CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

MATEMÁTICA

# 1 ESTUDO DA POLUIÇÃO NUMA AULA DE MATEMÁTICA

ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

## INTRODUÇÃO

Esta atividade tem múltiplos objetivos: evidenciar a importância do ferramental matemático no estudo e resolução de problemas que ocorrem ou naturalmente ou como conseqüência da intervenção do homem na natureza, incentivar a reflexão e desenvolver o espírito crítico do aluno no que diz respeito a essa intervenção.
Com relação à matemática propriamente dita, serão desenvolvidos modelos que envolvem gráficos, manipulação de expoentes e resolução de equações. Os tipos de "modelos" que surgirão naturalmente em nosso estudo serão "modelos recursivos", nos quais cada número depende de números anteriores.
Os "modelos" que desenvolveremos estão relacionados com o estudo da poluição em um lago. As atividades referentes a estes modelos poderão ser aplicadas durante o período de um ano escolar, tendo como finalidade reforçar e, eventualmente, ampliar, o conteúdo matemático visto pelos estudantes no ensino médio, enfatizando, em particular, conteúdos de álgebra. Com isso, pretendemos tornar a matemática mais concreta e próxima da realidade, já que os estudantes poderão relacionar números com situações reais. Além disso, pretendemos evidenciar que conceitos algébricos e geométricos estão interligados e não só podem como devem ser utilizados de modo complementar, um em auxílio do outro, na análise de um problema.

## DISCUSSÃO SOBRE O EXPERIMENTO

Este kit deve ser utilizado com a supervisão do professor, que deverá orientar as atividades a serem desenvolvidas em cada etapa. A sala deverá ser dividida em grupos de 5 alunos e o material utilizado (por grupo) será o seguinte:

- 3 vasilhames transparentes
- 1 copo plástico
- 1 frasco com corante
- 1 espátula de madeira

*Observação:* O primeiro vasilhame deverá ser utilizado para armazenar a água limpa, a qual será utilizada para repor a água do "lago" em cada etapa de sua despoluição; o segundo vasilhame deverá representar o "lago" e o terceiro deverá ser utilizado para armazenar a água removida do "lago".

## ATIVIDADE 1
### Descrição e primeiras conclusões

Suponha que em um habitat constituído por um lago de águas límpidas, com vegetação e espécimes característicos, seja despejada uma certa quantidade de um produto poluente e que ocorra um processo de despoluição natural, promovido pelos seres vivos pertencentes a esse habitat.
Em uma descrição simplificada desse processo natural de despoluição, suponha que os seres vivos do lago purifiquem um quarto do volume de água do lago durante qualquer período de 24 horas.
Use um vasilhame transparente para representar o lago e adicione quatro copos de água ao vasilhame para simular a água do lago. Represente o produto poluente por 16 mL de corante. Utilize o conta-gotas para adicionar 48 gotas de corante ao vasilhame (3 gotas correspondem a 1mL). Veja a figura 1.

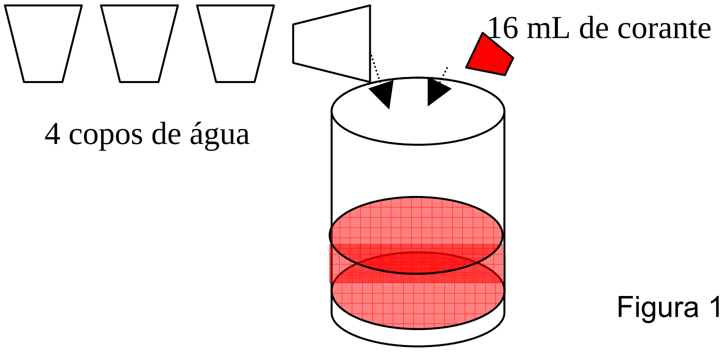



Figura 1

Podemos simular o processo natural de despoluição do lago removendo um copo de água colorida do frasco e recolocando um copo de água pura, como na figura 2 abaixo.

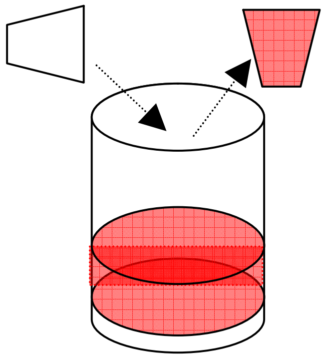


Figura 2

QUESTÕES

1. Quanto de poluição permanece no vasilhame?
*Resposta: 12 mL.*

2. Assuma que mais nenhum poluente seja adicionado ao lago. Quanto de poluição é eliminada do lago após as próximas 24 horas?
*Resposta:* $\frac{1}{4}$ *de 12 mL, ou seja, 3 mL.*

3. Represente este processo removendo um copo de água colorida e acrescentando um copo de água limpa.
Suponha que n represente o n-ésimo período de 24 horas considerado e que a(n) represente a quantidade de poluente ao final do n-ésimo período de 24 horas.
Continue o experimento para 1, 2, 3, 4,... períodos de tempo e descreva o que você observou em cada um dos passos efetuados, registrando a quantidade de poluente restante (em mL) após cada período.(Use o verso da folha).
Com os resultados obtidos complete a tabela abaixo. Utilize uma calculadora para acompanhar os cálculos que serão realizados.

| **Período de 24 horas (n)** | | **Poluente (mL) a(n)** |
|---|---|---|
| 0 – 24 | n = 1 | 16 |
| 24 – 48 | n = 2 | 12 |
| 48 – 72 | n = 3 | 9 |
| 72 – 96 | n =4 | 6,75 |
| 96 – 120 | n =5 | 5,06 |
| 120 – 144 | n =6 | 3,8 |
| 144 – 168 | n =7 | 2,85 |

4. Supondo que o volume total de líquido no lago (água + poluente) seja 100mL, determine qual fração deste volume representa a quantidade de poluente, em cada período de tempo da tabela acima.

*Resposta:* $\frac{16}{100}, \frac{12}{100}, \frac{9}{100}$ *e assim por diante. (em química: concentração do poluente)*

5. Pesquisar quais são as substâncias necessárias para fazer um detergente.
*Possibilidade de Resposta: Composição dos detergentes: fosfatos, bórax (tira odores), descorantes (para tirar manchas), anticorrosivos, perfume, compostos fluorescentes (ou branqueadores ópticos, que camuflam o amarelado, mas não eliminam a sujeira)*
*Disponível em :*
*http://www.iq.unesp.br/flotacao/MODULO1/complementares/aula2/saboes.htm#detergentes.*
*Acesso em: 29/10/2007.*

6. Quais são as conseqüências de uma quantidade elevada de detergente num lago com peixes? Explique.
*Possibilidade de Resposta: É necessário limitar a quantidade de detergente, usando-se apenas o necessário, e preferencialmente aqueles com baixa dosagem de fosfatos ou sem eles. Os fosfatos causam efeitos negativos em contato como meio ambiente, já que promovem o crescimento das algas, aumentando o consumo de oxigênio, e conseqüentemente prejudicando o desenvolvimento de outros seres vivos, como os peixes.*
*Disponível em : http://www.sanasa.com.br/noticias/not_con3.asp?par_nrod=601&flag=PC-2.*
*Acesso em: 29/10/2007*

## ATIVIDADE 2
## Abordagem Recursiva, Algébrica e Gráfica

### PARTE A
(Referente à Atividade 1)

Para cada n-ésimo período de tempo de 24 horas, a quantidade de poluente no lago no início daquele período, a(n), será chamado a **quantidade inicial**, e a quantidade ao término daquele período, a(n+1), será chamada de **quantidade final**. Por exemplo, para o primeiro período de 24 horas, a(1)=16 é a quantidade inicial e a(2) =12 é a quantidade final.
A relação entre a(n) e a(n+1) para n períodos de 24 horas é representada pela *equação recursiva:*

$$a(n+1) = 0.75\, a(n), \text{ para } n \geq 1 \quad (\text{observação : } 3/4 = 0{,}75) \qquad (*)$$

QUESTÕES
1. Por que esta é a equação que representa o processo?
*Resposta: Esta equação nos dá a quantidade de poluição no lago em algum momento se nós soubermos a quantidade de poluente no período anterior. Se tivermos um valor inicial para a(n) (16 mL, por exemplo) conseguiremos montar uma tabela como a do exercício 3 (Atividade 1).*

2. Considere a(1) = 16 (a quantidade inicial de poluente no lago). Suponha agora, que um certo teste possa detectar 1 mL de poluente no lago (1 mL de água colorida no recipiente). Após a dose inicial de 16 mL, até quando o teste de poluição será eficiente?
Para responder a esta questão, complete a tabela a seguir utilizando a equação recursiva acima.(Anote os cálculos no verso da folha)

| **Período de 24 horas (n)** | **Poluente (mL) a(n)** | **Poluente (mL) a(n+1)** |
|---|---|---|
| n = 1 | 16 | 12 |
| n = 2 | 12 | 9 |
| n = 3 | 9 | 6,75 |
| n = 4 | 6,75 | 5,06 |
| n = 5 | 5,06 | 3,8 |
| n = 6 | 3,8 | 2,85 |
| n = 7 | 2,85 | 2,14 |
| n = 8 | 2,14 | 1,6 |
| n = 9 | 1,6 | 1,2 |
| n = 10 | 1,2 | 0,9 |

*Resposta: O teste é eficiente para 9 períodos de tempo.*

3. Suponha agora que o teste pudesse detectar até 0,0001 mL de poluição. Como o método recursivo demandaria muito tempo e vários cálculos, complete os dados abaixo a fim de obter um método mais rápido para determinar o valor de a(n) sabendo-se apenas o valor da quantidade inicial de poluente a(1). Desta forma teremos um método mais rápido para determinar a eficiência do teste.

Sabe-se inicialmente que:

a(1) = 16
a(2) = 0,75·a(1)
a(3) = 0,75.a(2) = 0,75. 0,75 .a(1) = $(0,75)^2$.a(1)
a(4) = *0,75.a(3) = 0,75.* $(0,75)^2$*.a(1) =* $(0,75)^3$*.a(1)*
a(5) = *0,75.a(4) = 0,75.* $(0,75)^3$*.a(1) =* $(0,75)^4$*.a(1)*
a(6) = *0,75.a(5) = 0,75.* $(0,75)^4$*.a(1) =* $(0,75)^5$*.a(1)*
...

Repetindo sucessivamente estes cálculos, este raciocínio nos sugere uma equação mais geral. Esta nova equação é chamada de **Progressão Geométrica**. Tente escrevê-la.

*Resposta:* $a(n) = q^{n-1}.a(1)$ *(No caso temos q = 0,75)*

*PARTE B*

*Método Logarítmico*

Um método ainda mais rápido para determinar o período de tempo em que o teste de poluição será eficiente envolve o uso da função logarítmica.

## QUESTÕES

1. Supondo que o teste é eficiente para qualquer período de tempo n, para o qual a quantidade de poluente a(n) restante no lago seja maior que 0,0001 mL, isto é,

$$(0,75)^{n-1}.16 > 0,0001 \rightarrow (0,75)^{n-1} > \frac{0,0001}{16},$$

aplique *log* em ambos os lados e, a seguir, utilize as propriedades da função logarítmica.

*Resposta:*

$$(n-1).\log(0,75) > \log(10^{-4}) - \log(2^4)$$

2. Divida ambos os lados por *log(0,75)*, invertendo o sentido da desigualdade (pois *log(0,75)* é um número negativo). Novamente aplique as propriedades da função logarítmica.

*Resposta:*

$$\frac{(n-1).\log(0,75)}{\log(0,75)} < \frac{\log(10^{-4}) - \log(2^4)}{\log(0,75)}$$

$$(n-1) < \frac{-4.\log 10 - 4.\log 2}{\log\frac{3}{4}}$$

$$n-1 < \frac{-4.1 - 4.(0,3010)}{\log 3 - \log 4}$$

$$n-1 < \frac{-4 - 1,204}{0,4771 - 0,602}$$

$$n-1 < 41,665332$$

$$n < 42,665332$$

3. Após realizar os cálculos, você conclui que o teste é eficiente para que valores de n?
*Resposta: Para n < 42,665.*

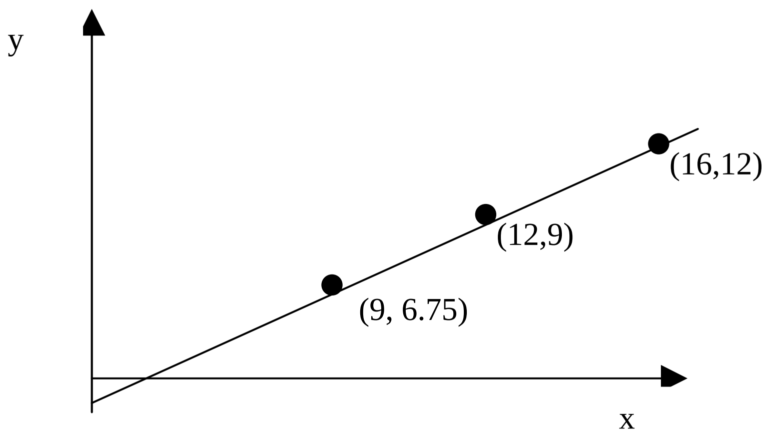
## PARTE C

Observação: Chame de **x** a quantidade de poluente no lago no início de cada período de 24 horas e de **y** a quantidade de poluente no lago ao final desse mesmo período.

QUESTÕES

1. Considerando as variáveis x e y acima, e a taxa de despoluição do lago mencionada anteriormente, qual a relação que representa y como função de x?
Observe que os valores a(n) e a(n+1) obtidos na tabela da *ATIVIDADE 1* satisfazem a relação entre as variáveis x e y que você obteve.
*Resposta: y=(0,75)x.*

2. Construa o gráfico da função obtida no item anterior, e represente sobre ele os pontos (a(n), a(n+1)), obtidos na *Parte A* desta atividade.




3. Analise o gráfico obtido e verifique se os números a(1), a(2), ..., estão convergindo para algum valor ou não. Se a resposta for positiva, o valor encontrado será denominado **valor de equilíbrio.**
*Resposta: Observemos desta análise que a seqüência está convergindo em direção à origem, (0,0), o que significa que os números a(1), a(2), ...., estão convergindo para zero. Notemos também que o ponto (0,0) é o ponto de interseção das duas retas. O valor da coordenada x do ponto de interseção é chamado VALOR DE EQUILÍBRIO para a relação ( * ).*
*A razão para este nome é a seguinte: se a(1) = 0 então a(2) = 0,75.a(1) = 0, a(3) = 0, ..., isto é, a quantidade de poluente no lago não se altera. Dizemos então que o lago está em equilíbrio.*

## ATIVIDADE 3

Considere agora uma nova situação em que a cada período de 24 horas uma nova quantidade (fixa) de poluente é adicionada ao lago e que ocorra, também a cada período de 24 horas, um processo de despoluição natural de ¼ do volume de água. Esta nova situação pode ser simulada como abaixo:
Inicie com 4 copos de água e 16 mL de poluente (corante), e, como anteriormente, troque um copo de água do recipiente por um copo de água pura, reduzindo a quantidade de poluente para 12 mL. Em seguida, simule a adição de uma nova quantidade de poluente, acrescentando 1 copo de água pura com mais 16 mL de poluente. Após esse processo, determine a quantidade de poluente no lago. *Resposta: 28 mL*
Repita este processo e verifique quanto de poluente restará no vasilhame se em mais 24 horas um novo copo de água colorida for removida. *Resposta: 21mL*
Em seguida volte a adicionar 16 ml de poluente juntamente com um copo de água pura e determine o total de poluição no lago. *Resposta: 37 mL*

## QUESTÕES

1. Você acha que a água do lago se transformará em poluente se você continuar com esse processo?
*Resposta: (a resposta virá por meio de reflexões sobre a resolução da questão 2 )*

2. Suponha que em algum momento a quantidade de poluente no lago seja de 100mL. Quanto restará de poluente, em mL, após as próximas 24 horas? E nas próximas 48 horas? O que isso sugere?
*Resposta: Durante 24 horas o lago elimina 25% do poluente, restando 75mL. Uma taxa de poluição de 16mL é acrescentada elevando-se o total para 91 mL. Logo, se a quantidade inicial de poluente no lago fosse de 100 mL, então a quantidade de poluente no lago no período seguinte seria menor (91 mL). Procedendo de maneira análoga, teríamos 84,25 mL de poluente no lago, após 48 horas. Isto nos mostra que a quantidade de poluente não deverá crescer indefinidamente.*

3. Outra maneira de responder esta questão é usar uma equação recursiva que represente este novo modelo. A **equação recursiva** é dada por

$$a(n+1) = 0{,}75\ a(n) + 16$$

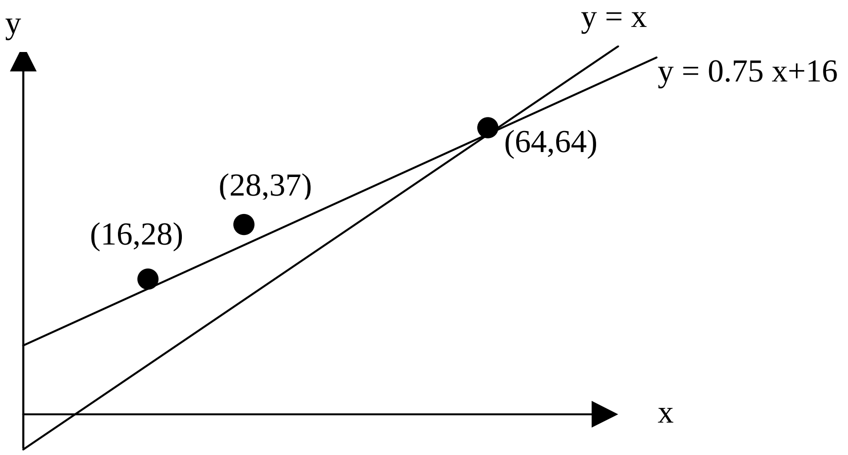
Explique com suas palavras porque esta equação recursiva representa este novo modelo.
*Resposta: Durante o n-ésimo período de tempo, um quarto da água e, conseqüentemente, um quarto da quantidade a(n) de poluente, é removido do vasilhame. A quantidade de poluente que permanece no vasilhame, até esse momento, é igual a 0,75.a(n). Mas, em seguida, com o acréscimo de mais 1 copo de água pura e 16mL de poluente, a quantidade de poluente será de 0,75.a(n) + 16.*
*Observação: Denote por a(n) a quantidade de poluente no lago no início do n-ésimo período de tempo.*

4. Suponha que a quantidade de poluição do lago tenha se estabilizado em um **valor de equilíbrio x**, ou seja, que após cada período de 24 horas, o lago volte a ter x mL de poluente na água. Esse valor x deverá satisfazer então a equação **x = 0,75x + 16.** Resolva a equação, e encontre o valor de x.
*Resposta: x=64*

5. Para fazer a representação gráfica da nova situação, denote a quantidade de poluição no início de um período de 24 horas por x e a quantidade ao final de um período de 24 horas, acrescida de uma nova taxa de poluição, por f(x). Assim, obtemos a relação:

$$f(x) = 0{,}75x + 16$$

Construa o gráfico com os valores correspondentes à nova situação mencionada acima.

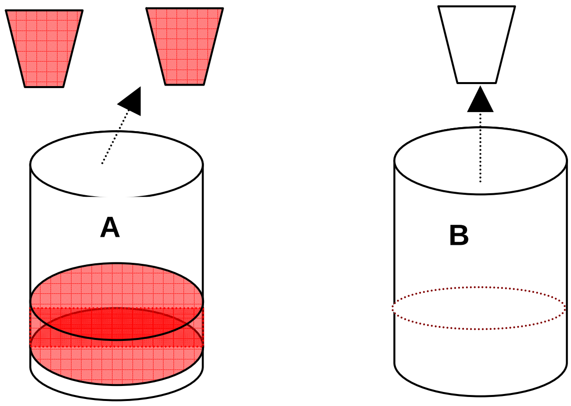



6. Ainda utilizando o sistema cartesiano acima, construa a reta y = x e anote o ponto de interseção das duas retas. O valor da abscissa encontrado no ponto de interseção é denominado *valor de equilíbrio.*

7. Em termos quantitativos e qualitativos, o que representa o valor de equilíbrio para este modelo de lago simulado?
*Resposta: Observe que a seqüência de pontos está convergindo para o ponto (64, 64), que é o ponto de interseção das duas retas.*
*Assim, a relação recursiva f(x) = 0,75x + 16 tem x = 64 como valor de equilíbrio. Notemos que se o recipiente começa com a(1) = 64mL e 16mL são adicionados a cada período de tempo, então a(2) = 0,75.a(1)+16 = 0,75 . 64 + 16 = 64 e assim a(1) = a(2) = a(3) =.... = 64, e o ambiente está em equilíbrio.*

## ATIVIDADE 4
## Sistemas Lineares e Matrizes

Para estudar a relação entre o lago e um reservatório de tratamento de água, parte da água do lago poluída será encaminhada para tratamento no reservatório e logo após retornará ao lago. Além disso, uma nova taxa de poluição será acrescida.
Para simular esta situação utilize dois recipientes (A e B). O recipiente A deverá conter 4 copos de água, simulando o lago e o recipiente B irá conter 2 copos de água, simulando o reservatório de tratamento de água.
Adicione 16 mL de corante ao recipiente A para simular a primeira taxa de poluição. Remova 2 copos de água do recipiente A e 1 copo de água do recipiente B e reserve.




Coloque o copo de água límpida, removida de B, dentro do recipiente A. Para manter o nível constante de 4 copos, acrescente no recipiente A um copo de água pura (reservada num recipiente à parte) e 16 mL de poluente.
Despeje um dos copos do recipiente A dentro do recipiente B (que passará por um processo de tratamento) e exclua o outro.

Neste exemplo, a quantidade de poluente final de um período de 24 horas no lago será representada por a(n) e a quantidade de poluente no recipiente B, no mesmo período, será representado por b(n). Considere a(1) = 16 e b(1) = 0

$$a_{n+1} = 0,5 \cdot a_n + 0,5 \cdot b_n + 16$$

$$b_{n+1} = 0,25 \cdot a_n + 0,5 \cdot b_n$$

As equações acima nos oferecem um par de valores de equilíbrio, a e b, um para cada recipiente. Para encontrar esses valores, reescreva essas relações na forma matricial, obedecendo a seguinte relação:

$$A_{n+1} = M \cdot A_n + B$$

A(n) = $\begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix}$ , B(n) = $\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ , M = $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$ e A(n+1) = $\begin{pmatrix} a(n+1) \\ b(n+1) \end{pmatrix}$

QUESTÃO

1. Resolva a equação acima para n = 1, 2, 3, 4,... e verifique para quais valores esses cálculos convergirão.
*Resposta: Estes valores convergirão para a = 64 e b = 32.*