Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Willian Yuuiti Nacafucasaco

Órbitas estelares em galáxias espirais

São Paulo
2021

Willian Yuuiti Nacafucasaco

Órbitas estelares em galáxias espirais

Relatório final do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Astronomia, Geofisica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do tıtulo de Bacharel em Astronomia.

Vertente: Pesquisa Básica
Orientador(a): Prof.(a) Dr.(a) Tatiana A. Michtchenko

São Paulo

2021

Dedico este trabalho à minha falecida avó, Sadaco Kanehira Nacafucasaco, e meu falecido tio, Akio Nacafucasaco. Embora não tenham visto o quão longe cheguei, foram eles que me fizeram dar o primeiro passo.

Agradecimentos

À minha família: Heloisa Mitsue Nacafucasaco, Leila Regina Rodrigues, Mieko Nacafucasaco, Luciane Keiko Shimoda, Rogério Hissashi Nacafucasaco, Tânia Massae Nacafucasaco, Artur Kioshi Nacafucasaco, pelo apoio que me deram durante toda minha vida;

À orientadora Tatiana Alexandrovna Michtchenko por me guiar neste projeto incrível que está sendo e por sempre estar disposta a me ensinar;

Aos pesquisadores: Laerte Sodré Júnior e Tatiana Alexandrovna Michtchenko, pelas excelentes áreas de pesquisas e por me inserirem no mundo acadêmico;

Aos meus amigos: João Victor Corrêa Rodrigues, David Fernando Freitas da Silva Cavalcante, Vitória Bellecerie da Fonseca, Nícolas Dick Vidal de Oliveira, Melissa de Andrade Nunes, Giulia Martos, Gabriel Menezes Sousa, Lucas Melani Rocha Volpe, Giovani Heinzen Vicentin, Rafael Hideki Cardoso Ishida, Pedro Ticiani, Beatriz Zacarias, Carolina Silveira de Moraes, Lucas do Nascimento Degi, Ingrid dos Santos Beloto, Guilherme Augusto Latini Leite, Rafael Santos Flauzino, Affonso Gino Amendola Neto, Caio Eduardo Cabral de Vasconcellos, Gabriel Giulianno de Camargo Pimentel, por me acompanharem durante essa longa jornada;

Ao PUB, pelo apoio financeiro, sob o projeto nº: 1537 do ano 2021.

Esta tese/dissertação foi escrita em LaTeX com a classe IAGTESE, para teses e dissertações do IAG.

"*You said science was about admitting what we don't know.*"

Murphy Cooper, do filme Interstellar (2014)

"*A única coisa que podemos fazer é acreditar que não vamos nos arrepender da escolha que fizemos.*"

Levi Ackerman, do anime Attack on Titan (2013)

Resumo

Os estudos de dinâmica estelar possuem suas importâncias principalmente quando aplicados à Via Láctea, com a finalidade de entender o ambiente em que o Sistema Solar se encontra. Alguns modelos foram propostos durante o século XX, servindo como base para formulações matemáticas que permitiram descrever o comportamento de estrelas em braços espirais. Neste contexto, o projeto tem como o objetivo principal calcular e analisar os movimentos estelares em galáxias sob efeito de perturbações ocasionadas pelos seus braços e, com isso, compreender melhor essa enigmática estrutura. Os métodos adotados são teóricos e numéricos, visando as deduções e análises das equações de movimento que descrevem como uma partícula se move sob efeito do potencial gravitacional galáctico, e então obter as soluções por meio de técnicas puramente numéricas. Como resultados, determinamos, via formulação Hamiltoniana, as equações que descrevem a dinâmica do problema, sendo possível deduzir as condições de equilíbrio de uma estrela. Além disso, definimos os planos representativos das condições iniciais, que cobrem todo o espaço de fase do sistema e apresentamos a topologia do problema por meio de gráficos de níveis de energia da Hamiltoniana. Estes resultados permitiram a construção das seções das superfícies, que é o conjunto de seções de Poincaré de diversos objetos com condições iniciais distintas, mas de mesma energia, na qual foi possível classificar as órbitas nos arredores do Sol, identificando zonas de ressonância, caóticas e de co-rotação.

Abstract

The studies of stellar dynamics have their importance mainly when applied to the Milky Way, with the purpose of understanding the environment in which the Solar System finds itself. Some models were proposed during the 20th century, serving as a basis for mathematical formulations that allowed to describe the behavior of stars in spiral arms. In this context, the project's main objective is to calculate and analyze stellar movements in galaxies under the effect of disturbances caused by their arms and, with this, better understand this enigmatic structure. The adopted methods are theoretical and numerical, aiming at the deduction and analysis of the equations of motion that describe how a particle moves under the effect of the galactic gravitational potential, and then to obtain the solutions through purely numerical techniques. As a result, we determined, via Hamiltonian formulation, the equations that describe the dynamics of the problem, making it possible to deduce the equilibrium conditions of a star. Furthermore, we define the representative planes of the initial conditions, which cover the entire phase space of the system, and we present the topology of the problem by plotting the Hamiltonian energy levels. These results allowed the construction of the surface sections, which is the set of Poincaré sections of several objects with different initial conditions, but of the same energy, in which it was possible to classify the orbits around the Sun, identifying resonance, chaotic and co-rotation zones.

Lista de Figuras

2.1 Representação dos referenciais adotados 25
2.2 Curva de rotação e potencial axis-simétrico 28
2.3 Mapa de cores para o potencial perturbado 30

3.1 Níveis de energia para o plano X-Y 35
3.2 O plano representativo r-V_θ 37
3.3 O plano representativo r-p_r 37
3.4 Comparação da amplitude de perturbação 38

4.1 Evolução temporal para o movimento do Sol. 41
4.2 Espaços de fase do movimento solar. 42
4.3 Trajetória do Sol no plano X-Y 42
4.4 Um esquema das Seções de Poincaré. 43
4.5 Seção de Poincaré para as soluções do Sol. 44
4.6 Seções das superfícies ao redor do Sol. 45

Lista de Tabelas

2.1 Valores dos parâmetros ajustados para a curva de rotação. 27
2.2 Constantes físicas adotadas no modelo. 29

4.1 Valores numéricos da condição inicial do Sol. 40

Sumário

1. Introdução 19

1.1 Introdução histórica 19

1.2 Motivações e objetivo 20

2. O problema dinâmico de uma galáxia sob efeitos perturbativos 23

2.1 A formulação Hamiltoniana 23

2.2 Dinâmica estelar sob efeito do potencial galáctico 24

2.2.1 A escolha dos referenciais 25

2.2.2 O sistema não perturbado 26

2.2.3 O potencial perturbado 28

2.2.4 A Hamiltoniana do sistema e as equações de movimento 30

3. Os níveis de energia da Hamiltoniana 33

3.1 Soluções de equilíbrio 33

3.2 A topologia de $\mathcal{H}$ 34

3.2.1 O Plano X-Y 34

3.2.2 Os Planos r-V_θ e r-p_r 36

4. Dinâmica estelar em galáxias espirais 39

4.1 Integração das órbitas 39

4.1.1 O método de Runge-Kutta de 4ª ordem 39

4.1.2 A órbita do Sol 40

4.2 As Seções de Poincaré e Caos 43

4.3 Seções de superfícies 44

5. Conclusões e perspectivas futuras 47

Referências 49

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução histórica

Em astronomia, galáxias espirais são belíssimas estruturas que encantam diversas pessoas. Em particular, a Via Láctea é um grande exemplo de uma galáxia com braços espirais, e sua primeira observação instrumental foi feita por Galileu[1], quando apontou sua luneta para algo que se parecia um "caminho de leite" no céu, e por isso leva este conhecido nome.

Compreender os braços espirais presentes nesses tipos de galáxias vem sendo um longo estudo, e ainda não se tem um consenso geral aceito. Diversos autores consideram que essas estruturas são de longa vida (em torno de bilhões de anos) que se movimenta como um corpo rígido, como por exemplo, o primeiro modelo para os braços espirais proposto por Lin & Shu (1964), no qual considerou-se as estrelas como um fluido. As ideias mais recentes adotam um conceito introduzido por Kalnajs (1973), onde os braços são considerados como lugares com órbitas galácticas vizinhas de estrelas tornando-se próximas uma da outra, formando assim regiões com alta densidade estelar ou poço de potencial em forma de uma espiral alongada.

O modelo de Kalnajs é bem promissor, uma vez que o mesmo fornece uma abordagem mais precisa da natureza dos braços espirais como regiões onde órbitas estelares são acumulados. No entanto, isso é meramente uma aproximação, pois faz somente o uso da contribuição vinda do potencial axis-simétrico (detalhes deste potencial é apresentado no Capítulo 2, na Seção 2.2.2). Com o desejo de buscar uma autoconsitência, deve-se introduzir efeitos perturbativos nas órbitas estelares, que por sua vez, alteram as suas formas e

[1] Galileo di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564-1642)

também as regiões de acúmulo mencionadas e, se no final a distribuição de densidade for aproximadamente igual à inicial, o modelo é dito autoconsistente.

O modelo clássico para o potencial perturbativo foi construído com base nos trabalhos de Contopoulos & Grosbol (1986) e Patsis et al. (1991), que buscaram obter resultados aproximadamente autoconsistente em termos das formas dos braços para galáxias espirais com braços largos, e também nos de Amaral & Lépine (1996) e Pichardo et al. (2003), que estudaram o caso particular da Via Láctea. Com essas contribuições, uma expressão para a perturbação clássica foi encontrada, dada por:

$$\Phi_1(r,\phi) = \zeta_0 r e^{-\epsilon_s r} \cos\left(m\frac{\ln(r)}{\tan(i)} - m\phi\right), \tag{1.1}$$

com as constantes sendo devidamente apresentadas no Capítulo 2 na Seção 2.2.3. No entanto, a Equação 1.1 não oferece uma abordagem realista, pois o perfil de brilho observado nos discos galácticos em torno do seu centro não se comportam como funções senos e cossenos. Portanto, outro modelo foi proposto por Junqueira et al. (2013), abordando um caso mais realista, considerando que esses perfis possuem um formato gaussiano.

1.2 Motivações e objetivo

Este trabalho tem como objetivo estudar a dinâmica estelar em galáxias espirais, em especial a Via Láctea, através do conceito introduzido por Kalnajs e do novo modelo para o potencial gravitacional perturbativo gerado pelos braços, proposto por Junqueira et al. (2013). Para tal, usa-se uma abordagem similar aos trabalhos de Lépine et al. (2017) e Michtchenko et al. (2017), consistindo em aplicar diversas técnicas matemáticas e computacionais para resolver as equações dinâmicas e então compreender não só essas estruturas, mas também sua influência na evolução cinemática da Via Láctea. Serão feitas também comparações dos resultados obtidos tanto para o modelo de Junqueira (Equação 2.12) quanto para o clássico (Equação 1.1).

O Capítulo 2 introduz o formalismo Hamiltoniano usado neste trabalho, bem como as equações de movimento para tal. Além disso, é colocado o problema definindo os dois referenciais de interesse, um inercial e outro girante (não inercial), de modo que a Hamiltoniana do sistema ($\mathcal{H}$) possa ser construída e dela deduzidas as equações de movimento. No Capítulo 3, são determinadas as soluções de equilíbrio, estas sendo bem importantes do ponto de visto dinâmico. Ademais, foi realizado a análise da topologia de

$\mathcal{H}$, consistindo em estudar os níveis de energia da mesma por meio de diferentes planos representativos, fixando as condições iniciais do problema. No Capítulo 4 são apresentadas as soluções das equações de movimento para a condição inicial do Sol por meio da integração numérica de equações diferenciais, o estudo teórico e aplicação das seções de Poincaré e a construção das seções de superfícies para diversas órbitas de estrelas nos arredores do Sol. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões dos resultados obtidos e também foram colocadas algumas perspectivas futuras para o projeto.

Capítulo 2

O problema dinâmico de uma galáxia sob efeitos perturbativos

2.1 A formulação Hamiltoniana

No estudo da Mecânica Clássica, é comum usar o conceito de forças para caracterizar o movimento de um objeto, como por exemplo, uma partícula em queda livre que está sob efeito da força da gravitacional gerado por um outro corpo mais massivo. Tal definição, é conhecida como a concepção Newtoniana, na qual surgem as famosas 3 leis de Newton[1] e a lei da Gravitação Universal. Contudo, existem outras possíveis formulações para o estudo dinâmico de um corpo, e a de interesse é a Hamiltoniana.

De maneira geral, a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ de um sistema está intimamente relacionada com a Lagrangeana $\mathcal{L}$ correspondente, vide Taylor (2005). Então, se q_i e p_i $(i = 1, \ldots, n)$ são as coordenadas generalizadas e momentos canônicos (este último é por vezes chamado de momento conjugado à q_i) representando a posição e o momento (podendo ser linear e/ou angular) respectivamente, então $\mathcal{H}$ é definida conforme segue a Equação 2.1:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dt} - \mathcal{L}. \tag{2.1}$$

A Equação 2.1, em termos da linguagem de cálculo variacional, é uma transformação de Legendre[2]. Em particular, se a relação entre as coordenadas generalizadas q_i com as subjacentes coordenadas cartesianas (x_i com $i = 1, \ldots, n$) forem independentes do tempo, então a Equação 2.1 se reduz a:

$$\mathcal{H} = T + U, \tag{2.2}$$

[1] Sir Isaac Newton (1643-1727)

[2] Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

onde T e U representam as energias cinética e energia potencial totais da partícula, respectivamente. Além disso, as equações de movimento que descrevem como um corpo se move em uma determinada configuração de energia, são expressas pelas Equações de Hamilton[3]:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \tag{2.3}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \tag{2.4}$$

com $i = 1, \ldots, n$. No geral, as Equações 2.2, 2.3 e 2.4 serão a base para o desenvolvimento inicial do estudo dinâmico de uma estrela em galáxias espirais.

As expressões colocadas até o momento levam em conta que a Lagrangeana é independente (explicitamente) do tempo. No geral, a Equação 2.1 é escrita como:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dt} - \mathcal{L}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Portanto, se a Lagrangeana não depende explicitamente do tempo, então a quantidade definida como $\mathcal{H}$ é conservada e, quando isso ocorre, a energia total do sistema é a própria Hamiltoniana.

A descrição Hamiltoniana é, e deve ser, equivalente às formulações Newtoniana e Lagrangeana, pois os princípios físicos devem ser obedecidos independente de como os problemas são retratados. No entanto, a Hamiltoniana possui suas vantagens, pois a mesma permite o desenvolvimento da Teoria de Hamilton-Jacobi[4] e a Teoria de Perturbações. Essa última é de extrema importância no trabalho em questão, uma vez que o potencial gerado pelos braços espirais é tratado como uma pequena perturbação nas órbitas estelares. Além da Mecânica Clássica, o formalismo Hamiltoniano é presente em outras duas grandes áreas da física: Mecânica Quântica e Mecânica Estatística, evidenciando assim a sua importância.

2.2 Dinâmica estelar sob efeito do potencial galáctico

O objeto de estudo é uma estrela sob o efeito do potencial gravitacional gerado por uma galáxia espiral, incluindo os seus braços. De modo geral, o potencial galáctico total pode ser separado em duas componentes, uma produzida pela curva de rotação (denominada

[3] William Rowan Hamilton (1805-1865)

[4] Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)

potencial axissimétrico, a qual é discutida na Seção 2.2.2) e outra devido aos braços espirais (sendo essa uma pequena perturbação).

2.2.1 A escolha dos referenciais

Em qualquer estudo de dinâmica, é preciso definir um sistema de coordenadas, em outras palavras, o movimento de uma partícula é representado no espaço de posições, que em geral é o Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3 = \{(X, Y, Z) \mid X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R} \text{ e } Z \in \mathbb{R}\}$). Em particular, adotou-se 2 referenciais no plano $Z = 0$, um inercial $S = \{X, Y\}$ e outro não inercial $S' = \{X', Y'\}$ que rotaciona com uma velocidade angular padrão Ω_p (velocidade de rotação dos braços espirais) em relação a S.

Em termos das coordenadas polares, a estrela em uma posição $\vec{r}$ estará a uma distância $|\vec{r}| = r$ da origem em ambos os referenciais, tendo apenas uma diferença de fase $\Omega_p t$ entre elas. Portanto, se θ e ϕ são os ângulos polares em S e S' respectivamente, então a relação entre eles será:

$$\phi = \theta - \Omega_p t \iff \theta = \phi + \Omega_p t. \tag{2.6}$$

A Figura 2.1 ilustra os dois referenciais descritos acima junto com as relações expressas na Equação 2.6.

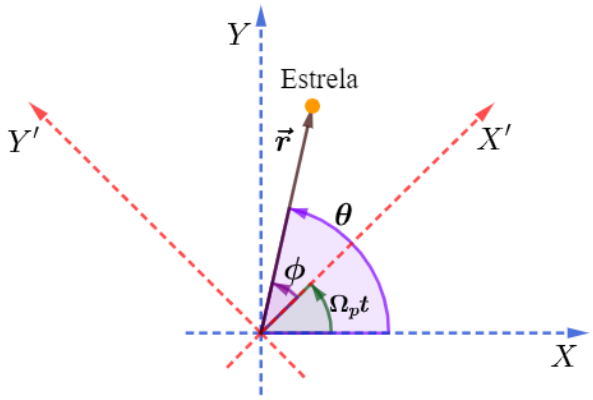

Figura 2.1: Ilustração dos referenciais adotados neste trabalho. As linhas tracejadas em azul e vermelho representam os referenciais S e S' respectivamente, enquanto que o ponto em laranja é a estrela cuja posição é dada por $\vec{r}$.

De maneira resumida, o sistema S' rotaciona junto com os braços espirais da galáxia, de modo que neste referencial, o observador enxerga os braços parados. Isto será útil nas futuras definições das equações.

2.2.2 O sistema não perturbado

Como citado no começo da Seção 2.2, pode-se dividir o potencial galáctico em termos de duas contribuições, uma devido à curva de rotação e outra pela pequena perturbação gerada pelos braços espirais. Nesta Seção são tratados somente os não perturbativos, cuja Hamiltoniana é denotada por $\mathcal{H}_0$. Além disso, o referencial adotado nas contas será o S', ou seja, aquele que se move junto com a galáxia.

Pela Equação 2.2, com as energias $T = p^2/2$ e $U = \Phi_0(r)$ em unidade de massa, construiu-se $\mathcal{H}_0$ da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2} + \Phi_0(r), \tag{2.7}$$

e em termos das coordenadas generalizadas no referencial S', obtêm-se:

$$\mathcal{H}_0(p_r, r, L_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{2} + \frac{L_z^2}{r^2}\right) - \Omega_p L_z + \Phi_0(r), \tag{2.8}$$

notando que $\mathcal{H}_0$ não depende de ϕ. O termo $\Phi_0(r)$ é denominado por potencial axissimétrico, e como o próprio nome diz, ele possui uma simetria de modo a ter dependência apenas na coordenada polar radial r.

O potencial axissimétrico pode ser deduzido da curva de rotação, que por sua vez é obtido ajustando-se dados observacionais de moléculas de CO e HI junto com as informações sobre fontes de radiações. Estas últimas estão associadas à formação de estrelas de alta massa e foram estudados nos trabalhos de Clemens (1985), Burton et al. (1978), Fich et al. (1989) e Reid et al. (2014). A expressão para o ajuste adotado por diversos autores, como por exemplo, Michtchenko et al. (2017) e Lépine et al. (2017), é dada por:

$$V_{\mathrm{rot}}(r) = a_1 \exp\left[-\frac{r}{a_2} - \frac{a_3}{r}\right] + a_4 \exp\left[-\frac{r}{a_5} - \left(\frac{a_6}{r}\right)^2\right], \tag{2.9}$$

onde a_i, com $i = 1, \ldots, 6$, são os parâmetros do ajuste, cujo valores estão presentes na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Valores do parâmetros a_i, com $i = 1, \ldots, 6$, presentes na Equação 2.9 com suas respectivas unidades.

Parâmetros a_i	Valores	Unidades
a_1	293	km/s
a_2	5.1	kpc
a_3	0.032	kpc
a_4	216	km/s
a_5	1×10^6	kpc
a_6	3.8	kpc

Por fim, a relação entre a curva de rotação, $V_{\text{rot}}(r)$, e o potencial axissimétrico, é dado pela tendência da partícula escapar pela trajetória tangente à curva, ou seja, a força centrífuga. Como a força resultante pode ser escrita na forma de um gradiente do potencial, é obtida assim a Equação 2.10:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = \frac{V_{\text{rot}}(r)^2}{r}. \tag{2.10}$$

Portanto, pode-se deduzir $\Phi_0(r)$ integrando em r a Equação 2.10, ou seja:

$$\Phi_0(r) = \int \frac{V_{\text{rot}}(r)^2}{r}\, dr, \tag{2.11}$$

de modo que $\mathcal{H}_0$ está completamente definida, via Equações 2.9 e 2.11. A Figura 2.2 (à esquerda) mostra o comportamento para $V_{\text{rot}}(r)$ com r variando de 0.01 kpc a 20 kpc com as constantes da Tabela 2.1, e também o gráfico para o potencial axis-simétrico (à direita) obtido integrando a Equação 2.11 via quadratura de Gauss[5]-Legendre. Vale ressaltar que, para o cálculo do potencial, é necessário inserir uma condição de contorno, sendo esta dada por $\Phi_0(r \to \infty) = 0$, bastando adotar um r suficientemente grande de modo que $\Phi_0 \approx 0$ e, o valor usado foi de 100 kpc.

[5] Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

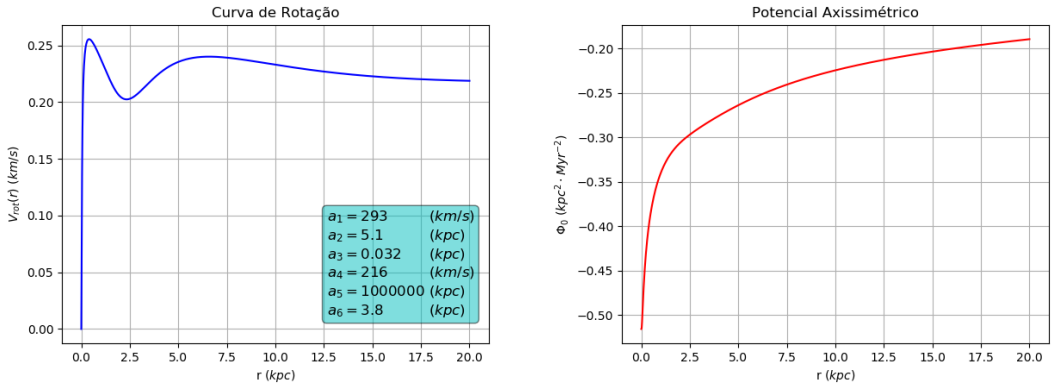

Figura 2.2: À esquerda têm-se o gráfico da curva de rotação calculada com as constantes da Tabela 2.1. À direita encontra-se o gráfico que mostra o comportamento do potencial axissimétrico em função do raio.

2.2.3 *O potencial perturbado*

Para incluir os efeitos perturbativos gerado pelos braços espirais usa-se o fato de que os mesmos são formados por um acúmulo de órbitas estelares, gerando assim um potencial gravitacional que será denotado por $\Phi_1(r, \phi, z)$ (no referencial S'). Sendo assim, para obter a energia total do sistema (em outras palavras, a Hamiltoniana total) basta somá-lo com $\mathcal{H}_0$, e isto foi feito na Seção 2.2.4. O modelo utilizado para o potencial dos braços, foi proposto por Junqueira et al. (2013), em que Φ_1 é expresso pela Equação 2.12:

$$\Phi_1(r, \phi, z) = -\zeta_0 r \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2}\Big(1 - \cos\big[m\phi - f_m(r)\big]\Big) - \epsilon_s r - |kz|\right], \tag{2.12}$$

onde ζ_0 é a amplitude de perturbação, σ a largura dos braços espirais, m o número de braços, $f_m(r)$ a função *shape* (ou forma) dos braços, ϵ_s a escala de comprimento e k o número de onda. Em poucas palavras, a Equação 2.12 tem como objetivo descrever de forma mais realista o potencial gravitacional gerado pelos braços espirais, usando a ideia de que os mesmos possuem um perfil de brilho no formato gaussiano.

Em particular, na aproximação do disco fino, toma-se o limite $z \to 0$, de modo que a Equação 2.12 se reduz a:

$$\Phi_1(r, \phi) = -\zeta_0 r \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2}\Big(1 - \cos\big[m\phi - f_m(r)\big]\Big) - \epsilon_s r\right], \tag{2.13}$$

com a função *shape* expressa por:

$$f_m(r) = \frac{m}{\tan(i)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) + \gamma, \tag{2.14}$$

com i sendo o ângulo de inclinação da galáxia, R_i um raio de referência e γ uma fase qualquer a ser decidida (vide Seção 3.1). Portanto, a Hamiltoniana perturbada $\mathcal{H}_1$ para os braços espirais é da forma:

$$\mathcal{H}_1(r,\phi) = \Phi_1(r,\phi) = -\zeta_0 r \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2}\{1-\cos[m\phi - f_m(r)]\} - \epsilon_s r\right]. \tag{2.15}$$

As constantes presentes nas Equações 2.14 e 2.15 para o modelo da Via Láctea constam na Tabela 2.2. Seus valores variam dependendo dos ajustes realizados com base nos dados observacionais, e boa parte deles foram retirados dos trabalhos de Lépine et al. (2017) e Michtchenko et al. (2017).

Tabela 2.2 - Constantes físicas usadas no modelo para o potencial perturbado de acordo com a Equação 2.13, com seus nomes, símbolos e unidades (quando se aplica).

Nome	Símbolo	Valor	Unidade
Ângulo de inclinação	i	-14.0	deg
Amplitude de perturbação	ζ_0	200.0	$km^2 s^{-2} kpc^{-1}$
Número de braços espirais	m	4	-
Largura dos braços	σ	8.0	kpc
Escala de comprimento	ϵ_s^{-1}	4.0	kpc
Raio de referência	R_i	8.122	kpc
Velocidade angular padrão	Ω_p	28.0	$km\ s^{-1} kpc^{-1}$
Constante de fase	γ	223.34	deg

É importante mencionar que, a escolha de Ω_p está atrelada aos ajustes realizados com base nos dados de Gaia DR2, como feito no trabalho de Dias et al. (2019). Este foi baseado em um modelo galáctico que relaciona a formação do Braço Local com o aprisionamento de estrelas na ressonância de co-rotação, na qual restringe os valores possíveis em 26 a 32 $km\ s^{-1} kpc^{-1}$. Além disso, adotar $\Omega_p = 28\ km\ s^{-1} kpc^{-1}$ é justificado por uma série de evidências para a proximidade entre a órbita do Sol e a ressonância de co-rotação, cujo

termos e definições serão apresentados futuramente. Vale ressaltar que, adota-se este valor padrão em virtude do modelo clássico da compreensão dos braços espirais, na qual o mesmo é tratado como um corpo rígido, pois são considerados como uma estrutura de longa vida.

Da Equação 2.15 junto com as constantes da Tabela 2.2 (com exceção do número de braços espirais), construiu-se os mapas de cores para dois modelos diferentes, uma com $m = 2$ e outra para $m = 4$, com finalidade de visualizar a forma que este potencial possui, como ilustra a Figura 2.3. De acordo com o trabalho de Lépine et al. (2017), para a Via Láctea, o modelo mais adequado é aquele com 4 braços espirais, por isso adota-se este valor aqui.

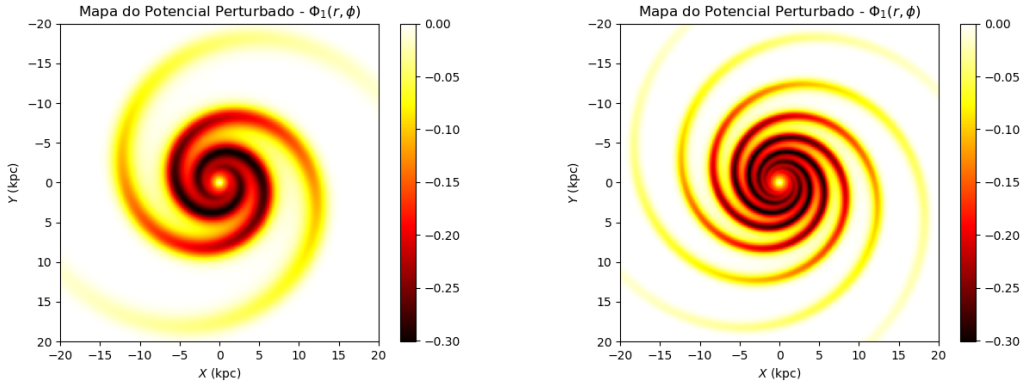

Figura 2.3: À esquerda têm-se o mapa de cores construído para um modelo com dois braços espirais ($m = 2$), enquanto que à direita para quatro braços espirais ($m = 4$). A energia neste esquema está em unidades de $kpc^2 Myr^{-2}$ (yr significa *years*, ou traduzindo, anos).

2.2.4 A Hamiltoniana do sistema e as equações de movimento

Colecionando os resultados das Seções 2.2.2 e 2.2.3, a Hamiltoniana total é construída apenas somando $\mathcal{H}_0$ com a perturbação $\mathcal{H}_1$, de maneira que:

$$\mathcal{H}(p_r, L_z, r, \phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{2} + \frac{L_z^2}{r^2}\right) - \Omega_p L_z + \Phi_0(r) + \Phi_1(r, \phi), \tag{2.16}$$

com $\Phi_0(r)$ e $\Phi_1(r, \phi)$ definidas nas Equações 2.9 e 2.13 respectivamente. Vale ressaltar que r e ϕ são as coordenadas generalizadas com p_r e L_z sendo seus respectivos momentos canônicos no referencial S'.

Nota-se que a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é não linear por causa dos potenciais, de modo a tornar este problema bastante complexo de se resolver analiticamente e, portanto, emprega-se diversas técnicas matemáticas e numéricas para o estudo em questão, como por exemplo,

a análise do espaço de fase em condições iniciais (assunto bastante tratado na Mecânica Clássica), métodos computacionais para a resolução de equações (integrais, raízes, entre outros) e alguns tópicos mais avançados em estudo de movimentos caóticos (em específico, as seções de Poincaré[6]).

O estudo é então focado em analisar como é o movimento de uma estrela sob efeito da Hamiltoniana dada pela Equação 2.16, ou seja, estudar as situações de equilíbrio, determinar as soluções periódicas e calcular as órbitas dessas estrelas para uma dada condição inicial. Tudo isso resume os passos para o estudo de um problema dinâmico, e para tal, precisa-se também das equações de movimento, fornecidas pelas Equações de Hamilton. Evocando as Equações 2.3 e 2.4, como há duas duas coordenadas generalizadas (r e ϕ) e seus dois respectivos momentos conjugados (p_r e L_z), é obtido um conjunto total de 4 expressões, dadas por:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{L_z^2}{r^3} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \tag{2.17}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = p_r, \tag{2.18}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}, \tag{2.19}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_z} = \frac{L_z}{r^2} - \Omega_p. \tag{2.20}$$

As Equações 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20 possuem toda informação dinâmica do sistema, ou seja, com elas pode-se descrever como são as trajetórias das estrelas sob efeito dos potenciais presentes em $\mathcal{H}$. Antes de integrá-las, é útil realizar um estudo prévio sobre as propriedades do sistema que podem ser extraídas das equações de movimento, como as soluções de equilíbrio, periódicas, construção do espaço de fase em diferentes planos representativos, entre outros. Esse estudo será feito no Capítulo 3, onde são introduzidos os níveis de energia da Hamiltoniana em diferentes planos representativos e são definidas as condições de equilíbrio.

[6] Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Capítulo 3

Os níveis de energia da Hamiltoniana

3.1 Soluções de equilíbrio

Foram deduzidas, na Seção 2.2.4, as quatro fórmulas que descrevem o movimento de uma estrela sob efeito do potencial galáctico usando as Equações de Hamilton. O objetivo então é determinar as soluções de estabilidade, e estas são bem definidas pela seguinte condição: partícula em repouso, portanto, deve-se ter que $p_r = 0$ e[1] $\dot{\phi} = 0$. Sob tais circunstâncias, da Equação 2.18, conclui-se que o raio é constante no tempo, ou seja, na situação de equilíbrio a trajetória é circular com $r = r_{\text{eq}}$, o que é esperado uma vez que em situações como estas, as órbitas com mínima energia são circulares. Por consequência da Equação 2.20, o momento angular também é invariante no tempo, ou seja, ele é conservado:

$$\frac{L_z}{r_{\text{eq}}^2} - \Omega_p = 0 \implies L_z = r_{\text{eq}}^2 \Omega_p = \text{cte.}$$

Logo, na situação de equilíbrio, o ângulo ϕ é constante no tempo ($\phi = \phi_{\text{eq}}$), a trajetória é uma órbita circular de raio r_{eq} com o momento angular L_z conservado. Por consequência disso, na Equação 2.17 tem-se:

$$\left.\frac{dp_r}{dt}\right|_{r=r_{\text{eq}}} = 0 \implies \left.\frac{L_z^2}{r^3} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right|_{r=r_{\text{eq}}} = 0, \tag{3.1}$$

e da Equação 2.19:

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_{\text{eq}}} = 0 \implies m\phi_{\text{eq}} = n\pi + f_m(r), \tag{3.2}$$

com $n \in \mathbb{Z}$. Costuma-se denotar a fase $n\pi$ por ϕ_0, ou seja: $\phi_0 = n\pi$.

[1] Usa-se a notação com um ponto em cima da variável para denotar a derivada temporal desta, ou seja, $\dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{dt}$.

Juntando os fatos, as Equações 3.1 e 3.2 definem as órbitas de equilíbrio e as soluções periódicas respectivamente. Desta última, conclui-se que a simetria do problema é $\frac{2\pi}{m}$, de modo que, para 4 braços espirais têm-se 4 pontos de equilíbrio estáveis e seus 4 correspondentes pontos instáveis[2] distribuídos simetricamente.

Em particular, para se obter os 8 raios de equilíbrio (4 estáveis e 4 instáveis) deve-se resolver a Equação 3.1 juntamente com as Equações 2.10 e 2.12 para encontrar suas raízes e, como o problema é muito complicado de se resolver analiticamente (isto se houver uma solução), usa-se técnicas com o cálculo numérico para determinar r_{eq}. Para tal, foi escolhido o método da falsa posição, obtendo-se uma estimativa em torno de 8.30 *kpc*.

Da Equação 3.2, é possível encontrar um valor para a constante de fase γ para fixar por completo o referencial adotado no problema. Sem perdas de generalidade, adota-se que a posição do Sol no referencial S' é fixo em um ângulo $\phi = 90°$, e para tal, define-se que o braço de Sagittarius (este é dado por $n = 0$ na Equação 3.2) esteja a uma distância de 1.122 *kpc* do Sol ($R_i = R_\odot = 8.122$ *kpc*), e portanto terá um raio de 7.0 *kpc*. Então, determina-se γ através das Equações 2.14 e 3.2 usando que $\phi_{\text{eq}} = 90°$ e obtendo assim o valor de γ, como consta na Tabela 2.2.

3.2 A topologia de $\mathcal{H}$

Com a finalidade de estudar as características dinâmicas do sistema, são introduzidos os planos representativos com condições iniciais bem definidas. Embora $\mathcal{H}$ seja 4-dimensional, o problema pode ser reduzido ao estudo sistemático das condições iniciais num plano, que nada mais é do que a projeção de uma superfície embutida no espaço de fase. Algumas dessas construções de interesse foram analisadas, consistindo em mapear os níveis de energias em função de duas variáveis escolhidas e outras duas fixas.

3.2.1 O Plano X-Y

O plano cartesiano é o mais básico e amplamente utilizado em estudos, consistindo em um eixo X na horizontal e Y na vertical. No sistema de coordenadas adotado, vide Figura 2.1 no referencial S', são construídas as curvas de energia para $\mathcal{H}$ (expressa pela Equação

[2] Isso é devido ao teorema de Poincaré-Birkhoff, onde para cada ponto estável é garantida a existência de um ponto instável.

2.16) com o mapeamento $X = r\cos(\phi)$ e $Y = r\sin(\phi)$ onde, sem perdas de generalidade, adotou-se o tempo fixo em $t = 0$. A Figura 3.1 ilustra essa construção, e nota-se dela que o Sol (ponto amarelo) está próximo de uma das ilhas, as quais consistem em regiões num poço de potencial, ou seja, conforme a ilha vai diminuindo, as curvas tendem a convergir em uma "singularidade" correspondente ao mínimo de energia e, portanto, a um ponto de equilíbrio estável, como representado em vermelho. Em contrapartida, os instáveis são localizados nas regiões de tangência entre dois contornos, como mostrado em azul nessa mesma Figura. Além disso, as linhas tracejadas em vermelho e azul representam as soluções periódicas (Equação 3.2) para $n = \pm 1$ e $n = 0, 2$ respectivamente, onde pode-se notar que os pontos de equilíbrio (instável e estável) pertencem à essas regiões. Vale ressaltar que a amplitude de perturbação (ζ_0) foi ampliada em 10 vezes para facilitar a visualização das deformações que a perturbação causa nas curvas do gráfico.

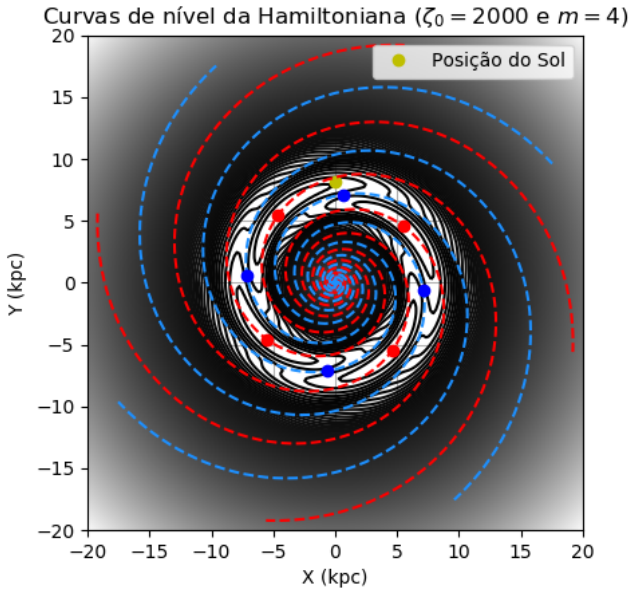

Figura 3.1: Níveis de energia da Hamiltoniana $\mathcal{H}$. As linhas tracejadas em vermelho e azul representam os máximos e mínimos azimutais, respectivamente, dadas pela Equação 3.2. O ponto em amarelo denota a posição do Sol no referencial adotado, enquanto que os pontos vermelhos e azuis representam os pontos de equilíbrio estável e instável, respectivamente.

Em geral, este plano, embora muito utilizado em estudos de dinâmica estelar, não pode ser escolhido como um plano representativo, uma vez que, em sua construção, os valores iniciais de momento angular estão "fixos" em $L_z = \Omega_p r$, de modo que o mesmo não é constante, pois varia com a distância. Em outras palavras, informações dinâmicas estão

sendo perdidas, e isso trás como motivação introduzir outros planos para o estudo.

3.2.2 Os Planos r-V_θ e r-p_r

Como a finalidade de compreender a evolução dinâmica do sistema, introduziu-se dois planos representativos úteis para tal, e estes são: r-V_θ e r-p_r. O primeiro fixa o momento radial em 0 pois, por definição, todas as órbitas ligadas (isto é, fechadas) passam pela condição $p_r = 0$ devido à existência de 2 pontos de inflexão, e também o ângulo, sem perdas de generalidade, em $\phi_{\text{eq}} = \pi/2$. O segundo, por sua vez, fixa o momento angular em $L_z = 1937.82\ km\ s^{-1}kpc$, este estando relacionado com a posição atual do Sol, e o ângulo também em $\phi_{\text{eq}} = \pi/2$.

A Figura 3.2 ilustra o plano r-V_θ sob as condições definidas acima e, pode-se notar que há certas regiões com dinâmicas distintas, separadas por um "vazio" presente no meio gráfico. Além disso, percebe-se que a intersecção da reta azul com a curva de rotação em vermelho, encontra-se aproximadamente no centro desse espaço em branco. Vale ressaltar que, as curvas coloridas nessa Figura representam as energias em diferentes pontos do espaço r-V_θ nas unidades de kpc^2Myr^{-2}. Nota-se ainda que, como o potencial $\Phi_0(r)$ não é bem definido na origem, a região onde $r \approx 0$ começa a ter um crescimento elevado na energia, sendo uma limitação do modelo utilizado neste trabalho.

A Figura 3.3 mostra o plano r-p_r, onde a linha tracejada em preto, na vertical, representa o eixo para o qual $p_r = 0$. Pode-se perceber desses gráficos (pela escala de cor) que a energia tende a aumentar (em módulo) conforme as linhas vão convergindo para o "centro" da imagem, ou seja, um ponto de mínimo (lembrando que a energia é negativa).

No problema não perturbado, quando o momento angular permanece constante no movimento, as curvas de rotação definem as localizações das órbitas circulares, conforme foi visto nas soluções de equilíbrio (Equação 3.1), enquanto que as condições iniciais fora da curva de rotação levam oscilações em torno dessas trajetórias com os valores correspondentes de L_z, pois, como constatou-se, essas órbitas representam o estado de menor energia do sistema, então é natural que, dada uma pequena perturbação (não a causada pelo Φ_1) em torno do ponto de equilíbrio, haja deslocamentos periódicos em torno destes. Tal situação descrita é denominada oscilações de modo-r (*r-mode oscillations*).

Quando a perturbação é introduzida, o modo-r permanece dominante no movimento. Porém, agora o momento angular L_z começa a ter pequenas oscilações também (vide

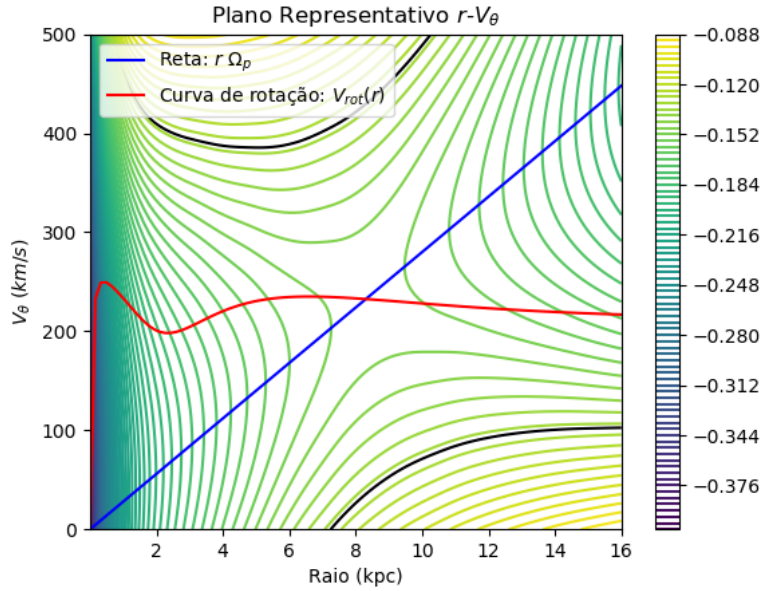

Figura 3.2: Os contornos representam os níveis de energia em unidades de $kpc^2 Myr^{-2}$ enquanto que a curva vermelha mostra a velocidade de rotação e a reta azul a velocidade azimutal. As linhas em preto representam o nível de energia do Sol, cujo valor numérico é: $E_\odot$ = -0.1305 $kpc^2 Myr^{-2}$.

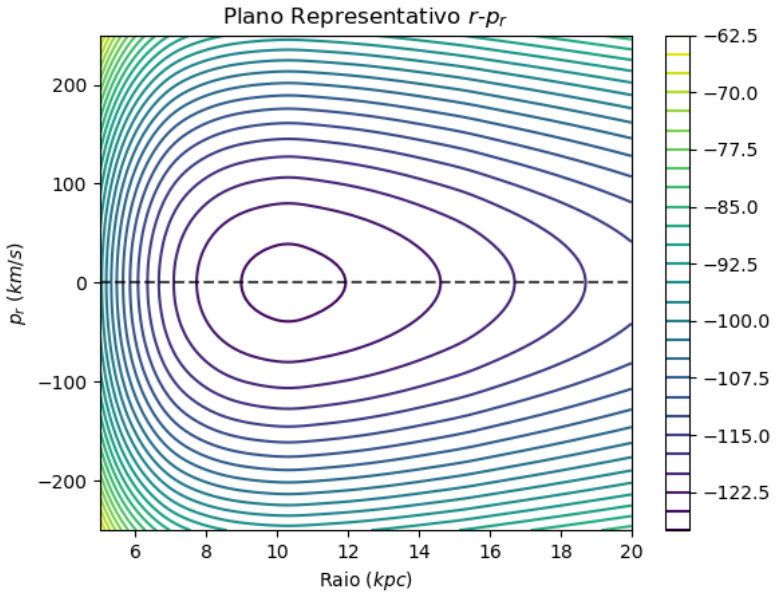

Figura 3.3: O plano representativo construído por meio dos níveis da Hamiltoniana do sistema, onde as linhas/cores denotam a energia para vários valores de p_r e r presente no gráfico nas unidades $kpc^2 Myr^{-2}$.

Equação 2.19), na qual refere-se a esse novo tipo de padrão como o modo-L_z. Devido a isso, as órbitas circulares do problema não perturbado começam a se tornar não-circulares, apresentando deformações nas trajetórias das estrelas. Porém, mesmo com a perturbação, por ela ser muito pequena (em módulo) em relação à energia $\mathcal{H}_0$, essas alterações não devem ser muito grandes. A Figura 3.4 compara o potencial de perturbação com a Hamiltoniana total $\mathcal{H}$ e o potencial axissimétrico. Dessa Figura, pode-se notar que a amplitude perturbativo possui uma diferença em 3 ordens de grandeza em comparação com $\mathcal{H}$ e Φ_0. Sendo assim, espera-se que as deformações nos níveis de energia no espaço de fase não sejam muito acentuadas, como percebe-se visualizando as Figuras 3.2 e 3.3, onde as linhas tendem a continuar suaves.

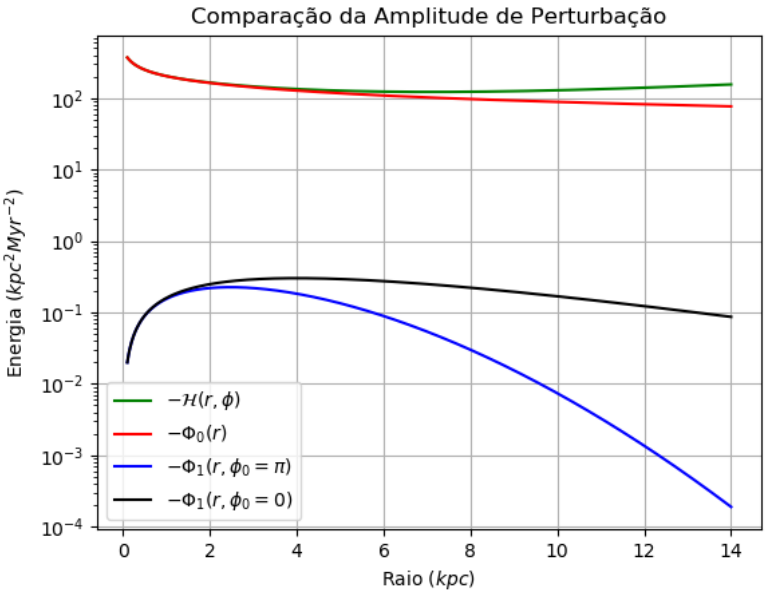

Figura 3.4: As linhas em verde e vermelho representam a Hamiltoniana total e potencial axissimétrico respectivamente, enquanto que as em azul e preto, o potencial perturbado para dois valores de ϕ_0.

As oscilações de modo-r e modo-L_z serão comentadas no Capítulo 4 na Seção 4.1.2, em que será feita a integração da órbita do Sol, sendo possível visualizá-las através das evoluções temporais das coordenadas generalizadas e seus momentos canônicos.

Capítulo 4

Dinâmica estelar em galáxias espirais

4.1 Integração das órbitas

O próximo passo após as análises das condições de equilíbrio do sistema é obter as evoluções temporais das coordenadas generalizadas e seus momentos canônicos para uma dada condição inicial, para então estudar o comportamento dinâmico de objetos sob o efeito do potencial galáctico. Em suma, o que deve ser feito é integrar as equações de movimento apresentadas na Seção 2.2.4, porém, nota-se que estas são equações acopladas e não lineares, sendo a última devido a complexidade dos potenciais gravitacionais. Portanto, é inviável integrar analiticamente e, em verdade, não há soluções analíticas[1], sendo necessário o uso de métodos numéricos.

4.1.1 O método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Existem vários métodos de integração de equações diferenciais, cujo a escolha deve depender do tipo de problema que se deseja resolver. Para o trabalho em questão, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) é suficiente por ora, que é um método iterativo que pode integrar um sistema de N equações acopladas, podendo ser lineares ou não.

Formalmente, se Δt é o intervalo entre dois tempos consecutivos, $\vec{y}$ é são as variáveis dependentes[2] do sistema e $\vec{Y}$ o vetor que contém as N equações diferenciais, então a solução do problema em um tempo $t + \Delta t$ será:

$$\vec{y}(t + \Delta t) = \vec{y}(t) + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \tag{4.1}$$

[1] A não existência de soluções analíticas está ligada ao fato de que não há funções elementares tais que, uma composição delas, formem uma solução para problema satisfazendo as condições iniciais.

[2] O vetor $\vec{y}$ pode representar as coordenadas generalizadas e os momentos canônicos, que no geral são variáveis dependentes no sistema de equações diferenciais. O tempo seria a variável independente.

sendo k_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, denominadas inclinações, dadas por:

$$\vec{k}_1 = \vec{Y}(t, \vec{y}), \tag{4.2}$$

$$\vec{k}_2 = \vec{Y}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y} + \vec{k}_1 \frac{\Delta t}{2}\right), \tag{4.3}$$

$$\vec{k}_3 = \vec{Y}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \vec{y} + \vec{k}_2 \frac{\Delta t}{2}\right), \tag{4.4}$$

$$\vec{k}_4 = \vec{Y}(t + \Delta t, \vec{y} + \vec{k}_3 \Delta t). \tag{4.5}$$

A Equações 4.1 a 4.5 resumem o método iterativo RK4. Mais detalhes se encontram em Press et al. (2002), que serviu de base nesta parte do estudo.

4.1.2 A órbita do Sol

Com as ferramentas estudadas na Seção 4.1.1, é possível integrar órbitas de estrelas sob efeito da Hamiltoniana $\mathcal{H}$, dada pela Equação 2.16. Como o problema possui 2 graus de liberdade, é esperado que haja 4 equações de movimento, as quais foram obtidas na Seção 2.2.4 (Equações 2.17 a 2.20). Portanto, basta escolher as condições iniciais e integrá-las numericamente (via método RK4) para obter as séries temporais do movimento de uma estrela.

Um objeto muito especial na Via Láctea é o próprio Sol, então é interessante investigar as naturezas de sua dinâmica. A Tabela 4.1 mostra as condições iniciais usadas para a integração da órbita solar.

Tabela 4.1 - Valores numéricos para a condição inicial do Sol com suas respectivas unidades.

Variável	Valores	Unidades
r_0	8.122	kpc
p_{r0}	-12.9	km/s
ϕ_0	90.0	deg
L_{z0}	1994.8	$km\ kpc/s$

A Figura 4.1 mostra a solução das equações de movimento para as condições iniciais do Sol, na qual pode-se notar dois padrões de oscilações, uma rápida e outra lenta (modo-r e modo-L_z, respectivamente). A primeira é ocasionada pelo potencial axissimétrico. Já a segunda, é devido a perturbação dos braços espirais, sendo esta menos dominante na dinâmica dada que sua amplitude é bem menor quando comparada com o axissimétrico (vide Figura 3.4), portanto é de se esperar que as oscilações modo-r sejam bem mais rápidas do que as de modo-L_z.

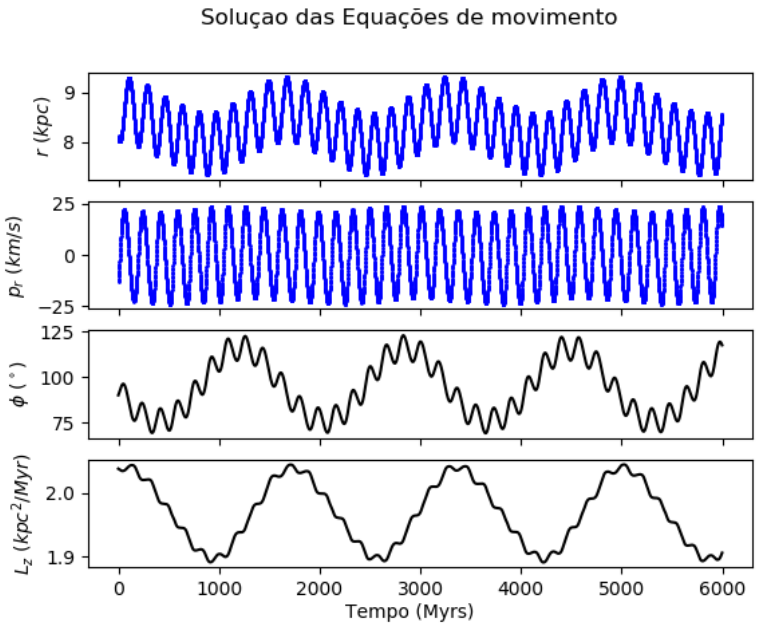

Figura 4.1: Solução das equações de movimento aplicadas para o Sol, cujas condições iniciais usadas constam na Tabela 4.1.

A Figura 4.2 mostra os espaços de fase r-p_r e ϕ-L_z, sendo importante para a construção das seções de Poincaré, feita na Seção 4.2. Ademais, pode-se visualizar a trajetória do Sol no plano X-Y no referencial girante (S'), como mostra a Figura 4.3. Outra vez, pode-se notar as oscilações modo-r e modo-L_z como sendo as voltas menores e maiores da linha em azul, respectivamente. Além disso, é interessante notar o fato de que essa trajetória não se fecha (o que é esperado, devido a perturbação) e ainda, ela não faz voltas em torno do 0 do sistema de coordenadas (lembrando que o referencial em questão é o S'), o que indica que o Sol está rotacionando junto com os braços espirais da Galáxia, ou seja, o corpo está preso em uma região denominada zona de co-rotação.

As órbitas presas na zona de co-rotação possuem ressonância 1:1, ou seja, a cada uma

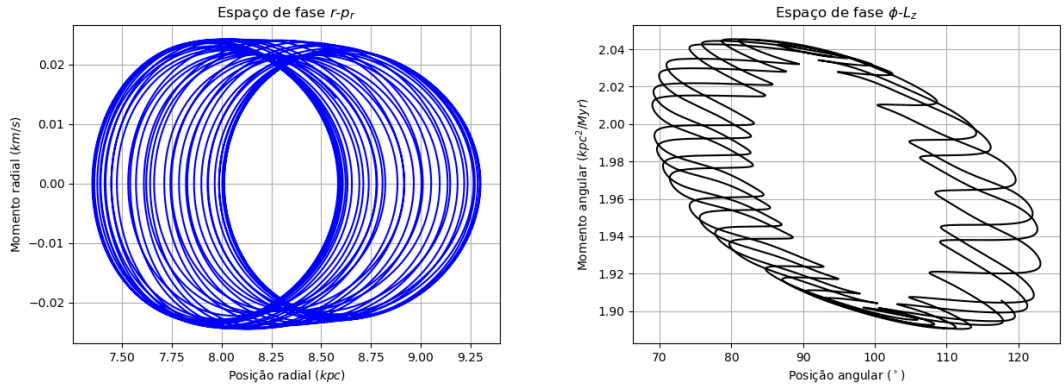

Figura 4.2: À esquerda têm-se o espaço de fase no plano r-p_r, enquanto que na direita a Figura mostra o espaço de fase ϕ-L_z.

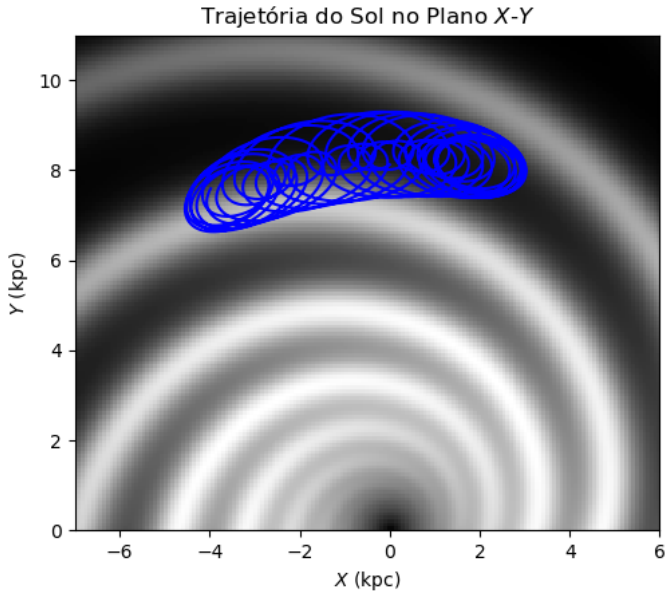

Figura 4.3: Trajetória do Sol (em azul) colocada no plano X-Y junto com os braços espirais no fundo.

volta que os braços espirais faz em relação ao centro galáctico, o Sol também faz. Dessa forma, foi possível obter informações sobre a natureza da dinâmica solar, porém, é importante também investigar essa natureza em regiões vizinhas ao Sol. Mas, analisar figuras para cada órbita pode ser exaustivo dependendo do número de objetos a serem estudados. Sendo assim, é motivada a aplicação de uma ferramenta muito útil para situações como estas denominada seções de Poincaré, apresentada na Seção 4.2.

4.2 As Seções de Poincaré e Caos

O objetivo desta seção é introduzir uma poderosa ferramenta para a análise da dinâmica de sistemas caóticos denominada seções de Poincaré, muito útil para a visualização de espaços de fase multidimensionais no plano bidimensional (2D). Em particular, neste trabalho será tratado apenas a projeção de uma superfície quadridimensional (4D) para uma superfície 2D. Ademais, será feito uma aplicação desta ferramenta para a solução obtida para o movimento do Sol na Seção 4.1.2.

A ideia por trás das seções de Poincaré é fixar duas variáveis da Hamiltoniana e então projetar as outras duas em uma superfície 2D. Uma das variáveis fixa determina o chamado plano de corte, a outra pode ser fixa em um valor qualquer, sem perdas de generalidade. Em suma, o que é feito é traçar um plano de corte numa superfície 4D e pegar seus valores quando o cruzam. A Figura 4.4 representa o que foi dito agora, porém para uma superfície tridimensional (3D), já que não é possível visualizar um espaço 4D. Mais detalhes sobre a definição formal das seções de Poincaré se encontram em Parker & Chua (1989).

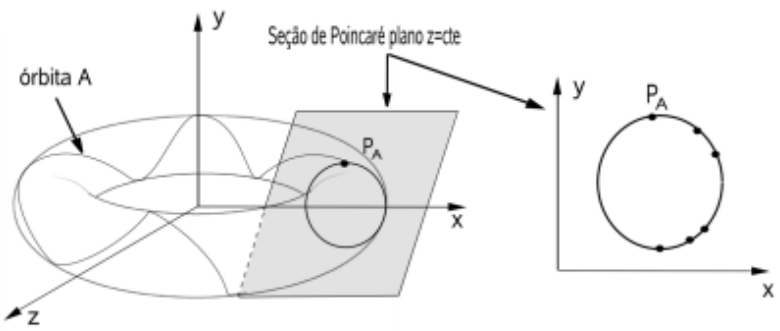

Figura 4.4: Um esquema exemplificando como funciona as Seções de Poincaré para uma superfície 3D. Neste caso, é fixo um valor de z constante, o que define o plano de corte, e os pontos x e y são os pontos para os quais $z = cte$. Imagem retirada de Reynaldo (2020).

Usando estes conceitos apresentados, pode-se então aplicar para as soluções das equações de movimento para o Sol e, para tal, é necessário escolher um plano de corte. Neste caso, o plano $p_r = 0$ é uma boa escolha pois, o momento radial de uma estrela sempre passa por essa condição em algum momento, como pode-se perceber nas Figuras 4.2 (à esquerda) e 4.1, na qual nota-se que o momento radial sempre oscila em torno do zero. Além disso, escolhe-se o espaço de fase ϕ-L_z para a análise. Coletando todos os pontos ϕ e L_z para

o qual[3] $p_r = 0$, obtém-se a Figura 4.5, na qual uma é feita com um *timespan* (tempo de integração) de 6000 Myr e outra com 2×10^6 Myr.

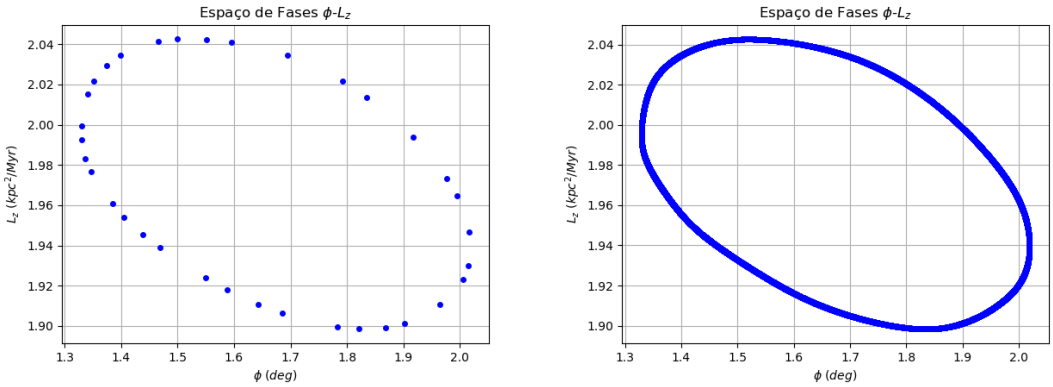

Figura 4.5: À esquerda têm-se a seção de Poincaré para as soluções obtidas para o Sol no plano ϕ-L_z, com um tempo de integração de 6000 Myr, enquanto que na direita é a mesma coisa porém com um tempo de integração de 2×10^6 Myr.

Vale a pena comentar que, por se tratar de cálculos numéricos para a resolução das equações de movimento, pode ser que a condição $p_r = 0$ nunca seja satisfeita na hora de coletar os pontos ϕ e L_z, pois pode acontecer de p_r ser algo bem próximo de zero, mas não exatamente. Por isso, foi realizado uma interpolação via *spline* cúbica para calcular uma aproximação mais precisa de ϕ e L_z quando $p_r = 0$. Para tal, usou-se rotinas prontas oferecidas pela biblioteca *Scipy*, do *Python*.

Ainda na Figura 4.5, pode-se notar que de fato a órbita do Sol é uma de co-rotação, o que ficará mais claro na Seção 4.3 quando for construído as seções de superfícies (SOS), na qual também será possível identificar as zonas caóticas em torno da região do Sol, bem como zonas de ressonâncias.

4.3 Seções de superfícies

As seções de superfícies (SOS) é uma construção muito útil que permite visualizar regiões dinâmicas e então classificá-las. Para tal, são feitos vários cálculos das seções de Poincaré com diferentes condições iniciais e de mesma energia, e então colocadas em uma mesma imagem.

[3] Vale a pena mencionar que, é coletado apenas os pontos descendentes para os quais $p_r = 0$, ou seja, quando $p_r(t) > 0$ e $p_r(t + \Delta t) < 0$.

Para construir as SOS, foi escolhida como referência a energia do Sol ($E_\odot = -0.1507$ kpc^2/Myr^2) e então calculadas várias condições iniciais com a condição de que $E = E_\odot$. A Figura 3.2 mostra, em linhas pretas, o nível de energia correspondente ao do Sol, com $p_r = 0$ e $\phi = \pi/2$. Sendo assim, é coletadas os pontos r e V_θ desta Figura, obtendo assim todas as condições iniciais necessárias. O cálculo do momento angular é feito a partir da velocidade azimutal, V_θ, através relação:

$$L_z = rV_\theta. \tag{4.6}$$

Com as condições iniciais prontas, resta apenas integrar as equações de movimento e coletar todos os pontos para construir cada seção de Poincaré para cada órbita e juntá-las em uma única figura. Para isso, usou-se um *timespan* de 2×10^6 Myr, obtendo assim a Figura 4.6. Um fato importante a ser ressaltado, é que as linhas (principalmente quando se olha a imagem da esquerda) não se cruzam, e isso ocorre pois as órbitas possuem a mesma energia, e isso é essencial para a construção das SOS, pois sem isso seria impossível distinguir órbitas caóticas das que não são.

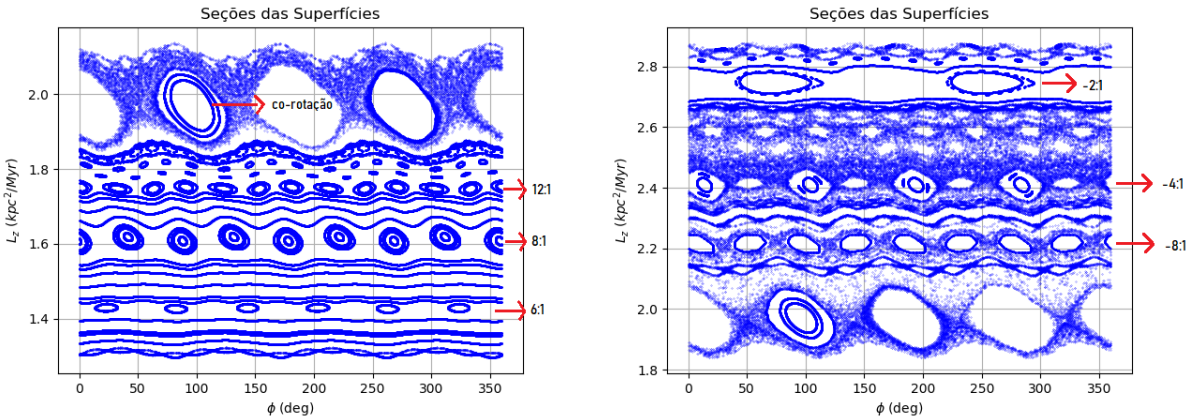

Figura 4.6: Construção das SOS em torno do ambiente dinâmico do Sol. À esquerda têm-se a região interna em relação a órbita do Sol, enquanto que na direita a região externa.

A Figura 4.6 possui muitas informações a serem tratadas. A primeira delas é a identificação da zona de co-rotação, que nada mais é do que um padrão de ressonância 1:1. As setas em vermelho indicam outras zonas de ressonâncias, como 12:1, 8:1, -2:1, entre outras. Em especial, o padrão -4:1 é a chamada ressonância de Lindblad externa (OLR, *outer Lindblad ressonance*), que é bem conhecida na astrofísica galáctica, como consta em Binney & Mihalas (1981). A OLR possui também o seu "oposto", a ressonância de

Lindblad interna (ILR, *inner Lindblad ressonance*), dada pelo padrão 4:1, porém não foi possível obtê-la na Figura 4.6. Nota-se que o sinal de "-" na frente dos padrões de ressonância indica que ela é externa em relação a órbita do Sol (ou da zona de co-rotação), enquanto que sem é a região interna.

As linhas que vão de 0 a 360 graus são as órbitas que rotacionam em relação ao centro galáctico, ou seja, não estão em co-rotação ou em ressonância em relação aos braços espirais da Via Láctea. Por fim, as regiões onde não existem linhas bem definidas, ou zonas de ressonâncias (como aquelas identificadas pelas setas em vermelho), são chamadas de regiões caóticas, pois possuem um comportamento totalmente imprevisível no espaço de fase, como pode-se notar pelas regiões com sobreposição dos pontos em torno da zona de co-rotação, da ressonância -4:1, entre outros. Portanto, percebe-se que nas regiões em torno do Sol, o comportamento dinâmico é bastante caótico.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

Compreender a dinâmica estelar em galáxias, em especial na Via Láctea, vem sendo um longo objetivo de muitos estudos que buscam formular teorias sobre as origens e evolução galáctica. Muitos modelos foram criados e testados ao longo dos anos, com o desejo de buscar uma autoconsistência do mesmo. O mais promissor é aquele construído por Kalnajs (1973), apresentando uma abordagem mais precisa da natureza dos braços espirais como regiões de acúmulo de órbitas estelares. Baseado neste modelo, usou-se a Teoria de Pertubações introduzindo um potencial gravitacional gerado pelos braços espirais para buscar uma autoconsistência do modelo. A proposta mais realista para tal, foi apresentada por Junqueira et al. (2013), consistindo na Equação 2.12.

No Capítulo 2, foi apresentado o formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica, dado que a Teoria de Pertubações é baseada nessa descrição, e assim, o problema mais geral de uma estrela sob efeito do potencial galáctico foi construído, escolhendo os referenciais mais vantajosos (S e S', vide Figura 2.1) e, obtendo a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ (Equação 2.16) considerando as duas componentes do potencial gravitacional presentes no sistema (a parte não perturbada $\mathcal{H}_0$ e perturbada $\mathcal{H}_1$). Além disso, com $\mathcal{H}$ conhecido, foi possível obter o sistema de quatro equações de movimento, sendo a base para o estudo da dinâmica do objeto no plano galáctico. Posteriormente, foi realizada uma aplicação deste modelo no caso da Via Láctea, usando as constantes das Tabelas 2.1 e 2.2, obtidas por meio de ajustes de dados observacionais da Galáxia.

A partir das equações de movimento, foram obtidas as soluções de equilíbrio e periódicas do sistema, bem como os níveis de energia no Plano X-Y para tal situação. Estes são bem similares com aqueles apresentados no trabalho de Michtchenko et al. (2017). Além disso, foram feitas as construções de planos representativos, o que permitiu coletar as condições

iniciais sob um nível de energia em específico (passo este muito importante para o cálculo das SOS), que neste trabalho foi o do Sol.

Com o estudo das condições de equilíbrio feita, foram realizadas as integrações das equações de movimento por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a condição inicial do Sol (vide Tabela 4.1), obtendo as Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, representando as evoluções temporais, os espaços de fase e trajetória no plano X-Y respectivamente, o que permitiu concluir que o Sol está preso em uma zona de co-rotação (ressonância 1:1) e identificar o novo padrão de oscilação que surgiu devido a perturbação, o modo-L_z. Ademais, a partir da Figura 3.2, foram coletadas as condições iniciais com energias iguais a do Sol (representadas pela linha em preto), o que permitiu calcular, para cada órbita, as seções de Poincaré no espaço de fase ϕ-L_z, obtendo assim a Figura 4.6. Disso, foram identificadas as zonas de ressonâncias e caóticas nos arredores da órbita solar, como por exemplo a ORL (*outer Lindblad ressonance*) que é uma região bem conhecida na Astrofísica Galáctica.

Os resultados apresentados são promissores, tendo uma compatibilidade com as apresentadas em Michtchenko et al. (2017) e com a literatura Binney & Mihalas (1981), porém deve-se ressaltar as limitações do modelo tratado neste trabalho, pois só é possível fazer o estudo dinâmico na vizinhança do Sol. Ou seja, nas regiões mais internas da Via Láctea é necessário incluir efeitos das barras, localizadas no centro galáctico. Além disso, o centro galáctico possui um buraco negro supermassivo (Sargitário A*), sendo necessário o uso da Relatividade Geral para o estudo da dinâmica estelar em seus arredores devido aos efeitos da curvatura do espaço-tempo.

Têm-se como perspectivas futuras comparar os resultados com o modelo clássico para o potencial gravitacional dos braços espirais (Equação 1.1) e, também, desconsiderar a aproximação de disco fino introduzindo os efeitos do termo $e^{-|kz|}$ (vide Equação 2.12) na dinâmica estelar na Galáxia, e isso faz com que o problema passe a ter 3 graus de liberdade, de modo que o movimento seja bem mais complexo de ser resolvido. Além disso, é necessário levar em conta os efeitos da barra da Via Láctea no movimento estelar em regiões próximas do centro galáctico, que também é colocado como perspectiva futura.

Referências Bibliográficas

Amaral, L. H. & Lépine, J. 1996, in *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, ed. E. Falco, J. A. Fernandez, & R. F. Ferrero, Vol. 4, 121

Binney, J. & Mihalas, D. 1981, *Galactic Astronomy: Structure and Kinematics of Galaxies*

Burton, W. B., Liszt, H. S., & Gordon, M. A. 1978, *Journal of Physics F Metal Physics*, 39, C1

Clemens, D. P. 1985, ApJ, 295, 422

Contopoulos, G. & Grosbol, P. 1986, A&A, 155, 11

Dias, W. S., Monteiro, H., Lépine, J. R. D., & Barros, D. A. 2019, MNRAS, 486, 5726

Fich, M., Blitz, L., & Stark, A. A. 1989, ApJ, 342, 272

Junqueira, T. C., Lépine, J. R. D., Braga, C. A. S., & Barros, D. A. 2013, A&A, 550, A91

Kalnajs, A. J. 1973, *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 2, 174

Lépine, J. R. D., Michtchenko, T. A., Barros, D. A., & Vieira, R. S. S. 2017, ApJ, 843, 48

Lin, C. C. & Shu, F. H. 1964, ApJ, 140, 646

Michtchenko, T. A., Vieira, R. S. S., Barros, D. A., & Lépine, J. R. D. 2017, A&A, 597, A39

Parker, T. S. & Chua, L. O. 1989, *Pratical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*

Patsis, P. A., Contopoulos, G., & Grosbol, P. 1991, A&A, 243, 373

Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E., & Espresate, J. 2003, ApJ, 582, 230

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2002, *Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing*

Reid, M. J., Menten, K. M., Brunthaler, A., et al. 2014, ApJ, 783, 130

Reynaldo, D. P. 2020, Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos

Taylor, J. R. 2005, *Classical Mechanics* (1 ed. Sausalito Calif.: *University Science Books*), 786 p.