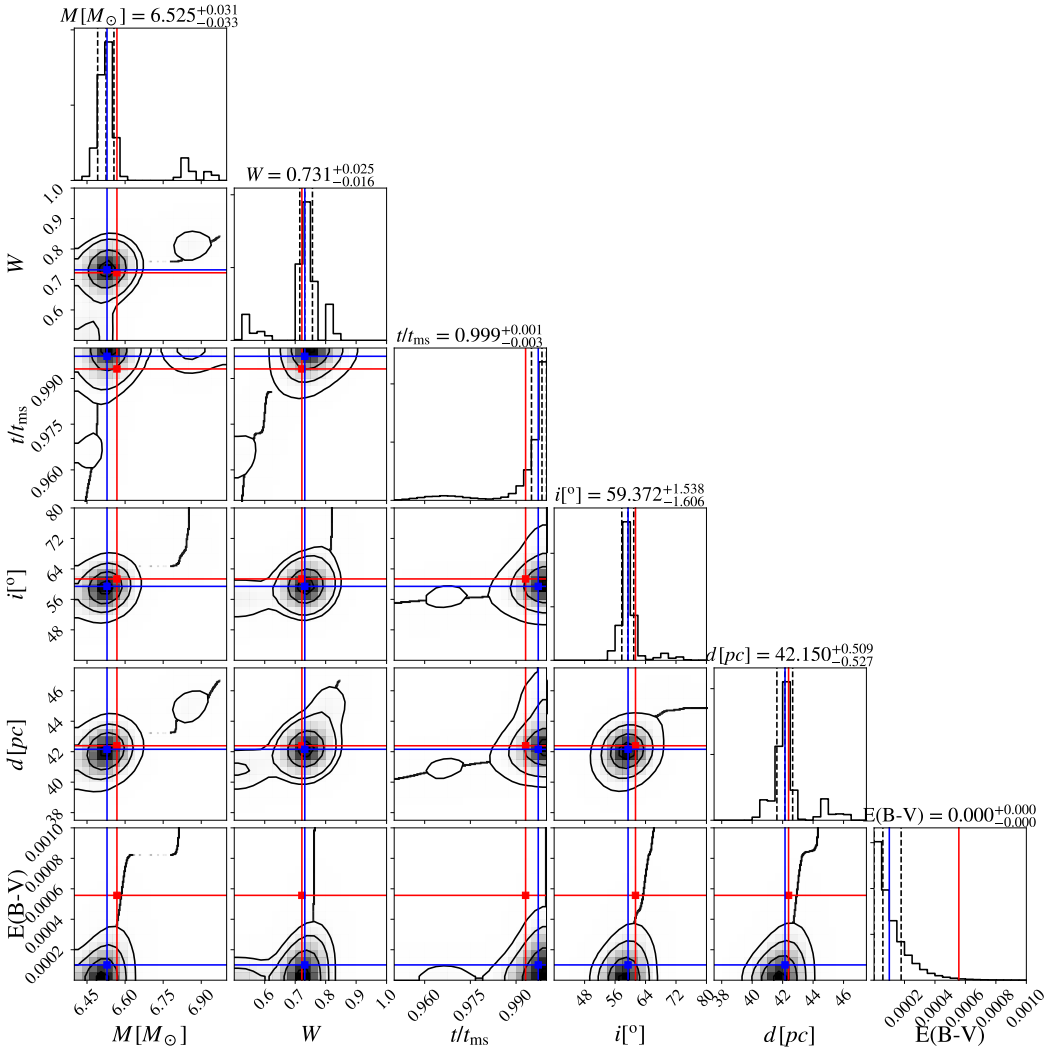
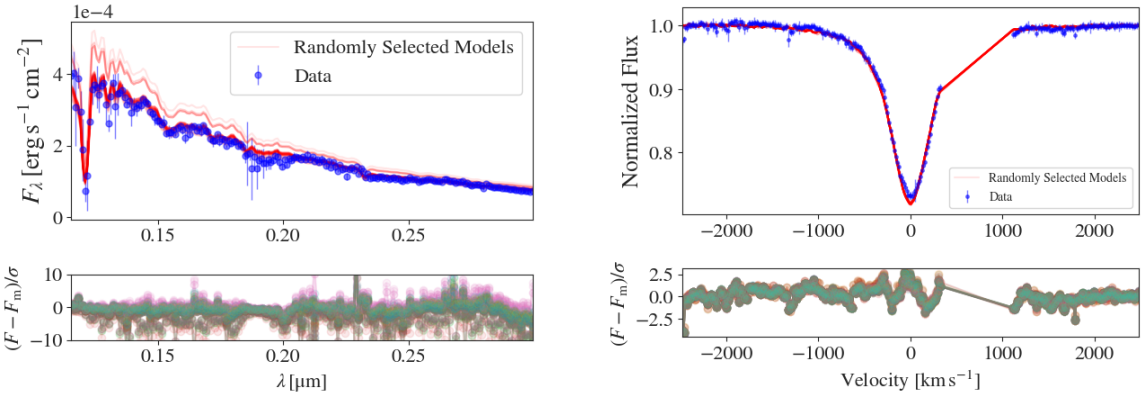


Figura 3.8: Simulação de MCMC feita com 100 *walkers* e 25000 passos usando dados das linhas Hα, Hβ e Hγ, além do UV.

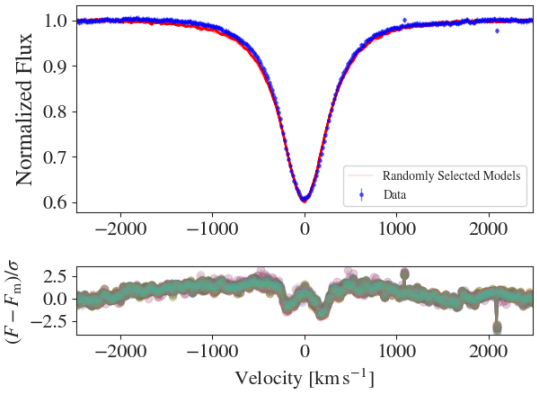
quatro observáveis. Ainda assim, parece haver uma ligeira piora no ajuste do UV (Figura 3.9(a)) em comparação com as simulações de uma única linha. No entanto, a maioria dos modelos encontram-se bem ajustados, o que sugere que os ajustes piores correspondem a combinações de parâmetros que pertencem às regiões de baixa probabilidade.

Os parâmetros da simulação estão disponíveis na Tabela 3.1, onde são comparadas diferentes estatísticas. Em geral, não existem diferenças expressivas entre a mediana e o intervalo de confiança HPD de 68% ou mesmo a média, devido à simetria das distribuições. O valor obtido para a massa é consistente com as combinações anteriores das linhas com o UV e encontra-se um pouco acima do valor de referência adotado (Harmanec, 1988). Outra referência para a massa de α Eri vem do trabalho de Jerzykiewicz e Molenda-Zakowicz (2000), que determina um valor de $M = 6.22 \pm 0.16\,\mathrm{M}_\odot$. Dentro das incertezas, este

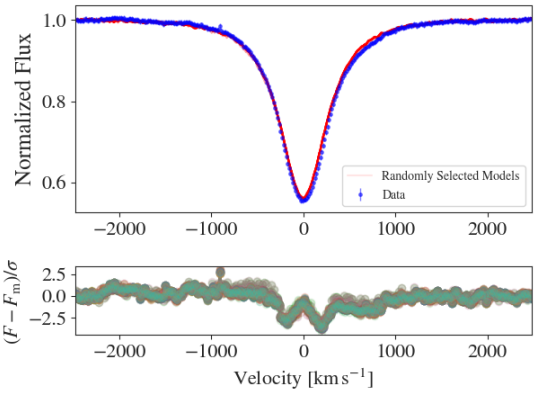


(a) UV

(b) Hα



(c) Hβ



(d) Hγ

Figura 3.9: Ajuste de uma seleção aleatória de modelos da distribuição posterior com resíduos sobrepostos nas regiões do UV, Hα, Hβ e Hγ.

valor é compatível com nossa determinação de $6.525^{+0.031}_{-0.033}\,M_\odot$. É importante ressaltar, no entanto, que Harmanec (1988) e Jerzykiewicz e Molenda-Zakowicz (2000) baseiam-se em modelos evolucionários de estrelas sem rotação, de modo que alguma discrepância é esperada. Para o ângulo de inclinação e a distância, os valores de $59.4^{\circ+1.5}_{-1.6}$ e $42.15^{+0.51}_{-0.53}$ pc, respectivamente, estão bastante próximos da literatura. Por fim, a taxa de rotação possui as maiores diferenças, o que pode indicar um limite à capacidade de inferência das linhas do hidrogênio, ou também a presença de erros sistemáticos em nossos modelos, como a dificuldade de ajustar o centro das linhas.

O mapa de densidade da Figura 3.10 reforça a constatação feita anteriormente sobre a existência de duas regiões – uma de menor massa e maior W e outra de menor W e maior massa –, sendo a primeira delas mais plausível do ponto de vista astrofísico, pois

Tabela 3.1 - Resultados da simulação que combina UV, Hα, Hβ e Hγ (Figuras 3.8 e 3.9). HPD 68% é o valor que divide o intervalo de confiança de 68% (HPD) em duas partes iguais, com as incertezas dadas pelos limites do intervalo. Os valores de referência são os mesmos apresentados na Tabela 2.1.

	Massa [$M_\odot$]	W	$t/t_{\rm ms}$	i [°]	Distância [pc]
Média	6.568	0.722	0.993	61.4	42.39
Mediana	6.529	0.732	0.997	59.4	42.16
HPD 68%	$6.525^{+0.031}_{-0.033}$	$0.731^{+0.025}_{-0.016}$	$0.999^{+0.001}_{-0.003}$	$59.4^{+1.5}_{-1.6}$	$42.15^{+0.51}_{-0.53}$
HPD 95 %	[6.455, 6.863]	[0.535, 0.825]	[0.965, 0.999]	[55.6, 83.4]	[40.43, 45.17]
Referência	6.1	0.84	-	60.6	42.75

estrelas Be são sempre rápidos rotadores. Esta região foi identificada como a de maior probabilidade mesmo sem o uso de *priores* não informativos. Em comparação com a simulação sem *prior* da linha Hβ com o UV (Figura 3.5(b)), a adição de mais linhas mostra-se como uma segunda maneira de buscar os intervalos com relevância astrofísica para os parâmetros. Recomenda-se, portanto, utilizar o máximo de informação disponível no processo de inferência. Isto é reforçado pela tendência do mapa de densidade correspondente à simulação combinada de concentrar-se em uma região intermediária entre as densidades das simulações individuais (as regiões azuis da Figura 3.10 são como pequenas ilhas em uma baía formada pelas simulações individuais). A combinação de mais linhas também possui o efeito de reduzir ainda mais as incertezas, resultando em áreas menores nas distribuições bidimensionais.

Por fim, é possível observar que existe uma região de baixa probabilidade para $W > 0.8$ e valor semelhante de massa, em $M \approx 6.5\,M_\odot$. À luz das discussões anteriores, é possível que a inclusão de outros observáveis (como outras linhas além do hidrogênio ou outras bandas da distribuição espectral de energia) permita avaliar a relevância desta região para a determinação de parâmetros da estrela α Eri.

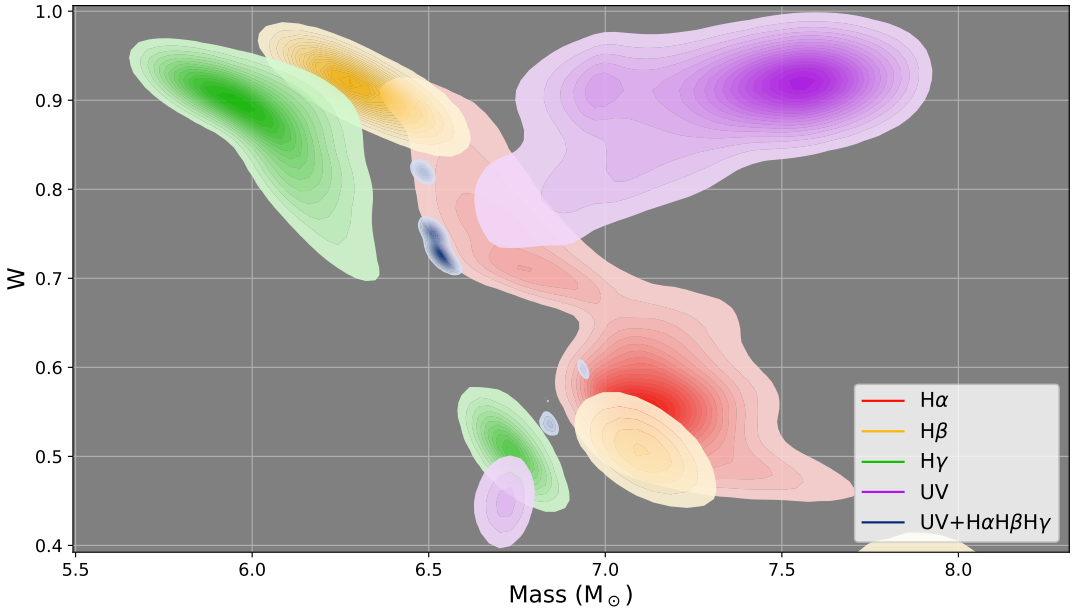


Figura 3.10: Mapa de densidade de probabilidade da massa e taxa de rotação para a simulação da Figura 3.8 sobrepostas às simulações individuais de linha e UV.

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho, com o objetivo de determinar parâmetros de estrelas Be, foram adicionados a uma grade de modelos da distribuição de energia espectral os perfis sintéticos de linhas do hidrogênio (Hα, Hβ, Hγ, Hδ), possibilitando sua comparação com observações espectroscópicas por meio de simulações de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), através do programa `emcee`. Para testar esta implementação, a estrela α Eri foi estudada, devido à abundância de pesquisas a seu respeito.

A combinação de linhas com a SED observada na região do UV produziu uma diminuição geral das incertezas, mais notadamente para a massa, inclinação e distância, refletindo em ajustes mais precisos no ultravioleta. O método, portanto, traz a contribuição de dispensar o uso de *priores* informativos na distância e em $v \sin i$ para produzir ajustes adequados no contínuo, demonstrando que o perfil fotosférico das linhas carrega informações valiosas a repeito de parâmetros estelares.

Ao visualizar os mapas de densidade de probabilidade para pares de parâmetros, foi possível notar que a combinação de observáveis resulta em regiões de sobreposição ou regiões intermediárias em relação aos picos de probabilidade das simulações individuais. Assim, a combinação atua no sentido de explorar regiões no espaço de parâmetros que seriam consideradas de baixa probabilidade caso os observáveis fossem tratados separadamente. No entanto, nem sempre a combinação resulta em parâmetros de relevância astrofísica, como foi o caso da combinação do UV com Hβ, que subestimou a taxa de rotação. Neste caso, é necessário utilizar outras linhas ou incluir um *prior* não informativo para a seleção apenas de modelos de alta rotação (o que é compatível com o comportamento de estrelas Be).

Os melhores resultados em termos de precisão e acurácia foram obtidos quando se

combina o UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ. Assim, recomenda-se que, ao estudar uma estrela desconhecida, seja utilizada toda a informação disponível e investigue-se como a inclusão sequencial de observáveis altera os resultados da inferência.

Por fim, temos como perspectiva que a inclusão de novos observáveis, tais como linhas de outros elementos químicos além do hidrogênio, possibilitará diversificar as fontes físicas de informação sobre a fotosfera estelar. Assim, novos avanços poderão ser feitos para a descrição das propriedades de estrelas Be.

Referências Bibliográficas

Baade D., Rivinius T., Pigulski A., Carciofi A. C., Martayan C., Moffat A. F. J., Wade G. A., Weiss W. W., Grunhut J., Handler G., Kuschnig R., Mehner A., Pablo H., Popowicz A., Rucinski S., Whittaker G., Short-term variability and mass loss in Be stars. I. BRITE satellite photometry of η and μ Centauri, A&A, 2016, vol. 588, p. A56

Carciofi A. C., Bjorkman J. E., Non-LTE Monte Carlo Radiative Transfer. I. The Thermal Properties of Keplerian Disks around Classical Be Stars, ApJ, 2006, vol. 639, p. 1081

Carciofi A. C., Domiciano de Souza A., Magalhães A. M., Bjorkman J. E., Vakili F., On the Determination of the Rotational Oblateness of Achernar, ApJ, 2008, vol. 676, p. L41

Chib S., Greenberg E., Understanding the metropolis-hastings algorithm, The american statistician, 1995, vol. 49, p. 327

Collins George W. I., The Use of Terms and Definitions in the Study of be Stars (review Paper). In IAU Colloq. 92: Physics of Be Stars , 1987, p. 3

Domiciano de Souza A., Kervella P., Jankov S., Abe L., Vakili F., di Folco E., Paresce F., The spinning-top Be star Achernar from VLTI-VINCI, A&A, 2003, vol. 407, p. L47

Domiciano de Souza A., Kervella P., Moser Faes D., Dalla Vedova G., Mérand A., Le Bouquin J. B., Espinosa Lara F., Rieutord M., Bendjoya P., Carciofi A. C., Hadjara M., Millour F., Vakili F., The environment of the fast rotating star Achernar. III. Photospheric parameters revealed by the VLTI, A&A, 2014, vol. 569, p. A10

Ekström S., Meynet G., Maeder A., Barblan F., Evolution towards the critical limit and the origin of Be stars, A&A, 2008, vol. 478, p. 467

Espinosa Lara F., Rieutord M., Gravity darkening in rotating stars, A&A, 2011, vol. 533, p. A43

Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J., emcee: The MCMC Hammer, PASP, 2013, vol. 125, p. 306

Georgy C., Ekström S., Granada A., Meynet G., Mowlavi N., Eggenberger P., Maeder A., Populations of rotating stars. I. Models from 1.7 to 15 $M_{\odot}$ at Z = 0.014, 0.006, and 0.002 with Ω/Ω_{crit} between 0 and 1, A&A, 2013, vol. 553, p. A24

Granada A., Ekström S., Georgy C., Krtička J., Owocki S., Meynet G., Maeder A., Populations of rotating stars. II. Rapid rotators and their link to Be-type stars, A&A, 2013, vol. 553, p. A25

Harmanec P., Stellar Masses and Radii Based on Modern Binary Data, Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia, 1988, vol. 39, p. 329

Jaschek M., Slettebak A., Jaschek C., Be star terminology., Be Star Newsletter, 1981, vol. 4, p. 9

Jerzykiewicz M., Molenda-Zakowicz J., Empirical Luminosities and Radii of Early-Type Stars after Hipparcos, Acta Astronomica, 2000, vol. 50, p. 369

Klement R., Carciofi A. C., Rivinius T., Panoglou D., Vieira R. G., Bjorkman J. E., Štefl S., Tycner C., Faes D. M., Korčáková D., Müller A., Zavala R. T., Curé M., Multitechnique testing of the viscous decretion disk model. I. The stable and tenuous disk of the late-type Be star β CMi, A&A, 2015, vol. 584, p. A85

Kopal Z., Vibrational Stability of the Rotating Roche Model, Ap&SS, 1987, vol. 133, p. 157

Lee U., Osaki Y., Saio H., Viscous excretion discs around Be stars, MNRAS, 1991, vol. 250, p. 432

Lucy L. B., Gravity-Darkening for Stars with Convective Envelopes, ZAp, 1967, vol. 65, p. 89

Mota B. C., BeAtlas: A grid of synthetic spectra for Be stars, IAG-USP, 2019, Tese de Doutorado

Rímulo L. R., Carciofi A. C., Vieira R. G., Rivinius T., Faes D. M., Figueiredo A. L., Bjorkman J. E., Georgy C., Ghoreyshi M. R., Soszyński I., The life cycles of Be viscous decretion discs: fundamental disc parameters of 54 SMC Be stars, MNRAS, 2018, vol. 476, p. 3555

Rivinius T., Baade D., Townsend R. H. D., Carciofi A. C., Štefl S., Variable rotational line broadening in the Be star Achernar, A&A, 2013, vol. 559, p. L4

Rivinius T., Carciofi A. C., Martayan C., Classical Be stars. Rapidly rotating B stars with viscous Keplerian decretion disks, A&A Rev., 2013, vol. 21, p. 69

Royer F., Gerbaldi M., Faraggiana R., Gómez A. E., Rotational velocities of A-type stars. I. Measurement of v sin i in the southern hemisphere, A&A, 2002, vol. 381, p. 105

Rubio A., Eyes on Phact: unraveling a Be star and its disk, IAG-USP, 2019, Dissertação de Mestrado

Slettebak A., Collins G. W. I., Boyce P. B., White N. M., Parkinson T. D., A system of standard stars for rotational velocity determinations., ApJS, 1975, vol. 29, p. 137

Townsend R. H. D., Owocki S. P., Howarth I. D., Be-star rotation: how close to critical?, MNRAS, 2004, vol. 350, p. 189

van Leeuwen F., Validation of the new Hipparcos reduction, A&A, 2007, vol. 474, p. 653

Vieira R. G., Carciofi A. C., Bjorkman J. E., The pseudo-photosphere model for the continuum emission of gaseous discs, MNRAS, 2015, vol. 454, p. 2107

Vinicius M. M. F., Zorec J., Leister N. V., Levenhagen R. S., α Eridani: rotational distortion, stellar and circumstellar activity, A&A, 2006, vol. 446, p. 643

von Zeipel H., The radiative equilibrium of a slightly oblate rotating star, MNRAS, 1924, vol. 84, p. 684

Apêndice

Apêndice A

Simulações com EMCEE

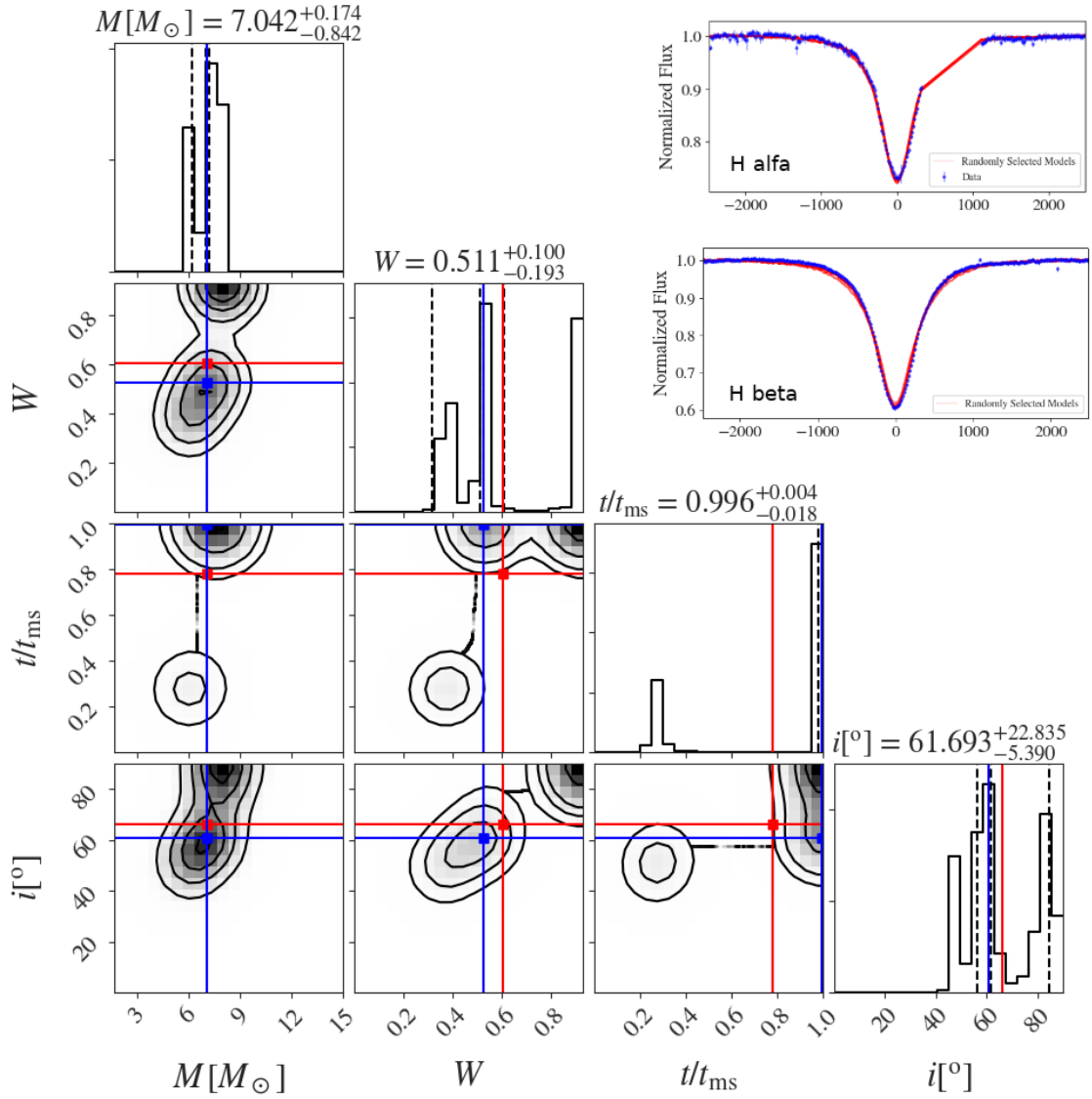


Figura A.1: Corner plot da simulação com as linhas Hα e Hβ utilizando 100 *walkers* e 5000 passos. No canto superior direito estão os dados observacionais (pontos em azul) com uma seleção aleatória de modelos da cadeia (em vermelho). Nota-se uma estrutura de múltiplos picos para a taxa de rotação e inclinação, além de dois picos para a massa e, em menor grau, para a idade.

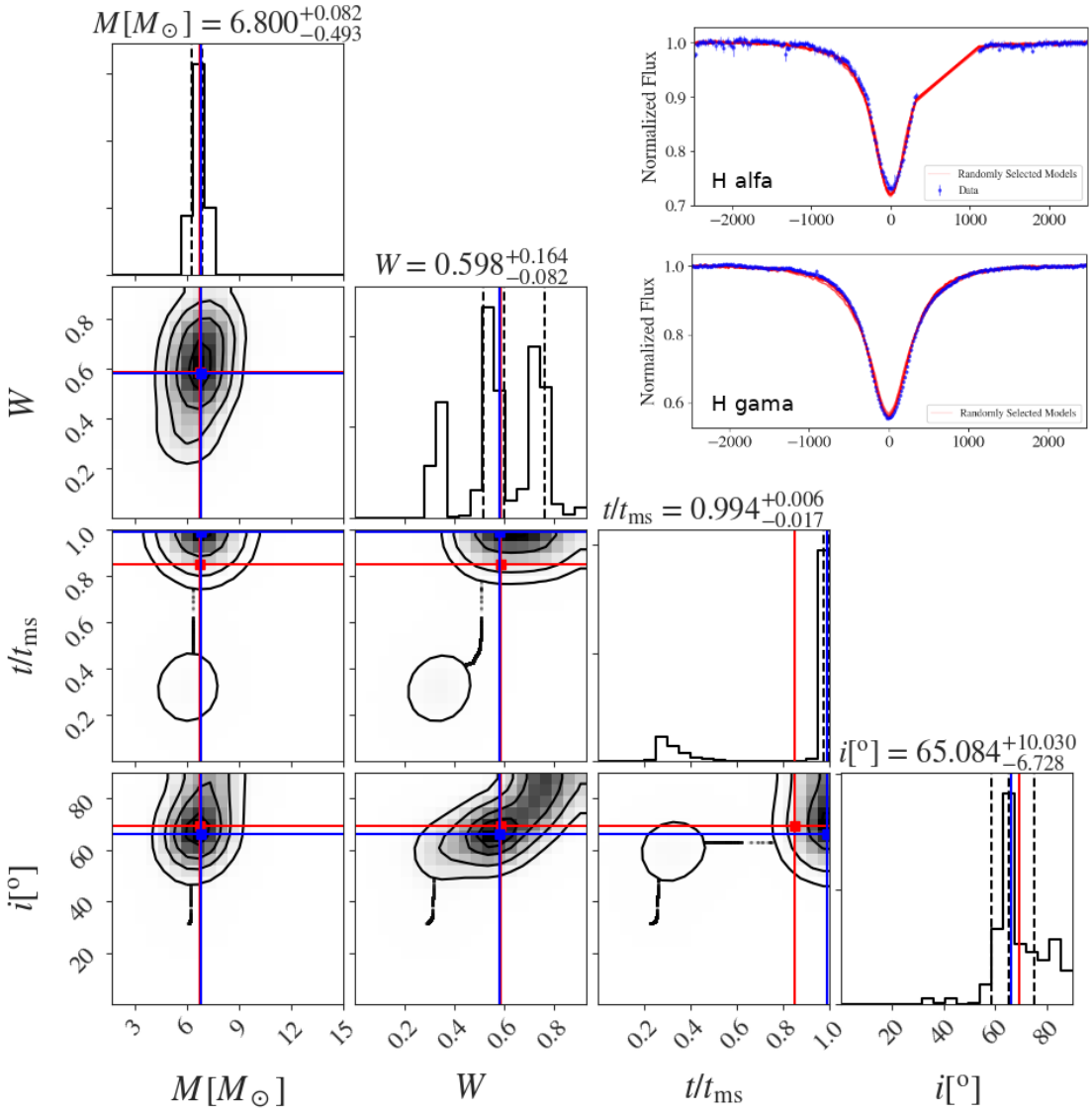


Figura A.2: Corner plot da simulação com as linhas Hα e Hγ utilizando 100 *walkers* e 5000 passos. No canto superior direito estão os dados observacionais (pontos em azul) com uma seleção aleatória de modelos da cadeia (em vermelho). Nota-se uma estrutura de múltiplos picos para a taxa de rotação W.

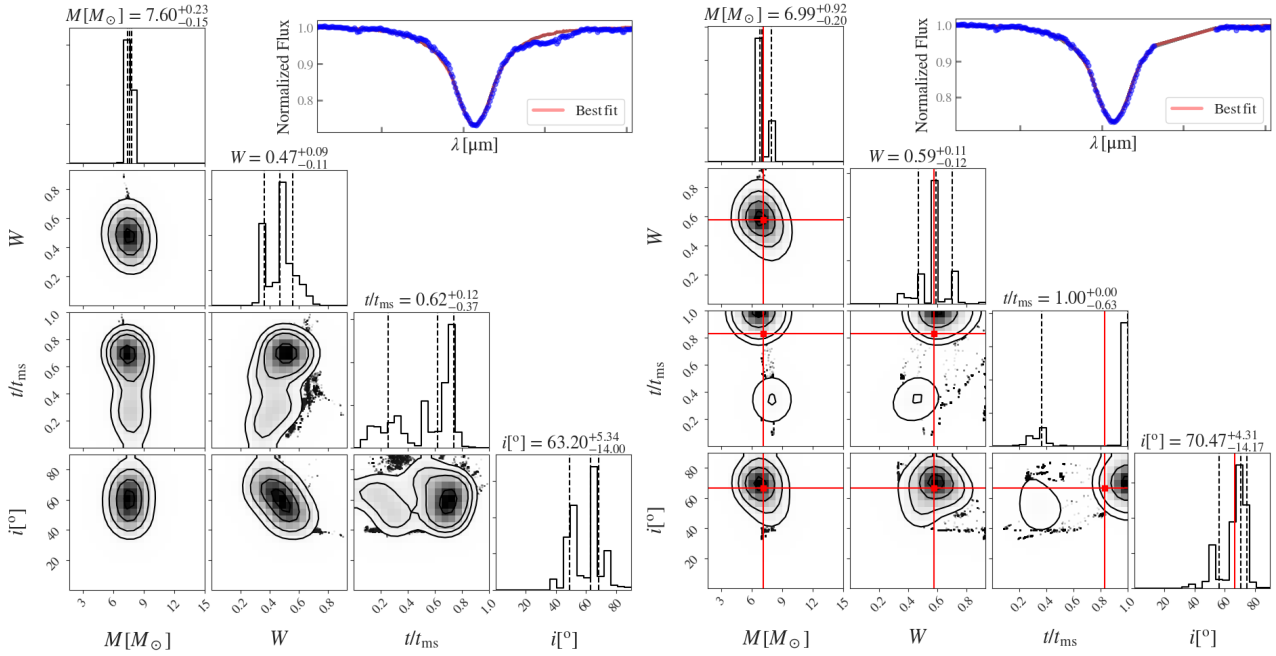


Figura A.3: Comparação de uma simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hα. À esquerda, linha completa (após procedimento de *sigma clip*); à direita, região com absorção de C II removida. Nota-se que há uma diminuição do valor de massa e aumento na taxa de rotação e idade.

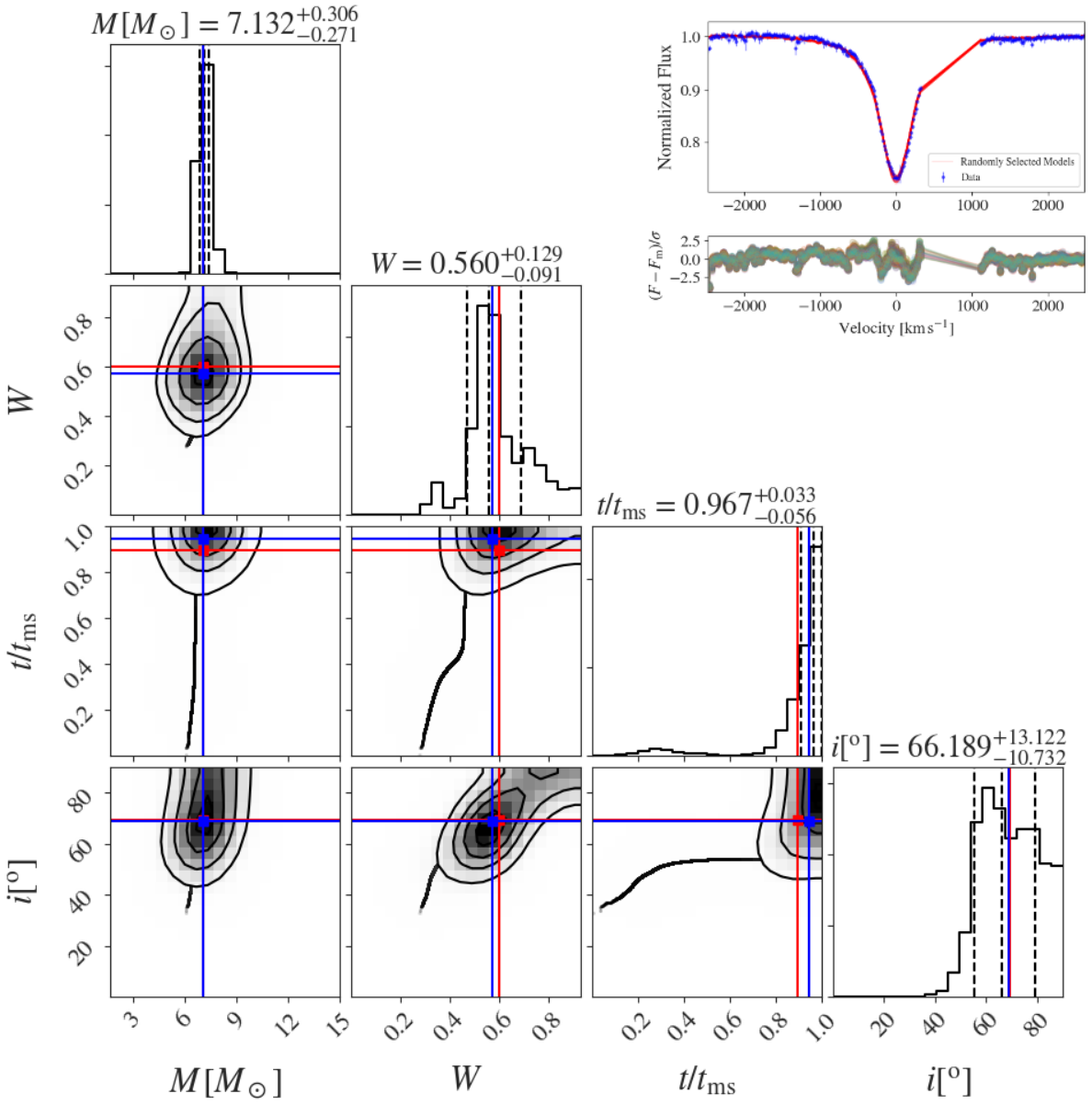


Figura A.4: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hα.

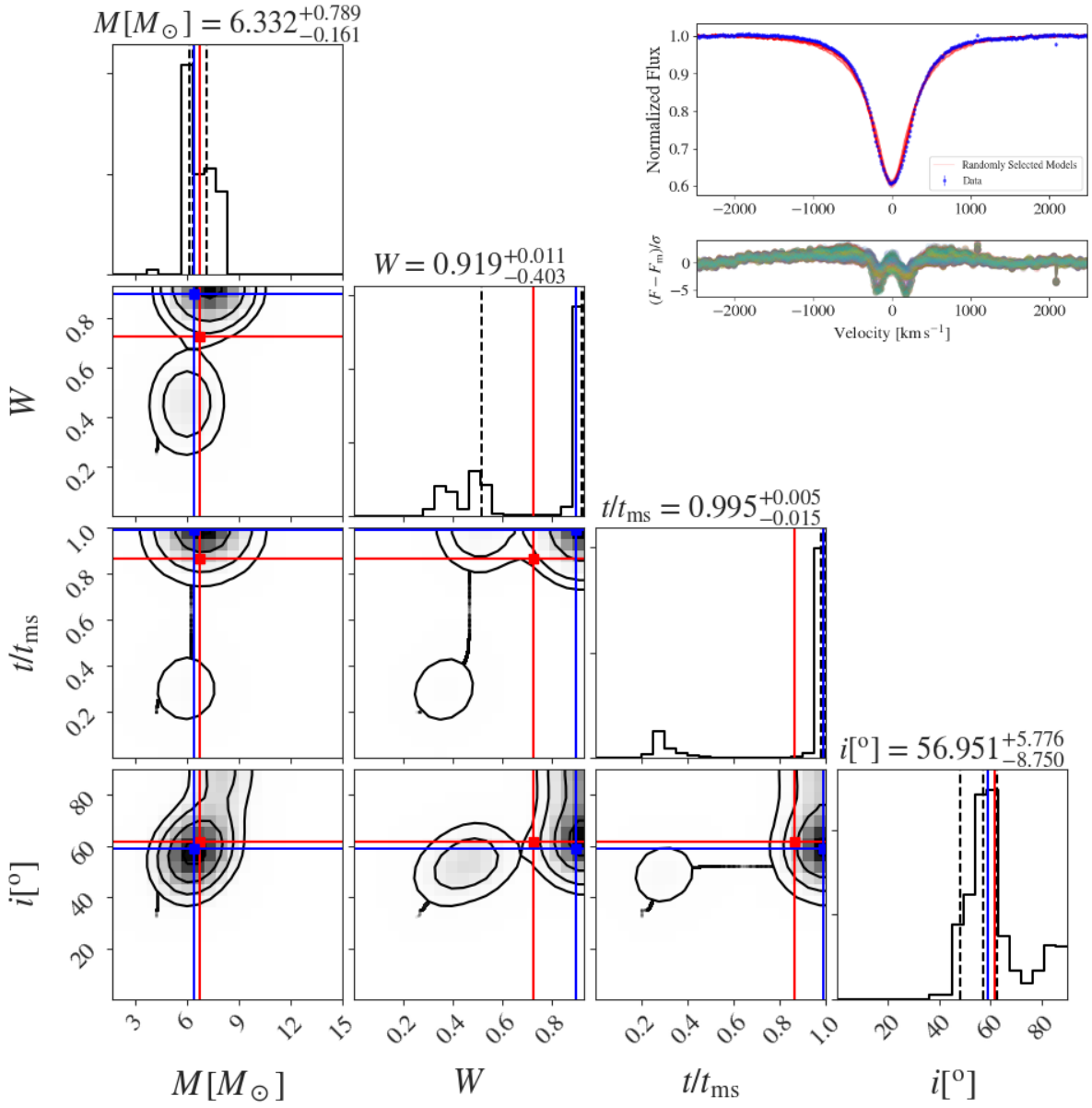


Figura A.5: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hβ.

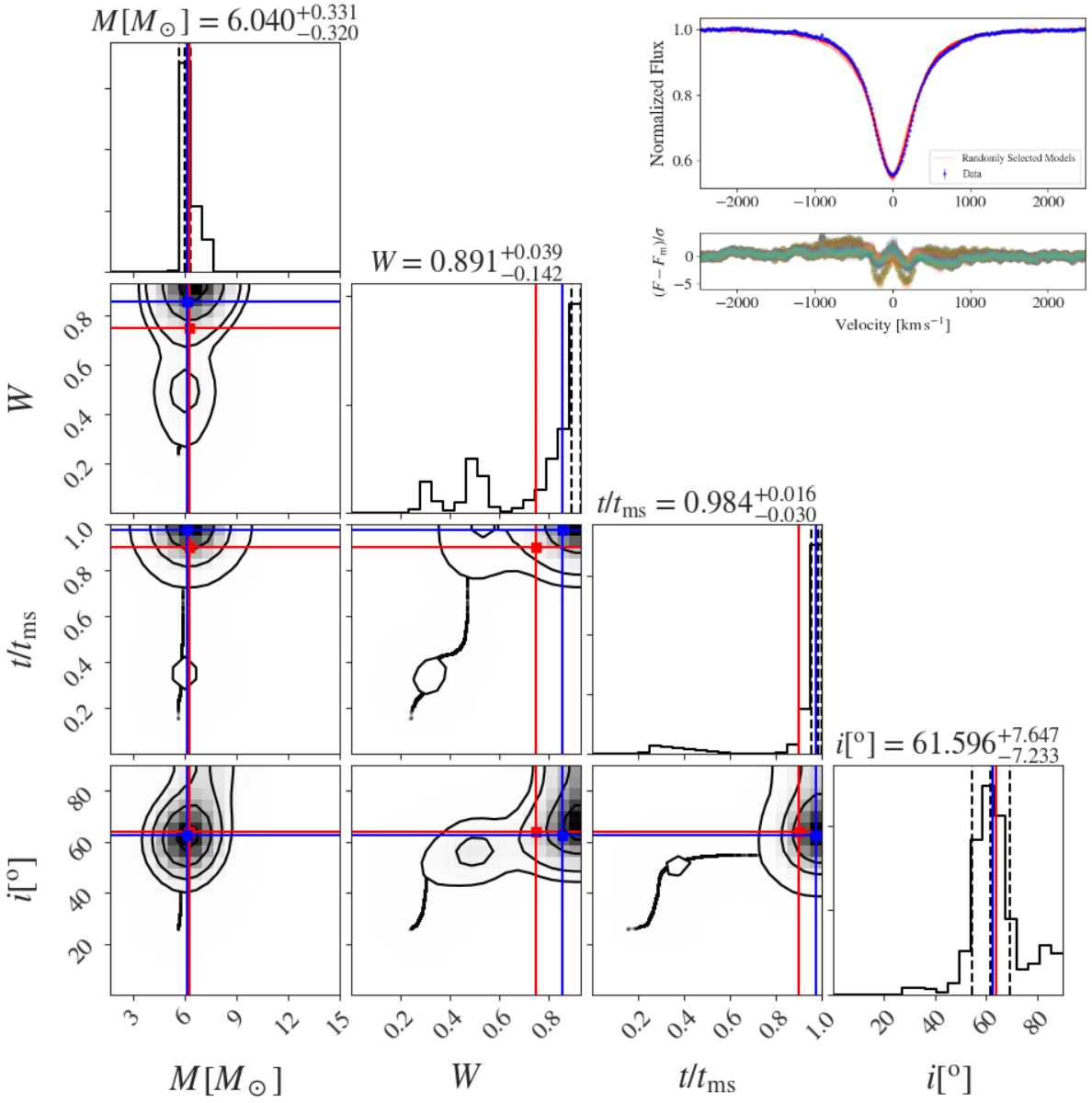


Figura A.6: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hγ.

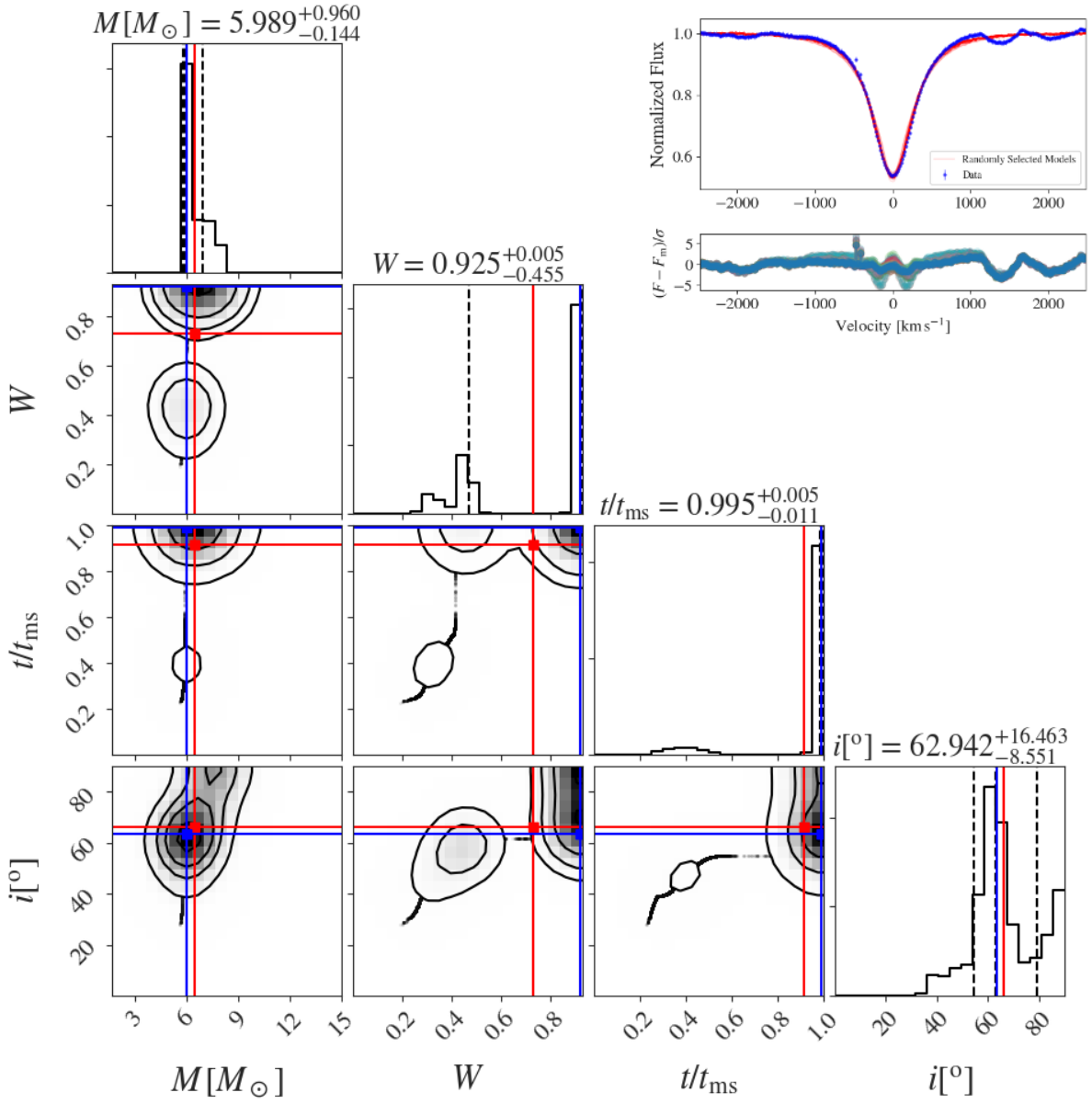


Figura A.7: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hδ.

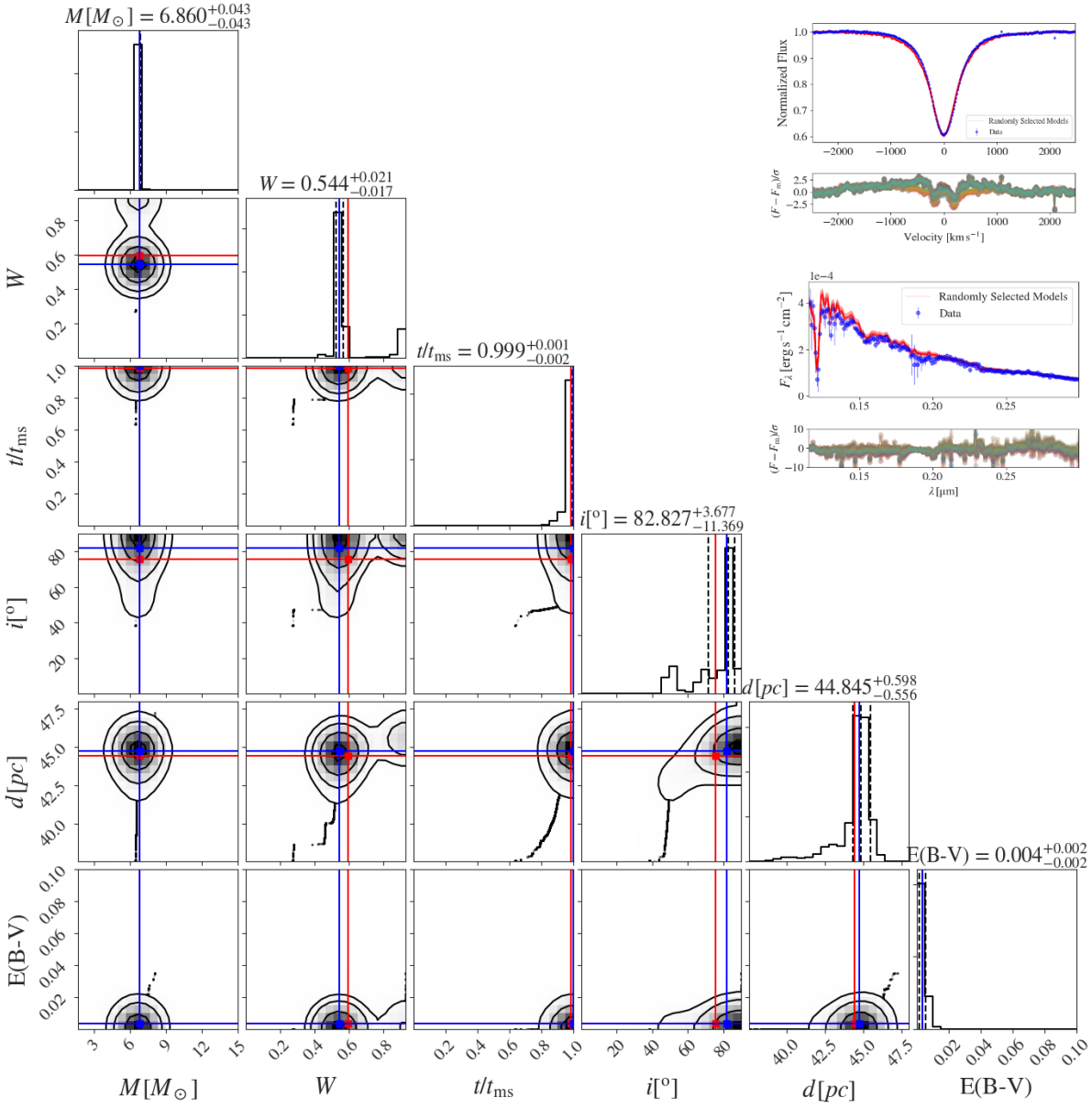


Figura A.8: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hβ e o UV.

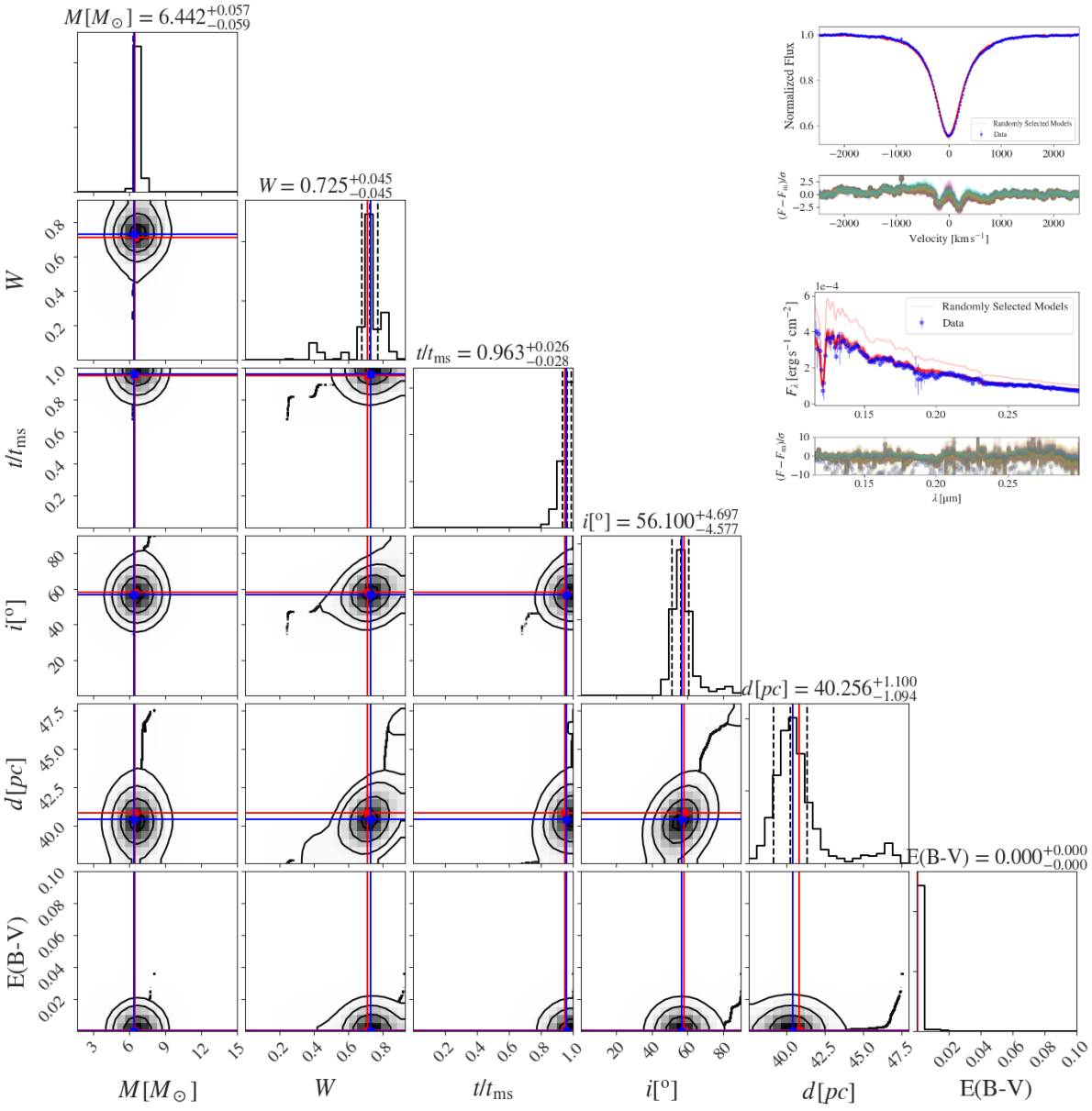


Figura A.9: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hγ e o UV.

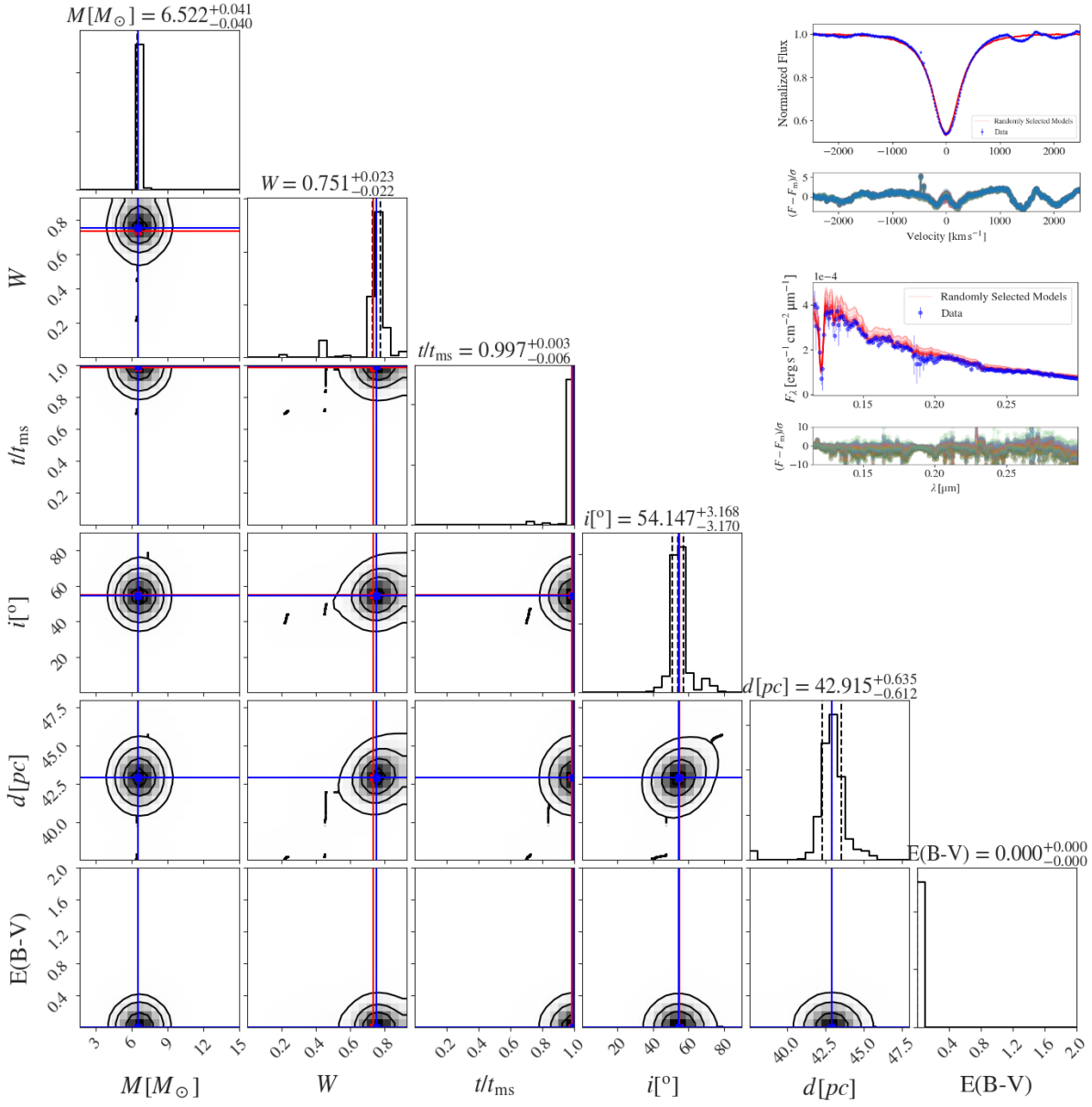


Figura A.10: Simulação de 500 *walkers* e 1000 passos para a linha Hδ e o UV.

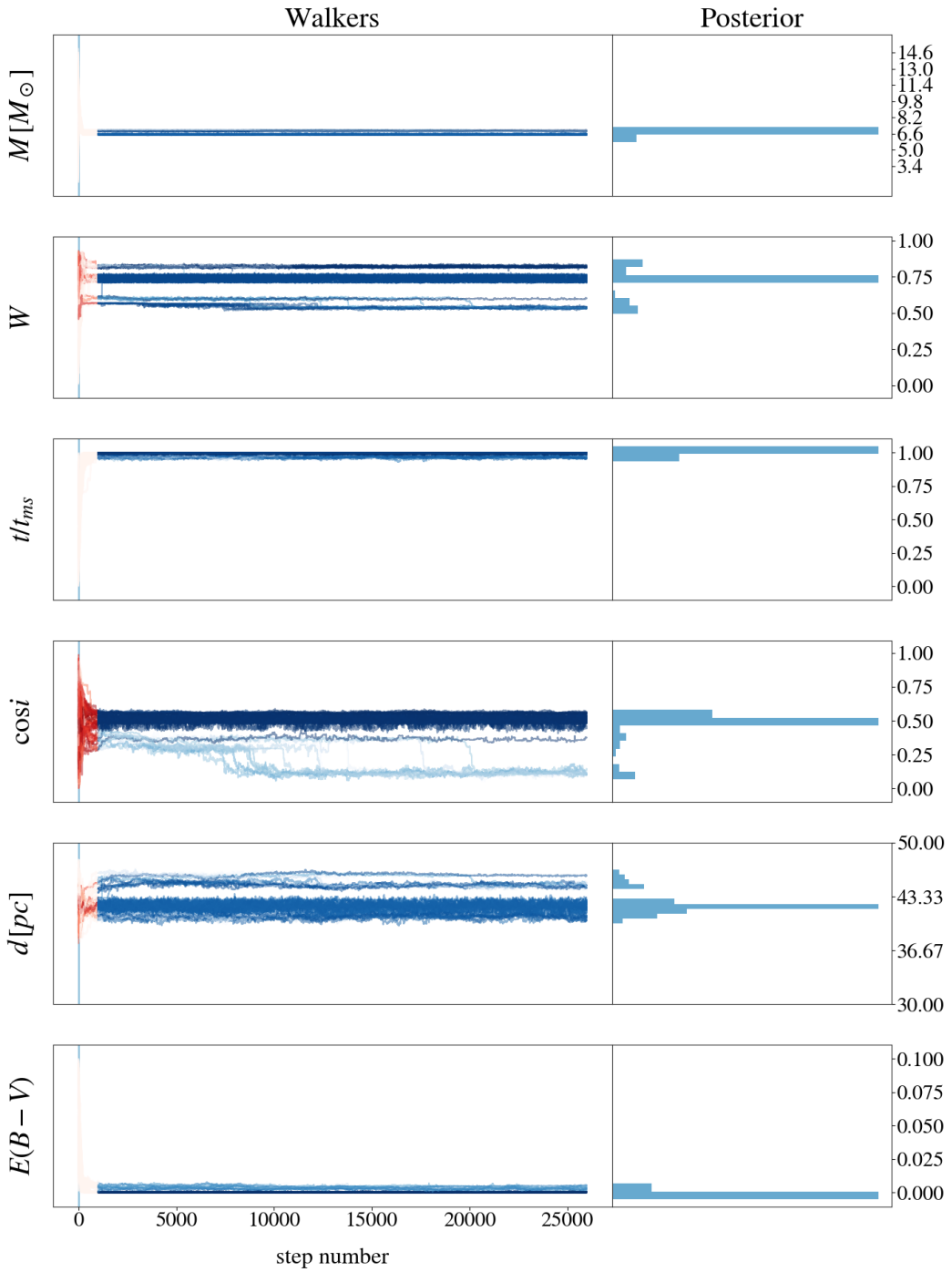


Figura A.11: Evolução das cadeias conforme o número de passos para cada parâmetro da simulação da Figura 3.8, que combina o UV com as linhas Hα, Hβ e Hγ. Região em vermelho corresponde à fase de *burn-in*.