CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

MATEMATICA

8 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

PERMUTAÇÕES SIMPLES

EXEMPLO

QUANTOS NÚMEROS, DE 3 ALGARISMOS DISTINTOS, PODEMOS FORMAR COM OS DÍGITOS 7, 8 E 9?

Temos o conjunto A = {7, 8, 9} e, usando cada elemento de A apenas uma vez em cada um dos agrupamentos, devemos formar números com 3 algarismos.
Teremos que usar todos os elementos de A e formar agrupamentos que serão distinguidos apenas pela ordem em que aparecem. Estes agrupamentos são chamados permutações dos 3 elementos de A.
As permutações dos 3 elementos de A são as ternas ordenadas (7, 8, 9), (7, 9, 8), (9, 8, 7), (9, 7, 8,), (8, 7, 9), (8, 9, 7), ou seja, são os seis números que podemos formar: 789, 798, 987, 978, 879, 897.

QUESTÃO

Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 garagens?

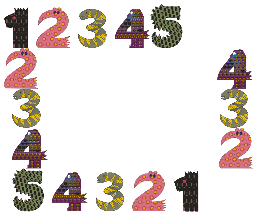
Resposta: O primeiro carro tem 6 opções para estacionar, o segundo 5, o terceiro 4, o quarto 3, o quinto 2 e o sexto apenas 1. Logo as possibilidades são em número de 6! = 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720.

A partir das idéias desenvolvidas acima podemos descrever o que é Permutação:

Seja A um conjunto com *n* elementos. **Permutações do conjunto A** são agrupamentos em que cada elemento de A comparece uma só vez e onde apenas a ordem em que esses elementos aparecem distingue os agrupamentos. Ou seja, duas permutações são consideradas distintas se a ordem em que aparecem os elementos do conjunto não

ARRANJOS SIMPLES

EXEMPLO



Usando-se os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números diferentes com dois algarismos podemos formar?

A ordem é fundamental, pois números com dígitos trocados não são os mesmos. Os algarismos podem, entretanto, repetir-se para a formação de um número. Podemos, neste caso simples, listar os números que são pedidos. São eles: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54 e 55.

QUESTÃO 1

Quatro times de futebol disputam um torneio, onde são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. De quantos modos os prêmios podem ser atribuídos?

Resposta: Há 4 possibilidades para o campeão do torneio e 3 possibilidades para o vice-campeão, ou vice-versa. Logo existem 12 modos em que os prêmios podem ser distribuídos.

Note que nos exemplos dados, temos sempre de fazer uma escolha de *p* objetos entre *n* objetos, onde $p < n$, e a ordem em que fazemos a escolha *determina objetos diferentes.* De fato, problemas do tipo considerado nos últimos exemplos aparecem tão freqüentemente que recebem um nome especial: **arranjo simples de p elementos em n**.

O número total de tais arranjos será denotado por A(n,p) (lê-se arranjos de n elementos p a p). Usando o princípio multiplicativo, vamos obter A(n,p). Basta raciocinar da seguinte maneira:
Com n objetos, queremos preencher p lugares.

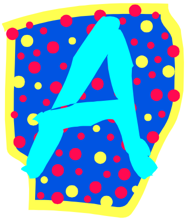
Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	. . .	Lugar p

O primeiro lugar pode ser preenchido de *n* maneiras distintas, o segundo de $n - 1$ maneiras, o terceiro de $n - 2$ maneiras e assim sucessivamente até o p-ésimo lugar, que pode ser preenchido de $n - (p + 1)$ modos diferentes. Pelo Princípio Multiplicativo,

$$A(n,p) = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, (n-3) \,.\, \ldots \,.\, (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observe que toda permutação é um arranjo (caso em que p = n). Assim, para que a fórmula acima faça sentido também nesse caso, definimos 0! = 1.
Utilizando agora a definição de arranjo, resolva os seguintes problemas:

QUESTÃO 2



Um anagrama é uma combinação qualquer de letras. Quantos anagramas de duas letras podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

Resposta: A ordem é importante aqui e, portanto, a solução é dada pelos arranjos de 23 elementos dois a dois:

$$A(n,p)=\frac{23!}{21!}=506.$$

QUESTÃO 3

Considere agora a palavra **LIVRO**.

(a) Quantos anagramas são formados com as letras dessa palavra?

(b) Quantos deles começam por **L** e terminam por **O**?

(c) Quantos contêm as letras **RO** juntas e nessa

Resposta:

(a) $A(5,5)=\frac{5!}{0!}=5.4.3.2.1=120$ *anagramas.*

(b) *Tais agrupamentos são do tipo:*

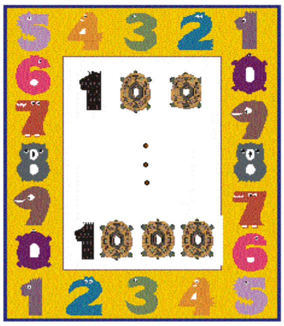
$\underline{L}$ _ _ _ $\underline{O}$. Logo temos A(3,3) = 3 . 2. 1 = 6 anagramas.

(c) *Se as letras RO ficarem juntas, nessa ordem, temos:*

$\underline{R}$ $\underline{O}$ _ _ _ . As letras RO são contadas como sendo uma só letra e, junto com as três letras restantes, teremos um total de 4 letras para serem agrupadas 4 a 4. Assim, obtemos:

A(4,4) = 4 . 3. 2 . 1 = 24 anagramas.

QUESTÃO 4



Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números <u>pares</u> com elementos distintos, maiores que 100 (estritamente) e menores que 1000 (estritamente), podemos formar?

Resposta: Os números entre 100 e 1000 são constituídos por 3 dígitos. Devemos preencher as casas das unidades, das dezenas e das centenas. A casa das unidades só pode ser preenchida pelos algarismos 2 ou 4, pois queremos números pares. As casas das dezenas e das centenas podem ser preenchidas de qualquer modo, mas não devemos utilizar o dígito já empregado na casa das unidades, pois o número tem dígitos distintos. O melhor é utilizar o Princípio Aditivo dividindo-se o problema em dois casos disjuntos:

Caso 1: *O dígito das unidades é 2. Neste caso, as casas das centenas e das unidades podem ser preenchidas com os dígitos 1, 3, 4 e 5. Existem*

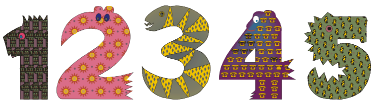
$$A(4,2) = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ maneiras de se fazer isto.}$$

Caso 2: *O dígito das unidades é 4. Existem também 12 maneiras de se fazer isto, pois só podemos utilizar os dígitos 1, 2, 3 e 5.*

Pelo Princípio Aditivo, o número total de possibilidades é 12 + 12 = 24.

Combinações Simples

EXEMPLO 1

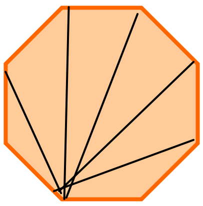


Quantos subconjuntos de 3 elementos possui o conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5}?

Como a ordem para a formação de subconjuntos não é importante, basta combinarmos 5 elementos 3 a 3. Assim, o número de subconjuntos é:

{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (3,4,5)}

EXEMPLO 2



Quantas diagonais podemos traçar em um polígono regular de oito lados? Após resolver este problema, você poderia dizer quantas diagonais tem um polígono de *n* lados?

Observe a figura acima. O vértice assinalado pode ser ligado a qualquer outro não adjacente por meio de uma diagonal. Cada vértice pode gerar então 5 = 8 – 3 diagonais. Como existem 8 vértices teremos 8 . 5 = 40 diagonais. Entretanto, agindo desta forma, contamos duas vezes uma mesma diagonal, pois o segmento que liga um ponto P a outro Q é o mesmo que liga Q a P. Devemos então dividir o resultado por 2. Assim:

$$\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

é o número total de diagonais de um polígono regular de 8 lados. Para um polígono de n lados teremos:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} \text{ diagonais}$$

Considere um conjunto A com *n* elementos. Agrupamentos com *p* ($p \leq n$) elementos, onde cada elemento de A comparece uma só vez e onde a ordem não é importante, são subconjuntos de A chamados combinações dos *n* elementos de A, *p* a *p*.

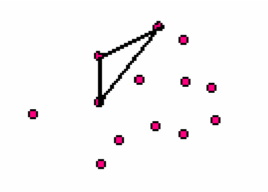
O número total de combinações de *n* elementos *p* a *p* será denotado por C(n,p). A partir da fórmula dos arranjos, A(n,p) = $\frac{n!}{p!}$, obteremos também uma fórmula para C(n,p), identificando grupos de elementos que diferem apenas pela ordem. Assim, o número de combinações será sempre menor ou igual ao número de arranjos.

Sabemos que o número de grupos formados com *p* elementos, considerando diferentes grupos com ordens distintas, é igual ao número de permutações com *p* elementos, que sabemos que é igual a *p!* .
Para se obter C(n,p), basta dividir o número de arranjos A(n,p) pelo número de permutações de *p* elementos, isto é, por *p!.* Assim:

$$C(n,p) = A(n,p) \div p! \longrightarrow C(n,p) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Utilizando agora a definição de combinação, resolva os seguintes problemas:

QUESTÃO 1

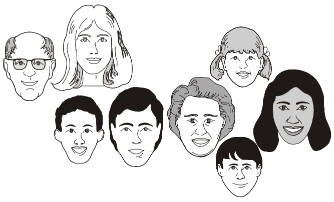


Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, supondo que não há três destes pontos alinhados?

Resposta: *Como não existem três pontos sobre a mesma linha, basta escolhermos 3 pontos quaisquer e traçar um triângulo com esses vértices. O número total de triângulos que podemos traçar é:*

$$C\,(14,3) = \frac{14!}{3!\,11!} = 364.$$

QUESTÃO 2



De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Resposta: O primeiro grupo pode ser formado de C(8,4) modos diferentes. Escolhido o primeiro grupo, só existe uma maneira de se escolher o segundo grupo. Entretanto, procedendo desta maneira contamos as divisões {a, b, c, d} {e, f, g, h} como sendo diferente da divisão {e, f, g, h} {a, b, c, d}. Assim, a resposta correta é:

$$C(8,4) \div 2 = 35.$$

QUESTÃO 3

Considere o conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5}. De quantos modos podemos formar subconjuntos de C com dois elementos nos quais não haja números consecutivos?

Resposta: Este problema pode ser resolvido enumerando-se todas as possibilidades. São elas: {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 4}, {2, 5} e {3, 5}. Existem então seis maneiras de se obter os subconjuntos. Este modo de resolver, entretanto, não pode ser facilmente generalizado para conjuntos maiores.
Vamos marcar com ⊕ os elementos que farão parte do subconjunto e com ∅ os elementos que não farão parte. Por exemplo,

{1, 3} ficará representado por ⊕ ∅ ⊕ ∅ ∅ *e*
{2, 5} ficará representado por ∅ ⊕ ∅ ∅ ⊕.
O subconjunto {1, 2} não serve pois apresenta dois inteiros consecutivos. Sua representação no entanto é ⊕ ⊕ ∅ ∅ ∅.

Para formar um subconjunto com dois elementos não consecutivos, devemos colocar três sinais ∅ e dois sinais ⊕, sem que apareçam dois sinais ⊕ lado a lado. Para isto, colocamos três sinais ∅, deixando espaços entre eles para serem preenchidos ou não por dois símbolos ⊕.

	∅		∅		∅	

Devemos escolher duas das quatro posições vazias da tabela acima. Dessa forma, teremos C(4,2) = 6 possibilidades de se obter subconjuntos sem elementos consecutivos, confirmando nossa primeira solução.
Este exemplo pode agora ser generalizado. O conjunto {1, 2, ..., n} tem C(n, n – p + 1) subconjuntos com p elementos onde não aparecem números consecutivos. A demonstração é idêntica a anterior.

CONTAR COM REPETIÇÃO

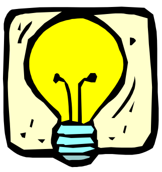
Como conseqüência do Princípio Multiplicativo, obtivemos maneiras efetivas de se contar o número de permutações, de arranjos e de combinações simples. Nesta seção estaremos interessados em aprofundar o nosso estudo, incorporando aplicações onde a repetição de elementos é permitida.
Uma aplicação em que as repetições aparecem na contagem e que serve para a formulação de muitos modelos matemáticos de situações do mundo real, refere-se ao problema de contar o número total de soluções inteiras positivas de uma equação do tipo:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m}$$

Exemplo 1: Qual é o número total de soluções inteiras e positivas de $\mathbf{x_1 + x_2 = 5}$?
Este problema é tão simples que podemos enumerar todas as possibilidades. São elas:

x_1	x_2
1	4
2	3
3	2
4	1

Não consideramos aqui a possibilidade de um dos termos ser zero. Obtemos assim 4 soluções. Se algum dos termos pudesse ser zero, obteríamos mais duas soluções $\mathbf{x_1 = 0, x_2 = 5}$ e $\mathbf{x_1 = 5, x_2 = 0}$.
Dificilmente a enumeração de todas as soluções pode, entretanto, ser generalizada.



Solução Esperta: Escrevemos o número 5 na forma unária, representando cada unidade por uma barra:| | | | | . Com essa notação as soluções positivas são:

+			
	+		
		+	
			+

Isso corresponde a colocar o sinal de + entre duas barras | |. Tal tarefa pode ser feita através de C(4,1) = 4 maneiras diferentes.
Será que esta técnica também funciona em outros exemplos?

Exemplo 2: Quantas soluções positivas tem a equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9}$?

| | | | | | | | |
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Existem 9 – 1 = 8 lugares para se colocar o sinal +. Para repartir 9 em cinco partes devemos escolher 5 – 1 = 4 desses 8 lugares para colocarmos sinais de +. Já que os sinais de + são todos iguais, podemos fazer isto sem nos preocuparmos com a ordem deles. Assim, o número total de soluções da equação é C(8,4) = 70.

RESULTADO GERAL:

O número de soluções positivas da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ é

C(m-1, n-1)

Exemplo 3:

Qual é o número de soluções inteiras *positivas ou nulas* da equação $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m}$?

Façamos um pequeno truque, introduzindo a mudança $\mathbf{y_i = x_i + 1}$. Com isto, recaímos no caso anterior que já resolvemos. Como

$$\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,}$$

somando 1 a cada $\mathbf{x_i}$ obteremos $\mathbf{(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \ldots + (x_n + 1) = m + n}$, ou seja, $\mathbf{y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m + n}$. O número de soluções positivas desta última equação é igual ao número de soluções positivas ou nulas de $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m}$. Pelo resultado geral obtido acima este número é C(m+n-1, n-1).

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

EXEMPLO

Problema do Hotel

Estávamos viajando em 3 pessoas e resolvemos parar e pernoitar em um hotel. No hotel havia somente 2 quartos vagos, o quarto A com capacidade para 2 pessoas e o quarto B que alojava somente uma pessoa. Quantas são as distribuições que podemos fazer para nos acomodarmos nestes dois quartos?

É fácil enumerar todas as possibilidades. São elas

- As pessoas P_1 e P_2 ficam no quarto A e P_3 no quarto B, ou
- as pessoas P_1 e P_3 ficam no quarto A e P_2 no quarto B, ou
- as pessoas P_2 e P_3 ficam no quarto A e P_1 no quarto B.

Existem portanto 3 possibilidades.

Poderíamos ter raciocinado da seguinte maneira: devemos colocar 2 pessoas no quarto A e isto corresponde a escolher 2 entre 3. Portanto, existem C(3,2) = 3 possibilidades de escolha. Uma vez que as duas pessoas estejam acomodadas no quarto A, só existe uma possibilidade de acomodar a terceira pessoa no quarto B. Ao todo, teremos 3 possibilidades. Este procedimento pode ser generalizado:

Problema do Hotel com variações

Um hotel possui três quartos vagos A, B e C. Quantas possibilidades de acomodação existem para 7 pessoas nos três quartos, sendo que no quarto A cabem 3 pessoas e nos quartos B e C cabem 2 pessoas?
Existem C(7,3) maneiras de três pessoas ocuparem o quarto A. Uma vez feito isto, existem C(4,2) maneiras de se ocupar o quarto B, restando somente uma maneira de se ocupar o terceiro quarto. Logo a quantidade total de possibilidades é:

$$C(7,3).C(4,2).C(2,2) = \frac{7!}{3!4!}.\frac{4!}{2!2!}.\frac{2!}{2!0!} = 210.$$

Questão 1:

Uma família de 7 pessoas decide executar duas tarefas: duas delas vão cuidar do jardim, enquanto as outras vão pintar a casa. De quantos modos as tarefas podem ser distribuídas?

Resposta: Existem C(7,2) maneiras de duas pessoas cuidarem do jardim, restando somente uma opção para as outras cinco pessoas, que é a de pintar a casa. Logo, a quantidade total de possibilidades é:

$$C(7,2)\ .\ C(5,5) = 21\ .\ 1 = 21.$$

Questão 2: Quantos anagramas podemos formar com a palavra **ARARAQUARA**?
Resposta: Devemos arrumar 5 letras A, 3 letras R, 1 letra Q e 1 letra U em 10 lugares diferentes. Ao todo teremos:

$C(10,5)\ .\ C(5,3)\ .\ C(2,1)\ .\ C(1,1) = 5040$ *possibilidades.*

ARRANJOS COM REPETIÇÃO

EXEMPLO

Qual é o número total de anagramas que podemos fazer juntando três letras quaisquer de um alfabeto de 23 letras?

O número total é 23^3 anagramas, começando com AAA e terminando com ZZZ.

Questão 1:

As letras em código Morse são formadas por seqüências de traços (–) e pontos (**.**), sendo permitidas repetições.
Por exemplo: (–, **.** , –, –, **.** , **.**).
Quantas letras podem ser representadas:

(a) Usando exatamente 3 símbolos?
(b)Usando no máximo 8 símbolos?

Resposta:

(a) *Para cada um dos três símbolos temos duas possibilidades, ou seja,*

$$2 . 2 . 2 = 2^3 = 8 \text{ possibilidades.}$$

(b) *Variando a quantidade de símbolos, temos as seguintes possibilidades:*

com 1 símbolo $\rightarrow$ *2 possibilidades,*
com 2 símbolos $\rightarrow 2^2 = 4$ *possibilidades,*
com 3 símbolos $\rightarrow 2^3 = 8$ *possibilidades,*
com 4 símbolos $\rightarrow 2^4 = 16$ *possibilidades,*
com 5 símbolos $\rightarrow 2^5 = 32$ *possibilidades,*
com 6 símbolos $\rightarrow 2^6 = 64$ *possibilidades,*
com 7 símbolos $\rightarrow 2^7 = 128$ *possibilidades,*
com 8 símbolos $\rightarrow 2^8 = 256$ *possibilidades.*

Portanto, com 8 símbolos obteremos, no máximo,
$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510$ *possibilidades.*

Questão 2:

Quantos números telefônicos, com 7 dígitos, podem ser formados se usarmos os dígitos de 0 a 9?

Resposta: Cada número telefônico consiste em uma seqüência de 7 dígitos do tipo:

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_6, a_7)$ *em que* $a_1 \in A_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

$$a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$$

$$\vdots$$

$$a_7 \in A_7 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$$

Logo, o número de seqüências é $10^7 = 10\,000\,000$.

Questão 3

Em um baralho de 52 cartas, cinco cartas são escolhidas sucessivamente. Quantas são as seqüências de resultados possíveis:

(a) Se a escolha for feita com reposição?
(b) Se a escolha for feita sem reposição?

Resposta:

(a) *O número de seqüências é:*

$$52 . 52 . 52 . 52 . 52 = 52^5.$$

(b) *O número de seqüências é:*

$$52 . 51 . 50 . 49 . 48 = 311\,875\,200.$$

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Problema do parque de diversões:

Um menino está em um parque de diversões, onde há 4 tipos de brinquedos:

C – chapéu mexicano
F – trem fantasma
M – montanha russa
R – roda gigante

O menino resolve comprar 2 bilhetes. Qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes, sabendo-se que ele pode comprar 2 bilhetes iguais para ir num mesmo brinquedo?

Resolução: É possível resolver este problema enumerando todas as possibilidades. São elas:

CC CF CM CR
FF FM FR
MM MR
RR

Observe que aí estão listadas todas as possibilidades e que CF é igual a FC, não importando a ordem do primeiro com o segundo bilhete, mas incluindo repetições. Se não fossem permitidas repetições o resultado seria C(4,2) = 6 (neste cálculo não se inclui a hipótese do menino comprar dois bilhetes repetidos). O número correto de possibilidades é 10 = 6 + 4 (quatro repetições foram adicionadas).

Resolução esperta: Sejam

x_1 o número de bilhetes de C (chapéu mexicano),
x_2 o número de bilhetes de F (trem fantasma),
x_3 o número de bilhetes de M (montanha russa) e
x_4 o número de bilhetes de R (roda gigante).

Como o número total de bilhetes que o menino quer comprar é 2, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

O número de soluções inteiras e não negativas desta última equação é

$$C(4+2-1,4-1) = C(5,3) = 10.$$

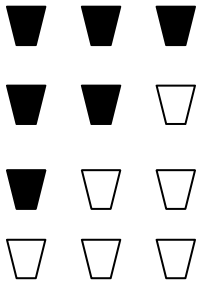
Basta comparar agora as duas soluções apresentadas.
Este segundo método de resolução pode ser facilmente generalizado.

	x_1	x_2	x_3	x_4
CC	**2**	**0**	**0**	**0**
CF	**1**	**1**	**0**	**0**
CM	**1**	**0**	**1**	**0**
CR	**1**	**0**	**0**	**1**
FF	**0**	**2**	**0**	**0**
FM	**0**	**1**	**1**	**0**
FR	**0**	**1**	**0**	**1**
MM	**0**	**0**	**2**	**0**
MR	**0**	**0**	**1**	**1**
RR	**0**	**0**	**0**	**2**

Esta linha diz que foram comprados dois bilhetes: um para o trem fantasma (F) e um para montanha russa (M).

Questão: Com 2 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 3 vasos idênticos, pintando cada vaso de uma única cor? Resolva o mesmo problema com 4 cores e 5 vasos.

Resposta: Os três vasos podem ser pintados de uma mesma cor. Estamos novamente com um problema de combinações com repetição.



Se x_1 é o número de vasos pintados de branco e x_2 é o número de vasos pintados de preto, então $x_1 + x_2 = 3$. O número de soluções positivas ou nulas desta equação é

$$C(3+2-1, 2-1) = C(4,1) = 4.$$

No caso de 4 cores e 5 vasos, o número de combinações possíveis é igual ao número de soluções positivas ou nulas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, que é dado por $C(4 + 5 - 1, 4 - 1) = C(8, 3) = 56$.

QUADRO RESUMO

O Princípio Multiplicativo: Se uma decisão d_1 puder ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, outra decisão d_2 puder ser tomada de n maneiras diferentes, então o número total de se tomarem as decisões é o produto de m por n.

Ex.: Colorir uma bandeira de 4 listras com três cores diferentes de modo que duas listras adjacentes não tenham a mesma cor. Pode-se repetir cores, mas não em faixas adjacentes.

RESPEITANDO A ORDEM				
	SIMPLES	FÓRMULA	COM REPETIÇÃO	FÓRMULA
Permutações	Ex.: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 6 carros em 6 garagens? Resp.: 720	O número de permutações de n elementos é $n! = n.(n-1).(n-2)......3.2.1$	Ex.: De quantas maneiras 3 pessoas podem ficar alojadas em 2 quartos, com duas pessoas no primeiro quarto e uma pessoa no segundo? Resp.: 3	O número de permutações de n objetos dos quais p_1 são iguais a a_1, p_2 são iguais a a_2, ... , p_k são iguais a a_k é $\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$
Arranjos	Ex.: De quantas maneiras diferentes podemos estacionar 6 carros em 3 garagens? Resp.: 120	O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por $A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}$	Ex.: Qual é o número de placas de carro com 3 letras e 4 dígitos, supondo que o alfabeto tenha 26 letras? Resp.: $10^4 . 26^3$	O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p é n^p

A ORDEM NÃO É IMPORTANTE				
	SIMPLES	FÓRMULA	COM REPETIÇÃO	FÓRMULA
Combinações	Ex.: Quantas saladas de frutas (com frutas diferentes) podemos fazer utilizando-se 3 frutas se dispomos de 5 tipos diferentes de frutas? Resp.: 10	O número de combinações de *n* elementos, tomados *p* a *p*, é dado por: $C(n,p)=\frac{n!}{p!(n-p)!}$	Ex.: De quantos modos diferentes podemos comprar 4 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes? Resp.: 5	O número de combinações com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p* é $C(n+p-1,n-1)=$ $=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$