

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Artur Vemado

Órbitas ao redor de buracos negros

São Paulo

2017

Artur Vemado

Órbitas ao redor de buracos negros

Monografia apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nemmen

São Paulo

2017

Resumo

O entendimento da gravidade ao redor de buracos negros é muito importante para a realização de são simulações numéricas em hidrodinâmica (HD) e magneto-hidrodinâmica (MHD) para discos de acreção em buracos negros. Neste trabalho foram feitas comparações do efeito dos potenciais pseudo-Newtonianos - que introduzem efeitos relativísticos - e os seus efeitos na dinâmica de partículas ao redor de um buraco negro.

Comparou-se três potenciais, que aproximam a métrica de Schwarzschild (buraco negro sem rotação). Neste caso, o potencial de Paczyński-Wiita foi o que apresentou os melhores resultados.

Para o caso de um buraco negro de Kerr (com rotação), três potenciais (um dado por Artemova et al. (1996) e dois dados por Mukhopadhyay e Misra (2003)) foram comparados com a métrica de Kerr para órbitas equatoriais. O potencial da Artemova foi o que representou melhor o potencial de Kerr.

Os que apresentaram bons resultados foram incorporados em uma simulação numérica em hidrodinâmica Newtoniana para discos de acreção. Em seguida, comparou-se as duas simulações.

Abstract

The understanding of gravity around black holes is very important to the implementation of numerical simulations in hydrodynamic (HD) and magnetohydrodynamic (MHD) for accretion discs in black holes. In this work, we have compared the effects of pseudo-newtonian potentials - that introduce relativistic effects - and their effects in particle dynamics orbiting black holes.

We compared three potentials that approach the Schwarzschild metric (black holes without rotation). In this case, Paczyński-Wiita potential showed the best results.

For the Kerr black hole (with rotation), three potentials (one given by Artemova et al. (1996) and two by Mukhopadhyay e Misra (2003)) were compared with Kerr metric for equatorial orbits. Artemova's potential showed the best results.

The chosen ones will be incorporated in newtonian hydrodynamical simulation for accretion discs. Then, we compared them.

Lista de Figuras

2.1	Potenciais gravitacionais para diferentes valores de momento angular e energia negativa	17
2.2	Potenciais gravitacionais para diferentes valores de momento angular e energia positiva	18
2.3	Relação momento angular e o raio de uma órbita circular para cada potencial	18
2.4	Órbitas para os potenciais de PW e relativístico - tentativa de órbitas de mesmo formato	19
2.5	Comparação das órbitas de cada potencial para determinados parâmetros (para o caso de Schwarzschild)	19
3.1	Comparação dos potenciais para o caso de Kerr para determinados valores spin positivo e momento angular	24
3.2	Comparação dos potenciais para o caso de Kerr para determinados valores spin negativo e momento angular	25
3.3	Comparação entre as órbitas para $a = 0.9$ para o caso de Kerr	26
3.4	Comparação entre as órbitas para $a = -0.5$ para o caso de Kerr	27
4.1	Resultados das simulações para cada potencial escolhido	33
4.2	Continuação dos resultados das simulações para cada potencial escolhido .	34

Sumário

1. <i>Introdução</i>	11
2. <i>Buraco Negro de Schwarzschild</i>	13
2.1 Metodologia	13
2.2 Comparação entre os potenciais	14
2.3 Órbitas	15
3. <i>Buracos negros de Kerr - órbitas equatoriais</i>	21
3.1 Comparação entre potenciais	21
3.2 Órbitas	23
4. <i>Simulações de discos de acreção em hidrodinâmica</i>	29
4.1 Metodologia	29
4.2 Condições para a simulação	30
4.3 Resultados	31
5. <i>Conclusão e Perspectiva</i>	35
<i>Referências</i>	39

Introdução

Este trabalho tem como objetivo o entendimento da gravidade ao redor de um buraco negro, tanto para o de Schwarzschild quanto para o de Kerr. Para tanto, é preciso tratar a dinâmica assim como a interação do espaço-tempo do buraco negro com a radiação, o plasma e os processos magneto-hidrodinâmicos (MHD) dos gases ao redor.

Serão usados potenciais Pseudo-Newtonianos, que são equações que mimetizam alguns efeitos da relatividade geral da métrica correspondente e podem ser resolvidos na forma newtoniana, o que simplifica a modelagem numérica. Estes potenciais possuem algumas vantagens como, ser de fácil visualização os resultados dos cálculos feitos em física Newtoniana comparados com os da relatividade geral, onde há a preocupação com o referencial e o sistema de coordenadas onde serão avaliados e interpretados os resultados. Outra vantagem é que MHD Newtonianos são, geralmente, mais rápidos de serem calculados numericamente do que simulações relativísticas de MHD (GRMHD), assim é possível testar ideias antes de calculá-las em GRMHD. E, finalmente, é importante comparar as simulações relativísticas com as Pseudo-Newtonianas para o mesmo sistema de acreção.

Com isso, serão feitas comparações com os potenciais relativísticos de forma dinâmica (plotando-se as curvas dos potenciais e comparando-se as órbitas produzidas de acordo com os parâmetros) afim de entender as órbitas de partículas ao redor de um buraco negro.

Após esta análise, aqueles potenciais que mais se assemelham ao relativístico (tanto para a métrica de Schwarzschild quanto para a de Kerr) serão incorporados nas simulações hidrodinâmicas (HD) de acreção de buracos negros com o Pluto (Mignone et al. (2007)). Nesse trabalho não será utilizado simulações MHD pois deve-se primeiro interpretar os resultados em HD para depois observar os resultados em MHD e compará-los.

Pluto é um *software* gratuitamente distribuído para solucionar numericamente a dinâmica

de fluidos em astrofísica.

Buraco Negro de Schwarzschild

2.1 Metodologia

Para as órbitas dos potenciais Pseudo-Newtonianos, utilizando o Wolfram Research, Inc. (2017), deve-se resolver a equação simples da física newtoniana, dada por

$$\mathbf{F} = -m\nabla U = m\mathbf{a} \quad (2.1)$$

onde U é o potencial Pseudo-Newtoniano. Esse procedimento é permitido pois o interesse é o cálculo de órbitas de partículas, ou seja, $m \ll M$, onde m é a massa da partícula e M é a massa do buraco negro. Para o cálculo numérico basta informar os valores iniciais, tais como a energia (E) e o momento angular por unidade de massa da partícula (L), e no caso do buraco negro de Kerr, têm-se o spin ($a \equiv J/Mc$), que é um parâmetro adimensional, indicando o momento angular do buraco negro com relação ao momento angular máximo permitido. O raio inicial (r_0) é definido pela igualdade da energia com o potencial efetivo. Por simplicidade, adota-se a partícula com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(0) &= r_0, \\ y(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 0, \\ \dot{y}(0) &= \frac{L}{r_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Com essas condições pode-se fazer comparações com os programas dos potenciais relativísticos já prontos encontrados no *Wolfram Demonstration Project* (projeto onde há exemplos físicos, matemáticos e etc. para demonstrar as utilidades do *Mathematica*), pois as condições iniciais são as mesmas. Com isso, tratam-se a partícula e o buraco negro como

pontos e calcula-se a Eq. 2.1 com os respectivos potenciais em coordenadas cartesianas, utilizando as transformações:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{\phi} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Após os cálculos, plotam-se os valores de forma parametrizada, o que dá o formato das órbitas anexadas no presente trabalho.

Para as órbitas relativísticas usam-se os programas previamente prontos, sendo eles *"Orbits around Schwarzschild Black Holes" from the Wolfram Demonstrations Project*¹ e *"Orbits around a Spinning Black Hole" from the Wolfram Demonstrations Project*².

2.2 Comparação entre os potenciais

A partir das equações para os potenciais efetivos pseudo newtonianos (Paczyński–Wiita (PW), Nowak & Wagoner (NW) e Kluzniak & Lee (KL), ver Abramowicz (2009)) e relativístico para buracos negros sem rotação (Hartle (2003)) (Eq. 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 respectivamente) é possível plotar a forma destes para compará-los. Para tanto, utilizou-se uma normalização tal que $G = M = c = 1$ e $r_s = 2GM/c^2$, onde G é a constante universal da gravitação, M a massa do buraco negro, c a velocidade da luz e r_s o raio de Schwarzschild. O momento angular específico é dado por L .

$$V_{PW}(r) = -\frac{1}{r - r_s} + \frac{L^2}{2r^2} \tag{2.4}$$

$$V_{NW}(r) = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{3}{r} + \frac{12}{r^2} \right) + \frac{L^2}{2r^2} \tag{2.5}$$

$$V_{KL}(r) = \frac{1}{3r_s} \left(1 - e^{\frac{3r_s}{r}} \right) + \frac{L^2}{2r^2} \tag{2.6}$$

$$V_{Rel}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3} \tag{2.7}$$

¹ <http://demonstrations.wolfram.com/OrbitsAroundSchwarzschildBlackHoles>. Contributed by: David Saroff

² <http://demonstrations.wolfram.com/OrbitsAroundASpinningBlackHole>. Contributed by: David Saroff, Glenna Clifton, and Janna Levin

Na figura 2.1 plotou-se os gráficos para diferentes valores de momento angular. Pode-se notar que para valores pequenos de L (< 2.5) os potenciais são muito parecidos e possuem pequenas diferenças com relação ao raio.

Já para valores de momento angular intermediários ($2.5 \leq L \leq 5$) vê-se uma diferença muito grande na região próxima ao buraco negro, sendo que o mínimo do potencial de PW é o que mais se aproxima do potencial relativístico. Os outros potenciais se mostram destoantes.

Quando os valores do momento angular ficam grandes ($L > 5$) os potenciais ficam muito parecidos. Na região de interesse (energia menor do que zero), ficam muito semelhantes, mas como veremos na próxima seção, ainda assim teremos diferenças nas órbitas. Para energia maior do que zero (figura 2.2) os potenciais apresentam diferenças muito grandes entre si, sendo o potencial de PW e de KL os que mais se aproximam do relativístico.

A partir da relação entre o momento angular da partícula e o raio de uma órbita circular, que pode ser calculada através de $dV/dr = 0$, pode-se notar que o potencial de PW é o que mais se assemelha ao relativístico (figura 2.3). Dessa relação, pode-se obter o raio da última órbita circular estável de cada potencial, fazendo $dL/dr = 0$. Este raio para todos os potenciais do presente trabalho foi $R_{isco} = 3r_s$ (ISCO, do inglês *innermost stable circular orbit*, significa última órbita circular estável), compatível com o encontrado na relatividade para um buraco negro de Schwarzschild.

2.3 Órbitas

A partir da discussão anterior, plotou-se algumas órbitas, mudando-se os parâmetros de energia E e momento angular L , para que seja possível ver as diferenças entre os potenciais na prática. Para a comparação da figura 2.4 utilizou-se apenas os potenciais de PW e relativístico já que o potencial de NW e de KL se mostraram muito destoantes.

Na tentativa de se obter órbitas idênticas ou muito parecidas obteve-se valores diferentes para os parâmetros da órbita, como mostra o exemplo na figura 2.4. Em geral, para órbitas com o mesmo desenho, os parâmetros são maiores para o potencial relativístico quando comparado com o potencial de PW.

Da figura 2.1, para $L = 7$ têm-se potenciais muito parecidos. Com isso, plotou-se as órbitas com os mesmos valores para L e E para analisar se elas são iguais. Da figura 2.5

vê-se que as órbitas possuem parâmetros muito parecidos, mas com diferentes número de órbitas, sendo o que mais se aproxima do relativístico é o potencial de KL. Pode-se verificar que isso ocorre para outras energias e momento angular, nesse caso em que $L \geq 7$, mas não serão plotados os gráficos.

Para valores iguais de L e E , como visto na figura 2.1, nota-se grande diferença entre os potenciais e, portanto as órbitas serão bastante diferentes. Por exemplo, para $L = 3.7$ e $E = -0.04$ têm-se uma órbita fechada para o potencial PW, mas para os outros a partícula será capturada pelo buraco negro.

Dentre os três potenciais pseudo newtonianos, o potencial de PW é o que mais se assemelha ao tentar se reproduzir o potencial relativístico. Porém, para L grande o potencial de KL reproduz órbitas quase que iguais às relativísticas.

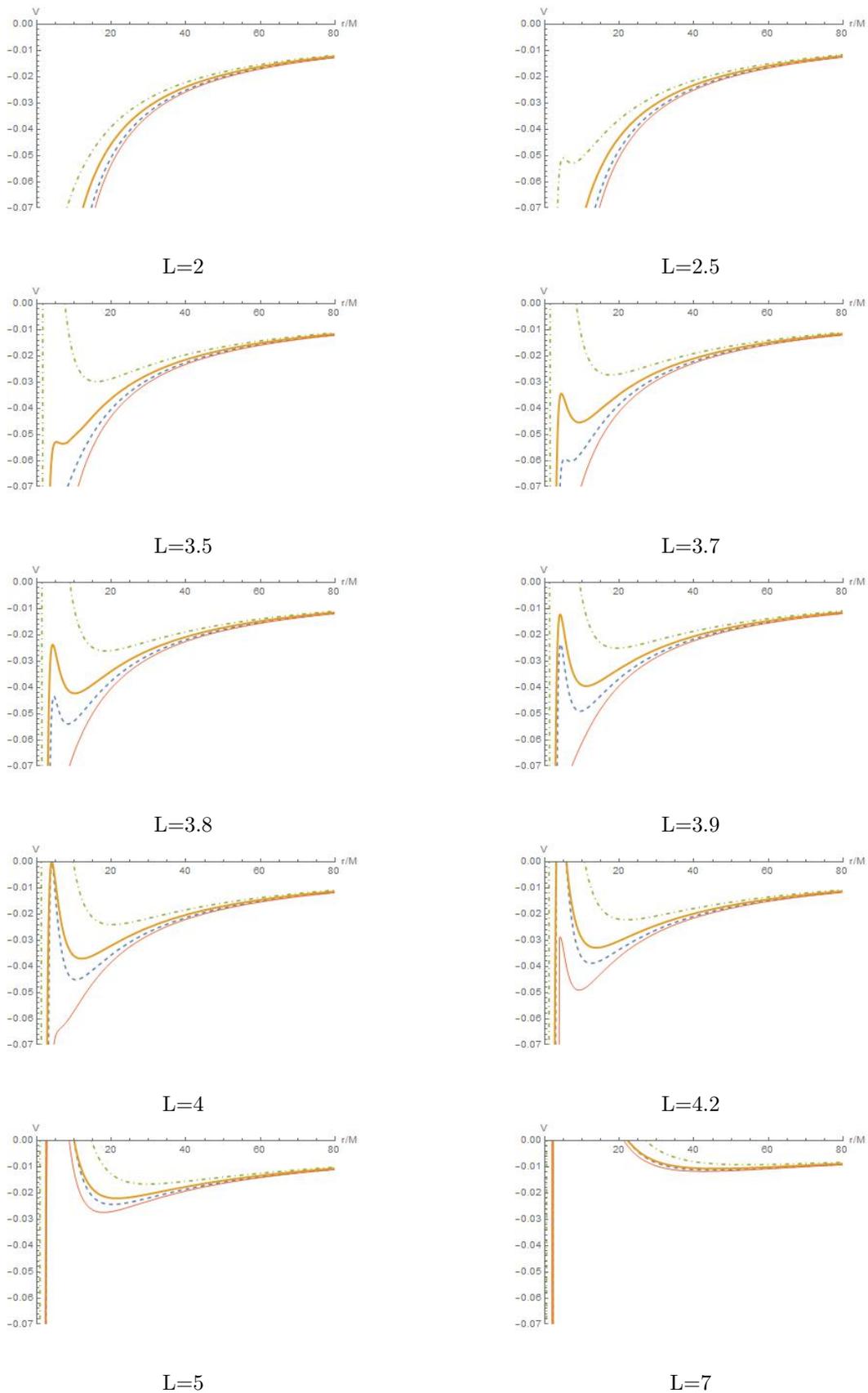


Figura 2.1: Gráficos dos potenciais para diferentes valores de momento angular, onde a linha pontilhada azul diz respeito ao potencial de PW, a pontilhada com pontos verde o potencial de NW, a contínua laranja o relativístico e a contínua fina vermelha o potencial de KL.

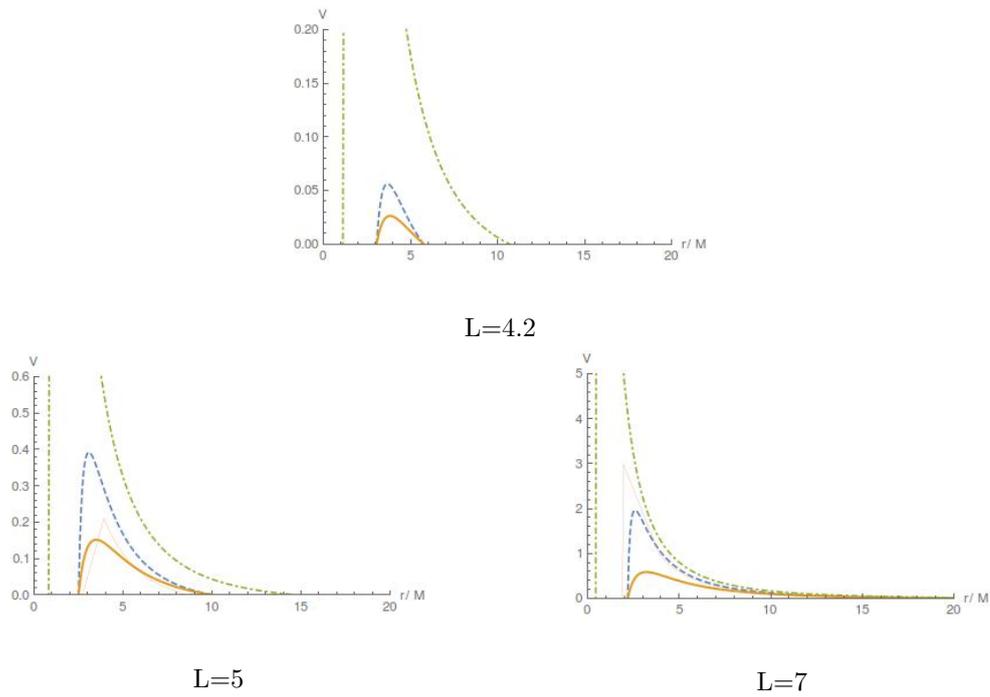


Figura 2.2: Gráficos com mesma legenda da figura 2.1 porém para energia positiva.

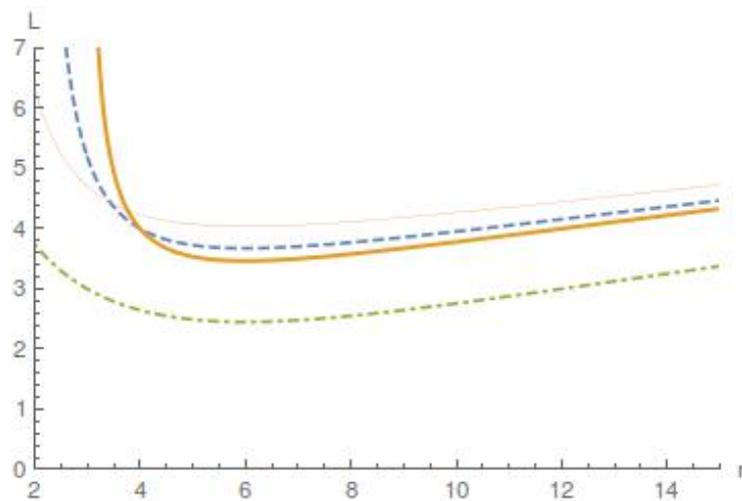
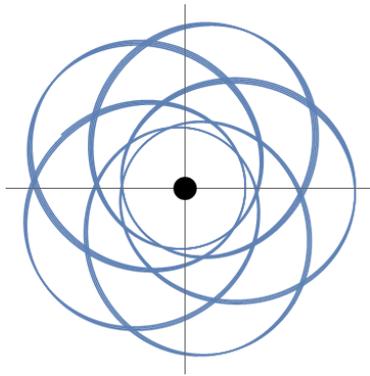
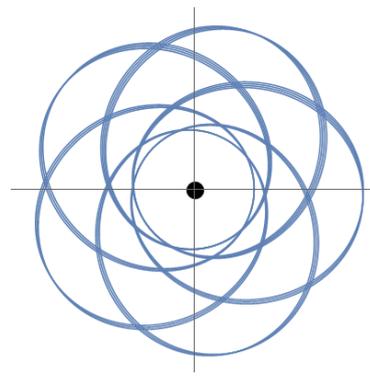


Figura 2.3: Relação momento angular e o raio de uma órbita circular para cada potencial. Pode-se notar que o potencial de PW é o que mais se aproxima do relativístico. A legenda da figura é a mesma da figura 2.1.

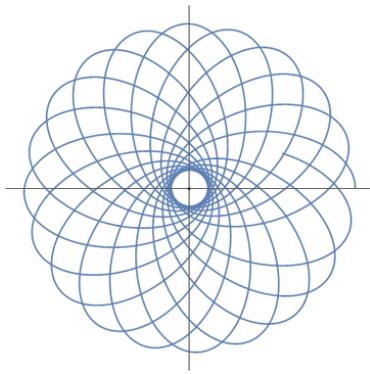


(a) Órbita para o potencial de PW

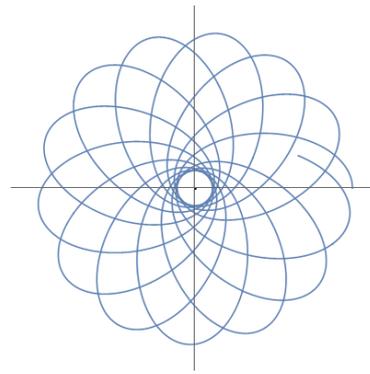


(b) Órbita para o potencial relativístico

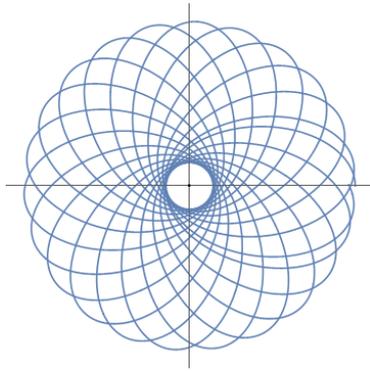
Figura 2.4: (a) Parâmetros: $L = 4.5$, $E = -0.025$, $r_{min} = 10.289$ e $r_{max} = 28.9959$ para um tempo de 10000; (b) Parâmetros: $L = 4.865$, $E = -0.0185518$, $r_{min} = 13.3973$ e $r_{max} = 38$ para um tempo de 15000



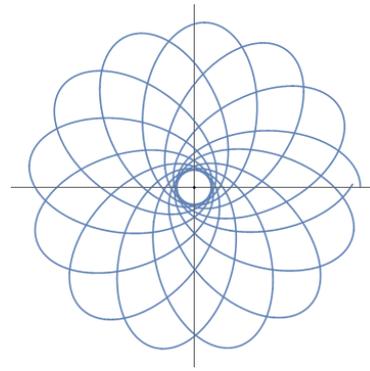
(a) Órbita para o potencial de PW



(b) Órbita para o potencial relativístico



(c) Órbita para o potencial de NW



(d) Órbita para o potencial de KL

Figura 2.5: (a) Parâmetros: $L = 7$, $E = -0.004$, $r_{min} = 24.7808$ e $r_{max} = 225.022$ para um tempo de 170000; (b) Parâmetros: $L = 7$, $E = -0.004$, $r_{min} = 25.0554$ e $r_{max} = 223.799$ para um tempo de 117000; (c) Parâmetros: $L = 7$, $E = -0.004$, $r_{min} = 30.9417$ e $r_{max} = 218.615$ para um tempo de 203000; (d) Parâmetros: $L = 7$, $E = -0.004$, $r_{min} = 23.4206$ e $r_{max} = 226.275$ para um tempo de 113000

Buracos negros de Kerr - órbitas equatoriais

3.1 Comparação entre potenciais

Nesta seção tem-se a comparação entre os potenciais modificados propostos por Artemova et al. (1996) e Mukhopadhyay e Misra (2003) (este último propôs dois potenciais) e o potencial efetivo para um buraco negro de Kerr (ver Hartle (2003)), Eq. 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 respectivamente. A normalização utilizada é a mesma do capítulo 3, mas nesta seção deve-se considerar o spin do buraco negro dado pelo parâmetro de Kerr, a , e para o potencial têm-se a energia por unidade de massa dada por $e = \sqrt{2E + 1}$, onde E é a energia da partícula. Os potenciais utilizados valem para órbitas equatoriais.

$$V_{Art}(r) = \frac{1}{(1 - \beta)r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^{1-\beta} - \frac{1}{(1 - \beta)r_1} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (3.1)$$

$$V_{SEP}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_{in}^2}{3r^3} + \frac{r_{in}}{2r^2} - \frac{1}{r} \quad (3.2)$$

$$V_{LMP}(r) = -\frac{3r_{in}}{5r^2} + \frac{9r_{in}^2}{40r^2} - \frac{3}{2r} + \frac{3 \log r}{2r_{in}} - \frac{3r_{in} \log\left(\frac{r}{(3r-r_{in})^{2/9}}\right)}{4r^2} \quad (3.3)$$

$$- \frac{3 \log(3r - r_{in})}{2r_{in}} + \frac{3 \log 3}{2r_{in}} + \frac{L^2}{2r^2}$$

$$V_{Kerr}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{L^2 - a^2(e^2 - 1)}{2r^2} - \frac{(L - ae)^2}{r^3} \quad (3.4)$$

Para as Eq. 3.1, 3.2 e 3.3 temos que

$$r_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}, \quad (3.5)$$

$$\beta = \frac{r_{in}}{r_1} - 1, \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
r_{in} &= 3 + Z_2 - \operatorname{sgn}(a)\sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \\
Z_1 &= 1 + \sqrt[3]{1 - a^2} \left(\sqrt[3]{1 + a^2} + \sqrt[3]{1 - a^2} \right), \\
Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo que r_1 é o raio do horizonte de eventos e r_{in} o raio da última órbita circular estável. Nota-se que para $a = 0$ temos a que $r_{in} = 3r_s$ e $r_1 = r_s$, sendo que este resultado diz respeito ao buraco negro de Schwarzschild.

Não foram plotados gráficos para energias maiores do que zero, tanto para spin positivo quanto para negativo, devido à área de interesse ser energias menores do que zero. Porém, é possível demonstrar que os potenciais para energia positiva e spin positivo possuem grandes diferenças a partir de $L = 3$ e isto fica ainda mais evidente com spin grande ($a \gtrsim 0.7$). Uma observação é que o potencial de Artemova para a próximo da unidade tende a um potencial newtoniano, o que não ocorre com o de Kerr.

Mantendo o spin positivo mas, analisando para energias menores do que zero nota-se que para $L < 3.3$ o potencial de Artemova mostra-se muito compatível para todos os valores de spin, com pequenas diferenças. Tendo $3.3 \leq L \leq 3.8$ os potenciais apresentam discrepâncias notáveis para spins pequenos ($a \lesssim 0.5$), sendo que os potenciais SEP e LMP apresentam as maiores diferenças, como mostra a figura 3.1. E a partir de $L = 3.8$ o potencial de Artemova é bastante compatível para qualquer valor de spin positivo, o que não ocorre para os outros potenciais (figura 3.1).

Trocando-se o sinal do spin (negativo) têm-se que para energias positivas os potenciais são maiores do que o de Kerr quanto maior o spin em módulo.

Já para energias negativas, têm-se que para $L < 3.6$ o potencial de Artemova possui pequena diferença, já os outros dois são bastante diferentes. Para $3.6 \leq L \leq 5.5$ temos que Artemova é muito próximo para spin de módulo menor que 0.5. Caso contrário, têm-se que os mínimos dos potenciais possuem energias com diferenças significativas (figura 3.2). Os outros potenciais são bastante destoantes nessa região. E, para momento angular maior do que 5.5 as curvas são muito semelhantes como mostra a figura 3.2, sendo que para spin pequeno em módulo Artemova é o que mais se aproxima, mas para spin grande o potencial LMP é mais parecido do que os outros.

3.2 Órbitas

As órbitas de Kerr foram calculadas através do programa "*Orbits around a Spinning Black Hole*" from the *Wolfram Demonstrations Project*¹

Para efeitos de comparação, plotou-se órbitas apenas para aqueles valores, tal que as curvas dos potenciais fossem próximas e sem muita discrepância entre elas, já que se o potencial apresentar grandes diferenças, com certeza as órbitas não serão parecidas. Então, para curvas próximas será visto a eficiência do potencial modificado na reprodução das órbitas equatoriais para o problema do buraco negro de Kerr.

Para spin positivo obteve-se, no geral, grande diferença no número de órbitas para se completar uma volta de precessão, como mostra a figura 3.3. Nesta figura vê-se que para os mesmos parâmetros, a órbita do potencial relativístico possui muito menos órbitas do que a dos potenciais modificados, e ainda, o potencial SEP possui precessão no sentido horário, enquanto que para os outros potenciais a precessão se dá no sentido anti-horário.

Para spin negativo obteve-se resultados bastante promissores para o potencial de Artemova. Algumas órbitas são bastante parecidas para potenciais similares, diferentes do encontrado para spin positivo. As figuras 3.4 (a) e (b) mostram um dos exemplos obtidos, onde as trajetórias possuem o mesmo número de órbitas e aproximadamente a mesma forma, com valores de raios mínimo e máximo muito próximos. Plotou-se outras órbitas para potenciais parecidos e obteve-se o mesmo resultado na maioria delas, ou seja, o potencial de Artemova para certos valores de L (valores grandes) e spin negativo reproduz com bastante precisão as órbitas para o potencial relativístico de Kerr para órbitas equatoriais. Os potenciais SEP e LMP são bastante diferentes para esse caso.

O potencial de Ghosh et al. (2014) não foi incluído porque teve-se problemas com a derivação feita no artigo. Não há certeza se deve-se utilizá-lo de forma newtoniana ou se há necessidade de modificar algo a mais. Um exemplo é que, no artigo, a energia total tem uma dependência com as derivadas do potencial, o que não ocorre na mecânica clássica.

¹ <http://demonstrations.wolfram.com/OrbitsAroundASpinningBlackHole>. Contributed by: David Saroff, Glenna Clifton, and Janna Levin

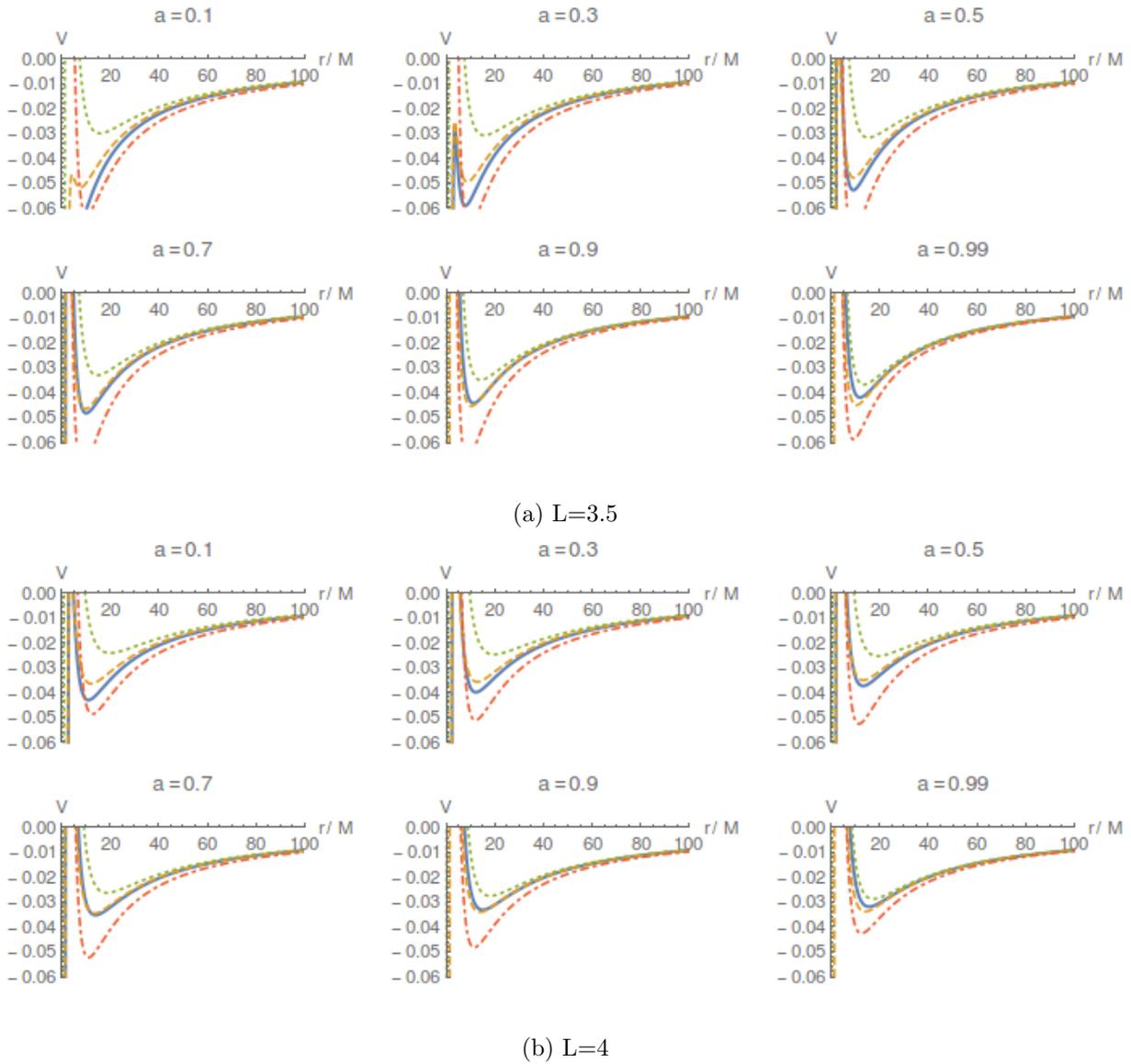


Figura 3.1: (a) Comparação entre os potenciais modificados com o de Kerr para momento angular $L = 3.5$ e diferentes valores de spin positivos, onde a linha contínua azul diz respeito ao potencial de Artemova, a linha pontilhada verde ao potencial SEP, a linha pontilhada com pontos vermelha ao potencial LMP e a linha tracejada laranja ao potencial efetivo de Kerr. (b) A mesma comparação mostrada em (a), porém para $L = 4$.

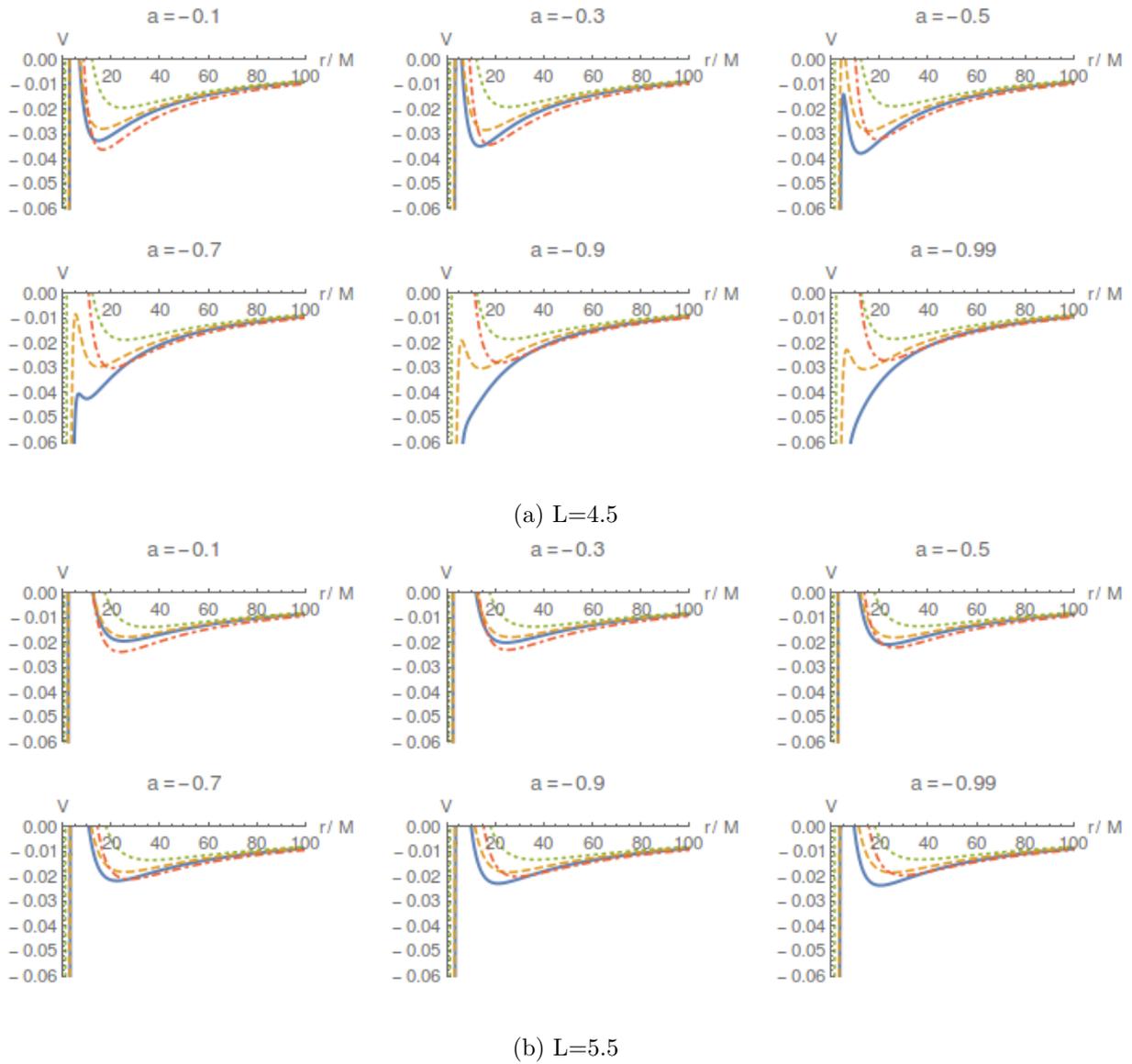
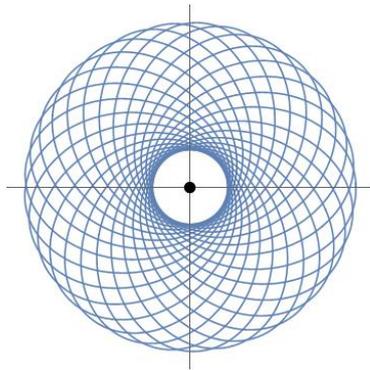
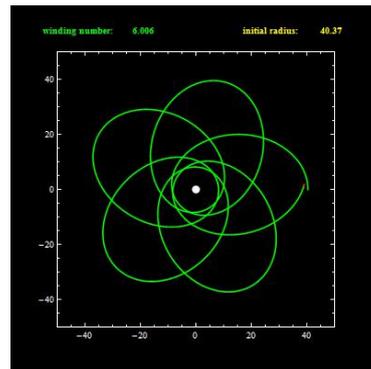


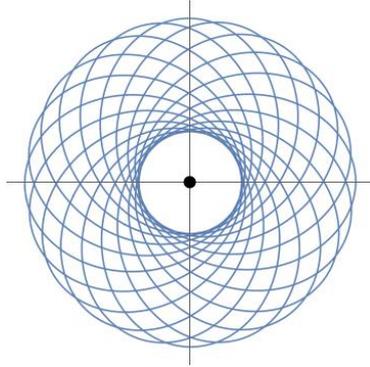
Figura 3.2: A mesma comparação e a mesma legenda das curvas vista na figura 3.1, porém para spin negativo. (a) $L = 4.5$. (b) $L = 5.5$.



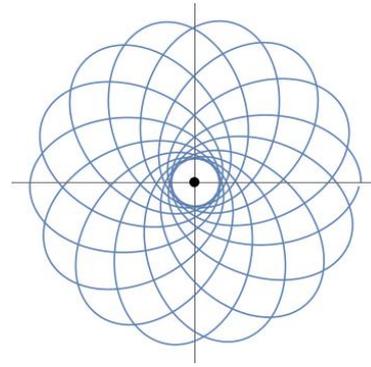
(a) Órbita para o potencial de Artemova.



(b) Órbita para o potencial relativístico de Kerr.

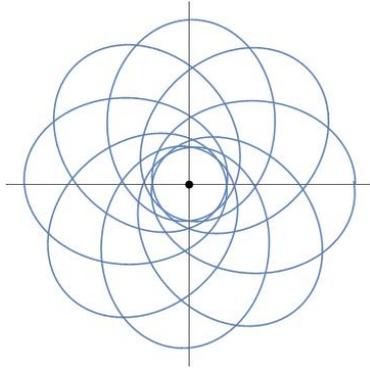


(c) Órbita para o potencial SEP.

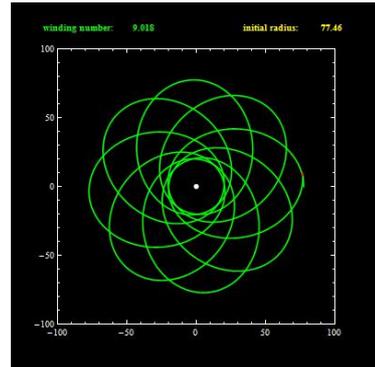


(d) Órbita para o potencial LMP.

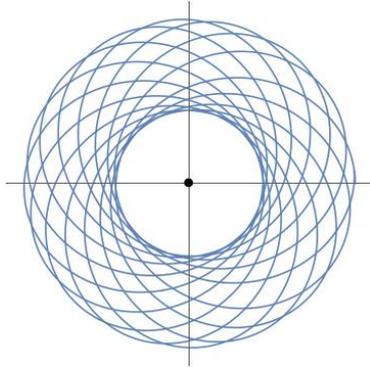
Figura 3.3: Parâmetros das órbitas: $L = 4$, $E = -0.02$, $a = 0.9$. (a) $r_{min} = 9.2140$ e $r_{max} = 40.7339$ para um tempo de 22800; (b) $r_{min} = 8.1531$ e $r_{max} = 40.3699$ para um tempo de 3900; (c) $r_{min} = 11.7866$ e $r_{max} = 38.0131$ para um tempo de 15700; (d) $r_{min} = 6.7315$ e $r_{max} = 46.5235$ para um tempo de 11300.



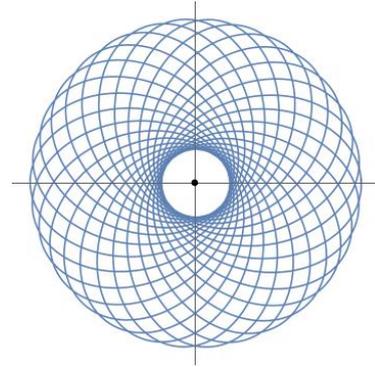
(a) Órbita para o potencial de Artemova.



(b) Órbita para o potencial relativístico de Kerr.



(c) Órbita para o potencial SEP.



(d) Órbita para o potencial LMP.

Figura 3.4: Parâmetros das órbitas: $L = 6$, $E = -0.01$, $a = -0.5$. (a) $r_{min} = 17.8991$ e $r_{max} = 81.5194$ para um tempo de 17900; (b) $r_{min} = 19.7846$ e $r_{max} = 77.4628$ para um tempo de 17700; (c) $r_{min} = 30.3814$ e $r_{max} = 68.7072$ para um tempo de 35600; (d) $r_{min} = 18.8094$ e $r_{max} = 90.7020$ para um tempo de 69900.

Simulações de discos de acreção em hidrodinâmica

4.1 Metodologia

Para as simulações hidrodinâmicas utilizou-se o código Pluto (Mignone et al. (2007)) versão 4.2¹, que implementa a equação de Navier-Stokes da dinâmica de fluidos. Este módulo evolui o seguinte sistema de leis de conservação

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{m} \\ E + \rho\Phi \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \mathbf{m}\mathbf{v} + p\mathbf{I} \\ (E + p + \rho\Phi)\mathbf{v} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi + \rho\mathbf{g} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

onde ρ é a densidade de massa, $\mathbf{m} = \rho\mathbf{v}$ é a densidade de momento, \mathbf{v} é a velocidade, p a pressão termal e $E = \rho e + \frac{\mathbf{m}^2}{2\rho}$ é a energia total (onde e é a energia interna do sistema). A contribuição pela força externa é escrita em termos do potencial gravitacional Φ e o vetor de aceleração \mathbf{g} . O termo \mathbf{I} é o tensor unitário.

O estresse viscoso deve ser adicionado à lei de conservação (Eq. 4.1), do lado esquerdo, como $\nabla \cdot \Pi$, onde Π representa o estresse viscoso cujas componentes são dadas por

$$(\Pi)_{ij} = 2 \frac{\nu_1}{h_i h_j} \left(\frac{v_{i;j} + v_{j;i}}{2} \right) + \left(\nu_2 - \frac{2}{3} \nu_1 \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}$$

onde os coeficientes ν_1 e ν_2 são o primeiro (*shear*) e o segundo (*bulk*) parâmetro de viscosidade respectivamente, $v_{i;j}$ e $v_{j;i}$ denota a derivada covariante onde h_i , h_j são os elementos geométricos das respectivas direções. Neste caso, $\nu_1 = \alpha\rho^2$ e $\nu_2 = 0$, seguindo Stone et al. (1999).

¹ A versão utilizada pelo Grupo de Buracos Negros consta em <https://github.com/black-hole-group/pluto>

Este código é escrito em linguagem C e possui um manual que nos permite fazer qualquer tipo de modificação de acordo com seus interesses. As simulações do presente trabalho foram feitas, utilizando MPI (*Message Passing Interface*), o que permite paralelizar o código para torná-lo mais rápido.

4.2 Condições para a simulação

Neste trabalho simulou-se discos de acreção espessos, apropriados para buracos negros acretando em regime RIAF (fluxo de acreção radiativamente ineficiente) (Yuan e Narayan (2014)) a baixas taxas de acreção. Estes possuem espessura do disco comparáveis ou maior do que seu raio. Para a construção do disco considera-se a configuração de equilíbrio de um fluido com rotação diferencial e sem auto-gravitação.

Assume-se que o fluido seja um politropo, ou seja, possui equação de estado dada por

$$p = A\rho^{1+1/n} = A\rho^\gamma \quad (4.2)$$

onde A é a constante politrópica definida pelo local onde a densidade é máxima, n o índice politrópico e γ a constante adiabática (neste caso utilizou-se $\gamma = 5/3$). Com isso, a condição de equilíbrio é dada por (Papaloizou e Pringle (1984))

$$\nabla \left(\Psi_{rot} + \Phi + (n+1)\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\Psi_{rot} + \Phi + (n+1)\frac{p}{\rho} = C = const. \quad (4.4)$$

onde $\Psi_{rot} = \frac{1}{2}\frac{l_k^2}{r^2}$ é o potencial de rotação (sendo l_k o momento angular kepleriano onde a densidade do toro é máxima, para um momento angular constante, e a velocidade $V_\phi = l_k/r$, onde r é o raio cilíndrico, é a velocidade com que o toro está rodando) e C é uma constante definida na superfície onde $p = \rho = 0$. Para determinação completa do toro é preciso especificar o local onde a densidade é máxima (R_{max}) e a parte mais interna do toro (R_{min}). Para os dois potenciais utilizados (Schwarzschild e Kerr) usou-se $R_{min} = 0.75$ e $R_{max} = 1.0$. As densidades admitidas nas simulações são dadas em unidades da densidade máxima (ρ_{max}).

Como o programa não admite densidade zero (que seria o vácuo), utilizou-se de um artifício que coloca a densidade externa ao toro igual à uma constante e uma pressão

que decai com a distância². Para a densidade admite-se que $\rho = 10^{-4}\rho_{max}$ e a pressão atmosférica $p = \rho/R$, onde R é a distância da origem até determinado ponto na simulação.

Utilizou-se coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ em duas dimensões mas com três componentes, pois o toro possui velocidade diferencial em ϕ . O *grid* utilizado foi $0.01 \leq r \leq 4.0$ com 400 células, usando grade logarítmica que aumenta com a coordenada e $0.0 \leq \theta \leq \pi$ com 350 células em uma grade uniforme.

Para fronteira interna utilizou-se a condição chamada de *outflow*, onde o gradiente das quantidades é zero. A velocidade torna-se zero quando ocorre um *inflow*.

Para que ocorra acreção devemos colocar viscosidade na simulação, já que este será o único fator que transportará momento angular e fará com que o gás caia na direção do centro do potencial. A viscosidade utilizada é dada por $\nu = \alpha\rho^2$ e engloba apenas a viscosidade de *shear*, o outro parâmetro de viscosidade é normalmente colocado como zero. O parâmetro α é a chamada "viscosidade alfa" de Shakura e Sunyaev (1973) e na simulação usou-se $\alpha = 0.01$.

4.3 Resultados

Para o buraco negro de Schwarzschild e de Kerr usou-se os potenciais de PW (Eq. 2.4) e da Artemova, com spin $a = 0.9$, (Eq. 3.1) respectivamente. As figuras a seguir (Figura 4.1 e 4.2) são os resultados das simulações para determinados tempos com escala de densidade logarítmica em unidade de ρ_{max} .

A partir das figuras com $t = 0$ e $t = 0.26$ para os dois potenciais, pode-se notar que a viscosidade tem um papel fundamental no transporte de momento angular, o que faz com que o toro comece a cair em direção ao buraco negro, pois, caso não houvesse viscosidade o toro não teria nenhum mecanismo de transporte de momento angular, pois ele encontra-se em equilíbrio hidrostático e a parte mais interna do disco está em $r \approx 100r_s$ (na simulação utilizou-se $r_s = 0.007$ em unidades de código e o raio mínimo da grade foi de $R = 0.01$). Mas, deve-se notar que, o momento angular deve ser conservado globalmente neste volume, então é possível observar que conforme a parte interna do toro começa a cair (perder momento angular) a parte externa se distancia do buraco negro (ganha momento angular), ou seja, há um transporte da parte interna para a externa.

² Para melhoria do código, pode-se fazer com que a atmosfera esteja em equilíbrio hidrostático

Ainda na imagem em $t = 0.26$ vemos uma onda saindo do buraco negro (melhor observado no vídeo das simulações). Essa onda não representa algo físico, é apenas consequência da condição de fronteira adotada, causando reflexão e conseqüentemente causando uma onda de pressão. Essa condição deve ser arrumada em trabalhos futuros, mas para os interesses do presente trabalho ela não tem influência significativa na física do problema.

Nas figuras para $t = 0.54$ vemos o início de ondulações na superfície do toro. Essas são causadas pelo *shear* devido à diferença de velocidade entre o gás do disco e a atmosfera. Apesar da atmosfera real ser vácuo, conforme o disco é acretado há a formação de ventos que jogam matéria para fora do sistema e esses ventos podem interagir com o toro, causando essas ondulações, que são chamadas de instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Até então os dois potenciais possuem a mesma configuração. Mas em $t = 0.67$ e mais nítido $t = 0.79$ vê-se que para o potencial de Kerr há a formação de prováveis ventos (já que a densidade é menor do que a atmosfera) saindo na direção perpendicular do sistema. Pode-se observar, também, em $t = 0.67$ que conforme o vento é expelido formam-se instabilidades de Rayleigh–Taylor (formação de um "chapéu de cogumelo") que ocorrem devido a um fluido menos denso empurrar um mais denso. Além disso, também vê-se instabilidades de Kelvin-Helmholtz na interface entre o vento e a atmosfera. Esses efeitos não são observados tão intensamente para o potencial de Schwarzschild.

Seguindo a análise, em $t = 2.48$ os toros possuem o mesmo formato mas diferem quanto a espessura e a densidade principalmente na superfície do toro. Também, é possível observar as mesmas instabilidades vistas anteriormente, mas agora na região central do toro. Além disso, provavelmente aquelas células com diferentes densidades vistas nessa mesma região tratam-se de células convectivas, onde há movimento do gás devido a diferença de densidade que ocorre devido a diferença de temperatura. Alguns dos aspectos mencionados - e.g. a formação de prováveis ventos em $t = 0.79$ - são melhor averiguados na animação feita ao obter as Figuras 4.1 e 4.2. Convém mencionar que a análise descrita acima é puramente qualitativa.

Futuramente, pretende-se quantificar a análise do transporte de massa, momento e energia.

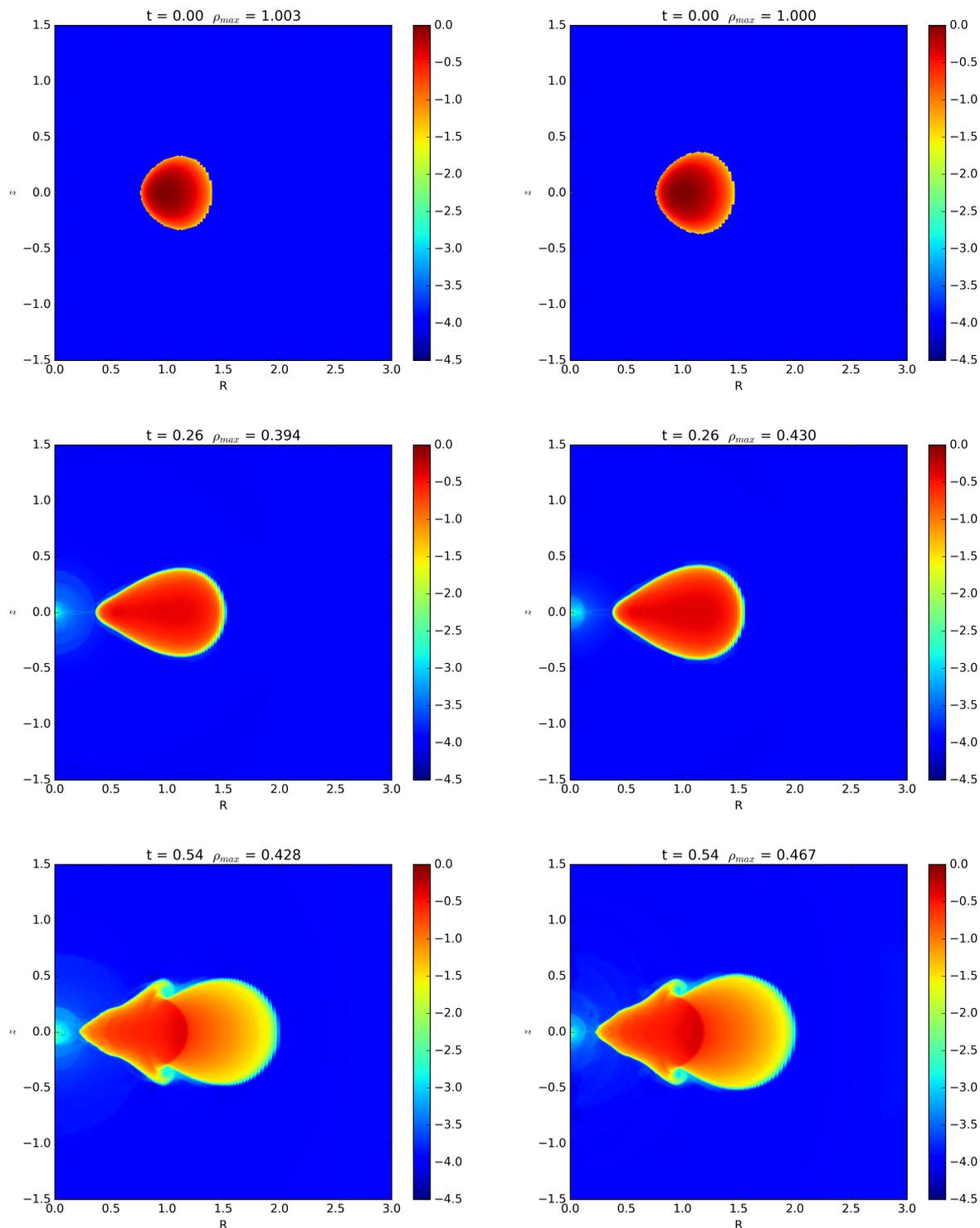


Figura 4.1: Figura que mostra os resultados das simulações para cada potencial e para diferentes tempos de simulação. Do lado esquerdo encontram-se os resultados para o buraco negro de Schwarzschild, usando o potencial de PW. Já do lado direito os resultados para o buraco negro de Kerr, com o potencial da Artemova com spin $a = 0.9$.

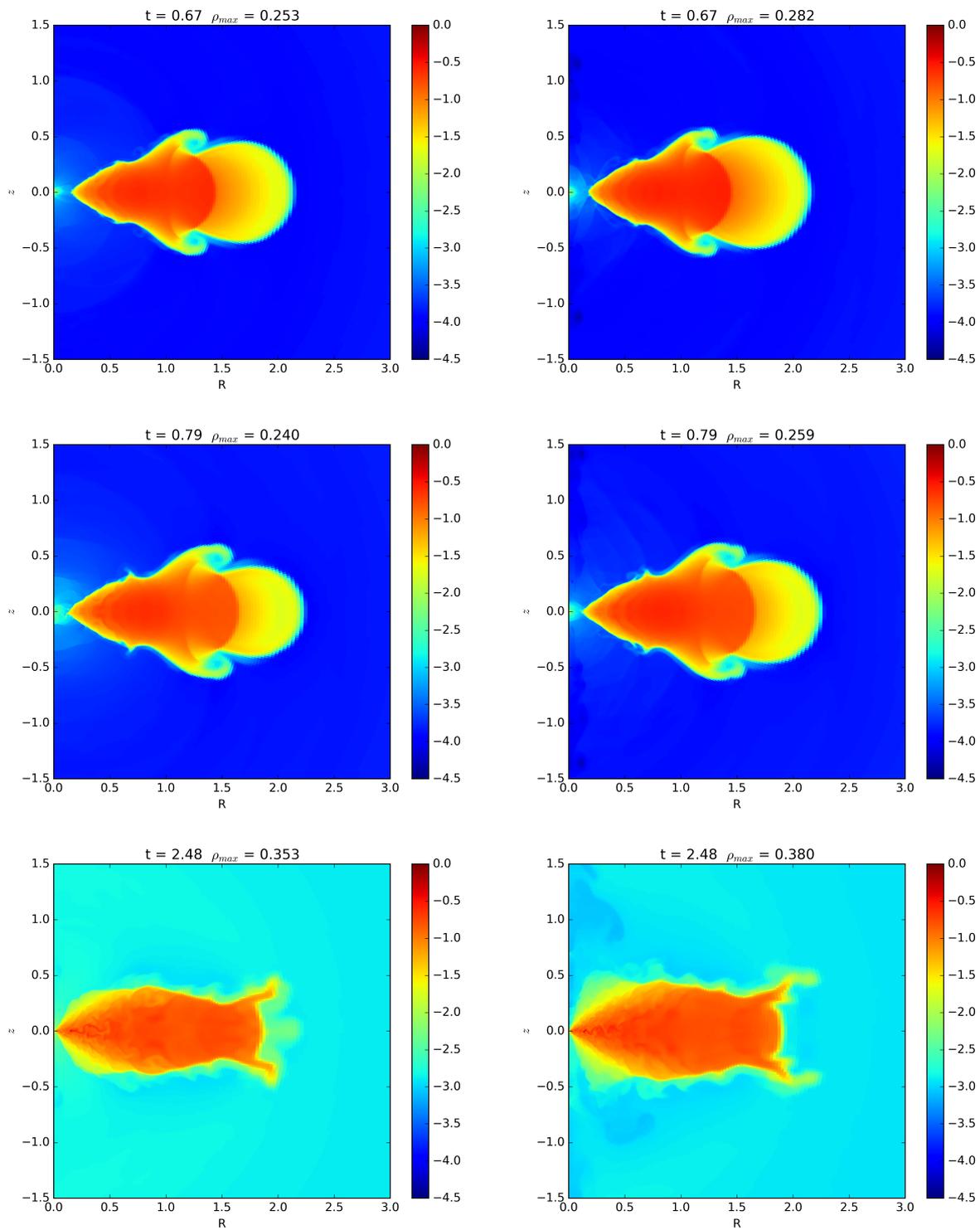


Figura 4.2: Mesma legenda da figura 4.1.

Conclusão e Perspectiva

Neste capítulo será feito um resumo dos principais resultados encontrados para cada tipo de potencial Pseudo-Newtoniano - apropriados para os casos de Schwarzschild e Kerr - e a incorporação destes potenciais nas simulações em HD.

Para o potencial Pseudo-Newtoniano correspondente a métrica de Schwarzschild têm-se que:

- Para L pequeno (< 2.5) potenciais são semelhantes;
- $2.5 \leq L \leq 5$ há diferenças muito grandes na região próxima ao buraco negro;
- Se $L > 5$ os potenciais são bastante similares, mas suas órbitas correspondentes são diferentes;
- Na região onde $V > 0$ os potenciais são distintos para qualquer L ;
- Das comparações entre os potenciais, órbitas e relação $L(r)$ para órbitas circulares o potencial de PW, dentre os citados no trabalho, é o mais indicado para reproduzir o potencial relativístico;
- Se L é grande ($L > 6$), o potencial KL é o que melhor reproduz a forma da órbita relativística.

Para o potencial Pseudo-Newtoniano correspondente a métrica de Kerr os principais resultados são:

- Para $a > 0$ e $V > 0$ têm-se potenciais desiguais para $L \geq 3$ e ainda mais diferentes se $a \gtrsim 0.7$;

- Com $V < 0$ e $a > 0$, se $L < 3.3$ o potencial da Artemova é compatível para qualquer valor de a . Já os outros potenciais não. Se $3.3 \leq L \leq 3.8$ eles são discrepantes para $a \leq 0.5$. Para $a \geq 0.5$ apenas o potencial da Artemova reproduz bem o potencial relativístico. E se $L > 3.8$, Artemova é correspondentes para qualquer valor de a . Mas os outros potenciais são bem diferentes;
- No caso em que $V > 0$ e $a < 0$ os potenciais são maiores do que o potencial de Kerr, quanto maior o valor de $|a|$;
- Com $V < 0$ e $a < 0$, se $L < 3.6$ há pequenas diferenças entre Artemova e Kerr mas, se $3.6 \leq L \leq 5.5$ têm-se boa compatibilidade para $|a| \lesssim 0.5$ e diferenças bastante significativas caso contrário. Um último caso, sendo $L > 5.5$, têm-se grandes semelhanças nos potenciais, sendo que quanto menor $|a|$, maior são essas semelhanças;
- Para spin negativo e L grande as órbitas do potencial da Artemova, mostram-se bastante promissoras ao reproduzir as órbitas relativísticas. Mas o potencial da Artemova reproduz melhor o potencial relativístico para spin positivo. E dos três, esse é o que melhor representa o potencial relativístico.

Em relação à incorporação dos potenciais acima nas simulações em HD temos:

- No início da simulação vê-se o transporte de momento angular para o exterior, como consequência da viscosidade para os dois potenciais;
- Em $t = 0.26$ vê-se uma onda de pressão, que aparenta ser não física. Consequência da condição de fronteira adotada para os dois potenciais;
- Em $t = 0.54$ observa-se o aparecimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz na superfície do toro para os dois potenciais;
- Para $t = 0.67$ é possível ver ventos gerados e com isto têm-se, também, a instabilidade de Rayleigh-Taylor. Isto não ocorre para o potencial de Schwarzschild;
- Com $t = 2.48$ os toros possuem a mesma configuração mas com diferenças nas densidade e espessura. Nesse mesmo tempo, observam-se as instabilidade citadas acima e, possivelmente, células de convecção.

Perspectivas:

-
- Utilizar o aprendizado deste trabalho em trabalhos futuros, onde será feita uma análise mais quantitativa das simulações tais como:
 - Analisar a ocorrência de instabilidade convectiva no toro, utilizando o critério de Hoiland (análise da temperatura e da densidade para que ocorra a convecção);
 - Calcular o fluxo de massa e energia - em particular, quantificar a massa perdida no sistema;
 - Melhorar as condições de fronteira para evitar a onda de reflexão vista;
 - Rodar a simulação por mais tempo, para ver qual a configuração do disco de equilíbrio estacionário;
 - Implementar campos magnéticos para simulações mais realísticas.

Referências Bibliográficas

- Abramowicz M. A., The Paczyński-Wiita potential A step-by-step “derivation”, *A&A*, 2009, vol. 500, p. 213
- Artemova I. V., Björnsson G., Novikov I. D., Modified newtonian potentials for the description of relativistic effects in accretion disks around black holes, *ApJ*, 1996, vol. 461, p. 565
- Ghosh S., Sarkar T., Bhadra A., Newtonian analogue of corresponding space–time dynamics of rotating black holes: implication for black hole accretion, *MNRAS*, 2014, vol. 445, p. 4463–4479
- Hartle J. B., *Gravity : An Introduction to Einstein’s General Relativity*. California: Addison-Wesley, 2003
- Mignone A., Bodo B., Massaglia C., Matsakos T., Tesileanu O., Zanni C., Ferrari A., PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics, *ApJS*, 2007, vol. 170, p. 228
- Mukhopadhyay B., Misra R., Pseudo-newtonian potentials to describe the temporal effects on relativistic accretion disks around rotating black holes and neutron stars, *ApJ*, 2003, vol. 582, p. 347–351
- Papaloizou J. C. B., Pringle J. E., The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum, *MNRAS*, 1984, vol. 208, p. 721–750
- Shakura N. I., Sunyaev R. A., Black holes in binary systems. Observational appearance., *A&A*, 1973, vol. 24, p. 337

Stone J. M., Pringle J. E., Mitchel C., Hydrodynamical non-radiative accretion flows in two dimensions, MNRAS, 1999, vol. 310, p. 1002

Wolfram Research, Inc. Mathematica. Version 11.1. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2017

Yuan F., Narayan R., Hot Accretion Flows Around Black Holes, ARA&A, 2014, vol. 51, p. 69