Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Lucas Sampaio de Amorim

Análise do caos na vizinhança solar através de integração de órbitas e dos Expoentes de Lyapunov

São Paulo
2020

Lucas Sampaio de Amorim

Análise do caos na vizinhança solar através de integração de órbitas e dos Expoentes de Lyapunov

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Astronomia.

Vertente: Pesquisa Básica
Orientador: Prof. Dr. Jacques Raymond Daniel Lépine (IAG/USP)

São Paulo
2020

Aos meus pais, meus maiores e melhores orientadores na vida.

Agradecimentos

Aos meus pais Milton e Zenilda, que, muitas vezes sem entender, me apoiaram a me tornar a pessoa que quis ser;

Ao Professor Jacques, pela paciência e disposição por todos esses anos;

Às Professoras Vera e Jane, que fazem um ótimo trabalho com a disciplina e sempre simpáticas e solícitas;

Ao Ulisses, pela paciência com a verdadeira odisseia do supercomputador;

Ao Artur, pela ajuda inicial e pelas aventuras; ao Enrico, pela sua paciência tibetana; à Fabrícia, pela sua sabedoria salvadora; à Yasmmin, pela revisão, paciência e apoio emocional; ao Eduardo e ao Tarcísio, pelo companheirismo; e a todos meus amigos, que me apoiam e me fazem ser uma pessoa melhor.

Esta tese/dissertação foi escrita em LaTeX com a classe IAGTESE, para teses e dissertações do IAG.

"*One must still have chaos in oneself to be able to give birth to a dancing star.*"

Friedrich Nietszche

Resumo

Este trabalho faz uso do segundo *Data Release* do GAIA e tem por finalidade avaliar a instabilidade das órbitas das estrelas da vizinhança solar, em especial sua associação com as estruturas Galácticas que produzem perturbações gravitacionais, como os braços espirais.

Para agrupar as condições iniciais das órbitas e para ilustrar o conceito de *moving groups*, criou-se um histograma bidimensional das componentes Galácticas da velocidade, evidenciando os grupos de estrelas que possuem propriedades dinâmicas semelhantes. Incluindo um potencial logarítmico para o halo e o modelo de perturbações no potencial gravitacional proposto por Junqueira et al. (2013), que considera quatro braços com rotação, fez-se a integração das órbitas por um período de 10 Ganos, na busca de utilizar os Expoentes de Lyapunov como quantificador de caoticidade.

Buscou-se, devido a limitações técnicas, abordar uma perspectiva teórica da obtenção de um mapa dinâmico que apresenta as regiões de instabilidade no espaço de velocidades das órbitas, e, com isso, a relação do caos em órbitas estelares com as estruturas da Galáxia.

Abstract

In this work, we used the second Data Release from GAIA with the purpose to evaluate the instability of stellar orbits in the solar neighbourhood, in particular its association with the galactic structures that cause gravitational perturbations, such as the galactic spiral arms.

In order to group together the initial conditions and to illustrate the concept of moving groups, a two-dimensional histogram was created using two components of the galactocentric velocities, highlighting the groups of stars that have similar dynamic properties. Including a logarithmic halo potential and the model for gravitational potential perturbations proposed by Junqueira et al. (2013), which considers a rotating four-arms frame, the orbits were integrated for 10 Gyears, aiming the usage of the Lyapunov Exponents as a chaos indicator.

Due to technical limitations, it was sought a theoretical approach for the production of a dynamic map, which presents the regions of instability in the velocity space, and, with that, the relation between chaos in stellar orbits and the structures of the Galaxy.

Sumário

1. Introdução 15

2. Modelo gravitacional e integração numérica 17

2.1 Potencial gravitacional proposto por Junqueira et al. (2013) 17

2.2 Integração númerica das órbitas 19

3. Resultados 21

3.1 Mapa de densidade 21

3.2 Mapa Dinâmico 22

4. Conclusões 27

Referências 29

Capítulo 1

Introdução

Os dados do GAIA *Data Release* 2 (Brown & et al. 2018) trazem informações como a posição no céu, paralaxe, movimento próprio e velocidade radial de 7 224 631 estrelas e com precisão nunca antes vista. Pode-se imaginar que, devido a *surveys* anteriores, pouco se acrescentaria de informação para a vizinhança solar. No entanto, justamente pelo maior número de estrelas e baixo erro nas medidas desse catálogo, muito pode se extrair de novo e aprimorado, como, por exemplo, a cinemática dessas estrelas.

Separando a velocidade das estrelas em duas componentes, é possível visualizar suas distribuições em um mapa de densidade — um histograma bidimensional das duas componentes da velocidade escolhidas. Tais distribuições evidenciam diferentes grupos de estrelas que possuem velocidades similares, e esses são chamados de *moving groups*.

Após a obtenção das posições e das velocidades para as estrelas da amostra, pode-se analisar o comportamento de cada órbita para um longo período de tempo, o que dará uma ideia sobre o comportamento caótico dessas. O caos, em sistemas dinâmicos, é uma situação na qual diferenças mínimas nas condições iniciais adotadas dão origem, depois de um tempo, a resultados muito distintos. Uma das formas de fazer tal análise é realizar a integração das órbitas e analisar a sensibilidade de cada uma quanto às condições iniciais. Para tal, é possível fazer uso de métodos de dois tipos: os espectrais e os variacionais. Os tipos espectrais incluem os números espectrais e a função de autocorrelação integrada, que carrega as mesmas informações que a transformada de Fourier, por exemplo. Já os métodos variacionais usam a sensibilidade às condições iniciais de um sistema sujeito à integração no tempo. Este último, utilizado neste trabalho, atribui uma grande sensibilidade a um sistema muito caótico (Barrio et al. 2009). Para quantificar a sensibilidade de um sistema às condições iniciais utiliza-se o conceito de *caoticidade* e o método para determinar os

graus de caoticidade é descrito na Seção 3.2.

Para a integração, mostra-se fundamental a escolha de um modelo de potencial gravitacional para a Galáxia adequado, para que os distúrbios gravitacionais causados pelos braços sejam suficientemente notórios, reproduzindo, assim, as supracitadas órbitas caóticas.

Um mapa de cor do plano das condições iniciais, no qual a escala de cor representa o grau de caoticidade, constitui um mapa dinâmico. Esse tipo de mapa é um indicador de regiões caóticas, que pode ajudar a entender tanto as causas quanto as consequências da instabilidade dessas órbitas.

Capítulo 2

Modelo gravitacional e integração numérica

2.1 Potencial gravitacional proposto por Junqueira et al. (2013)

Como preparação para o estágio de avaliação da caoticidade das órbitas na vizinhança solar, busca-se uma descrição adequada do potencial gravitacional dos braços espirais da Galáxia, de forma que este seja incluído na rotina computacional responsável pela integração das órbitas. Desta forma, com os distúrbios gravitacionais gerados pelos braços espirais espera-se a produção de órbitas caóticas na vizinhança solar (Michtchenko et al. 2018b).

O potencial a ser elaborado, o proposto por Junqueira et al. (2013), tem o perfil de braços espirais em formatos de gaussiana e, no sistema girante com as espirais, é dado pela Equação 2.1

$$\Phi(R,\varphi) = -\zeta_0 R e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}[1-\cos(m\varphi - f_m(R))] - \varepsilon_s R} \tag{2.1}$$

onde, R é a distância galactocêntrica, φ é o ângulo azimutal medido com respeito ao eixo-x (perpendicular à direção do Sol), ζ_0 é a amplitude do potencial, σ é a largura do perfil gaussiano na direção azimutal galactocêntrica, ε_s^{-1} é a escala de tamanho da espiral e $f_m(R)$ é a função da forma, dada pela Equação 2.2 onde i representa o *pitch angle*, R_i é o ponto no qual a espiral cruza a coordenada $x = 0$ e γ é apenas o ângulo de fase.

$$f_m(R) = \frac{m}{\tan(i)} \ln\left(R/R_i\right) + \gamma \tag{2.2}$$

Os valores para os parâmetros foram os mesmos utilizados em Junqueira et al. (2013), devido à intenção de comparação dos (nossos) resultados com a literatura.

Para descrever o potencial gravitacional de Junqueira de maneira que possa ser implementado na biblioteca `galpy`, buscou-se primeiro compreender as formalidades que o

código precisa seguir. Além disso, foi necessário examinar formas de incluir um potencial não nativo do pacote em Python mantendo a funcionalidade das diversas ferramentas oferecidas.

Feito isso, iniciou-se com a implementação da função que apenas avalia o valor do potencial para uma dada posição na Galáxia. Para a averiguação da funcionalidade do código, fez-se um mapa bidimensional do plano galáctico, representando o valor do potencial através de uma escala de cor (Figura 2.1). Utilizou-se os mesmos valores de σ que os escolhidos para a Figura 2 de Junqueira et al. (2013), para proporcionar melhor comparação.

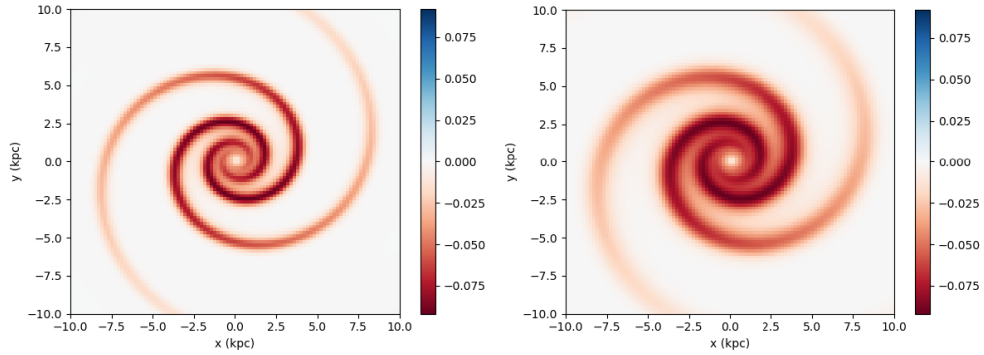

Figura 2.1: Mapa bidimensional do potencial de Junqueira no plano galáctico com a representação dos valores do potencial em unidades arbitrárias entre -0,1 e 0,1. À esquerda o potencial com σ = 2,5 kpc e à direita com σ = 4,7 kpc.

Com esse resultado é possível fazer a comparação com o obtido por Junqueira et al. (2013), reproduzido na Figura 2.2.

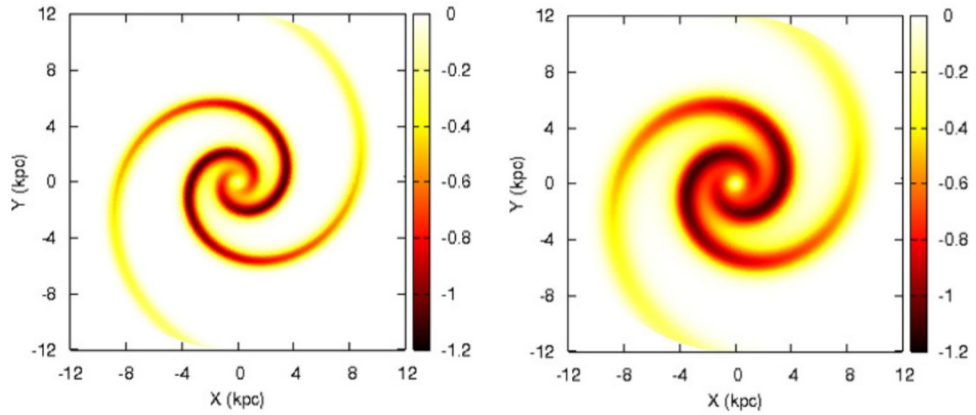

Figura 2.2: Mapa do potencial de Junqueira no plano galáctico. As cores representam os valores do potencial em unidades arbitrárias. À esquerda temos o potencial com σ = 2,5 kpc e à direita, σ = 4,7 kpc. Fonte: Fig. 2 de Junqueira et al. (2013).

Concluída a caracterização da rotina responsável pela avaliação do valor do potencial em uma determinada coordenada galáctica, passou-se para as funções suplementares, que serão usadas para cálculos futuros como a integração de uma órbita ou simplesmente para a obtenção da curva de rotação que esse potencial produz.

As funções suplementares correspondem às derivadas parciais do potencial com respeito às coordenadas galactocêntricas R e φ, o que inclui as de primeira ordem, segunda ordem e as mistas.

Pretendendo uma comparação de resultados, fez-se um gráfico da força radial F_R, tal que $F_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}$. O mesmo gráfico obtido pelo programa feito e o correspondente de Junqueira et al. (2013) encontram-se na Figura 2.1.

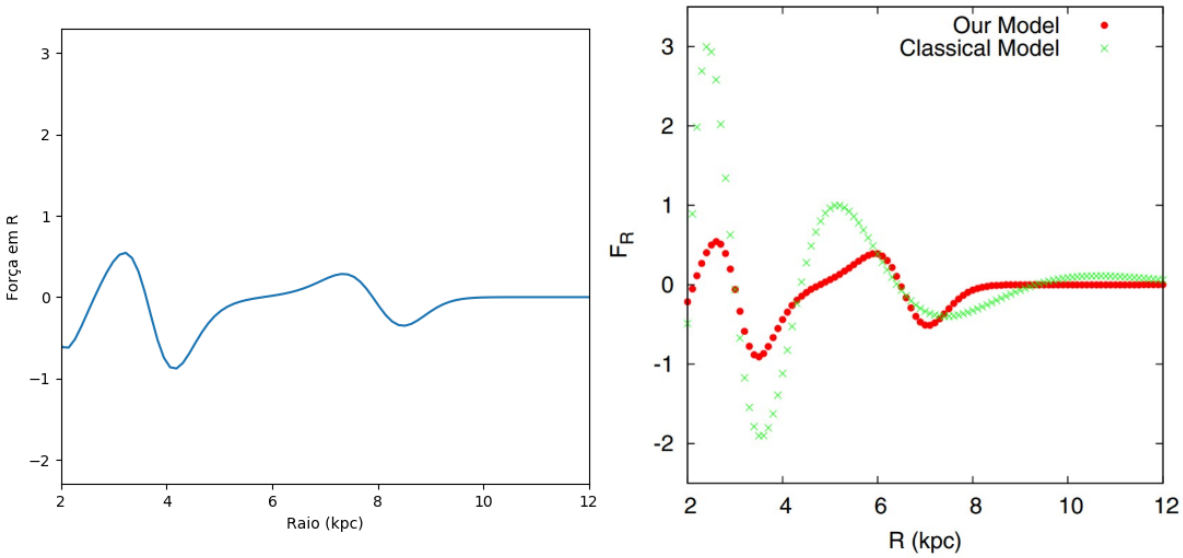

Figura 2.3: Força radial devida ao braço espiral na direção $\varphi = 0$, à esquerda obtida pelo programa desenvolvido e à direita apresentada por Junqueira et al. (2013), em vermelho. Para ambos, foi considerado $m = 2$, $i = 14°$, $\varepsilon_s = 0,4$ kpc^{-1} e $\sigma = 4,7$ kpc. Fonte: Junqueira et al. (2013).

2.2 Integração número das órbitas

Com a intenção de aplicação de métodos variacionais como indicadores de caos, faz-se necessário o desenvolvimento de um método de integração numérica para as órbitas das estrelas da amostra.

Para o código, fez-se uso da biblioteca `galpy`, na linguagem Python, devido às diversas ferramentas disponíveis para o estudo da Galáxia e de órbitas estelares (Bovy 2015).

Definiu-se o tempo de integração como 10 Ganos dividido em 1000 passos e o método de integração utilizado foi o LSODA (*Livermore Solver* para Equações Diferenciais Ordinárias com o método automático de comutação para problemas rígidos e não-rígidos) fornecido pela biblioteca citada.

Utilizando o potencial gravitacional descrito na Seção 2.1, faz-se necessário combiná-lo com outro potencial axissimétrico para a integração. Utilizou-se para isso o potencial gravitacional logarítmico do halo que, por si só, produz uma curva de rotação plana que é uma aproximação adequada para a proximidade da vizinhança solar (Barros et al. 2016). Então, fez-se a integração de algumas órbitas-teste. A representação no plano galáctico de uma das órbitas integradas se encontra na Figura 2.4.

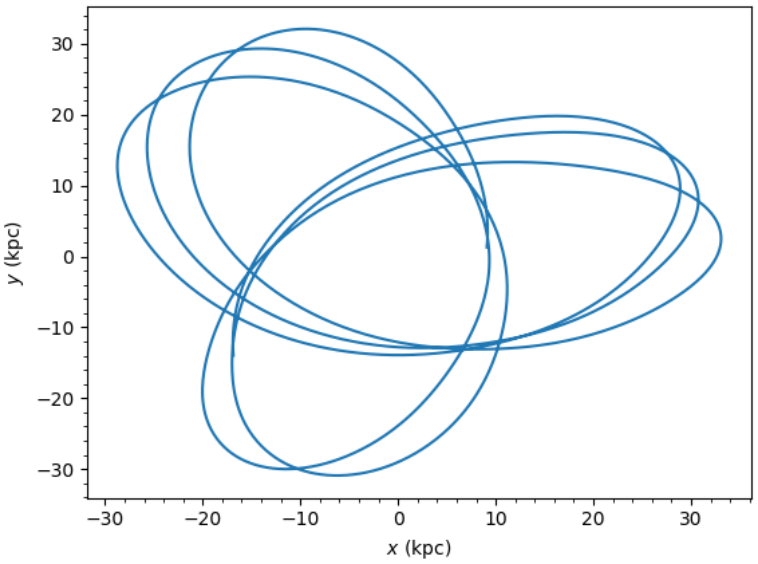

Figura 2.4: Representação no plano galáctico de uma órbita-teste integrada utilizando uma combinação do potencial de Junqueira com o potencial logarítmico do halo por um período de tempo arbitrário.

Capítulo 3

Resultados

NEste capítulo discute-se o mapa de densidade das velocidades galactocêntricas obtido para a vizinhança solar (Seção 3.1) e apresenta-se um resultado da literatura para o mapa dinâmico, com uma breve discussão teórica (Seção 3.2).

3.1 Mapa de densidade

Com a finalidade da obtenção de um mapa de densidade, limitado à vizinhança solar, seleciona-se as estrelas com distância menor que 200 parsecs do Sol, com as quais é feito um histograma em duas dimensões, sendo elas a componente radial da velocidade galactocêntrica da estrela apontando para o centro da Galáxia (U) e a outra a componente da velocidade na direção da rotação galáctica (V). O mapa de densidade das velocidades galactocêntricas das estrelas na vizinhança solar encontra-se na Figura 3.1. A escala de cor está normalizada e os limites dos eixos foram tais a enfatizar as velocidades galactocêntricas próximas da do Sol, para o qual $U_\odot = 11,1\ km/s$ e $V_\odot = 232,24\ km/s$ (Schönrich et al. 2010), permitindo uma variação de 160 km/s para U e 90 km/s para V.

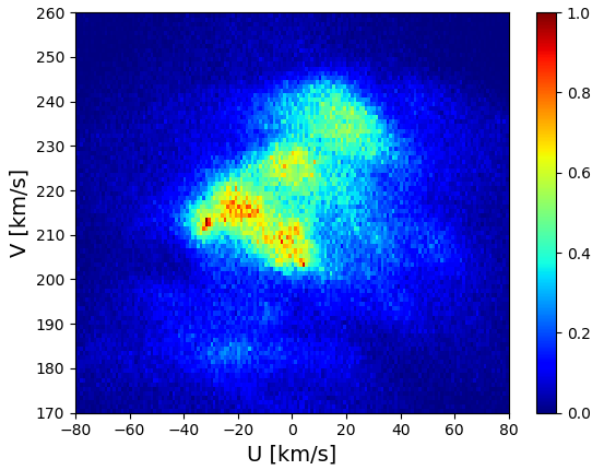

Figura 3.1: Histograma bidimensional representando o mapa de densidade relativo às componentes U e V da velocidade galactocêntrica das estrelas com distância menor que 200 pc do Sol. Em ambas as direções, os bins têm tamanho de 1 $km\,s^{-1}$. A escala de cor indica a frequência normalizada de estrelas por $(km/s)^2$ e a amostra analisada possui aproximadamente 330000 estrelas.

Analisando as regiões de alta densidade no espaço das velocidades podemos também ilustrar o conceito de *moving groups*, que podem ser definidos por uma pequena região do mapa, representando, desta forma, estrelas que tenham propriedades dinâmicas semelhantes. Alguns deles já são, inclusive, nomeados e conhecidos muito antes dos novos dados do GAIA e são uma ferramenta poderosa para o estudo em grande escala da estrutura da Galáxia (Antoja et al. 2008).

3.2 Mapa Dinâmico

Discute-se aqui uma abordagem teórica da obtenção do mapa dinâmico utilizando os Expoentes de Lyapunov como indicador de caoticidade.

Um mapa dinâmico apresenta o grau de caoticidade de um sistema em função de suas condições iniciais, representadas no espaço de velocidades que é, neste caso, bidimensional. O grau de caoticidade — aqui também chamado de *caoticidade* — revela a sensibilidade do sistema às condições iniciais e pode ser obtido de diversas formas, sendo elas divididas entre métodos variacionais e espectrais. Os métodos espectrais mais simples consistem na contagem dos números de picos no espectro de potência de alguma função, que pode ser estudado por, por exemplo, uma transformada de Fourier aplicada nas séries temporais. Um dos métodos variacionais é o que utiliza os Expoentes de Lyapunov (Barrio et al. 2009).

Nesse método, com finalidade de determinar a sensibilidade às condições iniciais que uma órbita possa ter, cria-se uma órbita secundária com o mesmo conjunto de parâmetos, exceto seu raio, no qual é feito um deslocamento infinitesimal. Define-se uma quantidade $\xi(t)$, que representa a separação entre a órbita original e sua cópia modificada, de modo que, de uma forma simplificada:

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda(t)}$$

onde $\lambda(t)$ é o Expoente Caracterísitico de Lyapunov dado um tempo t e ξ_0 é a separação inicial das órbitas. A sensibilidade em questão é refletida no Máximo Expoente Característico de Lyapunov (MECL) (Barrio et al. 2009). Dessa forma, o MECL, λ, pode ser obtido da expressão

$$\lambda = \max \ln \frac{\xi(t)}{\xi_0}$$

A dependência sensível nas condições iniciais se reflete quando $\xi = ||\xi||$ cresce exponencialmente e a caoticidade é revelada por λ, o valor positivo do MECL (Barrio et al. 2009).

Pode-se aplicar, então, esse método descrito, com a separação inicial entre os raios galactocêntricos das órbitas sendo relativamente pequena, como 10 pc. Desta forma, faz-se a integração das órbitas, considerando para os *moving groups* a mesma distância galactocêntrica que a do Sol — 8,3 kpc (de Grijs & Bono 2017). A integração pode ser feita pelo método descrito na Seção 2.2.

Com o método de integração das órbitas, é possível obter um mapa bidimensional usando as componentes galactocêntricas U e V nos eixos e a caoticidade representada por uma escala de cor.

No trabalho de Michtchenko et al. (2018b), um mapa dinâmico é produzido a partir de um modelo galáctico composto de um disco e braços espirais. Nele, são apresentados o mapa de densidade e mapa dinâmico reproduzidos na Figura 3.2.

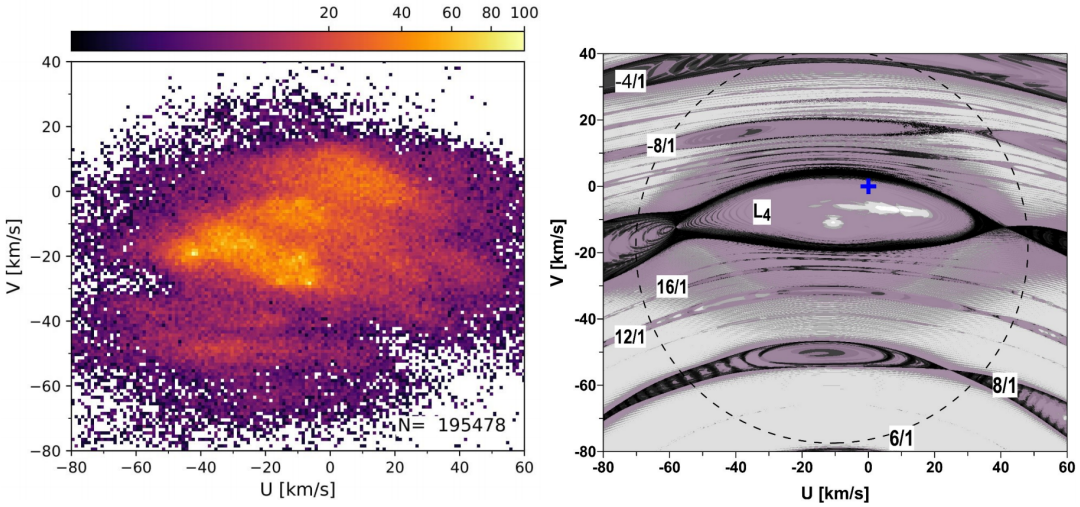

Figura 3.2: Esquerda: Distribuição da velocidade heliocêntrica das estrelas do GAIA no plano U-V, com distância menor que 150 pc do Sol. Apresenta-se um histograma 2D da velocidade com *bins* de 1 km s^{-1} nas duas direções. A escala de cor indica a porcentagem de estrelas por $(km/s)^2$. Direita: Mapa dinâmico no mesmo plano construído nas posições iniciais do Sol, R = 8,0 kpc e $\varphi = 90^o$. As ressonâncias principais estão identificadas pelas razões correspondentes. O raio de corrotação está associado o símbolo L_4. A posição do Sol está destacada por uma cruz azul. A circunferência tracejada representa um nível de energia cinética. Fonte: Adaptada da Fig1 de Michtchenko et al. (2018b).

Na Figura 3.2, o resultado de Michtchenko et al. (2018b) para o mapa de densidade utiliza as velocidades heliocêntricas disponibilizadas pelo GAIA *Data Release* 2 (Brown & et al. 2018) com restrição de 150 pc para a distância das estrelas ao Sol, e, para o mapa dinâmico, utiliza o modelo galáctico citado.

À direita, no mapa dinâmico, os tons de cinza mais claros denotam órbitas regulares e cores mais escuras, as órbitas instáveis e caóticas. Ainda, regiões em roxo designam regiões de ressonância e quase-ressonâncias. As estrelas em órbitas caóticas delineiam as fronteiras da estabilidade no mapa, fronteiras quais estão associadas à separatriz (Michtchenko et al. 2017). As ressonâncias se dão quando a razão entre a frequência de rotação da estrela $\Omega(R)$ e a epicíclica $\kappa(R)$ resulta em um número inteiro, de forma que, ao adotar a aproximação epicíclica para as órbitas quase circulares temos

$$\Omega_p - \Omega = \pm\frac{\kappa}{n}$$

onde Ω_p é a frequência de rotação do sistema dos braços e n é um número inteiro. A aproximação acima identifica as chamadas ressonâncias de Lindblad, sendo elas internas quando o sinal é negativo e externas quando o sinal é positivo (Binney & Tremaine 1987). Alguns pontos de ressonância estão identificados no plano U-V na Figura 3.2. Além disso,

está também destacado o ponto L4 que está relacionado ao raio de corrotação — raio no qual $\Omega = \Omega_p$ — na presença das estruturas do braço espiral e da barra (Michtchenko et al. 2018a).

Lembra-se que as ressonâncias modificam a dinâmica das estrelas ao capturá-las e mantê-las nas zonas estáveis, causando um aumento de densidade no plano U-V. De forma contrária, há uma diminuição da densidade em pontos do plano U-V associados aos pontos de sela e separatrizes (Michtchenko et al. 2018b).

Capítulo 4

Conclusões

Nota-se que o potencial de Junqueira foi adequadamente descrito em termos computacionais, tanto o seu valor dado uma coordenada galáctica quanto as expressões para suas derivadas, que são utilizadas na integração da órbita. Quanto à rotina de integração de órbitas, também obteve-se um resultado satisfatório, sendo assim possível ter prosseguido para as partes seguintes do trabalho.

O mapa de densidade — histograma bidimensional da combinação das componentes das velocidades das estrelas — se mostrou igualmente conforme, de forma que não se detectam anomalias e é possível identificar as estruturas dos *moving groups* já bem conhecidos, como o de Coma-Berenices, Híades-Pleiades, Sírius e Hércules (Antoja et al. 2008).

Apesar da impossibilidade de se ter obtido um mapa dinâmico próprio — devido a problemas técnicos com o acesso e utilização do sistema de computação do Departamento de Astronomia, necessário já que os cálculos computacionais relacionados ao uso dos Expoentes de Lyapunov são intensos para um computador pessoal de capacidade de processamento comum —, apresentou-se um resultado similar ao esperado, obtido por Michtchenko et al. (2018b). Podemos associar, a partir da Figura 3.2 e do artigo de Antoja et al. (2008), a região de corrotação aos *moving groups* de Coma-Berenices e Híades-Pleiades, onde houve um aumento da densidade devido à estabilidade da zona do raio de corrotação. Também, nota-se a influência da ressonância interna de Lindbald 8/1 no *moving group* de Hércules.

Dessa forma, é possível explicar as estruturas da vizinhança solar utilizando um modelo simples para o potencial da Galáxia. Espera-se futuramente obter um resultado similar ao apresentado, fazendo uso, porém, dos Expoentes de Lyapunov como indicador de caos no mapa dinâmico, sendo possível contrapor ambos métodos de análise do caos, além de expandir o modelo do potencial para considerar o potencial da barra e outras perturbações,

aumentando a verossimilhança do mesmo.

Referências Bibliográficas

Antoja T., Figueras F., Torra J., 2008, A&A, 490, 135–150

Barrio R., Borczyk W., Breiter S., 2009, Chaos, Solitons and Fractals, 40, 1697

Barros D., Lépine J., Dias W., 2016, A&A, 593, A10

Binney J., Tremaine S., 1987, Galactic Dynamics. Princeton University Press

Bovy J., 2015, Astrophys. J. Supp., 216, 29

Brown A. G. A., et al. 2018, A&A, 616, A1

Junqueira T. C., Lépine J., Braga C. A. S., Barros D., 2013, A&A, 550, A91

Michtchenko T. A., Vieira R. S. S., Barros D., Lépine J. R. D., 2017, A&A, 597, A39

Michtchenko T. A., Lépine J. R. D., Barros D., Vieira R. S. S., 2018a, A&A, 615, A10

Michtchenko T. A., Lépine J. R. D., Pérez-Villegas A., Vieira R. S. S., Barros D., 2018b, ApJL, 863, L37

Schönrich R., Binney J., Dehnen W., 2010, MNRAS, 403, 1829

de Grijs R., Bono G., 2017, ApJS, 232, 22