Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Luna Costa Lacerda Espinosa

Linhas de emissão de discos de acreção ao redor de buracos negros

São Paulo
2022

Luna Costa Lacerda Espinosa

Linhas de emissão de discos de acreção ao redor de buracos negros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Astronomia.

Vertente: Pesquisa básica
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nemmen

São Paulo

2022

Agradecimentos

A meus pais e minha irmã, que sempre me apoiaram, em todas as minhas decisões e indecisões. Obrigada por sempre acreditarem em mim.

À Beatriz e Milena, as melhores pessoas que eu podia ter encontrado nessa jornada. Obrigada pelas risadas, pelos abraços, pela amizade (e pelos estudos também).

Ao meu ex-orientador e melhor professor, Alessandro Ederoclite, por sempre me mostrar o lado incrível da pesquisa e da Astronomia. Sem você eu não teria aprendido tanto e certamente não teria chegado tão longe.

Aos meus orientadores ao longo de toda a graduação, Beatriz Blanco Siffert, Cid Fernandes, Claudia Mendes de Oliveira, Elysandra Cypriano e Fábio Herpich pela atenção, conhecimento passado e todo suporte.

Esta tese/dissertação foi escrita em LaTeX com a classe IAGTESE, para teses e dissertações do IAG.

"*Há mistérios que nunca serão solucionados, por mais que tentemos. Se dedicarmos tempo demais a eles, podemos não notar o que está bem a nossa frente.*"

TJ Klune

Resumo

A teoria da relatividade geral de Einstein é indispensável para o entendimento de fenômenos astrofísicos, tais como estrelas de nêutrons, ondas gravitacionais e buracos negros. Estes últimos são objetos de grande relevância no estudo da relatividade. Desse modo, este trabalho traz a análise teórica de um buraco negro não rotante, conhecido como buraco negro de Schwarzschild, bem como uma revisão bibliográfica de modelos teóricos e de resultados observacionais de linhas de emissão, de modo a associar os resultados teóricos à aplicações astrofísicas. Como resultado temos que fótons emitidos por matéria movendo-se transversalmente ao observador no infinito sempre sofrerão desvio para o vermelho, provenientes de qualquer raio no disco. Para fótons aproximando-se ou afastando-se diretamente do observador, o desvio na frequência depende desse movimento. Os cálculos aqui apresentados são focados na geometria de Schwarzschild, mas também são feitas análises de modelos teóricos para buracos negros com rotação, conhecidos como buracos negros de Kerr. Com os avanços observacionais, os modelos teóricos se mantêm essenciais para a análise e interpretação dos dados, de modo que, quanto mais refinados os dados obtidos, mais detalhes singulares sobre as regiões centrais do disco podem ser modelados.

Abstract

Einstein's theory of general relativity is indispensable for understanding astrophysical phenomena such as neutron stars, gravitational waves, and black holes. The latter are objects of great relevance in the study of relativity. This work brings the theoretical analysis of a non-rotating black hole, known as a Schwarzschild black hole, as well as a review of theoretical models and observational results of emission lines, in order to associate the theoretical results with astrophysical applications. It is found that photons emitted by matter moving transversely to the observer at infinity from any radius in the disk will always be redshifted. For photons directly approaching or moving away from the observer, the shift in frequency depends on this motion. The calculations presented here are focused on Schwarzschild geometry, but the analysis of theoretical models are also presented for rotating black holes, known as Kerr black holes. With observational advances, theoretical models remain essential for data analysis and interpretation. The more refined the data obtained, the more unique details about the central regions of the disk can be modeled.

Lista de Figuras

1.1 Ilustração de um buraco negro em rotação 16

2.1 Dependência da ISCO com o parâmetro de rotação 19
2.2 Perfil de linha em Schwarzschild: contribuições 20
2.3 Perfis de linha em Schwarzschild: dependências 21
2.4 Dependência do perfil de linha com a inclinação 22
2.5 Perfil de linha em Kerr: dependências 23
2.6 Perfil de linha $K\alpha$ e o *spin* do buraco negro 25
2.7 Linha de ferro $K\alpha$ observada na galáxia MCG-6-30-15 26

3.1 Potencial Efetivo 30
3.2 Órbitas circulares no espaço tempo de Schwarzschild 31
3.3 Esquema de um disco de acreção *edge-on* 35

B.1 O parâmetro de impacto 49
B.2 Variação na frequência em função do raio: $\phi = \pi/2$ 50
B.3 Variação na frequência em função do raio: $\phi = 3\pi/2$ 50
B.4 Comparação entre a variação na frequência em $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$ 51
B.5 Variação na frequência em função do ângulo 51

Sumário

1. Introdução 15

2. Linhas de emissão 17

2.1 Perfil de linha em Schwarzschild 19

2.2 Perfil de linha em Kerr 22

2.3 MCG-6-30-15 25

3. Espaço-tempo de Schwarzschild 27

3.1 Velocidades 27

3.2 Partículas em órbita 29

3.3 Partículas no disco de acreção 32

4. Conclusões 38

Referências 39

Apêndice 41

A. Geometria de Schwarzschild 43

A.1 Espaço-tempo curvo 43

A.2 Métrica 44

A.3 Simetrias e Conservações 45

B. Análise gráfica 49

Capítulo 1

Introdução

A ideia de que a gravidade é a própria geometria do espaço-tempo revolucionou a ciência moderna. A teoria da relatividade de Einstein é indispensável para o entendimento de fenômenos astrofísicos, tais como estrelas de nêutrons, núcleos ativos de galáxias (AGNs), ondas gravitacionais e buracos negros. Inicialmente, os buracos negros só existiam como ideias teóricas e matemáticas, seus modelos eram estudados com interesse, mas sua existência real foi questionada por muitos, dentre eles o próprio Einstein (Einstein, 1939). Apesar disso, são objetos de grande relevância no estudo da relatividade. Eles têm um impacto intenso na sua região circundante e são laboratórios astronômicos nos quais é possível investigar as fronteiras da Física. Apesar de ainda não terem sido detectados, buracos negros primordiais, que se formaram no início do Universo, podem ser capazes de elucidar a relação entre as teorias quântica e gravitacional (Hartle, 2003). Este trabalho tem como objetivo a análise teórica de um buraco negro não rotante, conhecido como buraco negro de Schwarzschild, cujo espaço-tempo é descrito pela geometria de Schwarzschild, bem como uma revisão de modelos teóricos e de resultados observacionais de linhas de emissão, de modo a associar os resultados teóricos a aplicações astrofísicas.

Central à teoria de Einstein é a concepção de que o espaço-tempo se curva na presença de massa e, nessa curvatura, a trajetória de todos os objetos será uma reta. A massa do Sol deforma o espaço-tempo ao seu redor, contudo, por não ser um objeto compacto, a curvatura do espaço-tempo causada pelo Sol não é intensa como ao redor de estrelas de nêutrons ou buracos negros. A razão adimensional massa por raio (GM/c^2R) para o Sol é da ordem de 10^{-6}, já para buracos negros temos $GM/c^2R \sim 0.5$ (Hartle, 2003). Ao redor de buracos negros pode-se observar um processo conhecido como *acreção*, no qual a matéria se encontra em queda em direção ao objeto compacto por consequência da perda

de momento angular. A acentuada curvatura do espaço-tempo causada pela razão massa por raio leva as partículas a velocidades relativísticas. A Figura 1.1 ilustra alguns detalhes de um buraco negro em rotação, bem como seu disco de acreção.

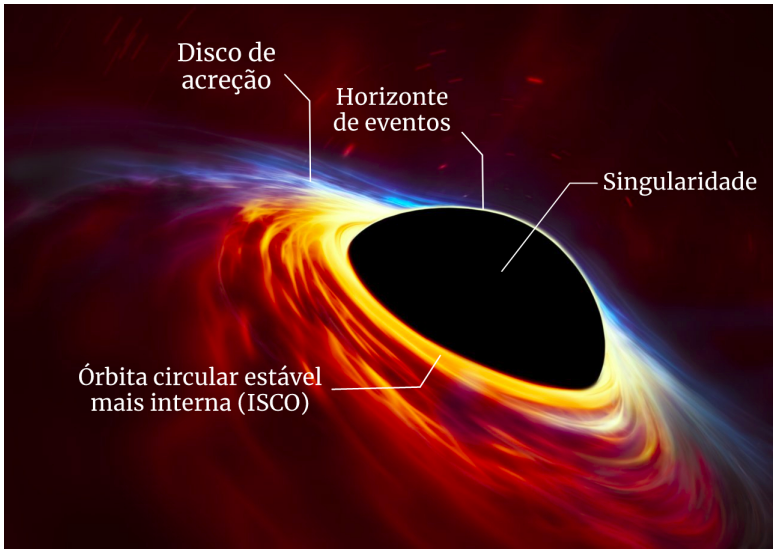

Figura 1.1: Ilustração de um buraco negro em rotação. Tem-se (1) o disco de acreção, composto por matéria em órbita; (2) o horizonte de eventos, fronteira cuja velocidade de escape é igual a da luz; (3) a singularidade gravitacional, na qual a curvatura do espaço-tempo se torna infinita; (4) a órbita circular estável mais interna, a última órbita na qual a matéria pode permanecer sem tender ao horizonte de eventos. Indicações de autoria própria. Figura adaptada de ESA/Hubble (M. Kornmesser).

Em razão de vários mecanismos dissipativos, a matéria que orbita ao redor do buraco negro espirala lentamente para seu centro à medida que perde energia e momento angular. Essa perda de energia causa um aumento de temperatura no disco, emitindo radiação do infravermelho a raios X de baixa energia. Essa energia é convertida em radiação com uma eficiência muito maior que a eficiência da queima nuclear de hidrogênio (Fabian e Lasenby, 2019). Desse modo, a radiação detectada não vem dos próprios buracos negros, mas se origina nos discos de acreção que os cercam, cuja forma é de um disco geometricamente fino e opticamente espesso (Shakura e Sunyaev, 1973), para buracos negros com acreção ativa.

A matéria que forma um disco de acreção é fonte de partículas relativísticas cujo movimento permite uma análise aprofundada da geometria do espaço-tempo. As regiões mais internas em torno de um buraco negro consistem em um disco de acreção de gás ionizado que se estende até a órbita circular estável mais interna (ISCO, do inglês *Innermost Stable Circular Orbit*) permitida pela Relatividade Geral (Fabian et al., 2014). A partir desse raio, o material mergulha em direção ao horizonte de eventos.

Capítulo 2

Linhas de emissão

A influência da curvatura do espaço-tempo não pode ser negligenciada nas regiões próximas a buracos negros. Da radiação vinda dessas regiões é possível detectar linhas de emissão, provenientes das partes mais internas de buracos negros em acreção, tipicamente de raios próximos ao raio de estabilidade marginal (Müller e Camenzind, 2004). Desse modo, a análise das linhas de emissão relativísticas geradas por discos de acreção ao redor de buracos negros é uma ferramenta essencial para explorar a ação da gravidade perto do horizonte de eventos.

Nas partes mais internas dos discos de acreção, onde a matéria se move com velocidades próximas da metade da velocidade da luz, as linhas de emissão observadas são alargadas relativisticamente e distorcidas para o vermelho pelo efeito Doppler e *redshift* gravitacional, além de ter sua forma alterada pelo *beaming* relativístico (Fabian et al., 2014). O efeito Doppler, encontrado também nos discos newtonianos clássicos, molda o perfil de linha de emissão em picos duplos, em inclinações médias a altas. Em baixas inclinações do disco, o perfil é triangular. O *beaming* é um efeito da relatividade especial, no qual a matéria em rotação move-se em altas velocidades e a radiação é colimada na direção do movimento. Esse efeito é extremamente importante para discos com raios internos próximos ao horizonte de eventos. O *redshift* gravitacional é um efeito da relatividade geral, a matéria e a radiação próximas ao buraco negro sentem a intensa curvatura do espaço-tempo e perdem energia ao escapar dessa região. O resultado é um deslocamento na energia dos fótons que conseguem escapar da esfera de ação dos buracos negros para o ramo vermelho do espectro. Além disso, esse efeito também acentua a dissimetria entre o pico no vermelho em comparação com o pico no azul.

Das linhas de emissão observadas, a linha intensa de ferro $K\alpha$, próxima de $6,4$ keV,

é a linha de emissão mais comumente detectada e também a mais persistente a ocorrer nessa região (Fabian et al., 1989). Uma de suas características é ser uma linha estreita, sendo sua largura natural da ordem de 1 keV, e podendo alargar-se por efeitos térmicos em até $\sim$ 5 keV (Laor, 1991). Desse modo, pode-se usar o respectivo perfil observado, moldado de maneira característica pelos efeitos relativísticos, para estudar a dinâmica do disco de acreção. Boa parte do trabalho teórico desenvolvido sobre linhas de emissão em discos de acreção relativísticos e os estudos observacionais subsequentes de núcleos ativos de galáxias (AGNs) foi impulsionado pela detecção da linha de ferro $K\alpha$ no buraco negro estelar Cygnus X-1 (Miller, 2007).

O perfil da linha de emissão resultante pode ser usado para extrair propriedades relacionadas à posição relativa entre o disco de acreção interno e o observador, tais como: a inclinação do disco (i), o estado rotacional do buraco negro, ou *spin*, (a) e a extensão do disco (raio interno e externo), dentre outros. As linhas de emissão podem ser usadas para medir a rotação do buraco negro porque a órbita circular estável mais interna (ISCO) em torno de um buraco negro depende de sua rotação: $r_{ISCO} = 6r_g$ para $a = 0$ e $r_{ISCO} = 1,23r_g$ para um máximo valor de a (Laor, 1991), sendo r_g o raio gravitacional, $r_g \equiv GM/c^2$ (G é a constante de Newton, M é a massa do buraco negro e c é a velocidade da luz). A Figura 2.1 mostra a dependência da ISCO com o parâmetro de rotação a, para buracos negros de Schwarzschild, sem rotação ($a = 0$), e de Kerr, com *spin* máximo. O perfil de linha para um disco de acreção orbitando um buraco negro de Schwarzschild foi descrita por Fabian et al. (1989) e o caso de um buraco negro de Kerr foi descrito por Laor (1991), ambos os modelos produzem um perfil de linha assimétrico com um alargamento da linha estendendo-se para baixas energias.

Em um disco Kepleriano, não relativístico, cada raio do disco produz um perfil de linha simétrico, correspondente à emissão do material tanto no lado em que o material em acreção se move em direção ao observador (deslocado para o azul) quanto no lado que o material se afasta (deslocado para o vermelho). Esse perfil é conhecido como *double-peaked* pelo seu característico pico duplo. Já perto de um buraco negro, onde as velocidades são relativísticas, o *beaming* relativístico sobreleva o pico no azul (energias mais altas) e o efeito Doppler com o *redshift* gravitacional desloca o perfil para uma energia mais baixa. A Figura 2.2 mostra cada uma dessas etapas, bem como o perfil de linha final, criado pela soma dessas contribuições. Esse perfil é conhecido como *shoulder-like* pela região de baixas

energias ser tipicamente curvada.

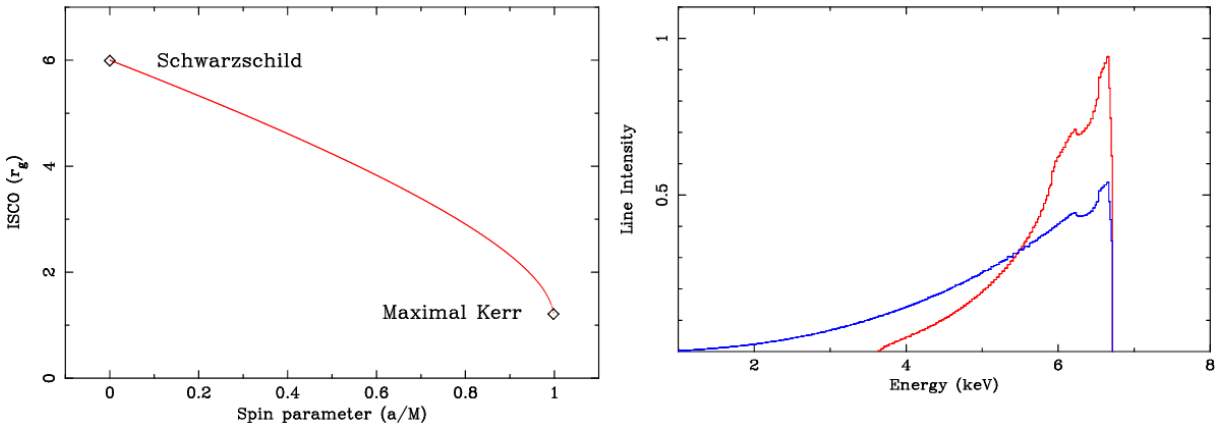

Figura 2.1: À esquerda: temos a dependência da órbita circular estável mais interna (ISCO) com o parâmetro de rotação do buraco negro a, para as soluções de Schwarzschild, com *spin* nulo, e de Kerr, com *spin* máximo. À direita: os perfis de linha esperados para os casos de Schwarzschild, em vermelho, e de maximo Kerr, em azul. Nota-se que o alargamento da linha para baixas energias é mais intenso no caso de Kerr, de modo que é possível calcular o *spin* do buraco negro a partir do perfil de linha. Fonte: Miller (2007).

2.1 Perfil de linha em Schwarzschild

A geometria de Schwarzschild é esfericamente simétrica e é a geometria exata fora de um buraco negro sem rotação. Os espaços-tempos curvos produzidos por corpos em rotação têm uma estrutura mais complexa do que a descrição de Schwarzschild, pois a relatividade geral prevê que a curvatura é produzida não apenas pela distribuição de massa, mas também pelo seu movimento.

Fabian et al. (1989) modelou o perfil de linha para um disco de acreção orbitando um buraco negro de Schwarzschild motivado pela linha $K\alpha$ observada em Cygnus X-1. De início assume-se que o gás frio em acreção está na forma de um disco, de modo que as órbitas são Keplerianas, e também que a emissão de raios X pode ser descrita por uma lei de potência. Isso se dá pois a radiação é atribuída a um 'halo' (*corona*) não térmico, posicionado acima e abaixo das partes centrais do disco (dentro de algumas dezenas de raios de Schwarzschild). Devido a isso, aproximadamente metade do fluxo da lei de potência incide no disco onde é espalhado, absorvido e produz fótons fluorescentes (Laor, 1991). Assume-se, também, que os fótons fluorescentes escapam livremente na direção do observador e a linha é modelada levando em consideração todos os efeitos relativísticos

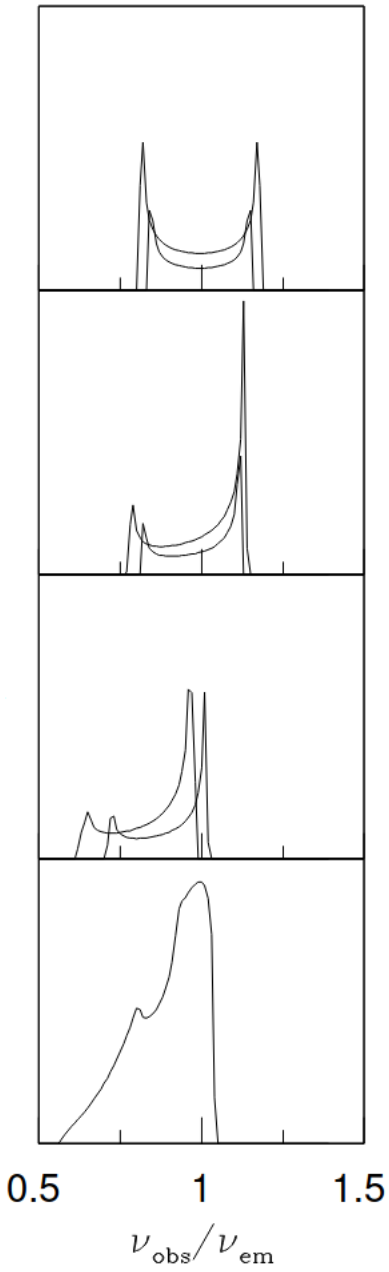

Figura 2.2: O perfil da linha de ferro $K\alpha$, alargada pela interação dos efeitos Doppler, *beaming* relativístico e *redshift* gravitacional. O primeiro painel demonstra o efeito Doppler, considerando a situação clássica de um disco Newtoniano. O segundo painel inclui os efeitos de *beaming*, que acentuam o pico no azul, e no terceiro painel têm-se o efeito do *redshift* gravitacional. A contribuição de todos esses efeitos gera um perfil assimétrico, alargado para baixas energias. Uma discussão mais detalhada é dada na Seção 2.1. Fonte: Fabian et al. (2000).

para um disco orbitando um buraco negro. A linha é aproximadamente semelhante à forma *double-peaked*, observada em discos de galáxias espirais, dentre outros. Fabian et al. (1989) afirma que, apesar do *redshift* gravitacional, a energia média carregada por cada fóton é maior que a energia de repouso, a menos que a inclinação do disco seja baixa, como mostra a Figura 2.3. Os parâmetros importantes que determinam o perfil da linha são o raio interno (r_i), o raio externo (r_o), a inclinação do disco (i) e a dependência radial da emissividade (r^q).

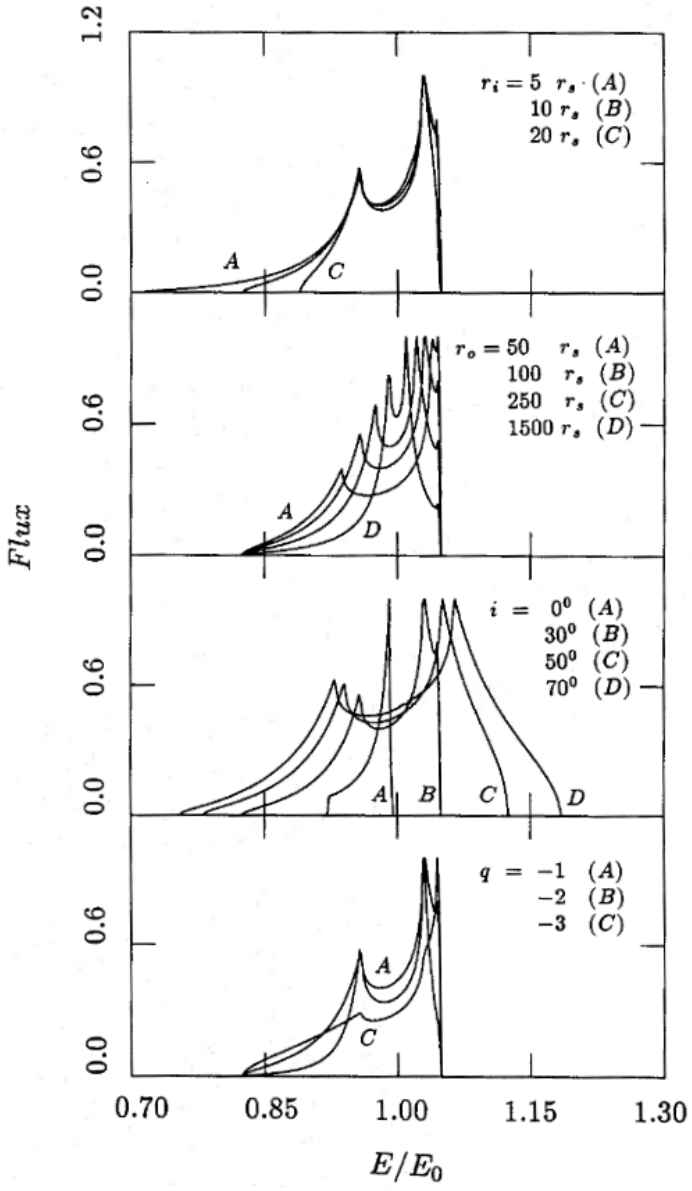

Figura 2.3: Diferentes perfis de linha de emissão para variações do raio interno, do raio externo, da inclinação do disco e da emissividade, de cima para baixo, respectivamente. Para cada caso, os parâmetros não especificados estão fixos em $r_i = 10R_s$, $r_o = 100R_s$, $i = 30$ e $q = -2$, sendo R_s o raio do horizonte de eventos. Fonte: Fabian et al. (1989)

Nota-se, da Figura 2.3, a dependência dos perfis de linha de emissão em Schwarzschild com o raio externo do disco, r_o, e com a inclinação, i. Para raios externos muito maiores que o raio do horizonte de eventos, r_s, têm-se um menor avermelhamento da linha. Para inclinações muito baixas o perfil de linha é praticamente triangular, adquirindo os picos duplos com o aumento da inclinação. Desse modo, pode-se afirmar que a ampliação da linha no azul é quase inteiramente uma função da inclinação.

A Figura 2.4 mostra em mais detalhes a dependência do modelo com a inclinação do disco de acreção em relação ao observador, sendo $i = 0^o$ um disco *face-on* e $i = 90^o$ um disco *edge-on*. Considera-se a região de emissão como o disco contido entre $6r_g$ e $30r_g$.

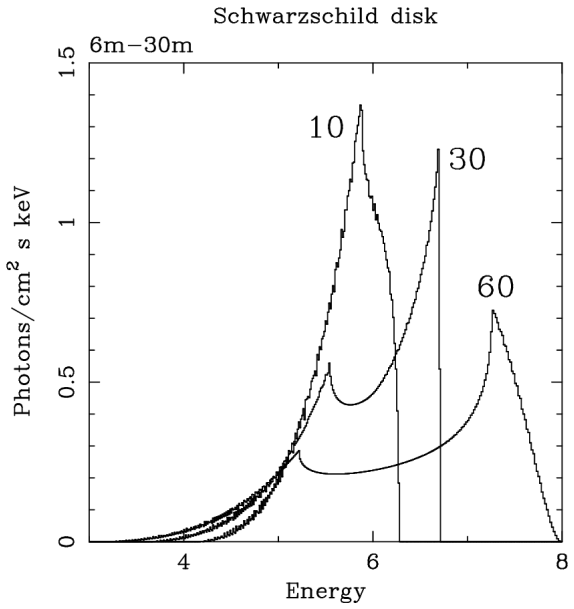

Figura 2.4: Linhas de emissão relativísticas da linha de ferro $K\alpha$ para o caso de um disco de acreção ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Para fins de visualização, assume-se que o disco possui raio interno de $r_i = 6r_g$ e raio externo de $30r_g$, sendo r_g o raio de estabilidade marginal. Mostra-se três perfis de linha, para três inclinações de disco: 10° , 30° and 60°. O principal efeito da inclinação é o alargamento da linha para altas energias. Fonte: Fabian et al. (2000)

2.2 Perfil de linha em Kerr

A métrica de Kerr descreve a rotação de buracos negros sem carga. Ela é uma das soluções das equações de campo de Einstein e generaliza a solução estática de Schwarzschild. A rotação do buraco negro é parametrizada pelo momento angular específico a, também conhecido por parâmetro de Kerr. Em unidades geometrizadas (ver Apêndice A para mais detalhes), a varia entre -1 e 1, sendo que o intervalo $[-1, 0]$ representa uma

rotação retrógrada e no intervalo [0, 1] a rotação do buraco negro e do disco têm o mesmo sentido.

Motivado pelos cálculos feitos para buracos negros sem momento angular (Fabian et al., 1989; Stella, 1990), o caso na geometria de Kerr foi descrito por Laor (1991). Essa análise é extremamente relevante, pois, da teoria de evolução estelar, sabe-se que buracos negros estelares são formados pelo colapso gravitacional de estrelas progenitoras em rotação. Portanto, supõe-se que buracos negros em geral carregam momento angular.

A Figura 2.5 ilustra os efeitos relativísticos na geometria de Kerr. Têm-se os variados perfis de uma linha emitida em raios de emissão (r_e) especificos e observada em várias inclinações. Esses perfis correspondem a variações dos elementos da função de transferência T, dependente do ângulo de inclinação do disco, $\mu = cos(i)$, e da variação na frequência (ν_o/ν_e; frequência de observação por frequência de emissão), que é definida por uma relação entre a intensidade específica no referencial de repouso do disco e o fluxo aparente no infinito.

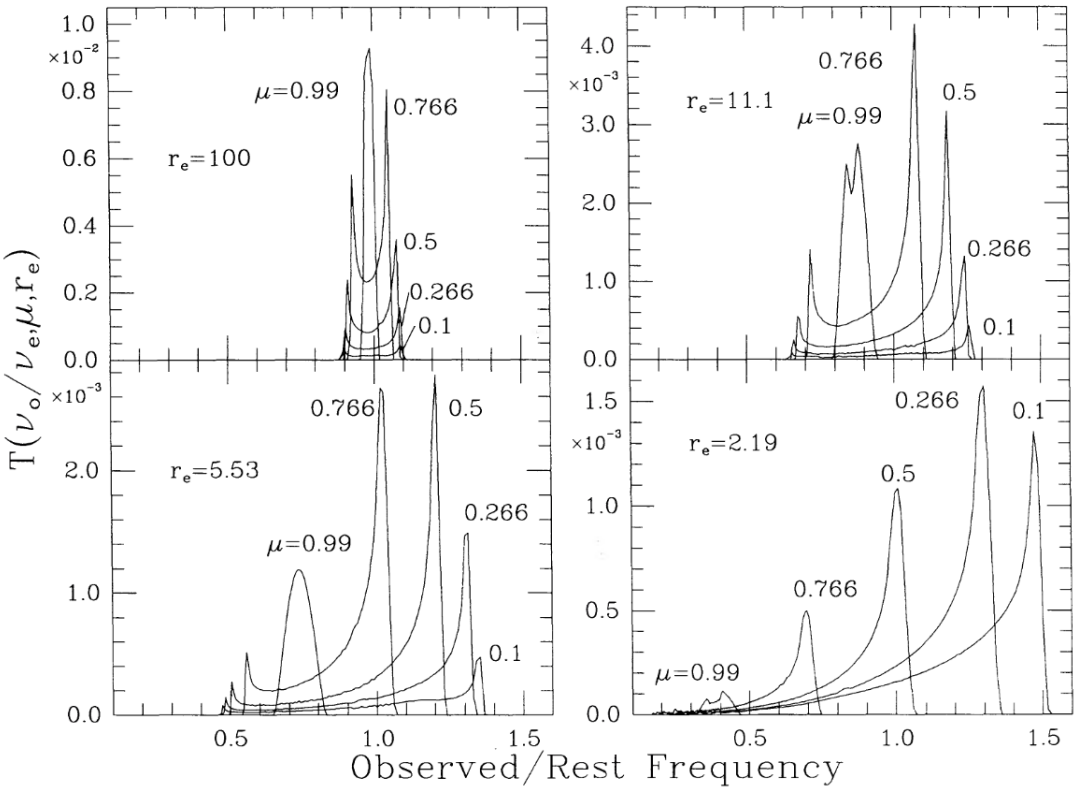

Figura 2.5: Variações dos elementos da função de transferência T, dependente do ângulo de inclinação do disco, $\mu = cos(i)$, e da variação na frequência (ν_o/ν_e). Têm-se os variados perfis de uma linha emitida em raios de emissão (r_e) específicos e observada em várias inclinações. Uma discussão detalhada é dada na Seção 2.2. Fonte: Laor (1991).

Nota-se que os efeitos relativísticos aumentam a medida que r_e diminui, tornando linha fortemente distorcida. Têm-se que para valores altos de r_e a maior parte do fluxo é observada em baixas inclinações (*face-on*; $\mu = 0.99$) à medida que r_e diminui, o cenário se inverte e a maior parte do fluxo é observada em inclinações altas (*edge-on*; $\mu = 0.1$). Isso é consequência do acentuado efeito do *beaming* relativístico e do *redshift* gravitacional. Além disso, para r_e muito próximos do horizonte de eventos, o pico em energias mais baixas praticamente desaparece e, à medida que r_e aumenta o pico no vermelho se fortalece e a separação entre os picos diminui. Por fim, pode-se ressaltar também que, em baixas inclinações, a diminuição de r_e afeta principalmente o desvio para o vermelho, enquanto que, em altas inclinações, o efeito Doppler é bastante acentuado.

A Figura 2.6 mostra três perfis da linha de emissão $K\alpha$, para três valores diferentes de *spin*, $a = -0,998$ para um buraco negro com rotação retrógrada, $a = 0$ para um buraco negro de Schwarzschild, e $a = 0,998$ para um buraco negro com rotação prógrada. Brenneman (2013) modelou estas linhas fazendo uso de um código que permite a construção de linhas de emissão para diferentes valores de *spin*, cujos parâmetros são, dentre outros, (a) a energia de repouso da linha (keV); (b) raios interno e externo do disco; (c) redshift; (d) inclinação do disco; (e) parâmetro de rotação, *a*. Apesar de Brenneman (2013) não especificar em seu trabalho todos os parâmetros utilizados para a construção do gráfico, podemos nos basear na análise apresentada nas Seções 2.1 e 2.2 para discutir os possíveis valores para a inclinação e os raios do disco.

No referencial de repouso, vamos considerar a linha de $K\alpha$ em $6,4$ keV. Assim, temos que, para Schwarzschild, o alargamento para o vermelho está próximo de $3,7$ keV ($\nu_o/\nu_e \sim 0,6$), e o pico no azul em 6,7 keV ($\nu_o/\nu_e \sim 1,05$). É possível observar os picos duplos, com um leve pico no vermelho, por volta de $6,2$ keV. O pico no azul nos permite afirmar que a inclinação do disco não pode ser muito alta, tendo em vista que para valores altos de i têm-se um alargamento da linha para o azul. Já o alargamento para o vermelho indica uma proximidade das regiões mais internas do disco com o horizonte de eventos. Desse modo, tendo como base as Figuras 2.3 e 2.4, pode-se supor, de maneira grosseira, que o disco de acreção está próximo a uma posição *face-on*, com uma inclinação baixa ($i < 30°$), com raios $r_i \sim 5r_g$ e $r_o > 250r_g$.

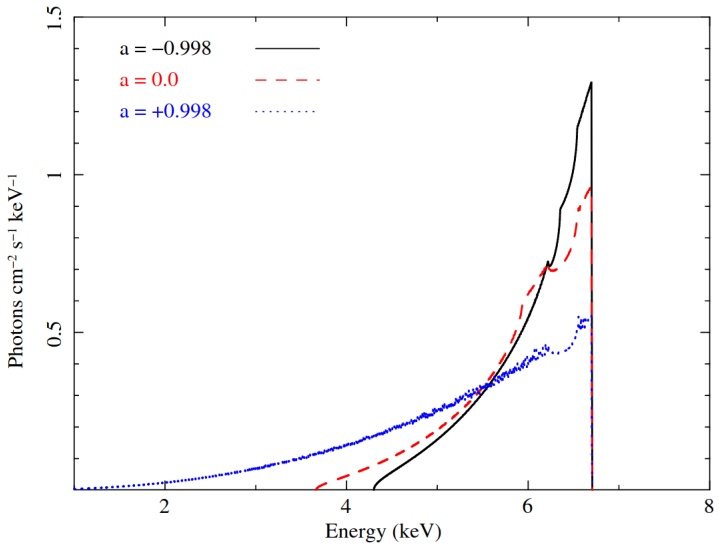

Figura 2.6: Mudança na forma da linha de ferro $K\alpha$ em função do parâmetro de rotação do buraco negro. A linha preta representa um buraco negro com rotação retrógrada, $a = -0,998$, a linha vermelha tracejada representa um buraco negro de Schwarzschild, $a = 0$, e a linha azul pontilhada representa um buraco negro com rotação prógrada, $a = +0,998$. Pode-se notar o alargamento da linha para baixas energias à medida que o *spin* do buraco negro aumenta. Fonte: Brenneman (2013).

2.3 *MCG-6-30-15*

Um dos primeiros cálculos para buracos negros de Kerr foi feito há cerca de trinta anos, por Laor (1991). Nele, os efeitos relativísticos mostraram-se especialmente aparentes em sistemas *edge-on*; as linhas são fortemente deslocadas para o azul além de exibirem uma largura à meia altura (FWHM) mais ampla. A resolução observacional das linhas de $K\alpha$ da época não eram suficientes para uma aplicação observacional expressiva, mas já davam suporte ao modelo de disco de acreção.

A resolução das observações é extremamente crucial para a modelagem das linhas de emissão. Elas foram modeladas claramente pela primeira vez na galáxia Seyfert tipo I *MCG-6-30-15* com dados do telescópio espacial japonês *Advanced Satellite for Cosmology and Astrophysics* (ASCA) por Tanaka et al. (1995). Com dados de novas gerações de satélites, como o *XMM-Newton*, *Chandra* e *Suzaku*, e uma melhor resolução espectral, surgiram evidências de que o disco de acreção estaria em torno de um buraco negro em rotação, bem como de outros processos físicos além dos já esperados por modelos padrão de discos de acreção (Wilms et al., 2001; Fabian et al., 2002). A linha de ferro da galáxia *MCG-6-30-15* permanece como a linha mais analisada em uma AGN, em grande parte por

causa de sua grande largura equivalente, $LE = 330^{+180}_{-120}$ (Tanaka et al., 1995).

A Figura 2.7 mostra o ajuste dos dados, coletados pelo *ASCA*, supondo um modelo de um disco de acreção ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, sem rotação, bem como o ajuste com dados do *XMM-Newton*. No segundo caso, nota-se o alargamento da linha $K\alpha$. Esse último ajuste, modelado por Fabian et al. (2002), considera o modelo de um disco de acreção de um buraco negro de Kerr.

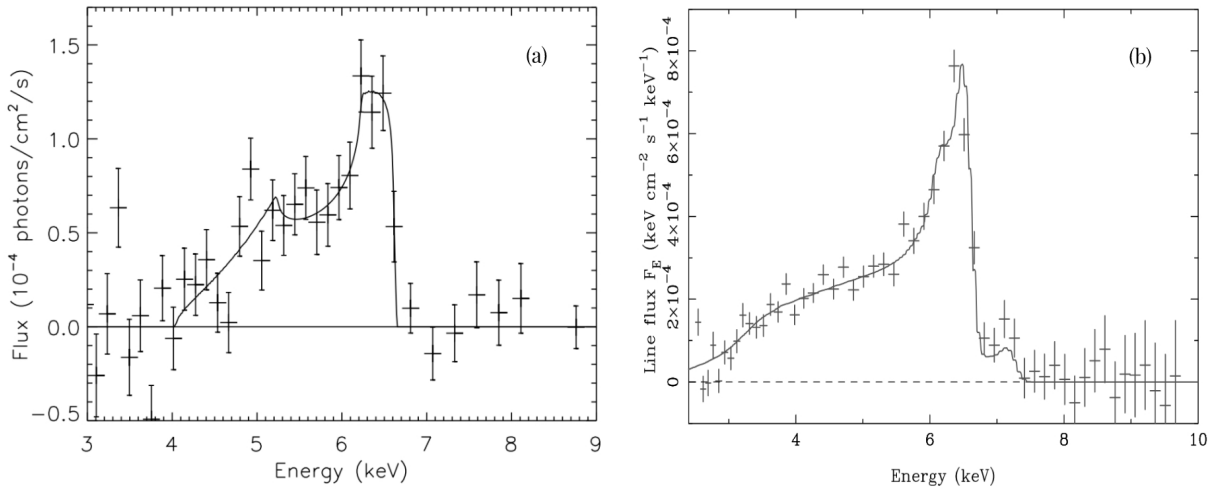

Figura 2.7: A linha de ferro $K\alpha$ ($6.4keV$) observada na galáxia MCG-6-30-15, uma galáxia Seyfert tipo I. Nota-se a linha alargada principalmente para baixas energias. Os pontos representam os dados observados e a linha sólida corresponde ao ajuste, (a) supondo um disco de acreção orbitando um buraco negro não rotante, com inclinação de 30° (Tanaka et al., 1995); (b) supondo um disco de acreção orbitando um buraco negro de Kerr (Fabian et al., 2002). As duas observações foram conduzidas com sete anos de diferença, com instrumentos diferentes, de modo que os avanços tecnológicos permitiram o refinamento dos dados e uma nova interpretação.

Com os avanços observacionais, os modelos teóricos se mantêm essenciais para a análise e interpretação dos dados, de modo que, quanto mais refinados os dados obtidos, mais detalhes singulares sobre as regiões centrais do disco podem ser modelados.

Capítulo 3

Espaço-tempo de Schwarzschild

Nesta segunda parte do trabalho iremos focar na teoria por trás dos modelos de disco de acreção ao redor de buracos negros sem carga e sem rotação. Estes são os primeiros passos em direção à construção de um perfil de linha de emissão na geometria de Schwarzschild.

Primeiro iremos supor um disco de acreção fino, de modo que possa ser aproximado por um disco, com duas componentes espaciais. Além disso, apenas analisaremos a fundo o caso *edge-on*, ou seja, no qual a linha de visada do observador seja paralela ao disco. O caso generalizado é tratado brevemente, tendo como base (Fabian et al., 1989). Essas restrições removem dos cálculos alguns graus de complexidade que estão além do escopo desta breve análise.

Uma descrição detalhada da geometria de Schwarzschild pode ser encontrada no Apêndice A. Antes de pensarmos em construir os perfis de linha, vamos analisar as órbitas de partículas seguindo linhas de mundo tipo tempo e fótons seguindo linhas de mundo nulas ao redor de buracos negros de Schwarzschild. Por seguirem diferentes linhas de mundo, o movimento orbital desses objetos é ligeiramente diferente.

3.1 Velocidades

O caminho percorrido por uma partícula no espaço-tempo pode ser especificado através da componente temporal e das três componentes espaciais em função de um parâmetro σ, que varia ao longo da linha de mundo. Dessa maneira, um ponto no caminho é determinado por quatro funções, $x^\alpha(\sigma)$, sendo $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Para partículas seguindo linhas de mundo tipo tempo, um parâmetro natural é o tempo próprio e as equações

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau) \tag{3.1}$$

descrevem o caminho percorrido. Para partículas seguindo linhas de mundo nulas, como fótons, o tempo próprio não pode ser usado como parâmetro. De acordo com o desenvolvido no Apêndice A, o intervalo de tempo próprio entre dois pontos em uma linha de mundo nula é igual a zero. Sendo assim, é necessário parametrizar através de um parâmetro arbitrário λ, de modo que

$$x^\alpha = x^\alpha(\lambda). \tag{3.2}$$

Por ser um parâmetro arbitrário, é possível normalizar λ de maneira que o quadrimomento $\mathbf{p}$ coincida com a quadrivelocidade $\mathbf{u}$ do fóton. Assim, a conservação (A.18) pode ser escrita como $e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}$ e o mesmo é válido para (A.20).

As componentes da quadrivelocidade $\mathbf{u}$ de uma partícula são as derivadas da posição ao longo da linha de mundo em relação ao parâmetro. Para partículas massivas

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \tag{3.3}$$

e para fótons

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \tag{3.4}$$

O produto escalar da quadrivelocidade também difere entre partículas massivas e fótons, a quadrivelocidade de um fóton é um vetor nulo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \tag{3.5}$$

enquanto a quadrivelocidade de uma partícula com linha de mundo tipo tempo é unitária

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1. \tag{3.6}$$

A componente u^ϕ da quadrivelocidade de uma partícula é chamada de velocidade angular e mensura a taxa com que a posição angular na órbita varia com o tempo. A velocidade angular em relação a taxa t medida por um relógio no infinito é dada por

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau}. \tag{3.7}$$

As conservações (A.18) e (A.20) também se mantêm no caso de partículas e as taxas de variação da Equação (3.7), $d\phi/d\tau = \ell \cdot (r^2 sen^2\theta)^{-1}$ e $dt/d\tau = e \cdot (1 - 2M/r)^{-1}$, diferem de fótons apenas pelo parâmetro τ. E assim,

$$\Omega = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\ell}{e}\right) \tag{3.8}$$

é a análoga à velocidade angular, para qualquer órbita.

3.2 Partículas em órbita

A conservação (A.20) implica que as órbitas na geometria de Schwarzschild estão contidas em planos, com isso, podemos definir

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \tag{3.9}$$

de maneira a confinar a análise em uma órbita equatorial.

Portanto, a variação em θ se torna nula e a componente u^θ da velocidade também se anula. A Equação (3.6) torna-se, explicitamente,

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{d\tau}^2 + r^2\frac{d\phi}{d\tau}^2 = -1, \tag{3.10}$$

na qual $x^t = t$, $x^r = r$ e $x^\phi = \phi$.

Reescrevendo a (3.10) em função das conservações (A.18) e (A.20),

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - 1\right], \tag{3.11}$$

podemos traçar um paralelo com órbitas Newtonianas. Nota-se que do lado esquerdo da Equação (3.11) temos uma constante em função da energia conservada (A.18), tal que

$$\mathcal{E} \equiv \frac{(e^2 - 1)}{2}, \tag{3.12}$$

e do lado direito, o potencial efetivo

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - 1\right] = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}. \tag{3.13}$$

Assim, a Equação (3.11) se torna

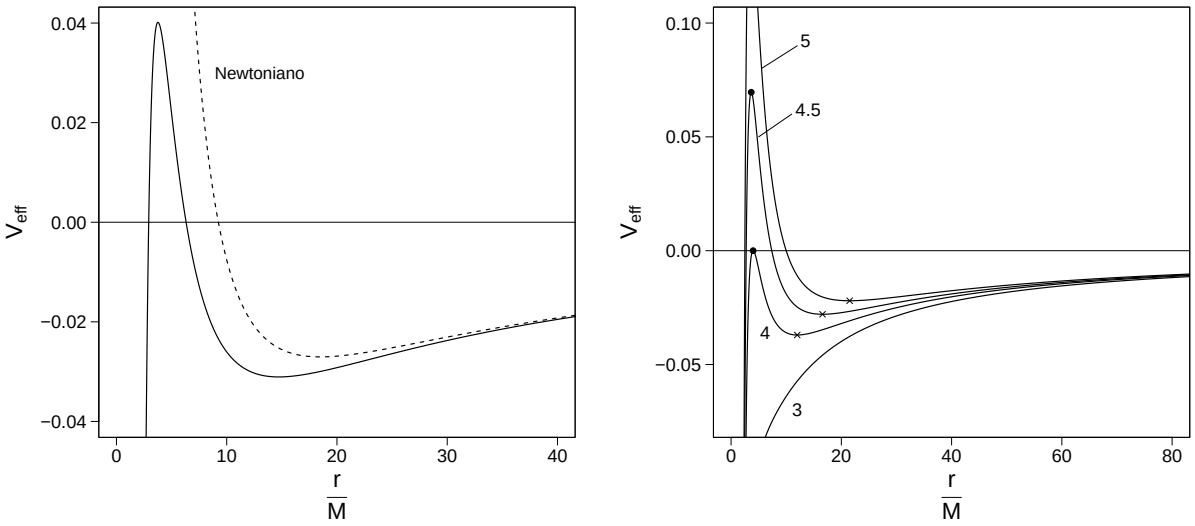

Figura 3.1: O potencial efetivo V_{ef} para o movimento radial, em diferentes valores de ℓ/M. O gráfico à esquerda compara o potencial efetivo relativístico para $\ell/M = 4.3$ ao potencial Newtoniano. Nota-se que para grandes valores de r/M, a diferença entre os potenciais se torna desprezível, mas para pequenos valores de r/M a diferença se torna relevante. O gráfico à direita compara o potencial efetivo relativístico para quatro valores de ℓ/M, indicados na imagem. Os pontos apontam as órbitas circulares instáveis e as estrelas indicam as órbitas circulares mais estáveis; para valores $\ell/M < 3.46$ não existem órbitas estáveis e a partícula se encontrará em queda em direção ao centro de atração.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{ef}}(r), \tag{3.14}$$

equivalente a versão Newtoniana mas diferindo no termo $-M\ell^2/r^3$ do potencial efetivo.

Os dois primeiros termos de (3.13) são os mesmos da teoria Newtoniana, de modo que, quando $r \to \infty$, o potencial efetivo na geometria de Schwarzschild tende ao potencial efetivo Newtoniano. Mas, a medida que r diminui, o termo sobressalente $-M\ell^2/r^3$ passa a ser relevante, como mostra a Figura 3.1.

Os extremos do potencial se encontram em

$$r_{\substack{\text{rmin}\\\text{rmax}}} = \frac{\ell^2}{2M}\left[1 \pm \sqrt{1 - 12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right], \tag{3.15}$$

e estão indicados na Figura 3.1, para alguns valores de ℓ/M. Nota-se, da Equação (3.15), que se $\ell/M = \sqrt{12}$ os raios mínimo e máximo se igualam em $\ell^2/2M$, de modo que não há nenhum extremo do potencial efetivo abaixo desse valor.

Órbitas circulares são possíveis nos raios da Equação (3.15), sendo estável no mínimo

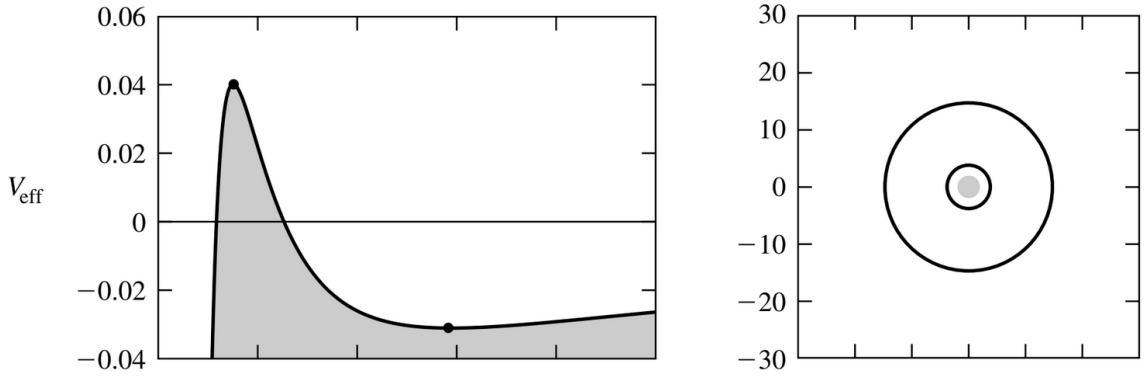

Figura 3.2: Órbitas circulares no espaço tempo de Schwarzschild para $\ell/M = 4.3$. A forma da órbita é mostrada à direita, nas quais as coordenadas r e ϕ de Schwarzschild estão esquematizadas como coordenadas polares em um plano e a região central sombreada corresponde a $r < 2M$. O eixo horizontal nesses gráficos corresponde a r/M. A órbita mais externa corresponde à ISCO e a mais interna corresponde à órbita circular mais instável. Fonte: Hartle (2003).

do potencial efetivo e instável em seu máximo. Isso ocorre pois uma variação mínima de $\mathcal{E}$ leva a partícula a colapsar para $r = 0$ ou escapar para $r \to \infty$. Neste trabalho vamos considerar que a matéria emissora do fóton se encontra em uma órbita circular ao redor do buraco negro de Schwarzschild, como mostra a Figura 3.2. Isso é possível pois estamos considerando apenas pequenas variações em ϕ, de modo que o movimento da matéria pode ser aproximado por uma órbita circular.

A órbita circular estável mais interna, também chamada ISCO, do inglês *inner most stable orbit*, ocorre em $\ell/M = \sqrt{12}$, como mostra a Equação (3.15), no raio

$$r_{ISCO} = \frac{(\sqrt{12}M)^2}{2M} = 6M. \tag{3.16}$$

Uma característica de órbitas circulares estáveis é a não variação do raio, tal que $\dot{r} = 0$, o que implica na relação entre a constante $\mathcal{E}$ e o potencial efetivo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\cancelto{0}{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2} + V_{ef} = V_{ef}, \tag{3.17}$$

de modo que, da Equação (3.11), a conservação de energia se torna

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{2M\ell^2}{r^3}. \tag{3.18}$$

Além disso, da Equação (3.15) para o mínimo potencial efetivo, temos o raio da órbita estável, r_{max}, e a relação entre r e ℓ

$$r_{max} = \frac{\ell^2}{2M}\left[1 + \sqrt{1 - 12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right], \tag{3.19}$$

a partir da qual encontramos $\ell(r)$,

$$\left(\frac{2Mr}{\ell^2} - 1\right)^2 = 1 - 12\left(\frac{M}{\ell}\right) \quad \longrightarrow \quad \ell^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M}. \tag{3.20}$$

Na Seção 3.1 obtivemos a velocidade angular Ω em função de r e das conservações ℓ/e, para qualquer órbita. Não é complexo notar que das Equações (3.18) e (3.20) podemos encontrar a conservação ℓ/e, especificamente para órbitas circulares estáveis. Assim,

$$\frac{e^2}{\ell^2} = \frac{1}{\ell^2} - \frac{2M}{r\ell^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3} \quad \longrightarrow \quad \frac{\ell}{e} = (Mr)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \tag{3.21}$$

Substituindo a (3.21) na Equação (3.7) que encontramos para Ω, temos

$$\Omega = \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2}, \tag{3.22}$$

a qual possui a mesma forma da velocidade angular Kepleriana, em unidades geometrizadas. Apesar disso, não há significância física por trás dessa concordância entre as teorias relativística e não relativística, e apenas o uso das coordenadas de Schwarzschild implica nessa coincidência.

3.3 Partículas no disco de acreção

O caminho de um observador pelo espaço-tempo é uma linha de mundo tipo tempo e seu referencial tem como base quatro quadrivetores unitários, ortonormais entre si, que definem uma direção temporal e três direções espaciais ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). O quadrivetor que define a direção temporal será tangente a linha de mundo do observador e, da Equação (3.6), sua velocidade também é um vetor tangente e unitário,

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}_{obs}. \tag{3.23}$$

Para partículas com massa de repouso nula, como no caso do fóton, temos que os componentes do quadrimomento da partícula são descritos por

$$p^\alpha = (E, \hbar k^\alpha). \tag{3.24}$$

Por definição, qualquer quadrivetor pode ser representado como uma combinação linear da base, de modo que temos $\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, ou ainda, as componentes de $\mathbf{p}$ podem ser computadas pelo produto escalar do quadrimomento com a respectiva componente da base, $p^0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_0$. Assim, a energia

$$E = \hbar\nu = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{obs} \tag{3.25}$$

descreve a energia de um fóton medida por um observador com velocidade $\mathbf{u}_{obs}$.

Dessa forma, pode-se assumir que a energia de um fóton, com quadrimomento $\mathbf{p}(r, \phi)$, emitido por uma fonte em órbita circular em um disco de acreção, e a energia desse mesmo fóton, com quadrimomento $\mathbf{p}(\infty)$, medida por um observador no infinito, serão dadas pela Equação (3.25). Portanto, a razão entre as frequências de emissão e de detecção desse fóton pode ser calculada,

$$\frac{E_\infty}{E_{fonte}} = \frac{\hbar\nu_\infty}{\hbar\nu_{fonte}} = \frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} = \frac{\mathbf{u}_{rec} \cdot \mathbf{p}(\infty)}{\mathbf{u}(r, \phi) \cdot \mathbf{p}(r, \phi)}. \tag{3.26}$$

Nos cálculos apresentados nesta Seção vamos considerar um disco de acreção plano, paralelo ao plano de visada de um observador no infinito, orientado de maneira que $\theta = \pi/2$, de maneira semelhante ao que foi desenvolvido na Seção 3.2. Desse modo, a Equação (A.8) se simplifica

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Um observador estácionario no infinito têm componentes espaciais nulas, portanto as componentes da sua quadrivelocidade são $u^\alpha_{obs} = (1, 0, 0, 0)$. Da (A.10), temos que a quadrivelocidade de um observador estacionário é equivalente ao vetor de Killing associado a invariância na componente temporal na métrica de Schwarzschild.

Assim, podemos reescrever a Equação (3.26) para a energia do fóton no infinito,

$$\mathbf{u}_{rec} \cdot \mathbf{p}(\infty) = g_{\alpha\beta}\, u^\alpha_{rec}\, p^\beta(\infty) = g_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, p^\beta(\infty) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}(\infty), \tag{3.28}$$

e, da (A.18), temos que

$$\mathbf{u}_{rec} \cdot \mathbf{p}(\infty) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}(\infty) = -e. \tag{3.29}$$

A fonte emissora se encontra em órbita circular ao redor do buraco negro, no plano do disco de acreção, de modo que as variações em r e θ podem ser desprezadas. Portanto, a quadrivelocidade da fonte se torna $u^{\alpha}_{fonte} = (u^t, 0, 0, u^{\phi})$, ou ainda,

$$u^{\alpha}_{fonte} = u^t(1, 0, 0, \Omega) = u^t(\boldsymbol{\xi} + \Omega\boldsymbol{\eta}), \tag{3.30}$$

na qual Ω é a velocidade angular da fonte, calculada por (3.22), e η é a conservação associada à invariância da componente ϕ, da Equação (A.11).

Da Seção 3.1, vamos usar a característica unitária da quadrivelocidade e a métrica de Schwarzschild para encontrar a componente temporal u^t_{fonte} da velocidade da fonte emissora,

$$g_{tt}(u^t_{fonte})^2 + g_{\phi\phi}(u^{\phi}_{fonte})^2 = -1. \tag{3.31}$$

Substituindo as componentes g_{tt} e $g_{\phi\phi}$ da Equação (3.27), obtemos a igualdade

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(u^t_{fonte})^2 + r^2(u^t_{fonte} \cdot \Omega)^2 = -1, \tag{3.32}$$

e portanto,

$$u^t_{fonte} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \tag{3.33}$$

A razão das frequências pode agora ser escrita em função das quantidades conservadas, (A.10) e (A.11), a energia, (A.18), e o momento angular do fóton, (3.22),

$$\frac{\nu_{\infty}}{\nu_{fonte}} = \frac{-e}{\mathbf{p}(r, \phi) \cdot u^t_{fonte}(\boldsymbol{\xi} + \Omega\boldsymbol{\eta})} = \frac{-e}{u^t_{fonte}[-e + \Omega\ell]} \tag{3.34}$$

Podemos introduzir, então, a quantidade conservada

$$b \equiv \frac{\ell}{e}, \tag{3.35}$$

chamada parâmetro de impacto. Ao contrário de partículas, cujas órbitas dependem de distintos valores de e e ℓ, a órbita dos fótons depende apenas da razão b. Portanto, a razão entre as frequências, em função de r, Ω e b é dada por

$$\frac{\nu_{\infty}}{\nu_{fonte}} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2}(1 \pm \Omega b)^{-1}. \tag{3.36}$$

Uma análise gráfica do resultado mostrado na Equação (3.36) encontra-se no Apêndice B.

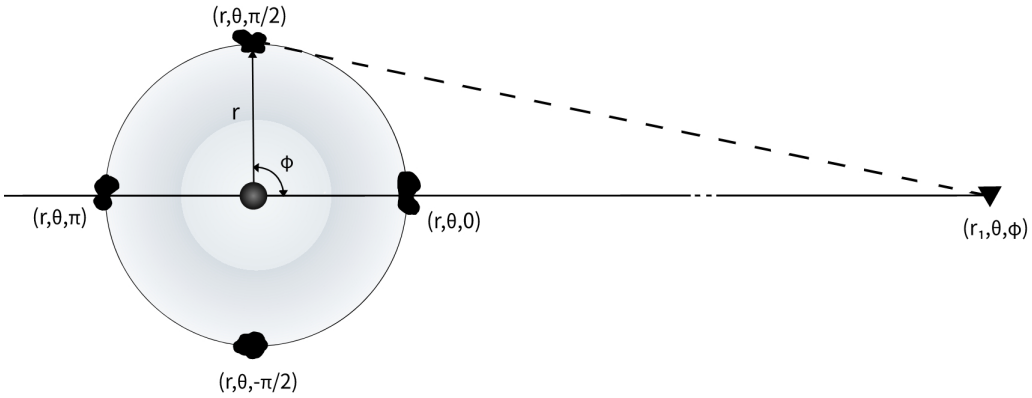

Figura 3.3: Esquema de um disco de acreção ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, visto de cima. O triângulo, à direita, indica um observador no infinito e a matéria emissora em órbita cirular é vista em quatro posições de ϕ: $0, \pm\pi/2, \pi$.

A partir do parâmetro de impacto vamos analisar a variação da frequência em 4 pontos estratégicos da órbita: $\phi = 0, \pm\pi/2, \pi$, ilustrados na Figura 3.3. O caso mais simples é para $\phi = \pi$ ou $\phi = 0$, como o momento angular do fóton no infinito é dado pela Equação (A.20), temos que

$$\ell = 0 \rightarrow b = 0 \tag{3.37}$$

e a Equação (3.36) se torna

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2}. \tag{3.38}$$

Nos pontos $\phi = \pm\pi/2$, a matéria está se aproximando ou se afastando do observador no infinito e a componente radial do quadrimomento $p^r(r, \pm\pi/2)$ do fóton se anula, tal que

$$p^\alpha = (p^t, 0, 0, p^\phi). \tag{3.39}$$

Da Equação (3.5), temos que o produto vetorial quadrimomento do fóton é nulo,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = g_{tt}(p^t)^2 + g_{\phi\phi}(p^\phi)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(p^t)^2 + r^2(p^\phi)^2 = 0, \tag{3.40}$$

e encontramos a relação entre p^ϕ e p^t

$$\frac{p^\phi}{p^t} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \tag{3.41}$$

Como $b \equiv \ell/e$, das Equações (A.18), (A.20) e (3.41) temos o parâmetro de impacto em função de r

$$b \equiv \frac{\ell}{e} = \frac{r^2}{(1-2M/r)}\frac{p^\phi}{p^t} = r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \tag{3.42}$$

para um fóton emitido em $\phi = \pm\pi/2$. Substituindo a (3.42) na Equação da frequência (3.36) obtemos

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2}\left[1 \pm \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2} r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\right]^{-1}. \tag{3.43}$$

Sendo assim, a variação entre a frequência emitida e observada para esse fóton é

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2}\left[1 \pm \left(\frac{r}{M} - 2\right)^{-1/2}\right]^{-1}. \tag{3.44}$$

Como visto na Seção 3.2, o menor raio possível para uma órbita circular na métrica de Schwarzschild é $r = 6M$, logo é possível calcular a variação na frequência para um fóton emitido em $(r = 6M, \phi = \pm\pi/2, \theta = \pi/2)$ e detectado a grandes distâncias,

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} \begin{cases} = \sqrt{2}/3 \approx 0.4714 \ \text{(afastando)} \\ = \sqrt{2} \approx 1.4142 \ \text{(aproximando)}. \end{cases} \tag{3.45}$$

A razão obtida para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ na Equação (3.38) implica em um desvio para o vermelho (*redshift*) da frequência do fóton para qualquer raio do disco do qual ele seja emitido. Ao contrário, para $\phi = \pm\pi/2$, a Equação (3.44) carrega o sinal $\pm$ caracterizando o movimento de aproximação ou afastamento da matéria no disco em relação ao observador no momento da emissão.

O próximo passo nesta análise é a generalização da Equação (3.36). Vamos supor um disco fino orbitando um buraco negro de Schwarzschild, estendendo-se de r_i até r_o, e observado com uma inclinação i. Como visto, a variação na frequência para uma inclinação $i = 90°$), em quatro posições específicas, é dada pelas Equações (3.38) e (3.45). Generalizando essa para qualquer inclinação e parametrizando em termos do ângulo de emissão ζ, como demonstrado por Fabian et al. (1989), obtêm-se

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_{fonte}} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2} \left\{1 + \frac{cos(\beta)}{[r\,(1 + tg^2(\zeta))/M - 2]^{1/2}}\right\}^{-1}, \tag{3.46}$$

sendo

$$cos(\beta) = cos(\phi)sen(i)\left[cos^2(\phi)sen^2(i)\right]^{1/2}, \tag{3.47}$$

e

$$tg(\zeta) = \frac{p^r}{p^\phi\, r}. \tag{3.48}$$

De acordo com Fabian et al. (1989), a parametrização em termos do ângulo de emissão é necessária por permitir uma representação geométrica simples do sistema, sendo que $\zeta + \pi/2$ representa o ângulo entre a direção de emissão do fóton e a linha que conecta o ponto de emissão ao buraco negro.

Sabe-se que o fluxo específico no infinito, dF_∞, levado ao observador por uma área infinitesimal do disco, é dado pelo produto da intensidade específica, I_ν, e do ângulo sólido $d\Omega$ (Rybicki e Lightman, 1986). Neste ponto, algumas considerações devem ser feitas, de início pode-se aproximar a intensidade específica no referencial da matéria emissora por uma função delta, $I_{fonte} = \varepsilon\,\delta(E_{fonte} - E_0)$, para linhas de emissão estreitas com energia de repouso E_0. Além disso, é necessário expressar o ângulo sólido em termos do parâmetro de impacto e do ângulo ϕ. Por fim, para parâmetros de impacto menores que $r/M \sim 20$ é necessária uma integração numérica das equações das geodésicas nulas (Fabian et al., 1989). De modo que o fluxo observado possa ser calculado, integrando em ϕ e r,

$$F_\infty = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} dF_\infty, \tag{3.49}$$

e, desta forma, é possível modelar o perfil de linha de emissão de um disco de acreção ao redor de um buraco negro de Schwarzschild.

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho explorou-se os conceitos da Relatividade Geral de Einstein de modo a aplicá-los na análise do espaço-tempo ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Encontramos a variação na frequência de um fóton emitido por um material em órbita em quatro posições: $\phi = 0, \pm\pi/2, \pi$. Fótons emitidos por um material movendo-se transversalmente ao observador no infinito sempre sofrerão desvio para o vermelho, independente do raio de emissão. Já para fótons aproximando-se ou afastando-se diretamente do observador, encontramos uma dependência entre o desvio na frequência e a direção do movimento. Este resultado pode ser generalizado, de modo a obter-se a variação na frequência para qualquer posição em um disco de acreção ao redor do buraco negro, como demonstrado por Fabian et al. (1989), a fim de construir o perfil de linha de emissão para este problema.

De modo geral, foi possível uma análise ampla de modelos teóricos de discos de acreção ao redor de buracos negros sem rotação (Fabian et al., 1989) e com máxima rotação (Laor, 1991), bem como a associação destas com resultados observacionais.

Referências Bibliográficas

Brenneman L., Measuring the Angular Momentum of Supermassive Black Holes. Springer New York, 2013

Einstein A., On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of Many Gravitating Masses, Annals of Mathematics, 1939, vol. 40, p. 922

Fabian A. C., Iwasawa K., Reynolds C. S., Young A. J., Broad Iron Lines in Active Galactic Nuclei, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2000, vol. 112, p. 1145

Fabian A. C., Kara E., Parker M. L., Relativistic Disc lines. In Suzaku-MAXI 2014: Expanding the Frontiers of the X-ray Universe , 2014, p. 279

Fabian A. C., Lasenby A. N., Astrophysical Black Holes, arXiv e-prints, 2019

Fabian A. C., Rees M. J., Stella L., White N. E., X-ray fluorescence from the inner disc in Cygnus X-1., MNRAS, 1989, vol. 238, p. 729

Fabian A. C., Vaughan S., Nandra K., Iwasawa K., Ballantyne D. R., Lee J. C., De Rosa A., Turner A., Young A. J., A long hard look at MCG-6-30-15 with XMM-Newton, MNRAS, 2002, vol. 335, p. L1

Hartle J. B., Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, 2003

Laor A., Line Profiles from a Disk around a Rotating Black Hole, ApJ, 1991, vol. 376, p. 90

Miller J. M., Relativistic X-Ray Lines from the Inner Accretion Disks Around Black Holes, ARA&A, 2007, vol. 45, p. 441

Müller A., Camenzind M., Relativistic emission lines from accreting black holes, A&A, 2004, vol. 413, p. 861

Rybicki G. B., Lightman A. P., Radiative Processes in Astrophysics, 1986

Shakura N. I., Sunyaev R. A., Black holes in binary systems. Observational appearance., A&A, 1973, vol. 24, p. 337

Stella L., Measuring black hole mass through variable line profiles from accretion disks, Nature, 1990, vol. 344, p. 747

Tanaka Y., Nandra K., Fabian A. C., Inoue H., Otani C., Dotani T., Hayashida K., Iwasawa K., Kii T., Kunieda H., Makino F., Matsuoka M., Gravitationally redshifted emission implying an accretion disk and massive black hole in the active galaxy MCG-6-30-15, Nature, 1995, vol. 375, p. 659

Wilms J., Reynolds C. S., Begelman M. C., Reeves J., Molendi S., Staubert R., Kendziorra E., XMM-EPIC observation of MCG-6-30-15: direct evidence for the extraction of energy from a spinning black hole?, MNRAS, 2001, vol. 328, p. L27

Apêndice

Apêndice A

Geometria de Schwarzschild

A.1 Espaço-tempo curvo

Todos os corpos, com uma mesma condição inicial, sujeitos a um campo gravitacional irão seguir a mesma trajetória no espaço e no tempo. Einstein explicou essa particularidade da gravidade em termos da geometria criada pela fusão quadridimensional do espaço e do tempo. Desse modo, a Terra orbita ao redor do Sol seguindo uma trajetória reta em uma geometria ligeiramente não Euclidiana produzida pelo Sol. A geometria Euclidiana nos fornece as noções de pontos, linhas retas e distâncias. Na geometria esférica, por outro lado, uma linha reta é definida pela menor distância entre dois pontos, descrevendo assim um segmento de um círculo. De maneira geral, uma descrição genérica da geometria reduz toda a geometria a uma especificação da distância entre um par de pontos próximos, a partir disso as distâncias ao longo das curvas podem ser encontradas. Assim, até mesmo a geometria mais geral pode ser especificada.

Dois pontos (θ, ϕ) e $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ se encontram próximos quando $d\theta$ e $d\phi$ são infinitesimais. A distância dl entre eles é conhecida como *elemento de linha* e caracteriza a geometria do espaço. Em coordenadas polares, o elemento de linha de uma geometria esférica é definido por

$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2), \tag{A.1}$$

na qual a é o raio da esfera. Apesar do elemento de linha caracterizar a geometria do espaço, diferentes dl podem descrever a mesma geometria. Isso ocorre pois pode-se usar diferentes sistemas de coordenadas.

No espaço-tempo curvo, as partículas seguem uma trajetória denominada linha de

mundo, que descreve a sua localização no espaço em cada instante no tempo. Em particular, a linha de mundo de uma partícula sujeita apenas à deformação do espaço-tempo é chamada geodésica. A distância ao longo da linha de mundo de uma partícula é chamada *tempo próprio*,

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2, \tag{A.2}$$

e representa o tempo medido por um relógio movendo-se ao longo dessa linha, sendo

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dl^2, \tag{A.3}$$

Para uma partícula massiva, a linha de mundo é dita *tipo tempo* (*timelike*), isso significa dizer que $ds^2 < 0$ e sua velocidade é sempre menor que a velocidade da luz. Já para partículas sem massa, como fótons, a linha de mundo é dita *nula* ou *tipo luz*, (*lightlike*). A distância entre dois pontos ao longo de um raio de luz é zero e, de (A.2), segue que o tempo próprio entre os pontos também é zero. Há, ainda, a linha de mundo tipo espaço (*spacelike*), na qual $ds^2 > 0$.

A.2 Métrica

A descrição genérica de um elemento de linha é dada através de quadrivetores, que representam quatro coordenadas, três delas espaciais e uma temporal. O quadrivetor que define um ponto no espaço tempo é

$$x^\alpha = (x^t, x^r, x^\theta, x^\phi). \tag{A.4}$$

Sendo assim, o elemento de linha entre dois pontos separados por dx^α tem a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta, \tag{A.5}$$

na qual $g_{\alpha\beta}(x)$ é a métrica. No espaço-tempo de Schwarzschild, em coordenadas polares, a métrica

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

é chamada métrica de Schwarzschild e descreve o campo gravitacional externo a um objeto esférico, desprezando qualquer rotação de massa. Para $r \to \infty$, a (A.6) tende a uma geometria plana.

A métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ é independente do tempo e invariante sob rotações em torno do eixo z, isso significa que temos uma simetria em deslocamentos em t e ϕ. Podemos associar a cada uma dessas simetrias um *vetor de Killing*, uma discussão mais ampla sobre a implicação dessas simetrias pode ser encontrada na Sub-seção A.3. Ademais, nota-se que $g_{\alpha\beta}(x)$ é simetricamente esférica pois, para t e r constantes, o elemento de linha assume a forma da Equação (A.1).

Podemos simplificar a Equação (A.6) fazendo uso de unidades geometrizadas, $\mathcal{L}$. Nessas unidades a velocidade da luz (c) e a constante gravitacional (G) são igualadas a um, $c = G = 1$. Assim, o elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2, \tag{A.7}$$

e a métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ é dada por

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} -(1-2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Ao longo desse trabalho usaremos a métrica de Schwarzschild de acordo com a (A.8).

A.3 Simetrias e Conservações

Na mecânica Newtoniana, as leis de conservação estão sempre associadas a simetrias. Por exemplo, a energia e o momento angular se conservam quando há simetrias em deslocamentos no tempo e sob rotações, respectivamente. Para o espaço-tempo essa associação

também é valida, de modo que, quando há simetria na métrica, igualmente há uma lei de conservação.

Como mostrado na Sub-seção A.2, o espaço-tempo de Schwarzschild descrito por (A.8) possui duas simetrias, às quais pode-se associar dois vetores de Killing. Esses vetores são uma maneira geral de caracterizar uma simetria em qualquer sistema de coordenadas. O deslocamento

$$x^t \to x^t + dx^t \tag{A.9}$$

mantêm a métrica de Schwarzschild inalterada e o vetor de Killing

$$\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{A.10}$$

está ao longo da direção desse deslocamento. Similarmente, para a invariância da métrica em ϕ, têm-se o vetor de Killing associado,

$$\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1). \tag{A.11}$$

Em síntese, as simetrias encontradas na métrica implicam na existência de quantidades conservadas ao longo da geodésica. As equações da geodésica para o espaço-tempo descrito por $g_{\alpha\beta}$ satisfazem as Lagrangianas,

$$-\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/d\sigma)}\right] + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{A.12}$$

sendo

$$L\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}, \tag{A.13}$$

e σ uma parametrização da linha de mundo, tal que $\sigma = 0$ no início da trajetória e e $\sigma = 1$ ao final, para qualquer curva escolhida, de tal maneira que $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$.

Portanto, se a métrica é independente de t, temos que $\partial L/\partial x^t = 0$ e a Equação (A.12) se torna

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial(dx^t/d\sigma)}\right] = 0. \tag{A.14}$$

Assim, temos a conservação

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^t/d\sigma)} = \frac{\partial}{\partial(dx^t/d\sigma)}\left[\left(-g_{t\beta}(x)\frac{dx^t}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}\right]$$
$$= \left(-g_{t\beta}(x)\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}\frac{1}{2(dx^t/d\sigma)^{1/2}}. \tag{A.15}$$

Podemos reescrever a Equação (A.13) de maneira a encontrarmos o segundo termo de (A.15),

$$\frac{1}{2(dx^t/d\sigma)^{1/2}} = \frac{\left[-g_{t\beta}(x)(dx^\beta/d\sigma)\right]^{1/2}}{2L}. \tag{A.16}$$

Na Seção 3.1 é apresentada uma discussão sobre as velocidades no espaço tempo de Schwarzschild, e, considerando o produto vetorial da quadrivelocidade e a Equação (A.13), encontramos a relação entre a Lagrangiana, o tempo próprio e o parâmetro σ, $L = d\tau/d\sigma$. Assim, a quantidade conservada pode ser encontrada,

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^t/d\sigma)} = -g_{t\beta}\frac{1}{L}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = -g_{t\beta}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\tau} = -g_{t\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta}\xi^\alpha u^\alpha = -\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}. \tag{A.17}$$

Para um fóton, sua forma explícita é dada por

$$e \equiv -\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \tag{A.18}$$

sendo λ um parâmetro arbitrário, de modo que $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$, pois o intervalo de tempo próprio entre dois pontos em uma linha de mundo nula é igual a zero, e, portanto, o tempo próprio não pode ser um parâmetro.

De maneira análoga, para a simetria em ϕ existente na métrica de Schwarzschild, caracterizada pelo vetor de Killing η^α, temos a conservação

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u}, \tag{A.19}$$

cuja forma explícita é dada por

$$\ell \equiv \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u} = r^2 sen^2\theta\frac{d\phi}{d\lambda}. \tag{A.20}$$

Para partículas, a Equação (A.18) pode ser considerada a energia conservada por unidade de massa de repouso, pois no espaço plano $E = mu^t$ e, para $r \to \infty$, e tende a

$dt/d\tau$. De modo similar, a Equação (A.20) pode ser considerada o momento angular por unidade de massa de repouso. Essas conservações são essenciais aos cálculos apresentados no Capítulo 3.

Apêndice B

Análise gráfica

Vamos analisar o comportamento da Equação 3.36 sem considerar os efeitos da deflexão da luz. Para tanto, iremos considerar apenas o efeito do *redshift* gravitacional, assim, é possível simplificar o parâmetro de impacto como dependente apenas de ϕ, como mostra a Figura B.1,

$$b = r \cdot sen(\phi). \tag{B.1}$$

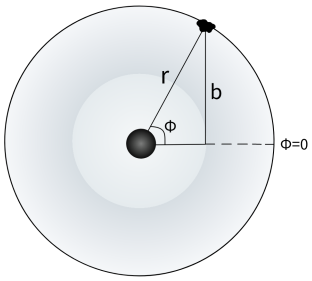

Figura B.1: Imagem esquemática, demonstrando a relação entre o parâmetro de impacto, a distância r entre a singularidade e a posição angular da matéria emissora em uma trajetória circular. Nota-se, que para $\phi = (0, \pi, 2\pi)$ temos que $sen(\phi) = 0$ e $b = 0$. De maneira similar, para $\phi = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $sen(\phi) = \pm 1$ e $b = \pm r$.

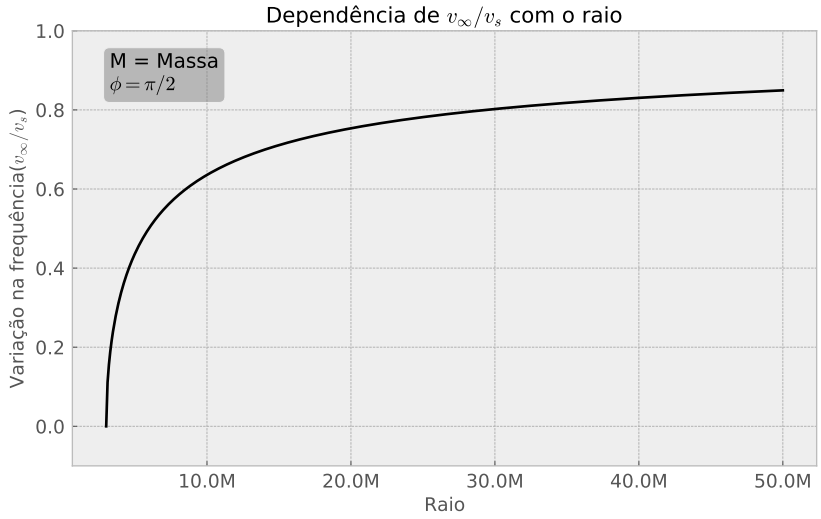

Figura B.2: Variação na frequência em função do raio, sendo este a distância entre a fonte emissora de radiação e o buraco negro. Para esse cálculo, fixou-se o valor de $\phi = \pi/2$ para o ângulo na Equação 3.36. Nota-se que para $r < 3M$ a função não está definida, por se tratar da região da esfera de fótons. Em $r = 3M$ temos a última órbita circular estável para fótons. Para raios cada vez mais distantes do horizonte de eventos, menor é a variação na frequência devido ao *redshift* gravitacional, e $\nu_\infty/\nu_s \to 1$.

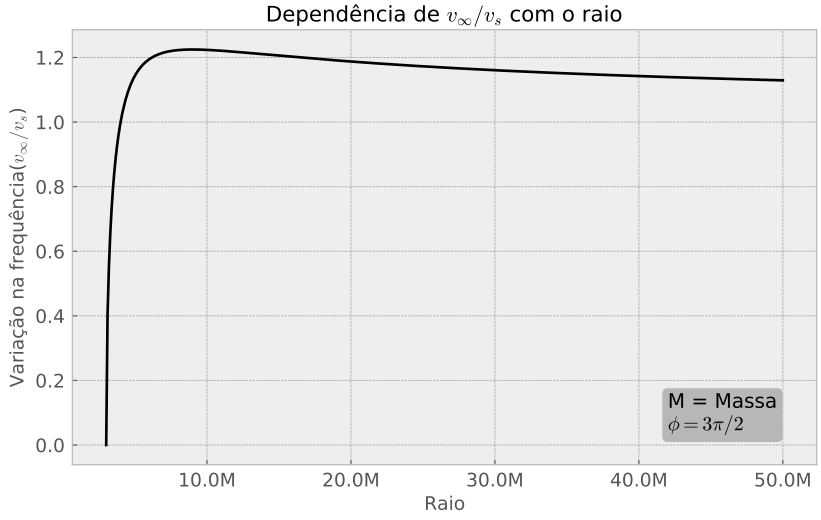

Figura B.3: Variação na frequência em função do raio, sendo este a distância entre a fonte emissora de radiação e o buraco negro. Para esse cálculo, fixou-se o valor de $\phi = 3\pi/2$ para o ângulo na Equação 3.36. Em $r = 3M$ temos a última órbita circular estável para fótons. Para raios próximos de $3M$ ($5M < r < 15M$), temos um *blueshift* acentuado. Para raios cada vez mais distantes do horizonte de eventos, menor é a variação na frequência e $\nu_\infty/\nu_s \to 1$.

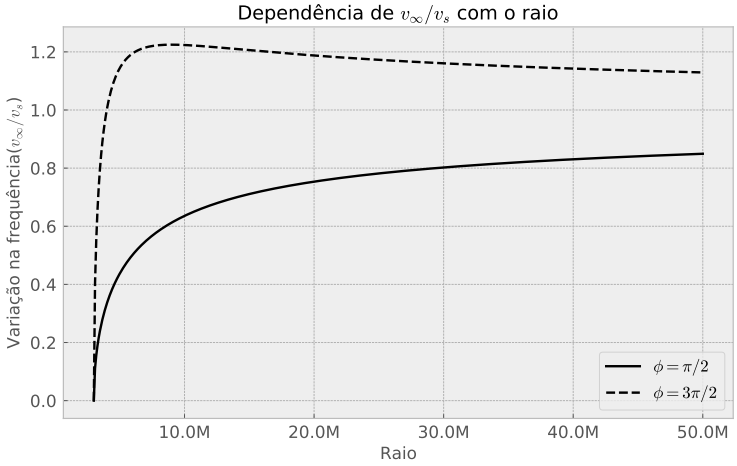

Figura B.4: Comparação entre a variação na frequência em $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Em $r = 3M$ temos a última órbita circular estável para um fóton, de modo que, no limite $r \to 3M$, a componente temporal da quadri-velocidade da fonte emissora, dada pela Equação 3.30, $u^t_{fonte} \to 0$ e $\nu_\infty/\nu_s \to 0$. Para raios cada vez mais distantes do horizonte de eventos, menor é a variação na frequência e $\nu_\infty/\nu_s \to 1$, em ambos os casos.

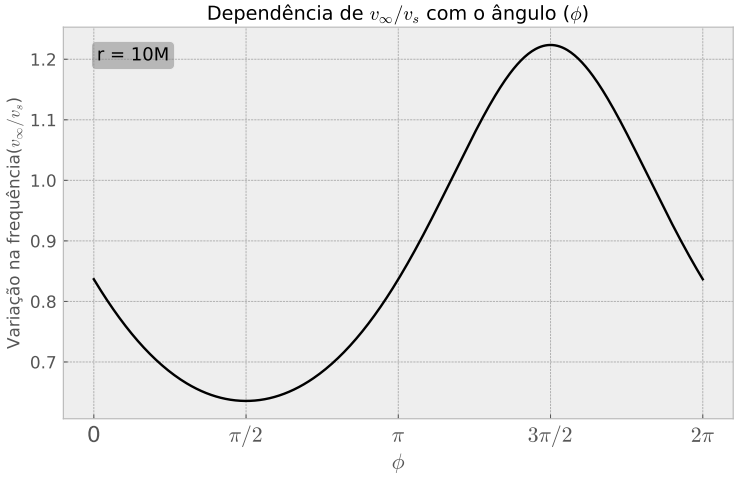

Figura B.5: Variação na frequência em função do ângulo ϕ ou em função da posição angular da matéria emissora em uma trajetória circular de raio fixo igual a $r = 10M$. Para esse cálculo, fixou-se o valor do raio na Equação 3.36. Nota-se que para $\phi = \pi/2$ temos um efeito de *redshift* e em $\phi = 3\pi/2$ temos o efeito contrário. Para $\phi = (0, \pi, 2\pi)$ a matéria se move transversalmente ao observador, $b = 0$ e os fótons sofrem um efeito de *redshift*. Isso está de acordo com o resultado alcançado no TG I, em que, nessas posições, há *redshift* independente do raio de emissão.