



3 ANÁLISE COMBINATÓRIA E

PROBABILIDADE A Tábua da Fortuna

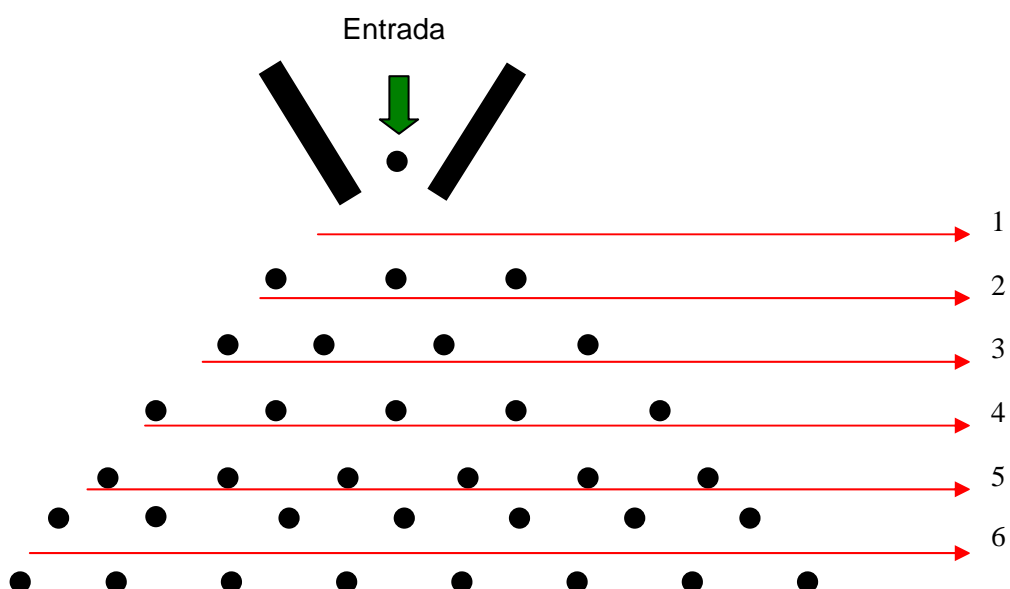
NOME _____
ESCOLA _____
EQUIPE _____ SÉRIE _____
PERÍODO _____ DATA _____

OBJETIVO

O Kit “A Tábua da Fortuna” tem como objetivo motivar a construção do Triângulo de Pascal através da análise de um problema concreto que descreveremos a seguir e, ao mesmo tempo, evidenciar para os alunos a relação que existe entre Análise Combinatória e o Triângulo de Pascal.

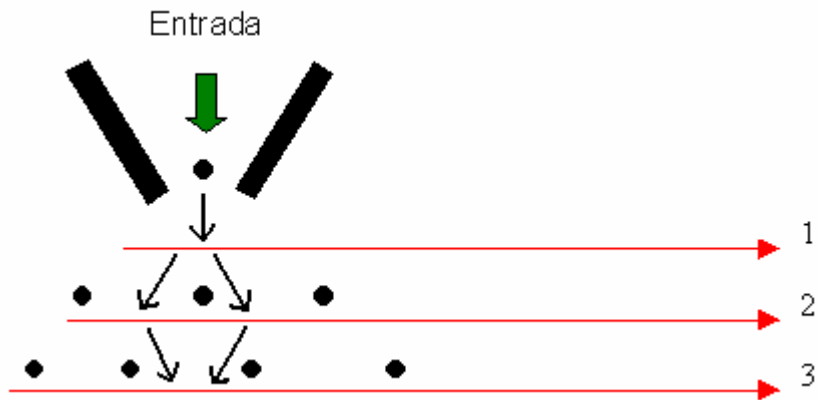
PROCEDIMENTO

A seguinte figura mostra um tabuleiro com alamedas que podem ser percorridas por uma pessoa. Podemos imaginar que é o mapa de um bosque, onde os pontos pretos representam árvores.



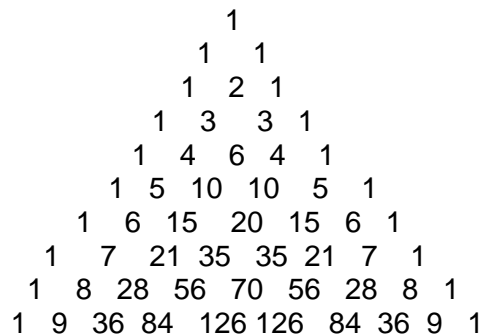
As várias ruas do bosque estão marcadas com setas numeradas. Em cada bifurcação as pessoas exitam entre ir para a direita ou ir para a esquerda. Somente na entrada não existe tal escolha. Para percorrer um caminho a partir da entrada, de cima para baixo, a pessoa deve decidir, em cada rua que ela passa, se toma o caminho da esquerda ou da direita.

Vejamos algumas *possibilidades*: para atingir a rua 1, a pessoa só tem uma possibilidade. Ela é representada pelo número 1. Para chegar à rua 2, temos um caminho para a esquerda e um para a direita. Representamos tal fato escrevendo 1, 1. Na terceira linha, entretanto, temos um fenômeno novo: para atingir as posições extremas, temos apenas um caminho de cada lado, mas para a posição central temos dois caminhos distintos. Veja a figura:



Possíveis caminhos para se chegar à posição central da rua 3.

Representamos o número de caminhos na terceira rua para se chegar ao extremo esquerdo, à posição central e ao extremo direito por 1, 2, 1, respectivamente. Na linha seguinte teremos 1, 3, 3, 1. Continuando desta maneira, obteremos o famoso Triângulo de Pascal:



Em cada linha temos números representando de quantas maneiras diferentes uma pessoa pode chegar àquela posição, numa determinada rua do bosque. O número total de possibilidades de se chegar à décima linha é $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$. Podemos perceber também que o número total de possibilidades de se chegar à sétima linha é $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$. Observe ainda que cada número do triângulo é a soma de seus dois vizinhos superiores.

Uma outra aplicação interessante deste resultado

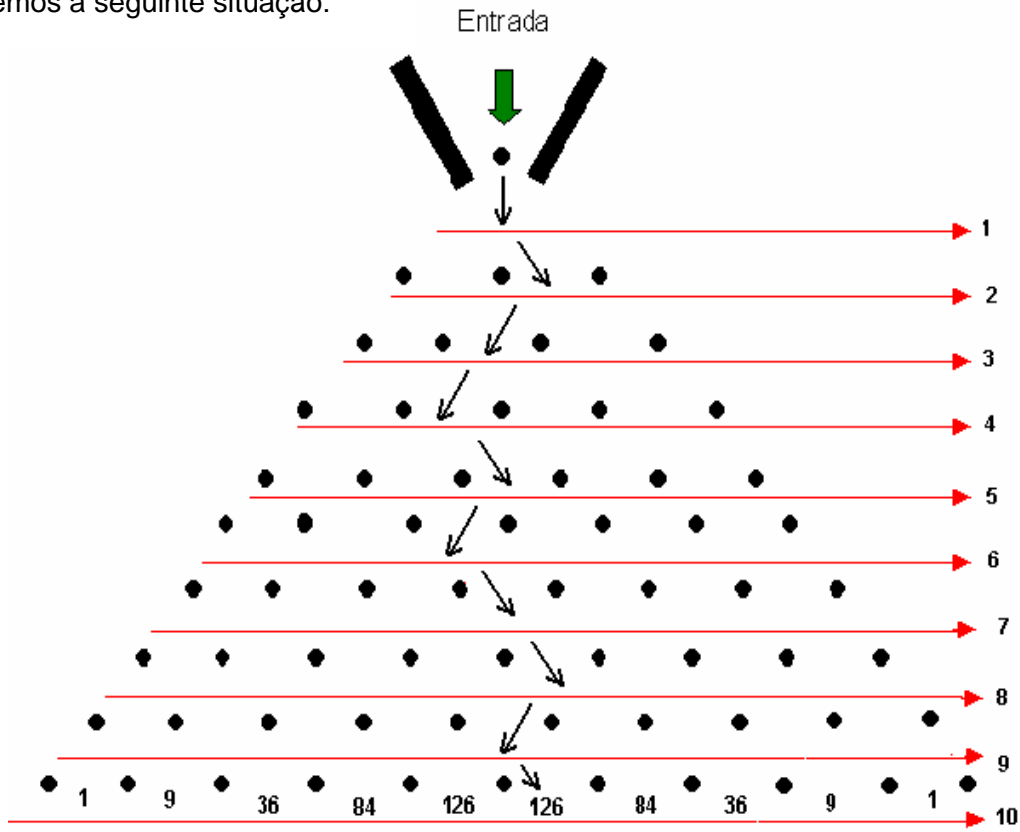
Existe um paralelo entre este experimento e o estudo antropológico da estatura humana. A altura de um indivíduo é resultado de muitas causas que atuam no desenvolvimento físico da pessoa. Algumas destas causas tendem a fazer a estatura aumentar, enquanto outras tendem a diminuí-la.

Suponha que um indivíduo, ao lançar uma moeda, cresça se sair cara e diminua se sair coroa. Se repetirmos esses lançamentos 10 vezes com 512 pessoas, poderemos traçar um paralelo entre os caminhos no bosque descrito acima e a altura destas pessoas. A cada perda no crescimento associamos a decisão da pessoa ir à direita no bosque e a cada ganho, a decisão de seguir à esquerda. Por exemplo, se a seqüência de lançamentos for:

- 1º - independe de ser cara ou coroa (há apenas um caminho da entrada à rua 1)
- 2º - cara (esquerda)
- 3º - coroa (direita)
- 4º - coroa (direita)
- 5º - cara (esquerda)
- 6º - coroa (direita)
- 7º - cara (esquerda)

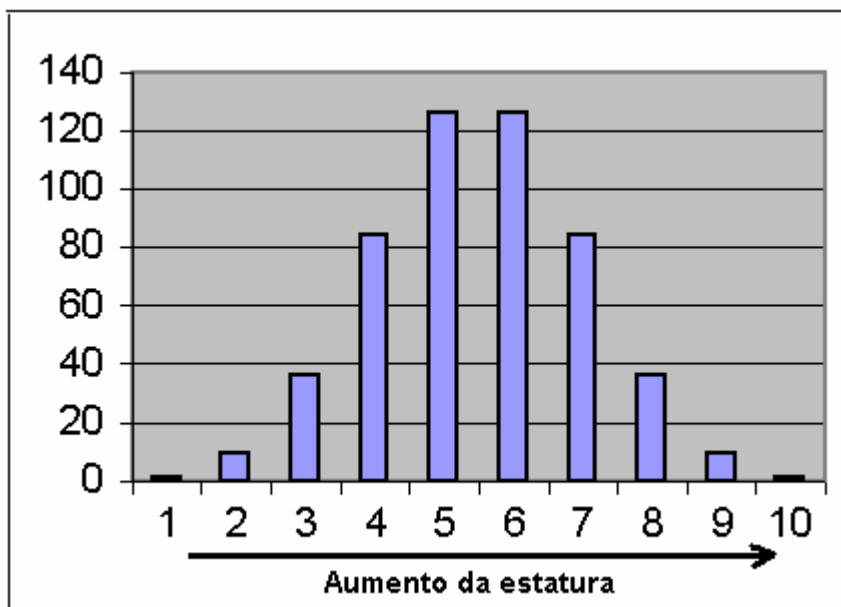
- 8º - cara (esquerda)
- 9º - coroa (direita)
- 10º - cara (esquerda)

teremos a seguinte situação:



Como temos 512 pessoas, podemos exaurir todas as possibilidades dadas pelo triângulo de Pascal. Se todas elas ocorrerem, teremos, em média, uma única pessoa muito baixa, 9 indivíduos um pouco maiores, 36 um pouco ainda maiores,..., 126 pessoas com altura média, 84 com altura um pouco acima da média, e assim sucessivamente até chegarmos a uma única pessoa maior do que todas as outras. Graficamente isto pode ser representado da seguinte maneira:

Curva de Gauss



Este gráfico produz uma curva em forma de sino, conhecida como Curva de Gauss. Ela foi obtida plotando-se os números de Pascal como coordenadas.

Curvas deste tipo descrevem, além da altura das pessoas, uma quantidade enorme de outros fenômenos da natureza, tais como o crescimento de bactérias, ampliação da malha rodoviária, o crescimento de plantas, etc.

A seguir temos uma atividade que aborda o assunto visto. Será necessário o uso de uma fita métrica.

ATIVIDADE

Construa um gráfico de colunas colocando no *eixo x* as alturas de seus colegas, e no *eixo y* o número de pessoas com mesma altura. O que você pode concluir a partir da curva obtida?

Observação: A altura de todos os alunos da sala deverá ser colocada na lousa.

