

ANDRÉ HASSIN PINTO

**GRÁFICOS DE CONTROLE TIPO SHEWHART NO MONITORAMENTO DA
VOLATILIDADE DE RETORNO DE ATIVOS FINANCEIROS**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção.

São Paulo

2013

ANDRÉ HASSIN PINTO

**GRÁFICOS DE CONTROLE TIPO SHEWHART NO MONITORAMENTO DA
VOLATILIDADE DE RETORNO DE ATIVOS FINANCEIROS**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção.

Orientadora: Profa. Linda Lee Ho

São Paulo

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Pinto, André Hassin

Gráficos de controle tipo Shewhart no monitoramento da volatilidade de retornos dos ativos / A.H. Pinto. -- São Paulo, 2013.

105 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Gráficos de controle 2.Mercado financeiro 3.Estimadores de volatilidade I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À professora Linda Lee Ho, que me orientou durante a elaboração deste trabalho com grande atenção, dedicação e empenho.

A todos os professores do Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica que possibilitaram uma formação completa durante minha trajetória acadêmica e que foram, sem dúvida, imprescindíveis para elaboração deste trabalho e minha formação de engenheiro.

Aos meus amigos que viveram comigo desde os primeiros anos no biênio muitos desafios e momentos de descontração na Poli.

Aos meus pais que compartilharam comigo o sonho de um dia me tornar um engenheiro.

RESUMO

Este trabalho propõe a aplicação de gráficos de controle para monitorar a volatilidade de preços de ativos financeiros com o intuito de alertar o tomador de decisão caso haja um aumento deste parâmetro. Não sendo um parâmetro diretamente observável, a volatilidade de um ativo pode ser somente estimada a partir de sua série de preços. O modelo classicamente utilizado pelos participantes do mercado baseia-se no log-retorno diário dos preços de fechamento do ativo. Modelos mais sofisticados como o de Parkinson, Garman & Klass e Roger & Satchell utilizam informações adicionais, mas também de fácil acesso, a respeito do preço do ativo em um dia de negociação: o seu preço de abertura, de fechamento, de máximo e de mínimo. Neste trabalho, buscou-se identificar se a utilização destes estimadores de volatilidade alternativos ao clássico traria algum benefício no que diz respeito à velocidade com que o gráfico de controle é capaz de identificar um aumento na volatilidade, medido pelo ARL_1 . A série de preços intra-diários foi modelada como um movimento Browniano Geométrico e os gráficos de controle foram projetado de forma a compartilharem um mesmo ARL_0 . Os resultados indicam que os gráficos construído a partir dos indicadores alternativos de volatilidade apresentam vantagem significativa neste aspecto quando comparados ao do modelo Clássico. Particularmente, o gráfico do estimador de Garman-Klass apresentou o melhor desempenho dentre eles.

Palavras-Chave: Gráficos de controle. Monitoramento. Estimadores de volatilidade. Estimadores máximo-mínimo.

ABSTRACT

This paper proposes the use of control charts to surveil the volatility of financial assets in order to warn the decision maker whenever there is an increase in this parameter. The volatility of an asset can only be estimated from historical price series since it cannot be directly observed in the market. The classical model used by market participants is based on the log-return of the daily closing prices of the asset. However, more sophisticated models such as Parkinson, Garman & Klass and Roger & Satchell use additional data, which are also easily accessible, about the price of the asset on a trading day: the high, low, opening and closing prices. This paper sought to identify whether the use of these alternative volatility estimators would bring some benefit to the classic approach with regard to the speed which the control chart is able to identify an increase in volatility, measured by ARL_1 . Intraday prices were modeled as a geometric Brownian motion and the control charts were designed so that they all share the same ARL_0 . The results indicate that control charts constructed based on the alternative indicators of volatility have significant advantage in this respect when compared to the Classic model. In particular, the control chart of the Garman-Klass estimator showed the best performance among them.

Keywords: Control chart. Surveillance. Volatility estimator High-low estimator

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Áreas de negócio do Morgan Stanley, elaborado pelo autor (fonte: Morgan Stanley)	14
Figura 2 - Departamentos de Sales & trading.....	15
Figura 3 Lucro das possíveis posições assumidas com opções.....	23
Figura 4 Exemplos de Estratégias utilizando opções (elaborado pelo autor).....	24
Figura 5 – Processo generalizado de Wiener com $\alpha=7,5\%$ e $\sigma=15\%$	28
Figura 6 – Esquema de <i>inputs</i> e <i>outputs</i> do modelo de Black-Scholes-Merton.....	33
Figura 7 - Esquema para se determinar a volatilidade implícita	33
Figura 8 - Delta da opção de compra de <i>strike</i> 40 para $S = 38$ com 6 meses até o vencimento	34
Figura 9- Portfolio comprado em call e vendido em delta ações	35
Figura 10 - Variação no valor do portfólio do início do dia (1) para 5% de alta (2) para o fechamento (3).....	36
Figura 11 - Processo estocástico como uma família de trajetórias.....	40
Figura 12 - Valores observados da realização de uma trajetória contínua de um passeio aleatório	51
Figura 13 - Processo sob controle. A característica da qualidade possui distribuição constante .	55
Figura 14 - Diagrama de causa-e-efeito para a volatilidade dos ativos.....	57
Figura 15 - Ilustração de um gráfico de controle de um processo sob controle.....	58
Figura 16 - ARL para gráfico de \bar{x} barra com limite três-sigma para um deslocamento de $k\sigma$ na média.....	61
Figura 17 - Simulação da série de preços S_n para um dia de negociação: $S_0 = 30$, $\mu = 8\%$ a.a. , $\sigma = 1$ a.a. , $\Delta t = 0,5s$	70
Figura 18 – Evolução dos preço dos contratos Futuros de S&P 500 mini com vencimento Dezembro 2013 no dia 19/09/2013	70
Figura 19 – Histograma das distribuições para simulação de 252 dias (variância verdadeira = 1 a.a.)	73
Figura 20 – Esquema da metodologia utilizada para se determinar os limites de controle para os gráficos que satisfazem $ARL_0 = 100$	76
Figura 21 - Fluxograma do processo para determinação do ARL_1 para um determinado k	79
Figura 22 – Interface da planilha para simulação da série de preços $S(n,i)$	82

Figura 23 - Representação esquemática de $g(\cdot)$, que calcula o ARL0 com base em um Limite de controle.....	83
Figura 24 - Gráfico de Controle do Estimador Clássico. $LC_c = 0,026244$	85
Figura 25 - Gráfico de Controle do estimador de Parkinson. $LC_p=0,013072$	85
Figura 26 – Gráfico de Controle do estimador de Garman Klass. $LC_{gk}=0,010649$	86
Figura 27 - Gráfico de Controle do estimador de Roger-Satchell. $LC_{rs}=0,011415$	86
Figura 28 - Curvas de ARL1 x k para os diferentes estimadores estudados.....	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Efeito no aumento de fatores que influenciam o preço de opções	26
Tabela 2 - Valor esperado dos estimadores de Volatilidade (variância = 1).....	51
Tabela 3 – Parâmetros para simulação da série de preços.....	69
Tabela 4 - Resultados de cada um dos estimadores para simulação de um ano (variância verdadeira = 1,00).....	72
Tabela 5 - Resumo da notação utilizada na metodologia para se determinar o LC que satisfaz $ARL_0 = 100$	77
Tabela 6 - Limites de controle simulados para $ARL_0 = 100$	84
Tabela 7 – Valores de k simulados e respectivos σ_{FC}^2 para cenários fora de controle.....	87
Tabela 8 - Valores de ARL_1 para diferentes k simulados.....	87
Tabela 9 - Número médio de dias que o gráfico de Garman-Klass é capaz de indicar um aumento de volatilidade para diferentes valores de k em relação ao estimador Clássico	91

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1. Descrição do ambiente de trabalho	14
1.2. O Problema e Motivação	15
1.3. Objetivo	17
1.4. Estrutura do Trabalho	17
2. O MERCADO DE VOLATILIDADE	21
2.1. Os contratos de opções	21
2.2. Fatores que influenciam o preço das opções.....	24
2.3. Precificando opções – o modelo de Black & Scholes.....	26
2.3.1. Processo de Wiener	26
2.3.2. Modelando o preço de uma ação	29
2.3.3. O modelo de Black-Shcoles-Merton	31
2.3.4. Negociando volatilidade	34
3. SÉRIES TEMPORAIS E A VOLATILIDADE	39
3.1. Séries Temporais.....	39
3.1.1. Estacionariedade.....	40
3.1.2. Ruído Branco.....	41
3.1.3. Processos não estacionários.....	42
3.2. A volatilidade de ativos – Estimadores de volatilidade realizada	44
3.2.1. Volatilidade Realizada: O estimador clássico	45
3.2.2. O estimador de Parkinson.....	47
3.2.3. O estimador de Garman-Klass.....	48
3.2.4. O Estimador de Roger-Satchell	52
4. CONTROLE ESTATÍSTICO DA QUALIDADE	55
4.1. Controle Estatístico do Processo.....	55
4.2. Os Gráficos de Controle	57

4.3.	Medindo o Desempenho, o Comprimento Médio da Sequência.....	59
4.4.	Os Gráficos de Controle para Variáveis.....	61
4.5.	Determinando os limites de controle.....	64
5.	APRESENTAÇÃO DA METODOLOGIA.....	67
5.1.	Os objetivos do modelo.....	67
5.2.	Simulando a Série de Preços.....	68
5.3.	Estimando a Característica da Qualidade de Interesse.....	71
5.4.	Determinando o comprimento médio de sequência sob-controle.....	73
5.5.	Determinar os limites de controle através de simulações.....	74
5.6.	Obtendo o comprimento médio de sequência fora de controle.....	77
6.	APLICAÇÃO DO MODELO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	81
6.1.	Projeto dos Gráficos de Controle: Calculando os Limites de Controle.....	81
6.2.	Determinando o ARL_1 para diferentes situações.....	86
7.	CONCLUSÃO.....	89
7.1.	Análise da Metodologia e dos Resultados Obtidos.....	89
7.2.	Dificuldades Encontradas.....	92
7.3.	Sugestões para Próximos Estudos.....	92
7.4.	Comentários Finais.....	94
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
	APÊNDICE B.....	103

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste Trabalho de Formatura se dá no contexto do banco de investimentos Morgan Stanley, onde o aluno está fazendo o estágio supervisionado. É notável a grande presença de engenheiros na área onde o aluno está alocado (mesa de operações) sobretudo de engenheiros de produção. Cada vez mais as instituições financeiras vêm demandando profissionais com forte raciocínio analítico, capacidade de solucionar problemas e com um foco sistêmico dos processos, qualificações estas típicas de um Engenheiro de Produção.

Este trabalho de formatura visa desenvolver um modelo a partir de ferramentas típicas da engenharia de produção adquiridas ao longo do curso (leia-se Controle Estatístico do Processo- CEP) e mostrar sua versatilidade, ou seja, seu potencial de aplicação em áreas diferentes do chão de fábrica. No caso deste trabalho, tais ferramentas serão utilizadas para monitorar séries temporais financeiras que possui aplicação prática relevante no ambiente de estágio do aluno, como será melhor detalhado no capítulo 2 deste trabalho.

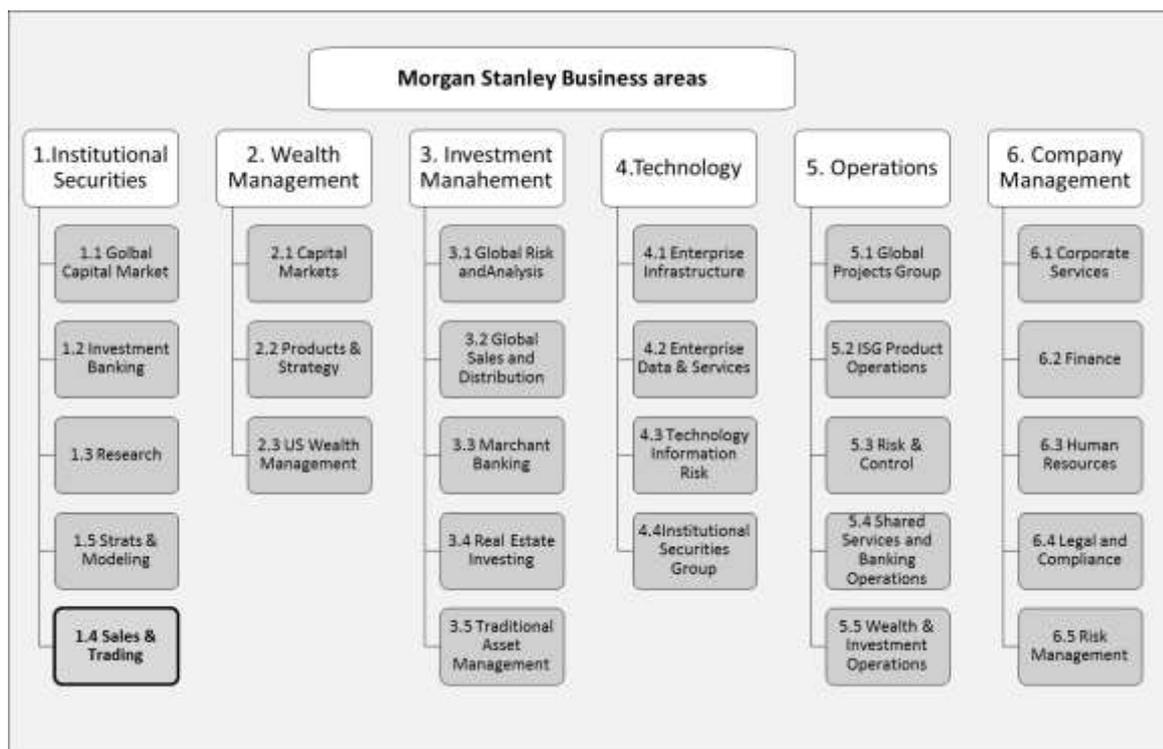
No que diz respeito ao Controle Estatístico do Processo, no decorrer deste trabalho serão utilizados gráficos de controle a fim de monitorar o comportamento de estatísticas financeiras, mais precisamente a sua variância. Os preços de um ativo serão modelados segundo um Movimento Browniano Geométrico, de tal forma que seu logaritmo segue um Movimento Browniano Padrão ou Passeio Aleatório. Será testada a eficiência de estimadores alternativos de volatilidade, como o modelo de Parkinson (1980), Garman-Klass (1980) e Roger-Satchell (1991) afim de se identificar se apresentam algum benefício se comparados ao estimador clássico, o log retorno do ativo, em identificar mudanças na variância da série. Essa comparação será feita através do comprimento médio de sequência ou *Average Run Length* (ARL), ou seja, o número médio de observações necessárias para se concluir de maneira correta que o processo está fora de controle.

Neste capítulo introdutório serão apresentados o ambiente onde o trabalho está sendo desenvolvido e também o problema que propõe a tratar e que motiva sua realização. Será ainda assunto deste capítulo os objetivos do trabalho. Por fim será apresentado a forma como ele foi estruturado.

1.1. Descrição do ambiente de trabalho

O trabalho está sendo desenvolvido em uma empresa do setor financeiro, o banco Morgan Stanley. Com sede em Nova York, o banco foi fundado em 1935 e a partir de então tornou-se uma empresa de serviços financeiros global. O Morgan Stanley oferece uma gama variada de serviços de banco de investimento, gestão de riquezas e de recursos. Os mais de 50 mil empregados espalhados por cerca de 1.200 escritórios em 43 países servem clientes que incluem governos de diversos países, grandes corporações, investidores institucionais e pessoa física. O seu primeiro escritório permanente no Brasil foi aberto em São Paulo em 1997. Em 2001 passou a atuar também como corretora de valores e banco múltiplo. Atualmente o time é formado por mais de 200 profissionais que ajudam o Morgan Stanley a ocupar uma posição de liderança também na América Latina.

Figura 1 - Áreas de negócio do Morgan Stanley, elaborado pelo autor (fonte: Morgan Stanley)



Fonte: Morgan Stanley – elaborado pelo autor

Figura 1 exhibe as principais áreas de negócio do Morgan Stanley dando destaque para área indicada por 1.4, Sales & Trading, onde o autor está realizando o estágio supervisionado. Os mais diversos tipos de investidores, de grandes corporações a pequenos fundos de investimento recorrem ao departamento de Sales & Trading que cobre praticamente todos

tipos de instrumentos financeiros negociáveis incluindo ações, debêntures, derivativos, moedas estrangeiras e commodities, para mencionar alguns deles. O departamento de Sales & Trading, por sua vez, subdivide-se nos seguintes departamentos, conforme figura 2:

Figura 2 - Departamentos de Sales & trading



Fonte: Morgan Stanley – elaborado pelo autor

O aluno trabalha na divisão de Institutional Equity, responsável por originar, distribuir ou negociar instrumentos de renda variável, seus derivativos e produtos relacionados. Esta divisão da empresa é responsável por garantir liquidez aos mercados, distribuir conteúdos, sugerir e criar soluções e produtos para que seus clientes possam conseguir retornos acima da média do mercado.

Especificamente nessa área o autor faz parte do time de derivativos que é composto por mais quatro profissionais, sendo que dois deles se encontram em Nova York. Os mercados cobertos pela equipe incluem Estados Unidos, Brasil, México e outros mercados emergentes. Os profissionais dessa área atuam como *Market Makers*, garantindo liquidez ao mercado, devendo, dessa forma, ser capazes de precificar quaisquer operações envolvendo derivativos e também fazer a gestão do risco da carteira. Sendo uma área com enfoque bastante quantitativo, a aplicação de conceitos estatísticos e matemáticos são inerentes à rotina de trabalho. O principal parâmetro a ser monitorado é a volatilidade dos ativos dos quais os derivativos têm seus preços derivados, como será mostrado no capítulo 2 deste trabalho.

1.2. O Problema e Motivação

É imerso no cenário descrito anteriormente que se dá o desenvolvimento deste trabalho de formatura. Ser estagiário da área de *Institutional Equity* permitiu ao autor ter contato direto com diversos instrumentos financeiros e estratégias de negociação. O

instrumento de maior destaque e de maior volume de negociação na mesa de derivativos são as opções. As características deste produto serão detalhadas no decorrer deste trabalho no capítulo 2, mas, de maneira simplista, estes contratos garantem ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de comprar (no caso de uma *call*) ou vender (no caso de uma *put*) um dado ativo a um preço pré estabelecido em uma data futura.

Inerente à lógica do trabalho, clientes recorrem ao Morgan Stanley em busca de cotações de operações envolvendo opções. Além deles, corretores também procuram o banco a fim de comprar ou vender opções em nome de seus clientes. Cumprindo sua função de *Market Maker*, o Morgan Stanley deve ser capaz de precificar cada operação de maneira competitiva a fim de satisfazer seus clientes e conquistar novos. Além disso, a carteira com as posições e exposições assumidas deve ser administrada, buscando sempre reduzir os riscos envolvidos e maximizar o retorno.

Diversos parâmetros são necessários para se determinar o preço justo de uma opção. O mais importante deles, mas que não pode ser observado diretamente do mercado, é a volatilidade do ativo a que a opção se refere durante o seu período de vida, ou seja, de sua aquisição até o dia do seu vencimento. Simplificadamente, uma opção será tão mais cara quanto maior os investidores assumirem que será a volatilidade do ativo em questão no período.

No que se refere a gestão da carteira e do risco, a volatilidade também exerce um papel fundamental. Ao utilizar uma estratégia envolvendo o próprio ativo e suas opções, conhecida como *delta hedge*, que será detalhada na seção 2.3. deste trabalho, é possível ao gestor proteger sua carteira contra eventuais movimentos do mercado, seja qual for sua direção. Sendo assim, a carteira fica unicamente exposta à volatilidade dos ativos subjacentes. Ou seja, estando protegido contra mudanças no preço do ativo subjacente, o que é relevante para o gestor não é a direção do movimento do ativo, mas sim sua magnitude.

Fica evidente, portanto, a relevância de se monitorar o comportamento da volatilidade dos ativos que compõe a carteira para fazer a gestão de seu risco e também para que seja possível determinar um preço justo a novas opções. A volatilidade exerce um papel tão importante no dia a dia do trabalho que a mesa de derivativos é também conhecida como mesa de “vol”. Dessa forma, o estudo de séries temporais dos retornos dos ativos é de extrema importância para o processo de tomada de decisões de um gestor de uma carteira de derivativos, o que motivou o aluno a focar seus esforços neste sentido. Os gráficos de controle se mostraram,

portanto, como uma alternativa bastante interessante na medida que possibilita monitorar uma determinada estatística constantemente e identificar momentos onde alguma ação deve ser tomada.

1.3. Objetivo

Neste trabalho de formatura mostraremos que os conhecimentos e ferramentas do Controle Estatístico de Processos, adquiridas durante a graduação em Engenharia de Produção, não se limitam ao ambiente industrial. Dessa forma, o seu objetivo será propor e analisar a eficiência de um modelo de gráfico de controle para monitorar o parâmetro de volatilidade de séries temporais financeiras.

Serão desenvolvidos diferentes gráficos de controle para monitorar um mesmo parâmetro, a volatilidade de um ativo. Esta última será, porém, estimada por diferentes estatísticas que serão definidas na seção 3.2. deste trabalho. A saber, são elas: o Estimador Clássico, o Estimador de Parkinson (1980), o Estimador de Garman-Klass (1980) e o Estimador de Roger-Satchell (1991).

Através de ferramentas de simulação, o objetivo será projetar os diferentes gráficos de controle de tal maneira que todos compartilhem um mesmo comprimento médio de sequência quando o processo estiver em controle estatístico, ou seja, sem a influência de quaisquer causas especiais. Sendo assim, sua eficiência será comparada para diferentes situações onde o processo estará fora de controle. A meta é determinar qual das características da qualidade monitoradas pelos gráficos de controle alertará o tomador de decisão o mais rápido possível de um aumento na volatilidade do processo, medido através do ARL fora de controle de cada um dos gráficos projetados.

1.4. Estrutura do Trabalho

Com o intuito de orientar a leitura deste trabalho, nesta seção será apresentada a maneira como ele está estruturado bem como uma breve descrição do que o leitor encontrará em cada um de seus capítulos.

- ❖ Capítulo 2 – O Mercado de Volatilidade. O intuito deste capítulo é contextualizar o trabalho e apresentar ao leitor os mecanismos que possibilitam a existência do que os investidores chamam de mercado de volatilidade. Serão apresentados os contratos de opções e o modelo de precificação de *Black & Scholes* (1973), cujo principal *input* é a volatilidade. Em seguida, será mostrado o conceito de *delta hedge*, estratégia onde o investidor está protegido em relação ao preço do ativo, estando exposto somente à sua volatilidade.
- ❖ Capítulo 3 – Séries Temporais e a Volatilidade. Aqui serão revisados os conceitos e conhecimentos de séries temporais, necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Serão também revisados, neste capítulo, os principais modelos tratados na literatura para se estimar a volatilidade de uma série de preços. As estatísticas calculadas por estes modelos serão objeto de estudo dos gráficos de controle que serão desenvolvidos no trabalho.
- ❖ Capítulo 4 – Controle Estatístico do Processo. Neste capítulo serão revisados os conceitos do controle estatístico do processo e suas ferramentas. Serão definidos em maior detalhe os parâmetros e conceitos por trás da aplicação dos Gráficos de Controle para monitoramento do processo. Esta ferramenta será aplicada neste trabalho para monitorar o comportamento da volatilidade σ^2 de uma série modelada como um passeio aleatório a fim de identificar uma mudança neste parâmetro.
- ❖ Capítulo 5 – Apresentação da Metodologia e do Modelo. Nesta parte do trabalho serão mostrados os parâmetros utilizados para construção do modelo e os passos que foram seguidos para sua elaboração. Os gráficos de controle serão aplicados para monitorar as estatísticas descritas no capítulo 3, com o intuito de se determinar qual deles é mais eficiente para se detectar um aumento na volatilidade de uma série de preços. Será apresentado também a metodologia que será utilizada para se determinar os limites de controle para os diferentes gráficos, dado um ARL_0 comum a eles, através de simulação.
- ❖ Capítulo 6 – Aplicação do Modelo e Resultados. Aqui a metodologia proposta no capítulo 5 será posta em prática. Serão apresentados os Limites de Controle encontrados para cada um dos gráficos através das ferramentas de simulação. Por fim, será apresentado o ARL_1 de cada um dos gráficos projetados para diferentes situações fora de controle.

- ❖ Capítulo 7 – Conclusões. Por fim serão apresentadas as conclusões e análise dos resultados obtidos, buscando integrar tudo que foi discutido. Também é conteúdo deste capítulo final as dificuldades encontradas durante a realização do trabalho, sugestões para trabalhos futuros e os comentários finais do autor.

2. O MERCADO DE VOLATILIDADE

Utilizando os instrumentos financeiros adequados é possível a um investidor assumir uma posição cujo prejuízo ou lucro depende apenas da volatilidade do mercado e não do preço dos ativos propriamente ditos. Uma posição dita “comprada em vol” se beneficia de um aumento da volatilidade dos ativos subjacentes, enquanto uma posição dita “vendida em vol” é lucrativa quando há uma redução na volatilidade dos retornos dos ativos. O principal instrumento utilizado para este fim no mercado brasileiro são as opções.

O objetivo deste capítulo é, portanto, familiarizar o leitor com este tipo de derivativo, apresentando suas características e estratégias de negociação a fim de que justificar a importância de se monitorar a volatilidade dos ativos. Será apresentado, então, as principais características deste produto, sua finalidade, o modelo *Black & Scholes* (1973), de precificação, suas premissas e implicações. Por fim mostraremos como a construção de um portfólio *delta* neutro, ou seja, livre de exposição ao preço do ativo, protege o investidor contra a direção do mercado e possibilita a atuação no mercado de volatilidade.

2.1. Os contratos de opções

Opções são contratos que garantem aos seus titulares o direito, mas não a obrigação, de vender ou comprar um determinado ativo a um preço pré estabelecido em uma data futura. As opções que garantem o direito de comprar são chamadas de *calls* enquanto as que garantem o direito de vender são chamadas de *puts*. Os seguintes parâmetros são, portanto, necessários para se definir um contrato de opção

- ❖ Tipo da opção: Define-se é uma opção de compra (*call*) ou uma opção de venda (*put*)
- ❖ Ativo subjacente: Define qual é o ativo a que a opção se refere.
- ❖ Data de vencimento do contrato: Especifica o período pelo qual o contrato é válido. Opções ditas Européias poderão ser exercidas somente na data de vencimento especificada no contrato. Já as opções Americanas podem ser exercidas em qualquer data compreendida entre a sua aquisição e seu vencimento.

- ❖ Preço de exercício: Também chamado pelos participantes do mercado de *strike*, é o preço o qual o detentor de uma *call* terá o direito de comprar o ativo subjacente na data de vencimento ou de vendê-lo, no caso de uma *put*.

As opções são negociadas no mercado, sendo que um investidor pode tanto assumir uma posição comprada em um contrato de opção, pagando um prêmio para isso, como também uma posição vendida, onde irá coletar esse prêmio. Dito isso, seja K o preço de strike de uma opção, P o prêmio pago pelo contrato e S_v o preço do ativo subjacente na data do vencimento, temos que o lucro do detentor no dia do vencimento de uma *call* européia é dado por:

$$\max(S_v - K, 0) - P \quad (1.1)$$

O lucro para o detentor de uma *put* européia no dia do vencimento é dado por:

$$\max(K - S_v, 0) - P \quad (1.2)$$

O lucro para o vendedor (lançador) de uma *call* européia no dia do vencimento é dado por:

$$P - \max(S_v - K, 0) \quad (1.3)$$

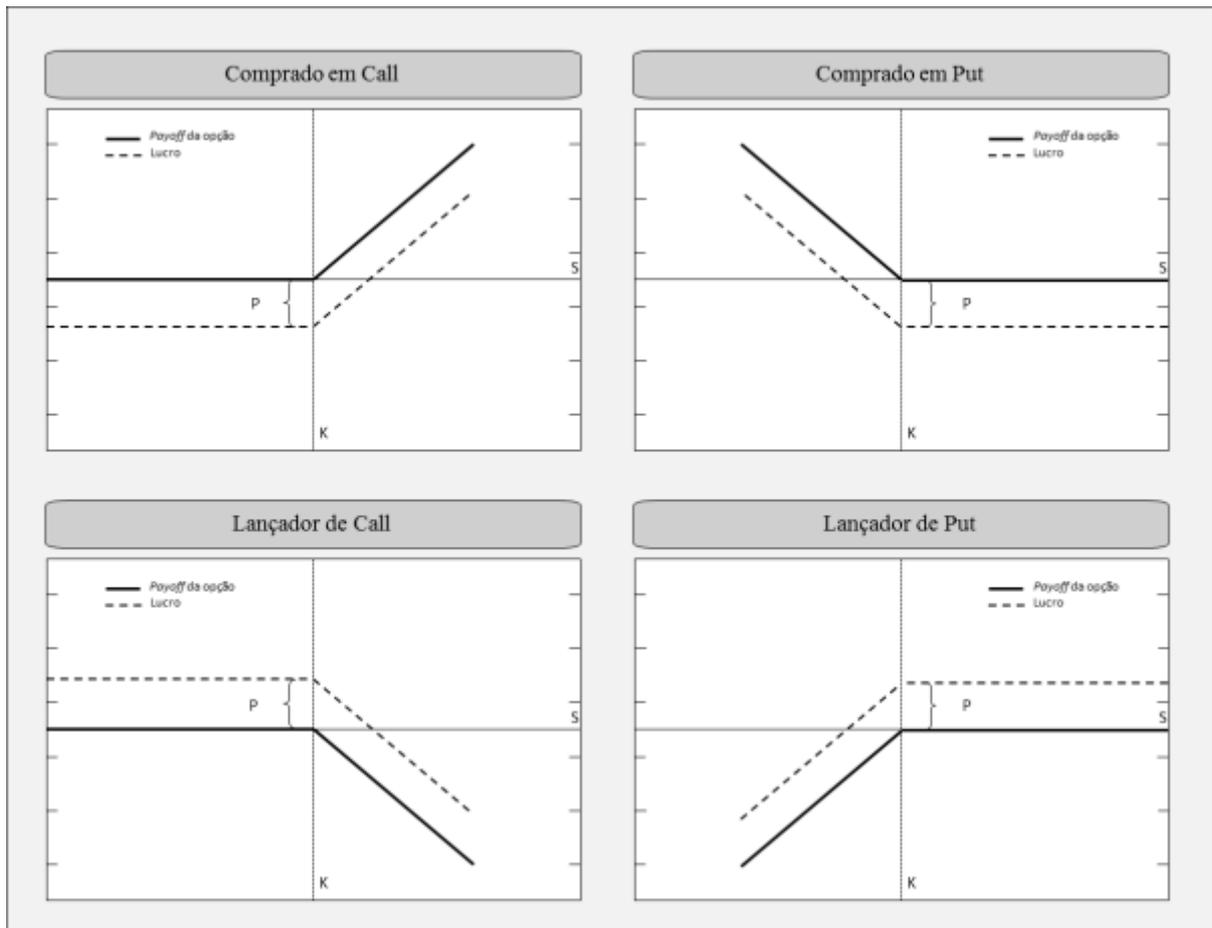
O lucro para o vendedor (lançador) de uma *put* européia no dia do vencimento é dado por:

$$P - \max(K - S_v, 0) \quad (1.4)$$

A figura 3 ilustra os possíveis *payoffs* obtidos por um investidor que assumir cada uma dessas posições.

Como é possível perceber, o detentor de uma *call* se beneficia em casos onde há um aumento nos preços do ativo subjacente. O detentor de uma *put*, por sua vez, se beneficia quando há uma queda nos preços do ativo subjacente. Percebe-se ainda que as perdas do investidor que comprou uma opção limita-se ao prêmio pago por ela.

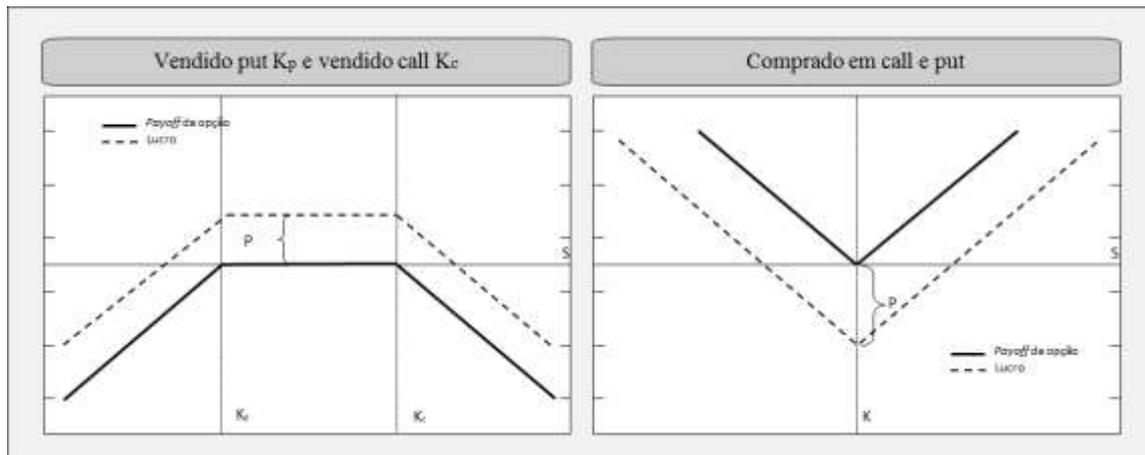
Figura 3 Lucro das possíveis posições assumidas com opções



Fonte: Autor

Além disso, diversas estratégias podem ser formadas combinando a compra e/ou venda simultânea de contratos de opções. Digamos, por exemplo, que um investidor acredita que os preços de um determinado ativo não sofrerão grandes alterações em um período de, digamos, 6 meses. Sendo assim, ele pode vender uma *call* de 6 meses *strike* K_c e também vender uma *put* de *strike* K_p , onde $K_c > K_p$. O *payoff* dessa estratégia seria como ilustrado na figura 4, ou seja, o investidor se beneficia em um cenário de baixa volatilidade do mercado. Se para um outro ativo, por exemplo, este mesmo investidor esteja convicto que os preços não irão se manter nos níveis atuais, apesar de não saber que direção os preços irão tomar no futuro, ele pode comprar ao mesmo tempo uma *call* e uma *put* de *strike* K e se beneficiar com movimentos do preço do ativo, qualquer que seja sua direção, ou seja, tirar proveito de um cenário de maior volatilidade do mercado.

Figura 4 Exemplos de Estratégias utilizando opções (elaborado pelo autor)



Fonte: Autor

2.2. Fatores que influenciam o preço das opções

Nesta seção serão expostos os fatores que são levados em consideração pelos investidores para se definir o prêmio das opções que são diariamente negociadas no mercado. Em seguida, será apresentado na seção 2.3 o principal modelo de precificação utilizado no mercado o qual leva em conta todos os fatores que serão aqui elencados. São eles:

- ❖ O preço atual do ativo subjacente, S
- ❖ O preço de exercício ou strike, K
- ❖ O tempo até o vencimento da opção T
- ❖ A volatilidade dos preços do ativos subjacente σ
- ❖ A taxa de juros livre de risco r

Preço do Ativo e o Preço de exercício

No dia de seu vencimento, no caso de uma *call*, o lucro obtido pelo investidor será tão maior quanto mais o preço de ativo exceder o preço de exercício da *call*. Sendo assim, esperamos uma *call* *strike* K_1 ser mais valiosa que uma *call* *strike* K_2 quando $K_1 < K_2$. Além disso, espera-se que este contrato se valorize à medida que o preço do ativo S aumente, aumentando o termo $(S - K)$. Ao contrário disso, para uma *put*, espera-se

que *puts* de *strikes* maiores sejam mais valiosas e que seu valor aumente à medida que o preço do ativo subjacente diminua.

O tempo até o vencimento

Quanto maior o tempo até o vencimento da opção, mais incerto é o valor que o preço do ativo poderá assumir até o vencimento. Além disso, no caso de opções Americanas, maior será a janela de tempo onde o investidor terá o direito de exercer ou não sua opção. Sendo assim, tanto para *calls* como para *puts*, o valor da opção diminui com o passar do tempo.

A volatilidade

A volatilidade é sem dúvida o principal parâmetro para se precificar uma opção e será tratada de maneira aprofundada no capítulo 3. Intuitivamente a volatilidade diz respeito à incerteza quanto aos movimentos do preço do ativo no futuro e sua magnitude. Um detentor de uma ação volátil pode obter com este papel retornos excepcionais caso o preço da ação se eleve subitamente. Da mesma forma, as perdas podem ser grandes caso o movimento se dê para o lado oposto. No caso de uma opção de compra sobre esta ação volátil, por exemplo, as perdas são limitadas ao prêmio pago, enquanto este retorno “excepcional” ainda pode ser capturado caso os preços se elevem. De maneira semelhante, o detentor de uma *put* se beneficia com grandes quedas nos preços mas tem perdas limitadas caso estes se elevem. Devido a essa característica dos contratos de opção, eles serão mais valiosos quanto maior for a volatilidade dos ativos subjacentes.

Taxa de juros

A elevação das taxas de juros reduzem o valor presente de qualquer fluxo de caixa a ser recebido pelo titular da opção no futuro. Além disso um aumento nas taxas de juros significam também um aumento no retorno esperado pelo investidor ao investir em uma ação. Estes dois fatores combinados levam a uma diminuição no valor de uma *put* e a um aumento no valor de uma *call* (HULL, 2011).

A tabela 1 apresenta de maneira resumida a influência do aumento em cada um dos fatores tratados nesta seção no prêmio de uma *call* e de uma *put* mantendo-se os demais parâmetros constantes.

Tabela 1 Efeito no aumento de fatores que influenciam o preço de opções

Elevação no(a):	Prêmio da Call	Prêmio da Put
Preço do ativo	↑	↓
Preço de exercício (<i>strike</i>)	↓	↑
Tempo para o vencimento	↑	↑
Volatilidade	↑	↑
Taxa de juros	↑	↓

Fonte: Autor – adaptado de Hull (2011)

2.3. Precificando opções – o modelo de Black & Scholes.

No início da década de 1970 Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton desenvolveram o modelo que hoje é o mais popular e aceito entre os profissionais do mercado de derivativos. Em 1997 Robert Merton e Myron Scholes receberam o prêmio Nobel de economia em reconhecimento da importância de sua contribuição ao mercado. O modelo por eles desenvolvido parte do pressuposto de que não há possibilidades de arbitragem no mercado. Sendo assim, o retorno esperado de um portfólio livre de risco, formado por opções e uma determinada quantidade de suas ações subjacentes, deve ser, em um curto espaço de tempo, a taxa de juros livre de risco.

Nesta seção será apresentado a dedução da equação de precificação de opções Européias do modelo de Black & Scholes (1973). Para isso cabe definir os principais conceitos e pressupostos utilizados pelo modelo, como a definição de um Processo de Wiener e o princípio da distribuição lognormal dos retornos dos preços das Ações.

2.3.1. Processo de Wiener

O processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico contínuo muito utilizado na física e nas finanças para modelar o comportamento aleatório do movimento de uma variável. O movimento Browniano recebe este nome devido a Robert Brown (1828) que observou o padrão de movimento aleatório de partículas de pólen suspensas na água.

Seja $z(t)$ uma variável que segue um Processo de Wiener.

- ❖ Propriedade 1: Uma variação Δz em z durante um intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.5)$$

onde $\varepsilon \sim N(0,1)$. segue que Δz tem distribuição normal onde $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$.

- ❖ Propriedade 2: O valor de Δz para dois intervalos de tempo diferentes são independentes, ou seja a variável ε não possui correlação serial.

Seja $z(T) - z(0)$ a mudança no valor de $z(t)$ para um período relativamente longo. Este valor pode ser entendido como a soma de todos os incrementos Δz de z nos N intervalos de comprimento Δt . Então:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (1.6)$$

Da segunda propriedade segue que

$$[z(T) - z(0)] \sim N(0, N\Delta t) = N(0, T)$$

Concluimos, portanto, que o processo de Wiener é um processo estocástico não estacionário uma vez que sua variância cresce linearmente com o horizonte de tempo.

Pode-se generalizar o Processo de Wiener para incluir um *drift* no processo. Para a situação limite onde $\Delta t \rightarrow 0$ define-se:

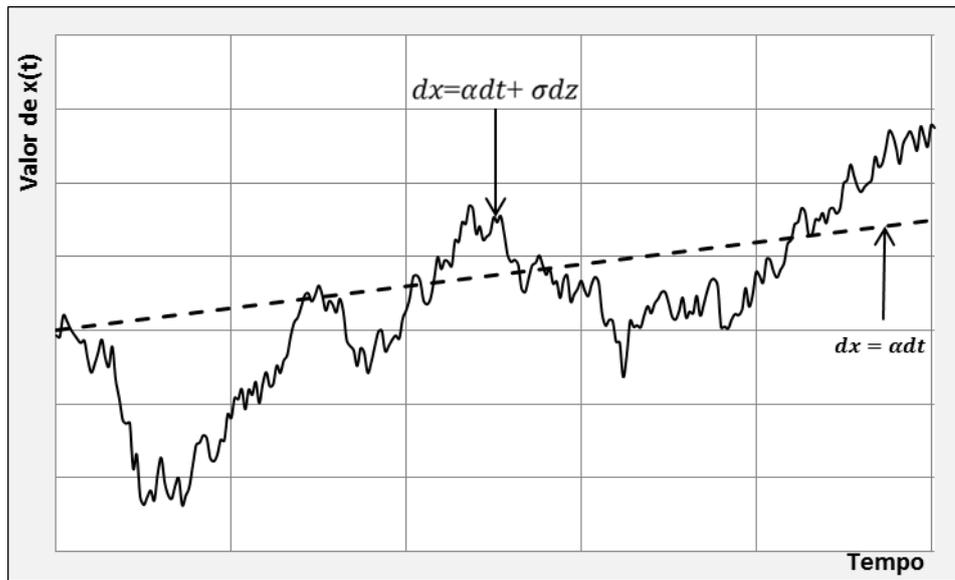
$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (1.7)$$

,

onde $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$. Segue que dx tem distribuição normal onde $dx \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt)$.

Neste modelo α e σ são constantes e são conhecidos respectivamente por parâmetro *drift* e parâmetro de variância. A figura 5 mostra um processo generalizado de Wiener simulado para $\alpha=7,5\%$ e $\sigma=15\%$

Figura 5 – Processo generalizado de Wiener com $\alpha=7,5\%$ e $\sigma=15\%$



Fonte: Autor

Pode-se definir ainda um outro tipo de processo estocástico onde os parâmetros α e σ são funções da variável objeto x e do tempo t . Este processo é chamado de processo de Itô e pode ser escrito da seguinte maneira:

$$dx = \alpha(x, t)dt + \sigma(x, t)dz \quad (1.8)$$

Itô (1951), através do que ficou conhecido como Lema de Itô mostra que uma função $G(x, t)$, função da variável x , que segue um processo de Itô e do tempo, vale o seguinte resultado:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \sigma dz \quad (1.9)$$

Analisando a equação (1.8) é possível perceber que a variável $G(x, t)$ também segue o Processo de Itô. É interessante notar que tanto a variável x quanto a variável $G(x, t)$ são afetadas pela mesma fonte de incerteza, Processo de Wiener, dz . Esta observação será crucial para a dedução dos resultados do modelo de Black & Scholes.

2.3.2. Modelando o preço de uma ação

No que diz respeito ao preço de uma ação, a sua modelagem deve-se levar em consideração o fato de a taxa de retorno esperada pelo investidor independe do preço atual da ação. Sendo assim, a premissa de drift constante não se adaptaria bem à realidade, devendo ser substituída pela premissa de que o retorno esperado (i.e. a razão do *drift* pelo preço da ação) que é constante. Sendo S o preço da ação, o *drift* deve ter a forma de μS para algum μ constante. Isso significa que para um intervalo de tempo Δt o aumento ΔS esperado em S é $\mu S \Delta t$.

Em um cenário sem nenhuma incerteza, isto é, $dz = 0$ temos:

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$

$$dS = \mu S dt \Rightarrow \int_0^T \frac{dS}{S} = \int_0^T \mu dt$$

Resolvendo temos que:

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \quad (1.10)$$

A equação (1.10) mostra que quando não há incertezas o preço da ação cresce à taxa de retorno μ composta continuamente.

No que diz respeito ao termo que contém a incerteza, é de se esperar que variação percentual do retorno em um período de tempo Δt também seja independente do nível de preços da ação. Dessa forma, o desvio padrão da variação em um período de tempo Δt deve ser proporcional ao preço S da ação. O modelo pode ser, portanto, escrito da seguinte forma:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1.11)$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.12)$$

Este modelo é conhecido como movimento Browniano geométrico e sua forma para intervalos de tempos discretos é:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.13)$$

ou

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.14)$$

Da equação (1.14) concluímos que a variável $\Delta S/S$ tem distribuição normal:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Por fim, o modelo de Black & Scholes ainda assume a propriedade da log-normalidade dos preços da ação. Seja $G = \ln(S)$, temos que:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Pela equação (1.9) do Lema de Itô temos que o processo seguido por $G(S,t)$ é:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (1.15)$$

Sendo μ e σ constantes, esta equação indica de $G = \ln S$ segue um processo Generalizado de Wiener, com drift de $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ e variância de σ^2 . Uma mudança em G em um período compreendido entre 0 e T tem, portanto, distribuição normal

$$\Delta G \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

A equação (1.15) indica que o modelo utilizado por Black & Scholes assume que o comportamento do preço de uma ação hoje tem distribuição log-normal onde o desvio padrão cresce com a raiz quadrada do horizonte de tempo que esta sendo considerado.

2.3.3. O modelo de Black-Shcoles-Merton

Assume-se que os preços de uma ação comportam-se de acordo com a equação (1.13) apresentada da seção anterior.

Seja f o preço de uma opção de compra desta ação. De acordo com o que foi desenvolvido na seção 2.2. f deve ser alguma função de S e t . Pela equação (1.9 – Lema de Itô) temos:

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \alpha + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (1.16)$$

Como mencionado, o processo gerador de incerteza dz é o mesmo para ambos os processos do preço da ação quanto o preço da opção. Isto permite criar um portfólio constituído por ações e opções em tal proporção que o processo de Wiener seja eliminado.

Seja um portfólio composto por

- ❖ (-1) Opção
- ❖ $+\partial f/\partial S$ Ações

O valor Π do portfólio é, por definição:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (1.17)$$

Uma variação $\Delta\Pi$ no valor deste portfólio em um intervalo de tempo Δt é, portanto:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (1.18)$$

Substituindo as equações (1.13) e (1.16) e fazendo as devidas simplificações chega-se em:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (1.19)$$

Nota-se que a equação (1.19) não envolve nenhuma incerteza. Portanto, no intervalo de tempo Δt o portfólio construído é livre de risco. Para que não haja possibilidades de arbitragens, o retorno deste portfólio do intervalo de tempo Δt considerado deve ser a taxa de retorno livre de risco r .

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (1.20)$$

Substituindo pelas equações (1.19) e (1.17) tem-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t \quad (1.21)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (1.22)$$

A equação (1.22) é a equação diferencial do modelo de Black-Scholes-Merton. Para aplicá-la ao caso de uma opção basta introduzir as condições de contorno apropriadas. No caso de uma call, como discutido na seção 2.1, temos para $t = T$:

$$f = \max(S_T - K, 0)$$

Black e Scholes resolveram esta equação aplicando a condição de contorno. Dessa forma, concluíram que, para uma *call*, seu prêmio c é dado por:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (1.23)$$

O prêmio p de uma *put* é dado por:

$$p = -S_0 N(-d_1) + K e^{-rT} N(-d_2) \quad (1.24)$$

Onde $N(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padronizada e:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Este modelo é o mais aceito e o que é utilizado na prática pelas mesas de derivativos em bancos de investimentos e demais instituições financeiras. A figura 6 apresenta de maneira esquemática os parâmetros necessários para se precificar uma opção utilizando o modelo desenvolvido neste capítulo:

Figura 6 – Esquema de *inputs* e *outputs* do modelo de Black-Scholes-Merton

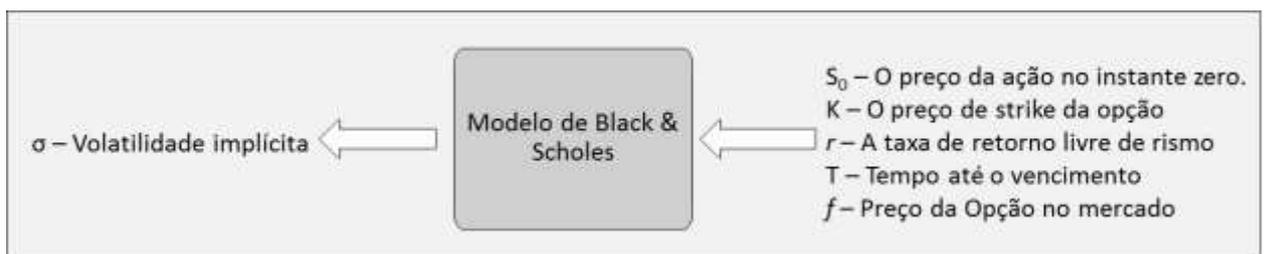


Fonte: Autor

Com exceção da volatilidade, todos os demais parâmetros necessários são diretamente observados do mercado o que torna a utilização do modelo bastante simples e prática. A volatilidade representa, portanto, o parâmetro crucial a ser determinado, uma vez que o valor justo de uma opção variará de investidor para investidor dependendo do valor que cada um assumir para volatilidade do ativo no período considerado.

Cabe agora definir o conceito de volatilidade implícita. Como mencionado anteriormente, as opções são listadas na Bolsa e são constantemente negociadas no mercado. Sendo assim, além dos parâmetros mencionados: preço da ação, o preço de strike, taxa de juros e tempo até o vencimento, é também possível observar o preço que uma determinada opção está sendo negociada no mercado. Dessa forma, utilizando o modelo de maneira inversa, como ilustrado na Figura 7, pode-se calcular a volatilidade implícita neste preço, ou seja, o que o mercado está assumindo implicitamente que será a volatilidade para ação em questão.

Figura 7 - Esquema para se determinar a volatilidade implícita



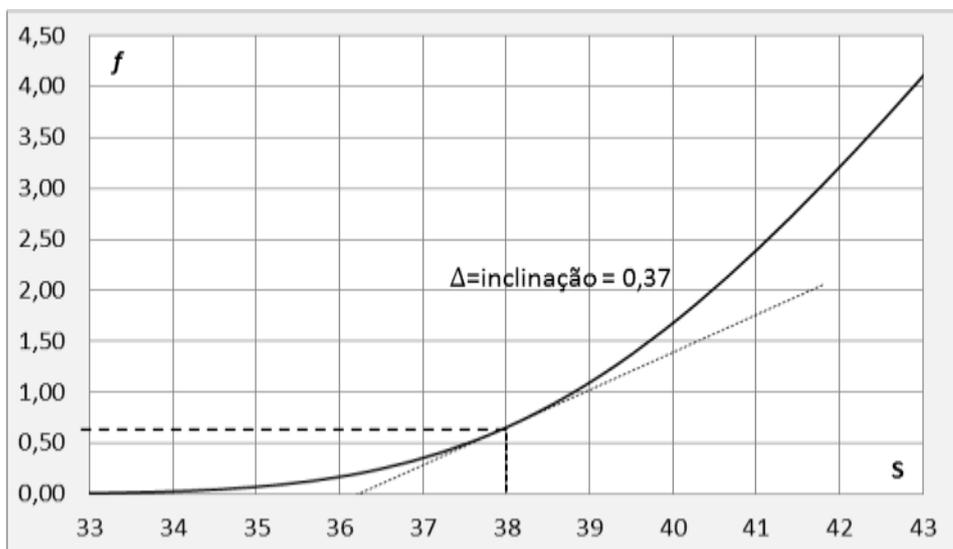
Fonte: Autor

Diversos fatores afetam a volatilidade implícita quando as opções são negociadas.. Dentre eles podemos destacar a liquidez do mercado, fatores de oferta e demanda, a proximidade da divulgação de resultados da empresa, de dados econômicos, a troca de executivos, entre outros fatores. Cabe, portanto, ao investidor determinar se esta volatilidade é condizente ou não com o que assume ser a verdadeira volatilidade do processo que gera os retornos do ativo, e assim tomar uma ação. Por exemplo, assume-se que a volatilidade de uma determinada ação é 30% e percebe que ela está sendo negociada a 25%, o investidor pode comprar as opções dessa ação por um preço que seria mais baixo do que o que julga ser o “justo”.

2.3.4. Negociando volatilidade

Seja f o valor de uma opção e S o preço do ativo subjacente em um instante t . Em um intervalo de tempo dt onde há uma variação dS no preço do ativo, mantendo-se todos os demais parâmetros constantes, teremos uma variação $\Delta = \partial f / \partial S$ no preço da opção. O termo $\partial f / \partial S$ é conhecido por delta e representa a sensibilidade do valor da opção em relação ao preço do ativo, ou seja, sua taxa de variação em relação à variação no preço do ativo. Figura 8 mostra a o preço f de uma *call* para diferentes valores de S . Os parâmetros utilizados neste exemplo foram $K = 40$, $r=0,05$, $\sigma=0,1$ e $T=0,5$

Figura 8 - Delta da opção de compra de *strike* 40 para $S = 38$ com 6 meses até o vencimento

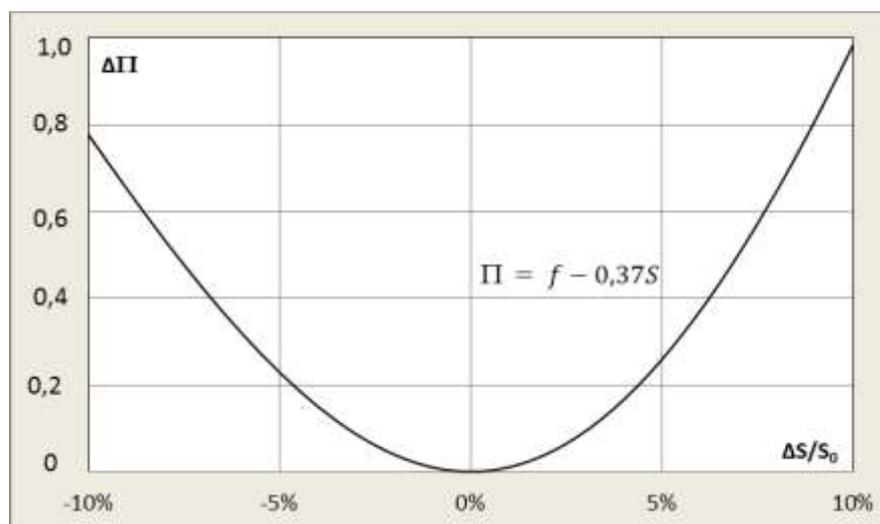


Fonte: Autor

Evidentemente, o delta de uma ação $\partial S/\partial S$ é constante igual a 1. O valor Π de um portfólio criado, portanto, por N calls e $-(\partial f/\partial S)N$ ações será portanto delta neutro, no sentido que seu valor é constante para pequenas variações em S , ou seja $\partial\Pi/\partial S = 0$. Esta estratégia é conhecida por *delta hedge*, e é usada pelas mesas de volatilidade para proteger a carteira contra movimentos nos preços do mercado, ficando exposta somente à volatilidade dos ativos.

Seja um portfólio comprado em 1 call como no exemplo da Figura 8 e vendido em $\Delta=0,37$ ações. Se no instante seguinte os preços se elevarem, o investidor verá o valor de sua call também se elevar, todavia, a posição vendida em ações se desvalorizará. Se, por outro lado, o preços da ação diminuir, sua call será menos valiosas mas, em contrapartida, se beneficiará da posição vendida em ações. Figura 9 mostra o valor deste portfólio em função da variação no preço da ação S_0 .

Figura 9- Portfólio comprado em call e vendido em delta ações



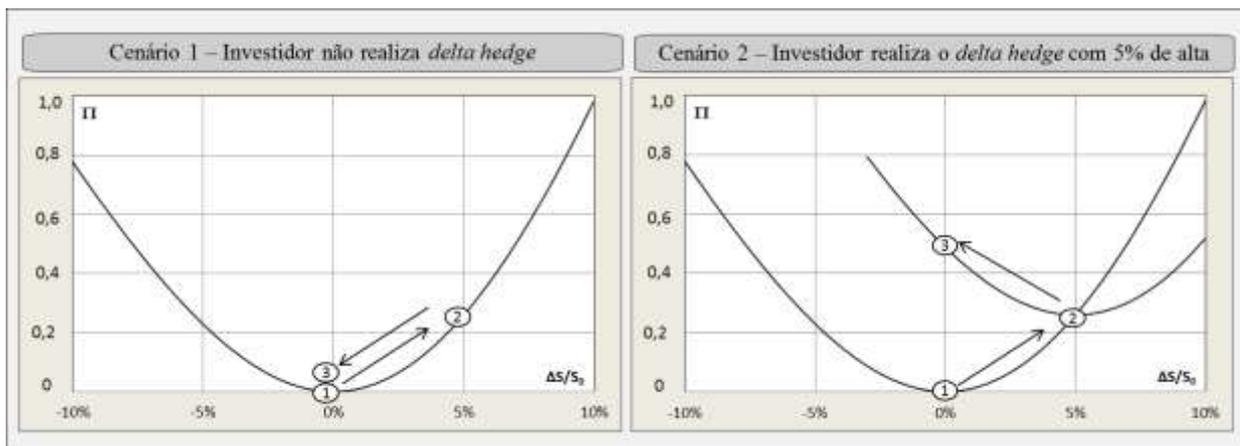
Fonte: Autor

Neste caso a posição do investidor é dita “comprada em vol” pois ele se beneficia de movimentos no mercado, seja qual for sua direção. Caso o portfólio fosse composto por posições vendidas em opções o investidor estaria “vendido em vol” e movimentos nos preços significariam perdas.

Seguindo ainda essa estratégia o investidor pode se beneficiar de movimentos intra-diários nos preços da ação, mesmo que se no final do dia o preço de abertura seja igual ao de fechamento. Continuando com o mesmo portfólio e cenário do exemplo anterior, suponha que o preço de abertura do papel seja R\$38,00. Ao longo do dia a ação chega a ser negociada a

R\$39,90, ou seja, uma alta de 5%, mas depois retorna para R\$38,00 no final do dia de forma que seu retorno diário seja 0% para este dia. Para capturar o lucro que tinha quando a ação estava sendo negociada com 5% de alta o investidor pode novamente fazer o *delta hedge* de sua posição, vendendo a quantidade de ações necessárias para deixar o delta do portfólio novamente nulo. A partir daí será novamente possível capturar o lucro com novos movimentos do preço em qualquer direção.

Figura 10 - Variação no valor do portfólio do início do dia (1) para 5% de alta (2) para o fechamento (3)



Fonte: Autor

Até este ponto foi tratado apenas a variação $\Delta\Pi$ do valor do portfólio com relação a uma variação ΔS do preço do ativo subjacente. Sabe-se, contudo, com base no que já foi discutido, que o valor de uma opção, e por consequência o valor do portfólio composto por opções e ações, depende também da taxa de juros r , do tempo t e da volatilidade σ do ativo subjacente. O valor Π do portfólio é, portanto, da forma $\Pi(S,t,\sigma,r)$. A variação $\Delta\Pi$ no valor deste portfólio em um pequeno intervalo de tempo Δt pode ser escrito na forma da expansão de Taylor como:

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\Pi}{\partial r}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \dots \quad (1.25)$$

Cada um dos termos da equação (1.25) são classificados no mercado da seguinte maneira:

- ❖ Delta (Δ) - $\partial\Pi/\partial S$: Variação do valor do portfólio com relação a uma variação no preço do ativo subjacente. Como mostrado anteriormente, através da estratégia de delta hedge os investidores buscam anular este termo.

- ❖ Vega (v) - $\partial\Pi/\partial\sigma$: Variação do valor do portfólio com relação a uma mudança na volatilidade implícita. Se a percepção a respeito da volatilidade do ativo for alterada o valor das opções do portfólio, por consequência, também serão alteradas.
- ❖ Theta (Θ) - $\partial\Pi/\partial t$: Variação do valor do portfólio com o passar do tempo. Posições “compradas em vol” apresentam decaimento com o tempo pois as opções valem cada vez menos à medida que chegam perto de sua data de vencimento, mantendo os demais fatores constantes.
- ❖ Rho (ρ) - $\partial\Pi/\partial r$: Variação do valor do portfólio diante a uma mudança nas taxas de juros. Em geral, muito pequeno em comparação aos demais termos.
- ❖ Gamma (γ) - $(\partial^2 \Pi)/(\partial S^2)$: É a concavidade do perfil de variação de valor do portfólio em relação ao preço do ativo subjacente. Pode ser também entendido como a variação do delta do portfólio para uma variação nos preços do ativo

Assim, a variação do valor de um portfólio delta neutro, considerando a volatilidade implícita constante ao longo da vida da opção e eliminando os demais termos da expansão é:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\gamma\Delta S^2 + \Theta\Delta t \quad (1.26)$$

Conclui-se, portanto, que ao utilizar a estratégia de delta hedge o lucro do investidor é proporcional ao quadrado dos retornos mais um fator de custo. Ou seja, ele está exposto somente à volatilidade do mercado. Monitorar este parâmetro é, por conseguinte, de extrema importância para mesa de volatilidade onde o autor está realizando seu estágio supervisionado.

3. SÉRIES TEMPORAIS E A VOLATILIDADE

Como foi largamente discutido na seção anterior, estimar a volatilidade de um ativo é uma prática relevante no que diz respeito a precificação de opções e mensuração do risco de um portfólio. Há na literatura diversos indicadores que tentam extrair, a partir de dados históricos, qual a volatilidade do processo que está gerando a série de preços. Serão apresentados neste capítulo desde o estimador clássico, que se baseia no log-retorno calculado somente a partir da série de preços de fechamento, até estimadores mais sofisticados presentes na literatura, que se valem além do preço de fechamento, de outras informações também de fácil acesso a respeito dos ativos, os preços de máximo, de mínimo e de abertura de cada dia. Para orientar a compreensão do que será discutido neste capítulo, será primeiramente feita uma revisão dos conceitos de séries temporais, necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

3.1. Séries Temporais

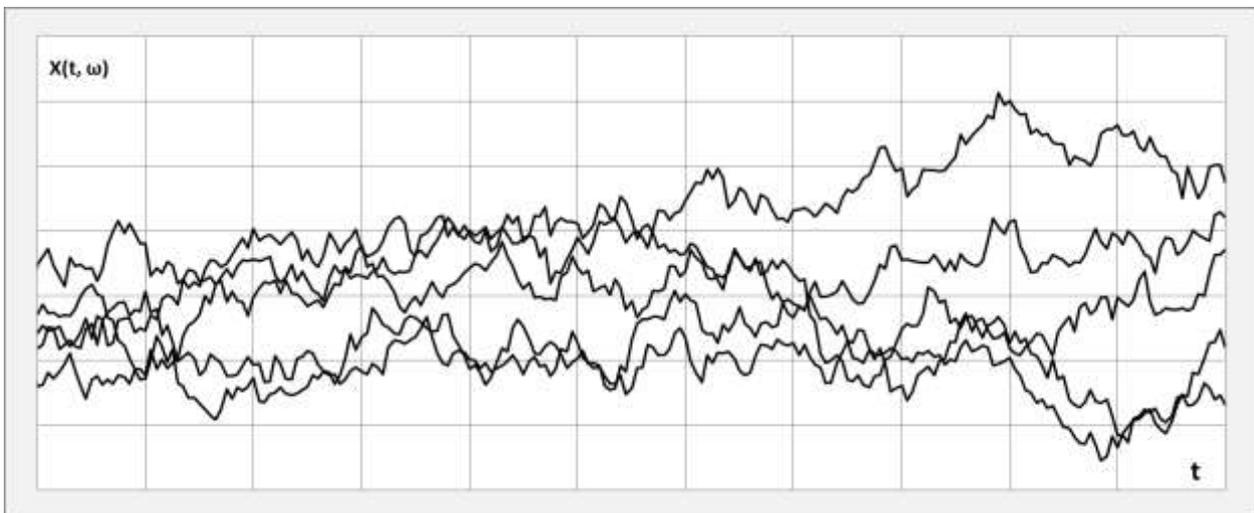
Cabe aqui primeiramente definir um processo estocástico. De acordo com Morettin (2011), um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias v.a., $\{X(t), t \in T\}$, onde T é um conjunto arbitrário, tal que para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória, definida num espaço de probabilidade $(\Omega, F, P;$ onde Ω é o espaço amostral, F são os eventos e P é a probabilidade, tal que $P(E)$ é a probabilidade do evento E). Nos casos que o conjunto T é finito e enumerável, com $T = \mathbb{Z}$, é dito que se trata de um processo com parâmetro discreto. Se T for um intervalo de \mathbb{R} o processo é dito com parâmetro contínuo.

Considere agora o caso específico onde o conjunto T representa diferentes instantes no tempo ou um intervalo de tempo, de tal forma que as variáveis $X(t)$ possuem uma ordem cronológica. Neste caso, este processo estocástico específico é uma série temporal. Em outras palavras, uma série temporal pode ser definida como um conjunto de dados ordenados no tempo (MORETTIN; TOLOI, 2006).

Da definição que foi dada, tem-se que $X(t)$ é, portanto, uma função de dois argumentos, $X(t, \omega)$ $t \in T$ e $\omega \in \Omega$. Morettin (2011) aponta para uma interpretação interessante de um processo estocástico. Fixando um determinado $t \in T$ temos que $X(t, \omega)$ é

uma variável aleatória que pode assumir algum valor do espaço amostral Ω definido por uma função densidade de probabilidades $f_t(x)$. Fixando-se um dado $\omega \in \Omega$ temos, por outro lado, uma função de t não aleatória, ou seja uma trajetória ou realização do processo. Seguindo este raciocínio, um processo estocástico pode ser entendido como uma família de possíveis trajetórias. Dessa forma, é possível determinar a distribuição de probabilidade de $X(t, \omega)$ observando a proporção de trajetórias que atravessam por uma “janela” de amplitude Δ em um determinado instante $t \in T$. Cada trajetória ilustrada na figura 11 mostra uma realizações de $X(t, \omega)$ para um dado $\omega \in \Omega$. Uma série temporal é, portanto, uma realização de um processo estocástico.

Figura 11 - Processo estocástico como uma família de trajetórias



Fonte: Autor – adaptado de Morettin (2011)

3.1.1. Estacionariedade

Outro conceito relevante a respeito de séries temporais que merece destaque é a estacionariedade. Como será mostrado no capítulo 4, esta é uma condição importante no que diz respeito a aplicabilidade dos Gráficos de Controle. Para o entendimento dos processos estacionários são considerados os momentos de primeira e segunda ordem, a saber:

A função média de $X(t)$, $\mu(t)$:

$$\mu(t) = E\{X(t)\} \quad (2.1)$$

A função autocovariância (f.a.c.v) de $X(t)$, $\gamma(t_1, t_2)$ é função de dois argumentos, t_1 e t_2 definida como:

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} \quad (2.2)$$

No caso particular onde $t_1 = t_2 = t$, define-se a função variância do processo:

$$\sigma^2(t) = Var\{X(t)\} = E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\} \quad (2.3)$$

Segundo Morettin e Tolo (2006), um série temporal é estacionária quando ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. Sejam t_1, t_2, \dots, t_n elementos de T . Em um processo estacionário, a distribuição de probabilidade conjutna da variável aleatória $X(t)$ é a mesma sob qualquer translação do tempo, de maneira que, $X(t) = X(t + k), \forall k$. Segue que:

- ❖ $\mu(t) = \mu, \quad \forall t \in T$
- ❖ $\sigma^2(t) = \sigma^2, \quad \forall t \in T$
- ❖ $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{X(t_1), X(t_2)\}$ é uma função apenas do “lag” $k = |t_1 - t_2|$

Cabe ainda definir a função autocorrelação do processo (f.a.c):

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.4)$$

Onde γ_k é a covariância de defasagem k e $\gamma_0 = \sigma^2$ é a variância do processo.

3.1.2. Ruído Branco

Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a. mutuamente independentes definidas no mesmo espaço amostral Ω tal que:

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \dots P\{X_n = a_n\} \quad (2.5)$$

Tendo todas as v.a. X_n a mesma distribuição, diz-se que as v.a. da sequência são, então, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Pode-se perceber que neste caso a sequência $X_1 \dots X_n$ é estacionária. Sendo $E\{X_n\} = \mu$ e $Var\{X_n\} = \sigma^2, \forall n \geq 1$ temos que a f.a.c.v do processo é dada por:

$$\gamma_n = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Segue-se que $\rho_0 = 1$ e $\rho_k = 0$ para k diferente de 0.

Morettin (2011) define um ruído branco forte ou simplesmente ruído branco, como uma sequência de v.a. $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ não correlacionadas, i.i.d. como definida acima. Muitos processos estocásticos podem ser construídos a partir de um ruído branco. Normalmente faz-se $\mu = 0$ e a notação se dá da seguinte maneira:

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

3.1.3. Processos não estacionários

Um processo estocástico bastante conhecido é o chamado *passeio aleatório*. Em econometria e finanças esse processo é de grande importância uma vez que para se modelar os preços de ativos financeiros parte-se da hipótese que eles seguem um passeio aleatório, suposição que também será feita neste trabalho.

Define-se a seguinte sequência:

$$X_t = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$$

Onde $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$ é uma sequência aleatória de v.a. i.i.d. (μ, σ^2) . Dessa definição, segue-se que $E(X_t) = t\mu$ e $Var(X_t) = t\sigma^2$. Ao contrário de uma série estacionária percebe-se que tanto a função média quanto a função variância dependem de t . Morettin (2011) também mostra que f.a.c.v. também depende de t_1 e t_2 , e não somente da defasagem k :

$$\gamma_k(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2) \quad (2.7)$$

Este processo é chamado de passeio aleatório. Pode-se notar que o processo é não estacionário uma vez que à medida que o tempo passa tende a oscilar ao redor de $t\mu$ com amplitude crescente. De sua definição temos que, dado X_{t-1} , $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ ou seja, este processo tem incrementos ortogonais ou não correlacionados.

Um outro processo não estacionário é o *movimento browniano*, que foi introduzido no capítulo 2. O Movimento Browniano Padrão (M.B.P) é definido como um processo gaussiano contínuo, com incrementos independentes e estacionários entre quaisquer instantes dt . Morettin (2011) elenca cinco propriedades do M.B.P. $W(t) = \{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$, a saber:

- ❖ $W(0) = 0$
- ❖ A variação de $W(t)$, ΔW entre quaisquer instantes $\Delta t, t \in [0,1]$ é independente
- ❖ Para quaisquer instantes t e s do intervalo $[0,1]$, as distribuições das v.a. $W(t) - W(s)$ são iguais as de $W(t+k) - W(s+k)$
- ❖ $W(t) \sim N(0,t)$
- ❖ As trajetórias de $W(t)$ são contínuas com probabilidade um.

Morettin (2011) ainda mostra que os momentos de primeira e segunda ordem são dados por: $E(W(t)) = 0, Var(W(t)) = t$ e a f.a.c.v. é $\gamma(t,s) = \min(t,s)$. Este autor ainda aponta para o fato que por W ter incrementos independentes, sua trajetória é bastante irregular e não possui uma representação gráfica real devido aos seguintes fatores:

- ❖ As trajetórias de um MBP não são deriváveis em qualquer ponto
- ❖ As trajetórias de um MBP não tem variação limitada em qualquer intervalo finito.

Pode-se generalizar o processo para incluir um drift μ e uma volatilidade σ . O processo $X(t)$ definido a seguir é chamado de Movimento Browniano Geral:

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad (2.8)$$

Neste caso tem-se que $E(X(t)) = \mu t$ e $\gamma_x(t,s) = \sigma^2 \min(t,s)$.

Da maneira como o movimento Browniano geral é definido a probabilidade de $X(t)$ assumir um valor negativo não é nula, diferentemente do que se observa em uma série de preços de ativos por exemplo. Sendo assim, define-se a série $s(t)$ transformada de $S(t)$: $s(t) = \log\{S(t)\}$. Diz-se que uma série $S(t)$ segue um *Movimento Browniano Geométrico* se seu logaritmo $s(t)$ é um Movimento Browniano Geral. Tem-se que:

$$S(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)}, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

A variável $S(t)$ tem, portanto, distribuição lognormal já que seu logaritmo $s(t)$ tem distribuição gaussiana.

Define-se *log-retorno* ou simplesmente *retorno* entre dois instantes t e $t-1$ como:

$$r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) \quad (2.10)$$

Na prática, no estudo de séries temporais financeiras prefere-se trabalhar com a série de retornos a estudar a série de preços devido a uma série de fatores. Da maneira como é definido o retorno não possui escala. Além disso, o retorno possui características estatísticas que tornam a manipulação de seus dados mais interessante como estacionariedade e ergodicidade, ou seja, é possível estimar características de interesse do processo a partir da realização de uma única trajetória (Morettin, 2011).

Da equação (2.9) do Movimento Browniano Geométrico é possível modelar o retorno da maneira que se segue:

$$r_t = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t} \quad (2.11)$$

Com ε_t i.i.d. $N(0,1)$. Séries de retorno costumam apresentar agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo, ao contrário da premissa assumida pelo Movimento Browniano Geométrico onde a volatilidade é constante. Outra crítica diz respeito à suposição de que os retornos são independentes, identicamente distribuídos e normais (gaussianos). Sejam os terceiro (assimetria) e quarto (curtose) momento dados respectivamente por:

$$Ass(X) = E\left(\frac{X - \mu^3}{\sigma^3}\right) \quad (2.12)$$

$$Cur(X) = E\left(\frac{X - \mu^4}{\sigma^4}\right) \quad (2.13)$$

Para séries com distribuição normal tem-se que $Ass(x) = 0$ e $Cur(x) = 3$. Entretanto, observa-se em séries de retorno reais que estas são levemente assimétricas ($Ass < 0$) e possuem distribuição leptocúrtica com caudas pesadas ($Cur > 3$) (Morettin, 2011).

3.2. A volatilidade de ativos – Estimadores de volatilidade realizada

A volatilidade é o desvio padrão condicional de uma certa variável e não pode ser diretamente observada. Em séries temporais financeiras a variável de interesse é a volatilidade

dos retornos dos preços de ativos financeiros. Podemos entendê-la como sendo o grau de incerteza a respeito de qual será o retorno de uma dada série. Morettin (2011) chama atenção para três diferentes enfoques que podem ser utilizados para o cálculo da volatilidade:

- ❖ *Volatilidade implícita*: O método para se determinar a volatilidade implícita foi discutido no capítulo 2 e esquematizado na Figura 7. Partindo-se da observação das variáveis do mercado como preço do ativo, preço da opção, preço de *strike*, tempo até o vencimento e taxa de juros é possível equacionar a volatilidade através do modelo de Black & Scholes. Com isso, determina-se a volatilidade implícita nos preços que o mercado está negociando as opções.
- ❖ *Volatilidade estatística*: A volatilidade pode ser modelada a partir de algumas premissas diretamente da série de retornos. Podem ser usados modelos autorregressivos com heteroscedasticidade condicional da família ARCH:, que apresentam a variância condicional não constante ao longo do tempo.
- ❖ *Volatilidade realizada ou histórica*: Neste enfoque a volatilidade é estimada diretamente a partir da observação da série de retornos entre diferentes instantes. Um método usual é estimar a volatilidade pela ponderação dos últimos m retornos da série.

Esta última será objeto de estudo deste trabalho. O objetivo será utilizar gráficos de controle para monitorar estas estatísticas a fim de se determinar aquela que apresenta maior vantagem no que diz respeito à detecção de aumentos na real volatilidade da série. Esta seção dedica-se a apresentar os diferentes modelos existentes na literatura para estimar a volatilidade realizada de uma série de preços e que serão aplicados neste trabalho. Todos eles são estimadores não viciados de σ^2 .

3.2.1. Volatilidade Realizada: O estimador clássico

Assume-se que os retornos dos ativos seguem um processo de difusão como o descrito na seção anterior, normalmente distribuído $r_t \sim (\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ de forma que a série de preços possui distribuição log-normal. Sendo Δt o intervalo de tempo unitário de um dia, o objetivo é estimar a constante de difusão σ^2 a partir da série retornos.

Seja C_i o preço de fechamento de um determinado ativo em um dia i . O log retorno entre dois dias consecutivos é dado por:

$$r_i = \text{Ln} \left(\frac{C_i}{C_{i-1}} \right) \quad (2.14)$$

Um estimador não viesado da variância diária utilizando as observações do log retorno r_i dos últimos m dias é dado por:

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_i - \bar{r})^2 \quad (2.15)$$

Onde

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{m}$$

Para o propósito de se monitorar a volatilidade diária de um ativo costuma-se fazer as seguintes alterações na fórmula da equação (2.15).

- ❖ $E(r)$ é assumido nulo. De fato, quando estimando a volatilidade de um dia, o termo de *drift* μ é muito pequeno se comparado ao desvio padrão.
- ❖ $m-1$ é substituído por m . Sendo que pode ser utilizado $m=1$ para um só único dia.

Estas mudanças simplificam o cálculo do estimador sem prejudicar a estimativa. A fórmula simplificada, conhecida como o estimador clássico $\widehat{\sigma}_c^2$ ou *close to close* reduz-se a:

$$\widehat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^2 \quad (2.16)$$

Que é um estimador não viciado de σ^2 (GARMAN; KLASS, 1980). Parkison (1980) mostra que a variância deste estimador é dada por:

$$E \left[(\widehat{\sigma}_c^2 - \sigma^2)^2 \right] = \text{var}(\widehat{\sigma}_c^2) = \frac{2\sigma^4}{m} \quad (2.17)$$

O cálculo da volatilidade realizada também pode ser feito para intervalos de tempo diminutos, da ordem de minutos, no que é conhecido como análise de dados de alta

frequência. O método leva em consideração dados intradiários e semelhantemente ao que foi discutido nesta seção, a volatilidade de um dia é estimada através da soma dos quadrados dos retornos obtidos em cada intervalo considerado. O acesso a estes dados é, entretanto, bastante restrito e de difícil manipulação devido ao seu grande volume. Uma alternativa viável é considerar outros dados intradiários que são de fácil acesso como os preços de abertura, fechamento, máximo e mínimo para estimar a volatilidade de um dado dia. Os métodos mais utilizados são apresentados a seguir.

3.2.2. O estimador de Parkinson

Parkinson (1980), propõe uma maneira alternativa para se calcular a constante de difusão de um passeio aleatório. Em seu modelo são utilizados não os valores finais de cada intervalo de tempo, mas os valores extremos assumidos pela variável no intervalo de um dia, os valores de máximo e o mínimo.

Intuitivamente, quanto maior for a constante de difusão σ^2 maior será o valor médio da amplitude A entre o valor máximo e o mínimo assumido pela variável durante um dado intervalo. De maneira similar, quanto menor for a constante σ^2 menor será o valor médio dessa amplitude A . Considerando-se os preços de um ativo durante o dia, a estatística A é definida calculando-se o logaritmo da razão entre o preço de máximo h_i e mínimo l_i de um dado intervalo de tempo, usualmente um dia: $A_i = \ln(h_i/l_i)$

Para encontrar a relação entre A e σ^2 Parkinson (1980) parte da função de distribuição de probabilidades de A . A saber, sendo $P(A, t)$ a probabilidade de $(x_{max} - x_{min}) \leq A$ durante um intervalo de tempo t , tem-se que:

$$P(A, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left\{ \operatorname{erfc} \left[(n+1)A / \sqrt{2\sigma^2 t} \right] - 2 \operatorname{erfc} \left(nA / \sqrt{2\sigma^2 t} \right) + \operatorname{erfc} \left[(n+1)A / \sqrt{2\sigma^2 t} \right] \right\} \quad (2.18)$$

Onde $\operatorname{erfc}(x)$ é $1 - \operatorname{erf}(x)$ e $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro de Gauss:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.19)$$

A partir disso, Parkinson (1980) chega na seguinte relação entre o valor esperado da estatística A e σ^2

$$E(A^2) = [4\ln(2)]\sigma^2 t \quad (2.20)$$

Tem-se portanto o estimador de Parkinson σ_p^2 utilizando as observações dos m últimos dias é dado por:

$$\widehat{\sigma}_p^2 = \left(\frac{1}{4\ln(2)}\right) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A_i^2 \quad (2.21)$$

Parkinson (1980) ainda mostra que a variabilidade do estimador $\widehat{\sigma}_p^2$ é:

$$E \left[(\widehat{\sigma}_p^2 - \sigma^2)^2 \right] = \text{var}(\widehat{\sigma}_p^2) = \frac{0,41\sigma^4}{m} \quad (2.22)$$

Comparando-se a variância do estimador $\widehat{\sigma}_p^2$ de Parkinson com o $\widehat{\sigma}_c^2$ clássico, percebe-se que para um mesmo número de observações m $\text{var}(\widehat{\sigma}_c^2) \approx 5\text{var}(\widehat{\sigma}_p^2)$. Parkinson (1980) conclui portanto que o estimador por ele proposto é superior ao estimador clássico e é mais sensível a variações de σ^2 . Para se determinar os preços de máximo e mínimo é necessário monitoramento contínuo da série, enquanto os preços de fechamento são apenas observações pontuais do processo. Garman e Klass (1980) concluem, em consequência disso, que preços de máximo/mínimo contém mais informações que a série fechamento/fechamento.

3.2.3. O estimador de Garman-Klass

Garman e Klass (1980) desenvolveram um estimador que se baseia apenas em dados de fácil acesso, publicados diariamente nos cadernos de finanças de jornais ou de sites especializados: os preços de abertura, fechamento, máximo e mínimo de cada dia. O estimador proposto pelos autores é o de maior eficiência no que diz respeito à sua variabilidade para estimar a variância de um movimento browniano padrão. A eficiência de um estimador x $eff(x)$ é medida relativamente ao estimador clássico, sendo assim definida:

$$eff(x) \equiv \frac{\text{var}(\sigma_c^2)}{\text{var}(x)} \quad (2.23)$$

Garman e Klass (1980) consideram a série transformada de preços, o logaritmo dos preços e utilizam a seguinte notação:

- ❖ f = fração do dia em que não há negociação
- ❖ C^*_i = Ln do preço de fechamento do dia i
- ❖ O^*_i = Ln do preço de abertura do dia i
- ❖ H^*_i = Ln do preço máximo observado no dia i
- ❖ L^*_i = Ln do preço mínimo observado no dia i
- ❖ $u_i = H^*_i - O^*_i$
- ❖ $d_i = L^*_i - O^*_i$
- ❖ $c_i = C^*_i - O^*_i$

Uma das vantagens da utilização do estimador clássico $\widehat{\sigma_c^2}$ é sua simplicidade de uso, por sua simplicidade algébrica e por se valer de informações facilmente encontradas (preço de fechamento de um ativo). Entretanto, este estimador, ignora informações que também são de fácil acesso e que poderiam contribuir para maior eficiência ao estimar σ^2 . Os autores argumentam que, para se determinar o valor máximo e mínimo assumido por uma v.a. que segue um passeio aleatório, é necessário um monitoramento contínuo. Os preços de fechamento contem apenas informações de observações pontuais do processo. Intuitivamente, os valores máximo e mínimos contém mais informação a respeito da volatilidade quando comparados aos valores de abertura ou fechamento por exemplo (GARMAN; KLASS, 1980). De fato, utilizando o estimador de Parkinson (1980) pode-se aumentar a eficiência do estimador em 5 vezes: $eff(\sigma_p^2) \approx 5$.

Seguindo o que foi proposto por Parkinson (1980) Garman e Klass chegam a um estimador ainda mais eficiente passando a incluir também os valores extremos assumidos pela série durante o intervalo de tempo considerado, os valores de máximo e de mínimo. Partindo do pressuposto que $f = 0$, o melhor estimador analítico invariante à escala (para dedução veja Garman e Klass, 1980) é dado por:

$$\widehat{\sigma_{GK*}^2} \equiv 0,511(u - d)^2 - 0,019\{c(u + d) - 2ud\} - 0,38c^2 \quad (2.24)$$

onde $eff(\widehat{\sigma_{GK*}^2}) \approx 7,4$

Os autores recomendam fazer as seguintes modificações em (2.24), eliminando-se os produtos cruzados para se obter um estimador mais prático sem comprometer sua eficiência,

chegando no estimador que é de fato utilizado no mercado e conhecido como estimador Garman-Klass

$$\widehat{\sigma}_{GK}^2 \equiv \frac{1}{2}(u - d)^2 - (2\ln 2 - 1)c^2 \quad (2.25)$$

Considerando a série de preços de um ativo define-se a seguinte notação:

- ❖ h_i = preço máximo observado no dia i
- ❖ l_i = preço mínimo observado no dia i
- ❖ c_i = preço de fechamento observado no dia i
- ❖ o_i = preço de abertura observado no dia i

A equação (2.25) pode ser, então, escrita como:

$$\widehat{\sigma}_{GK}^2 = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{h_i}{l_i} \right) \right]^2 - (2 \ln(2) - 1) \left[\ln \left(\frac{c_i}{o_i} \right) \right]^2 \quad (2.26)$$

Uma observação deve ser levada em consideração. O modelo assume que a trajetória realizada pela v.a., no caso o preço, é continuamente monitorada. Na prática, e também em simulações, contudo, isso não é verdade. O valor assumido pela variável pode ser observado/simulado apenas em intervalos discretos. Dessa forma, os valores extremos assumidos pelos estimadores se baseiam em um número finito de observações. Devido a isso, eles, na prática apresentam um certo viés quando há um número pequeno de observações. Seja $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ uma v.a. que segue um Movimento Browniano Geométrico. A realização de sua trajetória é ilustrada na Figura 12. Seja Q_j , $j=\{1,2,\dots,10\}$ o conjunto de 10 observações dessa trajetória, representadas pelos pontos sobre a curva da Figura 12. A trajetória da v.a. entre os pontos é, portanto, inobservada podendo assumir valores diversos.

Figura 12 - Valores observados da realização de uma trajetória contínua de um passeio aleatório



Fonte: Autor

Pode-se notar que $\max(X(t)) \geq \max(Q_j)$ e $\min(X(t)) \leq \min(Q_j)$. Conclui-se portanto que o estimador subestima σ^2 . Garman e Klass (1980) estudaram a magnitude desse viés de quando há somente um número finito de observações utilizando simulações e apresentaram estes resultados na tabela 2. Nela foram tabulados os valores esperados da variância medida por cada uma destes três estimadores para uma série de variância conhecida igual a um.

Tabela 2 - Valor esperado dos estimadores de Volatilidade (variância = 1)

No de Observações	Clássico	Parkinson	Garman-Klass
5	1,03	0,55	0,38
10	1,01	0,65	0,51
20	1,00	0,74	0,64
50	1,00	0,82	0,73
100	1,00	0,86	0,80
200	1,00	0,89	0,85
500	1,00	0,92	0,89

Fonte: Garman Klass (1980)

Observa-se que o estimador clássico apresenta um viés ligeiramente positivo para um pequeno número de observações. Os estimadores de Parkinson $\widehat{\sigma}_p^2$ e de Garman-Klass $\widehat{\sigma}_{GK*}^2$ como era de se esperar, são significativamente menores do que 1 para um número pequeno de observações. À medida que o número de observações aumenta, entretanto, esse viés se reduz.

Garman e Klass sugerem que os estimadores podem ser divididos pelos números da tabela 2 dependendo do número de dados que são disponíveis.

3.2.4. O Estimador de Roger-Satchell

O trabalho de Garman e Klass (1980) apresentou um estimador não viesado de menor variância para o parâmetro σ^2 de um *Movimento Browniano Padrão*, como definido na seção 3.1.3. Seguindo este trabalho, Roger e Satchell (1991) propuseram um novo estimador não viesado da volatilidade σ^2 para um *Movimento Browniano Geral* que é invariante ao termo de drift, μ .

Rogers e Satchell (1991) partem de um M.B.G. para descrever o log-preço de um ativo definido como $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \in [0,1]$. Seja $S_t \equiv \max\{X_u: u \leq t\}$ e $I_t \equiv \min\{X_u: u \leq t\}$ define-se o seguinte estimador:

$$\widehat{\sigma}_{RS}^2 \equiv S_1(S_1 - X_1) + I_1(I_1 - X_1) \quad (2.27)$$

Rogers e Satchell (1991) provam que:

$$E[S_1(S_1 - X_1) + I_1(I_1 - X_1)] = \sigma^2 t \quad (2.28)$$

Nota-se que o lado direito de (2.28) não depende de μ de forma que o estimador sugerido é independente do drift. Rogers e Satchell (1991) também mostram que o estimador proposto é mais eficiente que o estimador clássico no que diz respeito à sua variância: $var(\widehat{\sigma}_{RS}^2) \leq \sigma^4$ comparados à $2\sigma^4$ do estimador clássico. No caso específico em que $\mu = 0$ tem-se $var(\widehat{\sigma}_{RS}^2) = 0,331\sigma^4$.

Considerando a série de preços de um ativo ao longo de um dia i , (2.27) pode ser escrita como:

$$\widehat{\sigma}_{RSi}^2 = \ln\left(\frac{h_i}{c_i}\right) \ln\left(\frac{h_i}{o_i}\right) + \ln\left(\frac{l_i}{c_i}\right) \ln\left(\frac{l_i}{o_i}\right) \quad (2.29)$$

Assim como Garman e Klass (1980), Rogers e Satchell (1991) também chamam a atenção que com a discretização do passeio aleatório, este estimador apresenta um certo viés, sendo então na sua média menor que σ^2 . Isso se deve, como foi discutido anteriormente, ao fato de que os valores extremos simulados para a série de preço h_i e l_i serem subestimados.

Rogers e Satchell (1991) deduzem um fator de correção que pode ser aplicado nos casos onde esse viés é relevante, ou seja, quando há poucas observações disponíveis.

Seja N o número de passos assumidos pela v.a. no intervalo $[0, 1]$. Evidentemente, quanto maior o número N de passos do passeio aleatório melhor será a estimativa S de $S_I = \ln(h_i)$ e I de $I_I = \ln(o_i)$. Sendo $w \equiv 1/N$, então o que é passível de observação são os valores máximo e mínimo assumidos por $\{X_{kw}: 0 \leq k \leq N\}$ dos quais deve-se estimar S_I e I_I .

Como foi definido, S_I representa o valor máximo real assumido por X_t em $t=I$ e S representa o máximo observado. Denotando por Δ a discrepância entre os valores extremos contínuos e discretos tem-se:

$$S_1 = S + \Delta \quad (2.30)$$

De maneira que

$$S_1(S_1 - X_1) = \Delta^2 + (2S - X_1)\Delta + S(S - X_1) \quad (2.31)$$

Outrossim, sendo I o valor mínimo observado pelo passeio aleatório discreto, então $I_1 = I - \tilde{\Delta}$ e:

$$I_1(I_1 - X_1) = \tilde{\Delta}^2 - (2I - X_1)\tilde{\Delta} + I(I - X_1) \quad (2.32)$$

O estimador $\widehat{\sigma_{RSw}^2}$ pode ser escrito, portanto:

$$\widehat{\sigma_{RSw}^2} = (\Delta^2 + \tilde{\Delta}^2) + (2S - X_1)\Delta - (2I - X_1)\tilde{\Delta} + S(S - X_1) + I(I - X_1) \quad (2.33)$$

Rogers e Satchell (1991) mostraram que $E(\Delta) = E(\tilde{\Delta}) = a\sigma\sqrt{w}$ e $E(\Delta^2) = E(\tilde{\Delta}^2) = b\sigma^2w$ onde as constantes a e b são dadas por:

$$a = \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{4} - \frac{(\sqrt{2} - 1)}{6} \right], \quad e$$

$$b = \left(\frac{1 + \frac{3\pi}{4}}{12} \right)$$

O estimador corrigido proposto por eles é $\widehat{\sigma_{RSw}^2}$ onde σ_{RSw} é a raiz positiva da equação (2,34) à seguir, obtida substituindo $\Delta, \tilde{\Delta}, \Delta^2$ e $\tilde{\Delta}^2$ por seus valores esperados:

$$\sigma_{RSw}^2 = 2b\sigma_{RSw}^2w + 2(S - I)a\sigma_{RSw}\sqrt{w} + S(S - X_1) + I(I - X_1) \quad (2.34)$$

Em aplicações reais para ativos líquidos, ocorrem a cada segundo diversas negociações, de forma que o valor do preço deste ativo ao longo do dia possui centenas de milhares de observações. Devido a isso, Rogers e Satchel (1991) argumentam que a correção não se faz necessária nestes casos.

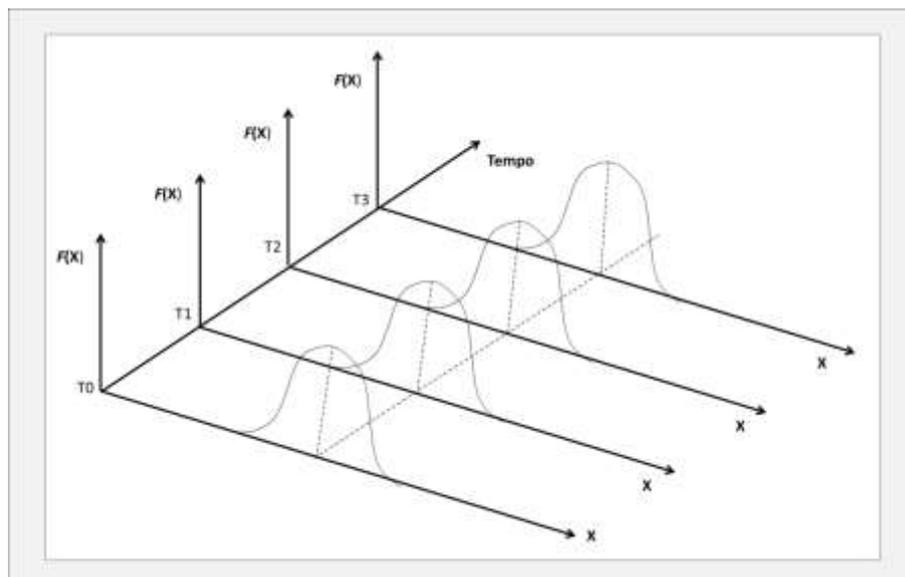
4. CONTROLE ESTATÍSTICO DA QUALIDADE

As primeiras aplicações do controle estatístico da qualidade datam do início da década de 1920 quando Walter A. Shewhart introduziu o conceito estatístico de gráficos de controle. A partir daí, os conceitos de controle da qualidade foram largamente difundidos na indústria. Para Montgomery (2004), a qualidade de um processo está relacionada com sua variabilidade. Dessa forma, quanto menor for a variabilidade desse processo, maior será a qualidade de suas variáveis de saída. Monitorar a variabilidade dos processos é, portanto, uma questão crítica nas linhas de produção (e não somente nelas como mostraremos neste trabalho).

4.1. Controle Estatístico do Processo

Todo processo está sujeito ao que é chamado variabilidade natural, oriunda de pequenas perturbações ou causas aleatórias, contra as quais o tomador de decisão tem pouca ou nenhuma influência. Um processo que está sujeito somente a causas naturais de variabilidade é dito *em controle estatístico* ou simplesmente *em controle* (COSTA et al., 2005).

Figura 13 - Processo sob controle. A característica da qualidade possui distribuição constante .



Fonte: Autor – Adaptado de Costa et al. (2005)

Figura 13 ilustra um processo sujeito somente à causas aleatórias e, portanto, em controle estatístico. A característica da qualidade X monitorada ao longo do tempo pode ser representada por uma função densidade de probabilidade $f(X)$ que é invariante com o tempo.

Ainda segundo Costa et al. (2005), além das causas naturais, um processo está também sujeito ao que é chamado de causas especiais. Estas fontes de variabilidade usualmente indesejáveis causam perturbações significantes no processo, gerando um aumento na dispersão da característica da qualidade em questão ou um deslocamento de sua distribuição. As causas especiais são passíveis de interferência, ao contrário das causas naturais. Diz-se de um processo que apresenta, além das causas aleatórias de variabilidade, causas especiais, que está *fora de controle*.

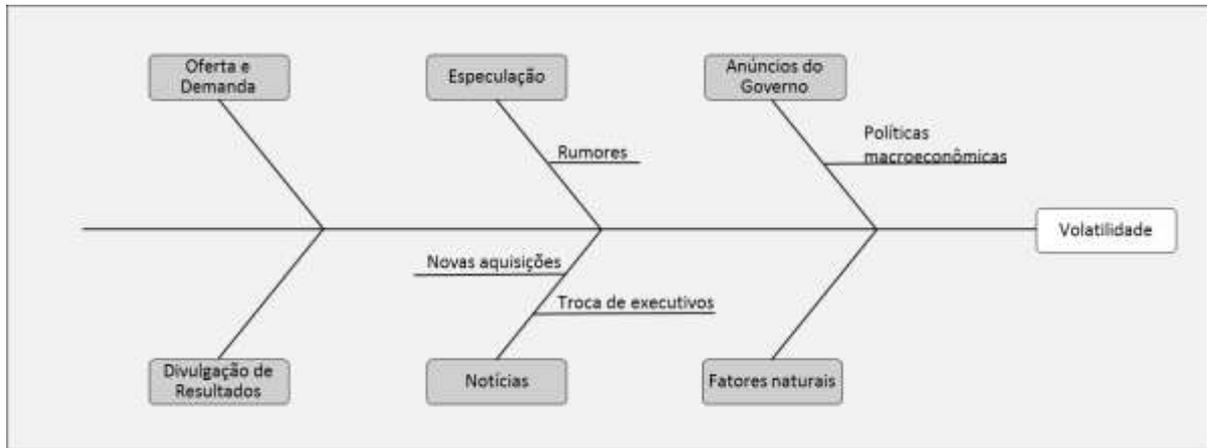
O Controle Estatístico do Processo (CEP) representa neste contexto uma coleção de ferramentas que tem o intuito de melhorar a capacidade de um processo através do monitoramento de sua variabilidade e identificação de suas causas especiais. Segundo Montgomery (2004), um objetivo maior do CEP é detectar rapidamente a presença de causas atribuíveis na mudança do processo para que assim uma decisão possa ser tomada com o intuito de evitar perdas e o retrabalho. As ferramentas do Controle Estatístico do Processo, como mencionado, podem ser aplicadas à qualquer processo, seja este de manufatura ou não. No caso deste trabalho, essa versatilidade será comprovada, uma vez que estas serão aplicadas à séries temporais, mais especificamente àquelas representadas por um passeio aleatório como o preço de um ativo. As sete principais ferramentas do CEP, também conhecidas como “as sete ferramentas” são:

- ❖ Apresentação em histogramas ou ramo-e-folhas
- ❖ Folha de controle
- ❖ Gráfico de Pareto
- ❖ Diagrama de causa-e-efeito
- ❖ Diagrama de concentração de defeito
- ❖ Diagrama de dispersão
- ❖ Gráficos de Controle

Neste trabalho será dado maior enfoque a esta ultima ferramenta, os gráficos de controle, que serão utilizados para detectar um aumento na volatilidade σ do retorno de uma série de preços. Como discutido, a volatilidade é um parâmetro relevante no que diz respeito a gestão de ativos financeiros. Esta, por sua vez, sendo função de diversos fatores, deve ser

monitorada a fim de identificar momentos onde houve um suposto aumento no risco do mercado. Podemos representar a relação destes diversos fatores utilizando uma das ferramentas do CEP, o diagrama de causa-e-efeito:

Figura 14 - Diagrama de causa-e-efeito para a volatilidade dos ativos



Fonte: Autor

Figura 14 representa simplificada alguns dos muitos fatores que podem interferir na volatilidade dos preços de ativos financeiros. Devido a esse grande número de fatores, é uma tarefa muito difícil determinar se o processo gerador da série de preços encontra-se sob controle ou se está sendo, de alguma forma, afetado por uma causa especial. Na seção seguinte os gráficos de controle serão discutidos em maior detalhe.

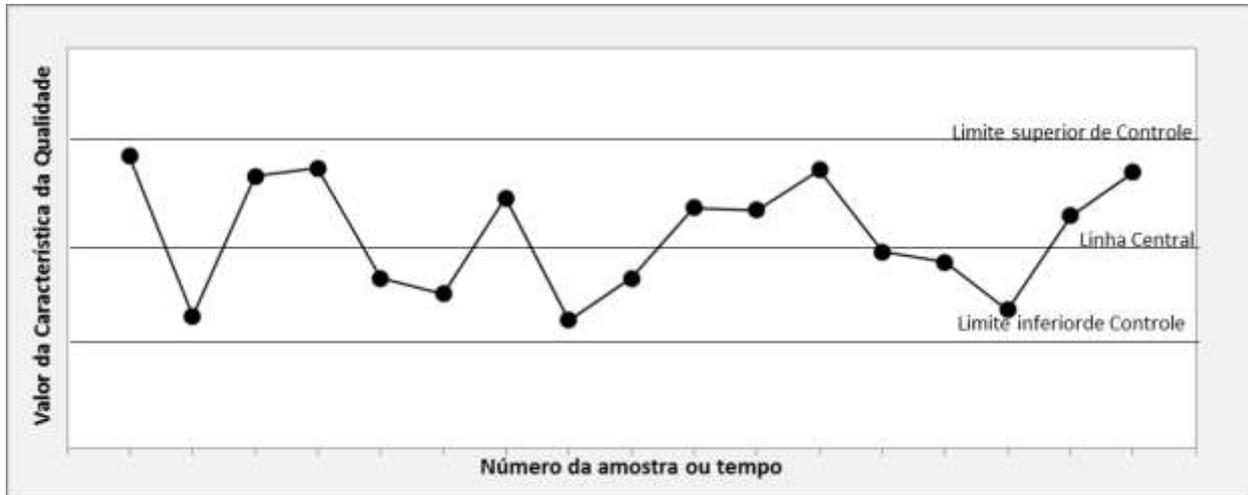
4.2. Os Gráficos de Controle

A ferramenta que será aplicada neste trabalho é o Gráfico de Controle. A função destes gráficos é monitorar uma característica da qualidade X de um determinado processo ao longo do tempo. Figura 15 ilustra um típico gráfico de controle, onde pode-se notar os seguintes componentes:

- ❖ Linha Central (LC): É o valor médio esperado para característica da qualidade que está sendo monitorada quando o processo encontra-se em controle estatístico.
- ❖ Limite Superior de Controle (LSC) e Limite Inferior de Controle (LIC): São valores escolhidos pelo tomador de decisão de tal forma que, quando o processo se encontra

em controle estatístico, os valores observados para característica da qualidade X apresentam uma probabilidade α pequena de serem plotados fora deste intervalo.

Figura 15 - Ilustração de um gráfico de controle de um processo sob controle



Fonte: Autor

Nota-se que o tipo de variabilidade presente no processo apresenta um padrão estacionário, ou seja, oscilam em torno de uma média fixa (a linha central) sem apresentar um padrão definido ou tendência. Desta forma, contanto que os pontos estejam localizados entre o LSC e LIC, o processo pode ser considerado em controle, ou seja, está operando livre de causas especiais ou atribuíveis. Um ponto plotado fora deste intervalo, ou seja, $X_i > LSC$ ou $X_i < LIC$ pode ser interpretado como uma evidência que o processo esteja fora de controle. Neste caso, o tomador de decisão deve investigar quais são as causas atribuíveis responsáveis por este evento e tomar as ações que julgar cabíveis.

Como pode ser observado, há uma relação bastante próxima entre os gráficos de controle e um teste de hipótese. Os gráficos de controle podem ser interpretados como uma representação gráfica de aplicação contínua e cronológica de sucessivos testes de hipóteses (MONTGOMERY, 2004). A hipótese nula neste caso é que o processo se encontra sob controle, que é testada contra a hipótese alternativa, que o processo está fora de controle estatístico. Têm-se então:

H_0 : o processo está sob controle estatístico

H_1 : o processo está fora de controle estatístico

Neste contexto, define-se *erro do tipo I* e *erro do tipo II* como se segue:

- ❖ *Erro do tipo I*: Rejeitar H_0 quando esta é verdadeira, ou seja, um ponto é plotado fora dos limites, levando o tomador de decisão a inferir que o processo está fora de controle quando na verdade o processo está sob controle.
- ❖ *Erro do tipo II*: Aceitar H_0 quando esta é falsa, ou seja, apesar do processo estar fora de controle, um ponto é plotado dentro dos limites, levando o tomador de decisão a assumir que o processo se encontra em controle.

Costa et al. (2004) definem α como o risco de erroneamente considerar o processo fora de controle (alarme falso) e β o risco de considerá-lo em controle quando este está fora de controle (não-deteção). Os riscos de alarme falso e não deteção podem, então, ser matematicamente representados por:

$$\alpha = P[X > LSC \text{ ou } X < LIC \mid \mu = \mu_o] \quad (4.1)$$

$$\beta = P[LIC \leq X \leq LSC \mid \mu \neq \mu_o] \quad (4.2)$$

onde μ representa a média do processo e μ_o é o valor de referência da característica da qualidade monitorada

No projeto de um gráfico de controle a especificação de seus Limites de Controle é uma etapa crítica. Evidentemente, quanto mais afastadas da linha central estiverem os Limites de Controle, menor será a probabilidade α de se cometer um Erro do tipo I. Todavia, afastando-se os Limites de Controle da linha central aumenta a probabilidade β de se cometer um erro do tipo II, comprometendo a habilidade do gráfico em detectar mudanças no processo. Estreitando os limites ocorre o efeito contrário, o gráfico fica mais sensível a mudanças no processo a medida que aumenta-se o risco de um erro do tipo I.

4.3. Medindo o Desempenho, o Comprimento Médio da Sequência

Do que foi discutido até então fica evidente que, quando o processo está sob-controle, é de interesse do tomador de decisão minimizar o número de alarmes falsos apontados pelo gráfico, devido a custos associados a interrupção do processo e investigação das causas, por exemplo. De maneira oposta, quando fora de controle, deseja-se que o gráfico sinalize essa mudança o mais rápido possível para que as ações corretivas possam ser tomadas o quanto antes.

Define-se um conceito importante para avaliação do desempenho dos gráficos de controle: o Comprimento Médio de Sequência (CMS) ou ARL na sigla em inglês (*Average Run Length*). O ARL representa o número esperado de amostras necessárias até soar um alarme, dado um certo nível de significância. Em outras palavras, é o número médio de pontos que são plotados até se obter um ponto fora do intervalo definido pelos limites de controle.

Ora, sendo as observações representadas no gráfico de controle de Shewhart v.a. independentes, então, dado um determinado grau de qualidade, o número de pontos que deverão ser plotados até que um alarme seja soado é uma variável aleatória geométrica definida por um parâmetro p . O valor esperado dessa v.a. pode ser facilmente calculado como sendo $1/p$ (MONTGOMERY, 2004). Quando o processo se encontra em controle estatístico, o ARL_0 é portanto:

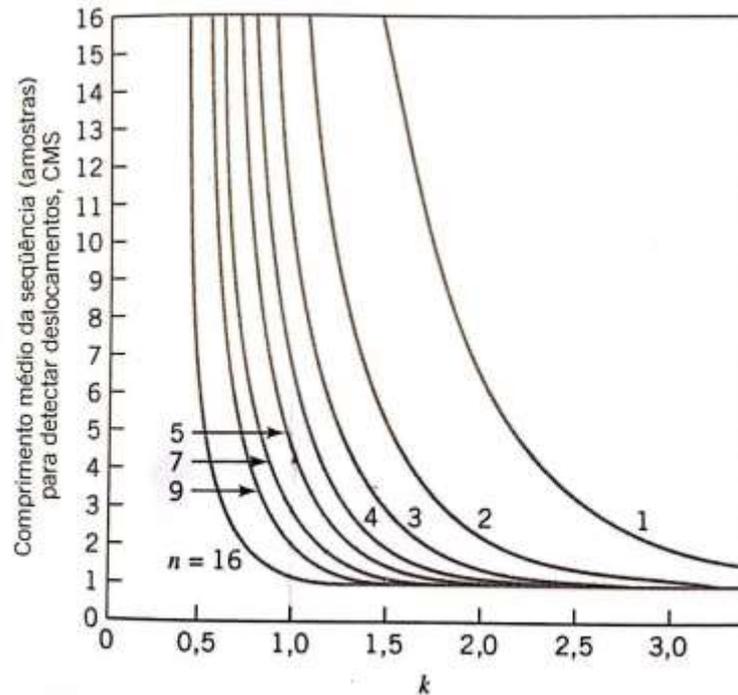
$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (4.3)$$

já o comprimento médio de sequência fora de controle é:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (4.4)$$

Como indicador de desempenho para os gráficos de controle, para um mesmo ARL_0 , prefere-se aquele gráfico com o menor ARL_1 enquanto que para um mesmo ARL_1 prefere-se aquele gráfico com maior ARL_0 . Montgomery (2004) elenca, entretanto, algumas críticas à utilização do ARL como medida de desempenho. Sendo o ARL para um gráfico de controle de Shewhart uma distribuição geométrica o desvio padrão do comprimento de sequência $\sigma = \sqrt{(1-p)}/p$ tende a ser muito grande. Além disso, a distribuição geométrica é bastante assimétrica, de forma que a média de sua distribuição (o ARL) não é um valor “típico” do comprimento de sequência.

Figura 16 - ARL para gráfico de \bar{x} barra com limite três-sigma para um deslocamento de $k\sigma$ na média.



Fonte: Montgomery (2004)

Figura 16 ilustra o comportamento do ARL_1 para diferentes magnitudes k de deslocamento na média do processo. Percebe-se que quanto maior este deslocamento, mais rápido o gráfico é capaz de detectá-lo. Para um mesmo deslocamento k , gráficos baseados em tamanhos n de amostras maiores são mais eficientes.

Montgomery (2004) ainda aponta para possibilidade de expressar o desempenho do gráfico de controle em unidade de tempo. Sendo o período de amostragem igualmente espaçados no tempo em intervalos fixos de comprimento h , o tempo médio para alerta (TMA) pode ser facilmente calculado a partir do ARL:

$$TMA = ARL \cdot h \quad (4.5)$$

4.4. Os Gráficos de Controle para Variáveis

No que diz respeito à característica da qualidade que está sendo monitorada, os gráficos de controle se dividem em dois tipos. Nos casos onde os *outputs* do processo em questão são de difícil mensuração ou quando simplesmente não podem ser representados numericamente de maneira conveniente, são utilizados os Gráficos de Controle para

Atributos. Neste caso, cada item inspecionado recebe uma classificação binária como por exemplo “conforme” e “não-conforme” e a característica da qualidade é denominada atributo. Por outro lado, quando a característica da qualidade é uma variável que pode ser medida em uma escala numérica, como será o caso deste trabalho, são utilizados os chamados Gráficos de Controle para Variáveis, que serão detalhados à seguir.

Segundo Montgomery (2004) , os gráficos de controle para variáveis são usualmente utilizados para monitorar tanto o valor médio da característica da qualidade quanto a sua variabilidade. O controle da média é comumente feito através do gráfico de controle para médias, ou gráfico \bar{x} . Já para o controle da variabilidade, são utilizados tanto o gráfico de controle para amplitudes, ou gráfico R, o gráfico de controle para o desvio padrão, ou gráfico S, ou o gráfico de controle para variância amostral, gráfico S^2 .

Seja x uma característica da qualidade normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ , ou seja, $x \sim N(\mu, \sigma)$. Seja, x_1, x_2, \dots, x_n uma amostra de tamanho n de valores assumidos pela característica da qualidade x estudada. Se os valores μ e σ forem conhecidos, os limites de controle LSC e LIC, e a linha central LC para a construção do gráfico de controle três-sigma seriam simplesmente:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nota-se que os limites de controle utilizados são simplesmente múltiplos do desvio padrão, no caso três, prática padrão nos Estados Unidos. Outra abordagem seria determinar a probabilidade α aceitável de se cometer um erro do tipo I e à partir daí calcular os limites de controle correspondentes. Os limites calculados dessa forma são conhecidos por limites de probabilidade e são dados por:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

No entanto, nem sempre é possível especificar valores padrões ou de referência para a média e o desvio padrão do processo. Neste caso, faz-se necessário estimar tais valores a partir de amostras do processo. É extremamente importante ressaltar que, antes da coleta dos

dados, o processo deve ser estabilizado, todas as causas atribuíveis devem ter sido investigadas e solucionadas, para que a amostra colhida para construção do gráfico de controle ser representativa do processo quando esta está supostamente sob controle.

Seja m amostras de tamanho n de x . A média amostral \bar{x} de uma amostra é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (4.8)$$

Um estimador da média μ do processo é dado pela média geral das amostras coletadas:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (4.9)$$

No que diz respeito à variância amostral, um estimador não-tendencioso para σ^2 baseado em uma amostra é dado por:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (4.10)$$

A estatística S no entanto não é um estimador não-viesado do desvio padrão σ . Sendo assim, deve-se utilizar um fator de correção $c_4(n)$, uma constante que é função do tamanho n da amostra dada por:

$$c_4(n) = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (4.11)$$

Os valores de c_4 são tabelados e podem ser facilmente encontrados na literatura. O estimador não viesado de σ é, portanto:

$$\frac{\bar{S}}{c_4} \quad (4.12)$$

Onde \bar{S} é dado por:

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad (4.13)$$

Com isso, os parâmetros para o gráfico de controle três-sigma para a média podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{\bar{x}} + \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \cdot \bar{S} \\
 LC &= \bar{\bar{x}} \\
 LIC &= \bar{\bar{x}} - \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \cdot \bar{S}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Montgomery (2004) também mostra que os parâmetros para o gráfico do desvio-padrão ficam:

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \\
 LC &= \bar{S} \\
 LIC &= \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Os gráficos de controle ainda podem, como mencionado, ser utilizados para monitorar a variância do processo, como será o caso deste trabalho. Neste caso, o teste de hipóteses que está sendo implicitamente feito durante a aplicação do gráfico é:

$$\begin{cases}
 H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\
 H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2
 \end{cases}$$

Na ausência de um valor de referência para σ^2 Montgomery (2004) sugere a utilização da variância amostral média \bar{S}^2 obtida da análise de dados preliminares. Dessa forma, sendo x_i observações independentes de uma distribuição normal, a sua variância amostral segue uma distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade. Seja α a probabilidade de se cometer um erro do tipo I, pode-se definir o gráfico de controle com limites de probabilidade α para a variância como:

$$\begin{aligned}
 LSC &= \frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{\alpha/2; n-1}^2 \\
 LSC &= \bar{S}^2 \\
 LSC &= \frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{1-(\alpha/2); n-1}^2
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

4.5. Determinando os limites de controle

Com base no que foi até então discutido neste capítulo, conclui-se que uma vez definido os limites de controle de um gráfico, todos os seus demais parâmetros podem, em

tese, ser determinados: probabilidade α de cometer um erro do tipo I, probabilidade β de se cometer um erro do tipo II, comprimento médio de sequência para processo sob controle (ARL_0), comprimento médio de sequência para processo fora de controle (ARL_1), tempo médio de alerta, entre outros parâmetros.

Sendo a característica da qualidade X normalmente distribuída, com parâmetros μ e σ conhecidos ou suas estimativas \bar{X} e S , foram discutidas duas maneiras de se determinar os limites de controle:

- ❖ Limite três-sigma: neste caso os limites de controle são definidos como um múltiplo do do desvio padrão de \bar{X} . Em geral este múltiplo é três, de tal forma que a probabilidade de um erro tipo I é $\alpha = 0,0027$ (MONTGOMERY, 2004).
- ❖ Limites de probabilidade α : neste caso parte-se da probabilidade aceitável α de ocorrência de alarmes falsos a a partir dela é calculado qual seria o valor do múltiplo do desvio padrão necessário.

No entanto, em alguns casos a característica da qualidade X não segue uma distribuição normal e tampouco conhece-se qual é a sua distribuição. Neste caso os limites de controle podem ser determinados por simulação, visando atender algum parâmetro estabelecido para o gráfico de controle. Por exemplo, seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto grande de observações da característica da qualidade X de interesse, observadas por um período em que o processo operava em estado de controle estatístico e seja cms o comprimento médio de sequência pré determinado. A partir destes dados de maneira iterativa, pode ser determinado por simulação qual seria o limite de controle necessário que garantisse que o comprimento médio de sequência fosse igual ao valor estabelecido, ou seja $ARL_0 = cms$.

Este será o procedimento adotado neste trabalho. Os detalhes da simulação e dos procedimentos para se chegar no limite de controle serão tratados nos capítulos que se seguem.

5. APRESENTAÇÃO DA METODOLOGIA

O modelo desenvolvido neste trabalho tem o intuito de monitorar uma série que apresenta um padrão de movimento como o de um *passeio aleatório*. Serão utilizados gráficos de controle unilaterais a fim de se identificar aumentos de diferentes magnitudes na constante de difusão σ^2 do processo gerador da série. Neste capítulo a metodologia que será utilizada na construção do modelo será apresentada em detalhes.

5.1. Os objetivos do modelo

Como foi discutido no capítulo 3, é aceito pelos participantes do mercado que os retornos da série de preços de um ativo financeiro seguem um *Movimento Browniano Geral* (MORETTIN, 2011). Sendo assim, a constante de difusão monitorada pelo modelo proposto neste trabalho pode ser interpretada como o parâmetro volatilidade de um ativo financeiro, comumente associado ao risco deste ativo além de ser, ela própria, um ativo passível de negociação, como descrito na seção 2.3.4. Neste contexto, identificar períodos onde há um aumento na volatilidade dos ativos é uma questão bastante relevante. Não só deseja-se identificar este aumento, mas deseja-se fazê-lo da maneira mais rápida possível.

O escopo do modelo desenvolvido neste trabalho é, portanto, utilizar diferentes gráficos de controle que tem por intuito monitorar uma mesma característica da qualidade: a volatilidade. Para a construção de cada gráfico, uma diferente estatística será empregada para estimar a volatilidade no período de tempo analisado e um limite de controle condizente com um determinado comprimento médio de sequência sob controle ARL_0 será simulado. O desempenho de cada um deles será comparado, a fim de se identificar qual é o mais eficiente em detectar um aumento na volatilidade do ativo em questão, ou seja, qual plotará em média o primeiro ponto fora do limite de controle quando o processo estiver fora de controle.

Em um primeiro momento, com o processo sob controle, será obtido através de simulações os limites de controle de cada um dos gráficos de forma que o comprimento médio de sequência ARL_0 seja um determinado valor comum a todos (a saber, este valor será adotado como 100 observações). Em seguida, a constante de difusão σ do processo gerador dos preços será gradativamente aumentada. O desempenho dos gráficos será comparado,

então, pelo seu ARL_1 , ou seja, o número de observações necessárias para que o primeiro ponto aponte que o processo não está mais sob controle.

5.2. Simulando a Série de Preços

Segundo Costa et al. (2005), a primeira etapa para construção de um gráfico de controle consiste em conhecer, estabilizar e ajustar o processo. A coleta de dados deve ser feita somente após o processo estar completamente isento de quaisquer causas especiais, caso contrário os parâmetros determinados com base nas observações do processo fora de controle seriam diferentes dos ideais. Como ilustrado pelo diagrama *causa e feito* da figura 14, um ativo financeiro está sob influência de inúmeras causas especiais, muitas delas desconhecidas. Devido a isso, não é uma tarefa trivial julgar se o processo encontra-se ou não em controle.

Neste trabalho, entretanto, a série de preços será simulada para um parâmetro constante de volatilidade durante a fase de construção dos gráficos de controle. Dessa forma, pode-se afirmar com certeza que o processo encontra-se em estado de controle estatístico e está sob influência apenas de causas aleatórias.

A série de preços $S(t)$ que será simulada para diversos dias, será modelada como um *Movimento Browniano Geométrico* como descrito no capítulo 3. Segue, portanto, que $\log\{S(t)\}$ é um *Movimento Browniano Geral* e o log-retorno de $S(t)$ entre dois instantes de tempo t_i e t_{i+1} de duração pequena Δt é dado por:

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (5.1)$$

E portanto:

$$S_n = S_{n-1}e^{(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t})} \quad (5.2)$$

Onde ε é um ruído branco de média zero e desvio padrão unitário: $\varepsilon \sim i. i. d. N(0,1)$.

É possível notar que o log retorno $\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ está sob influência apenas de causas aleatórias, ε . Sabe-se ainda que o valor de σ está fixado em um valor constante conhecido, de forma que é possível afirmar com certeza que o processo simulado está sob controle.

A série $S_{i,n}$ de preços será simulada considerando um dia de 24h de negociação contínua. Em um dado dia i , cada observação será feita em n intervalos de tempo igualmente espaçados $\Delta t = 0,5s$. Por conseguinte, um único dia de negociação será composto por 172.800 observações, $n=\{1,2,\dots, 172.800\}$.

O parâmetro *drift* μ neste contexto pode ser interpretado como a taxa de juros livre de risco. O valor adotado pelo modelo é de 8% ao ano, uma ordem de grandeza condizente com a realidade do Brasil. Quanto a constante de difusão σ^2 , objeto de análise dos gráficos de controle, será adotada para a situação inicial, sob controle, o valor conhecido $\sigma^2 = 1$ ao ano ou $3,9683.10^{-3}$ ao dia.

A tabela 3 resume os parâmetros utilizados para simulação da série de preços.

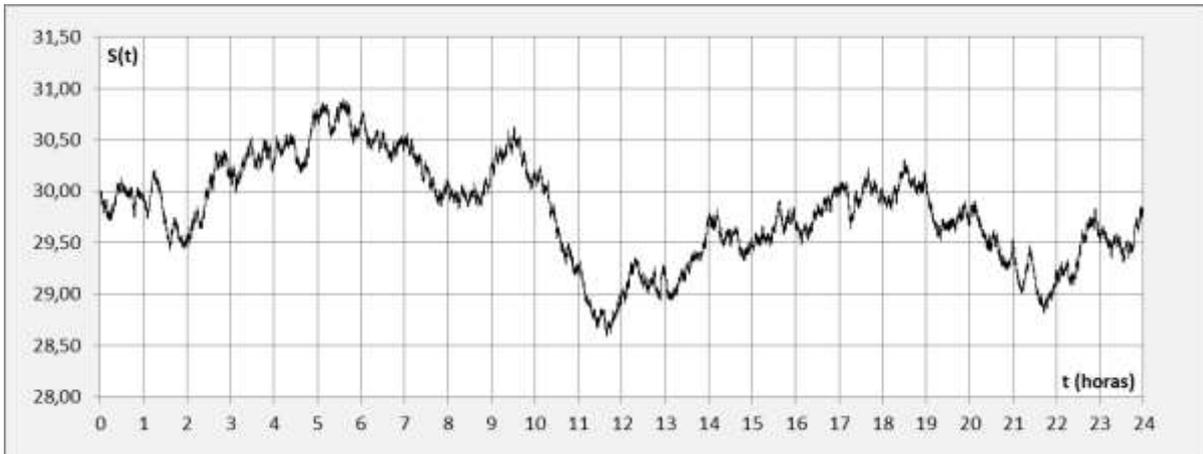
Tabela 3 – Parâmetros para simulação da série de preços.

Parâmetro	Valor
Intervalo (segundos)	0,5
Δt (ano)	$2,29644.10^{-8}$
μ (retorno anual esperado)	8%
σ (volatilidade por ano)	1,00
S0	30
Total de Observações em um dia	172800

Fonte: Autor

O preço inicial $S_{1;0}$ foi arbitrariamente escolhido igual a 30, valor representativo do preço de uma ação negociada na Bolsa, por exemplo. Figura 17 ilustra o resultado de uma simulação do comportamento da série S_n simulada com os parâmetros aqui apresentados para o primeiro dia.

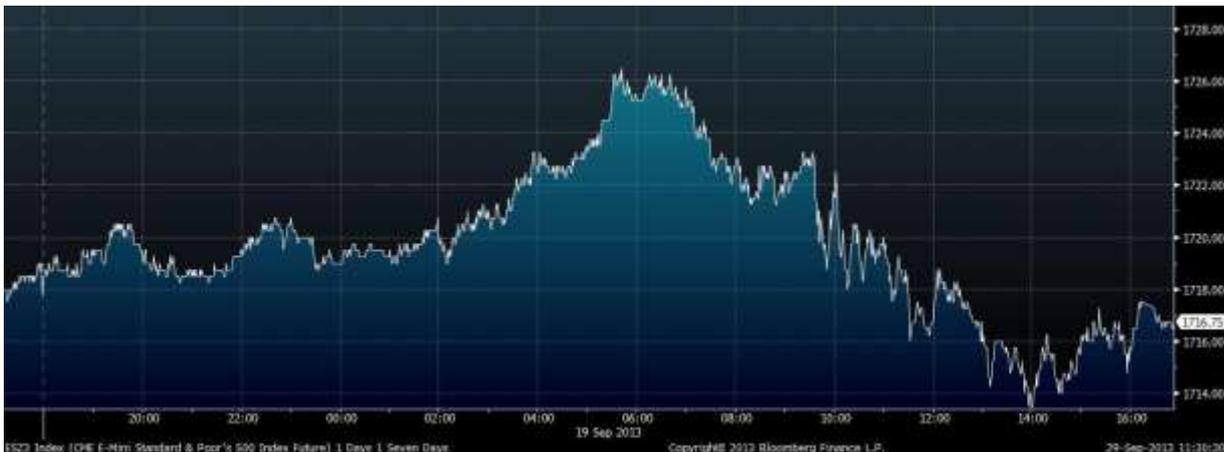
Figura 17 - Simulação da série de preços S_n para um dia de negociação: $S_0 = 30$, $\mu = 8\%$ a.a. , $\sigma = 1$ a.a. , $\Delta t = 0,5s$



Fonte: Autor

Por ter incrementos independentes a sua trajetória é bastante irregular assim como se observa na prática em uma série de preços de um ativo financeiro real. De fato, Figura 18 mostra, a título de comparação, a trajetória dos preços dos contratos de Futuro com vencimento em Dezembro de 2013 de S&P 500, SPY, no dia 19 de Setembro de 2013. Observa-se que o comportamento das curvas é bastante similar.

Figura 18 – Evolução dos preço dos contratos Futuros de S&P 500 mini com vencimento Dezembro 2013 no dia 19/09/2013



Fonte: Bloomberg

Como supracitado, a simulação dos preços se seguirá de maneira semelhante para os dias seguintes a fim de obter dados para vários dias de negociação.

5.3. Estimando a Característica da Qualidade de Interesse.

A característica da qualidade que será monitorada é o parâmetro σ^2 de variância dos log-retornos da série de preços $S(t)$. Uma vez gerada a série de preços, é possível observar, para cada um dos dias simulados, os valores relevantes para o cálculo das estatísticas utilizadas para estimar σ^2 , descritas no capítulo 3, a saber:

- ❖ Estimador Clássico, $\widehat{\sigma_c^2}$
- ❖ Estimador de Parkinson, $\widehat{\sigma_p^2}$
- ❖ Estimador de Garman Klass, $\widehat{\sigma_{GK}^2}$
- ❖ Estimador de Roger-Satchell, $\widehat{\sigma_{RS}^2}$

Como já mencionado, os valores necessários para o cálculo destes indicadores para um dia i são h_i , preço máximo observado no dia i ; l_i , preço mínimo observado no dia i ; c_i , preço de fechamento observado no dia i e o_i , o preço de abertura observado no dia i . Considerando-se a série S_n de preços simuladas para um dia i em n intervalos igualmente espaçados de comprimento $\Delta t = 0,5s$ segundos, descrita na sessão anterior, estes valores podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$h_i = \max(S_n), n = \{1, 2, \dots, 172.800\} \quad (5.3)$$

$$l_i = \min(S_n), n = \{1, 2, \dots, 172.800\} \quad (5.4)$$

$$c_i = S_{172.000} \quad (5.5)$$

$$o_i = S_0 = c_{i-1} \quad (5.6)$$

Isto posto, a variância σ^2 pode ser estimada através do estimador clássico, com base em um dia de negociação, como sendo:

$$\widehat{\sigma_c^2} = \left[\ln \left(\frac{c_i}{c_{i-1}} \right) \right]^2 \quad (5.7)$$

Pelo estimador de Parkinson como sendo:

$$\widehat{\sigma_p^2} = \frac{1}{4 \ln(2)} \left\{ \ln \left(\frac{h_i}{l_i} \right) \right\}^2 \quad (5.8)$$

Pelo estimador de Garman-Klass:

$$\widehat{\sigma}_{GK}^2 i = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{h_i}{l_i} \right) \right]^2 - (2 \ln(2) - 1) \left[\ln \left(\frac{c_i}{o_i} \right) \right]^2 \quad (5.9)$$

E por fim, pelo estimador de Roger-Satchell:

$$\widehat{\sigma}_{RS}^2 i = \ln \left(\frac{h_i}{c_i} \right) \ln \left(\frac{h_i}{o_i} \right) + \ln \left(\frac{l_i}{c_i} \right) \ln \left(\frac{l_i}{o_i} \right) \quad (5.9)$$

O Apêndice 1 deste trabalho contém uma simulação preliminar que foi realizada para identificar o comportamento dos indicadores. Nele é possível encontrar os preços de máximo, mínimo, abertura e fechamento para uma simulação de um ano, 252 dias, bem como o cálculo dos respectivos indicadores para cada um dos dias simulados. Os parâmetros utilizados para simulação foram os mesmos dos descritos na sessão 5.2. deste trabalho. A Tabela 4 apresenta de maneira resumida os principais resultados obtidos:

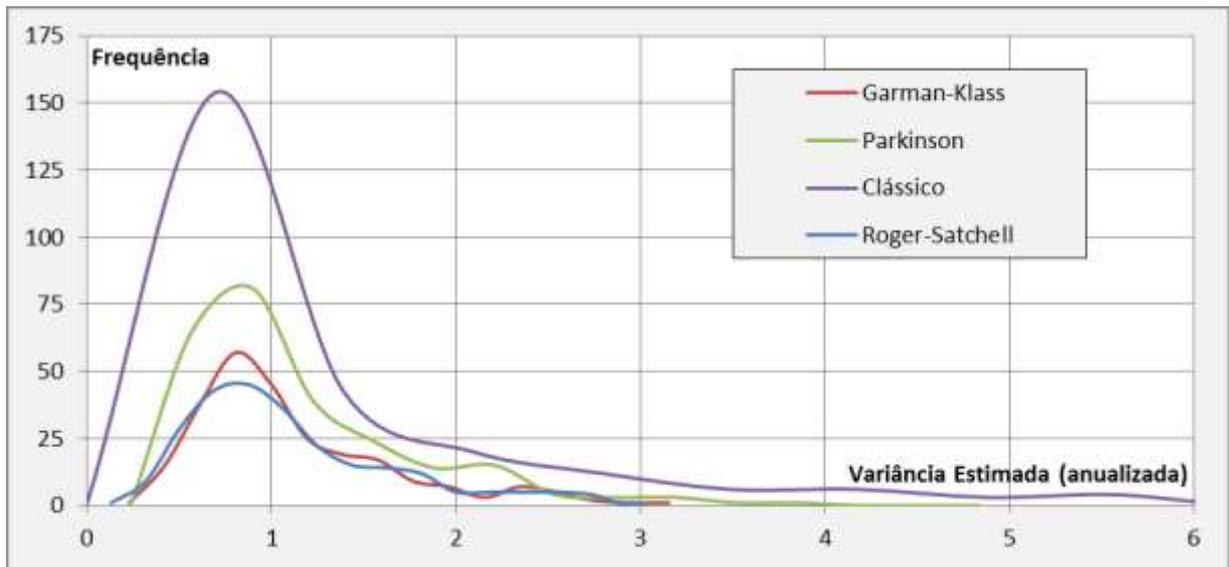
Tabela 4 - Resultados de cada um dos estimadores para simulação de um ano (variância verdadeira = 1,00)

($\sigma^2 = 1,00$ a.a.)	Estimador			
	Clássico	Garman-Klass	Parkinson	Roger-Satchell
Estatística				
Média (Anualizada)	0,99	1,01	1,00	1,02
Média (Diária)	0,003911	0,004007	0,003980	0,004038
Variância teórica	$3,15 \cdot 10^{-5}$	$4,26 \cdot 10^{-6}$	$6,46 \cdot 10^{-6}$	$5,21 \cdot 10^{-6}$
Variância (Calculada)	$3,57 \cdot 10^{-5}$	$3,87 \cdot 10^{-6}$	$6,29 \cdot 10^{-6}$	$4,99 \cdot 10^{-6}$

Fonte: Autor

Figura 19 apresenta um histograma da distribuição dos resultados obtidos com a simulação. Nota-se que a variabilidade do indicador clássico é a maior dentre os indicadores calculados. De fato, como mostrado na seção 3.2. deste trabalho, a literatura mostra que sua variância é da ordem de $2\sigma^4$, comparada a $0,41\sigma^4$ do estimador de Parkinson por exemplo. Percebe-se também que as distribuições apresentam assimetria positiva, ou seja, sua média é maior que a moda e a cauda da distribuição está à sua direita.

Figura 19 – Histograma das distribuições para simulação de 252 dias (variância verdadeira = 1 a.a.)



Fonte: Autor

5.4. Determinando o comprimento médio de sequência sob-controle

Para construção dos gráficos de controle será determinado um comprimento médio de sequência ARL_0 comum a todos eles, de forma que quando o processo estiver sob controle todos terão a mesma eficiência sob esse ponto de vista. Ou seja, estando o processo sob controle, os gráficos obtidos para o estimador Clássico, o estimador de Parkinson, o estimador de Garman-Klass e o estimador de Roger-Satchell apresentarão o mesmo desempenho, quando este for medido pelo ARL. Construídos dessa forma, os quatro diferentes gráficos compartilharão, além do mesmo ARL_0 , um mesmo risco α de apontar que o processo está fora de controle quando este está na verdade sob controle.

Neste trabalho, o ARL_0 será fixado em 100 observações. Ou seja, espera-se que, em média, a cada 100 pontos que forem plotados no gráfico de controle, apenas um caia fora do intervalo definido pelo limite de controle devido a causas puramente aleatórias não atribuíveis.

É conveniente utilizar o conceito de Tempo Médio de Alerta definido na seção 4.3 como:

$$TMA = ARL \cdot h$$

Onde h é o intervalo de tempo entre cada uma das observações realizadas. Cada um dos indicadores serão calculados ao final de um dia simulado, uma vez que são função dos preços de abertura, fechamento, máximo e mínimo deste dia. Sendo assim, cada estatística será calculada e plotada no gráfico em intervalos de um dia. Dessa forma, sendo o valor do ARL_0 fixado em 100 observações, pode-se calcular o TMA como sendo de 100 dias. Ou seja, projetado dessa maneira, os gráficos irão indicar, em média, um alarme falso a cada 100 dias, quando o processo estiver sob controle.

Considerando um ativo financeiro, o valor do ARL_0 escolhido neste cenário indicaria que o tomador de decisão seria alertado em média pouco mais de duas vezes ao ano estando o processo sob controle. É um valor bastante razoável considerando a dinâmica do mercado e a divisão do ano em trimestres que é o padrão comum nessa indústria.

5.5. Determinar os limites de controle através de simulações

Na Seção 4.4. deste trabalho foi discutido como determinar os limites de controle de um gráfico de controle de Shewhart para monitorar uma característica da qualidade X normalmente distribuída. Neste caso, dado uma determinada probabilidade α de se cometer um erro do tipo I ou um determinado comprimento médio de sequência ARL_0 , é possível determinar analiticamente os limites de controle que satisfaçam essas condições.

Neste trabalho, no entanto, os vários estimadores de volatilidade considerados não seguem uma distribuição normal, de tal forma que a obtenção de uma expressão analítica para o limite de controle dos gráficos não é possível. Os limites de controle serão determinados, portanto, através de ferramentas de simulação

Como foi dito, o objetivo dos gráficos que serão desenvolvidos é identificar aumentos de diferentes magnitudes no valor de σ^2 do processo gerador da série de preços. Isto posto, o teste de hipóteses que estará sendo feito de maneira implícita é:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

onde, $\widehat{\sigma^2}$ pode ser entendido como um dos estimador de σ^2 que serão empregados: estimador Clássico, de Parkinson, de Garman-Klass e de Roger-Satchell.

O algoritmo desenvolvido visa encontrar um limite de controle que satisfaça a condição descrita na seção 5.4: $ARL_0 = 100$. O Comprimento Médio de Sequência pode, por sua vez, ser interpretado como uma sendo uma função do Limite de Controle LC : $ARL_0 = g(LC)$, onde a função $g(\cdot)$ é o operador que devolve o ARL_0 dado um Limite de Controle LC . Sendo assim, para cada um dos gráficos de controle, o busca-se encontrar a raiz LC^* da função $f(LC)$ dado por:

$$f(LC) = g(LC) - 100 \quad (5.10)$$

Ou seja, encontrar o limite de controle LC^* tal que $g(LC^*) = ARL_0$ seja igual a 100.

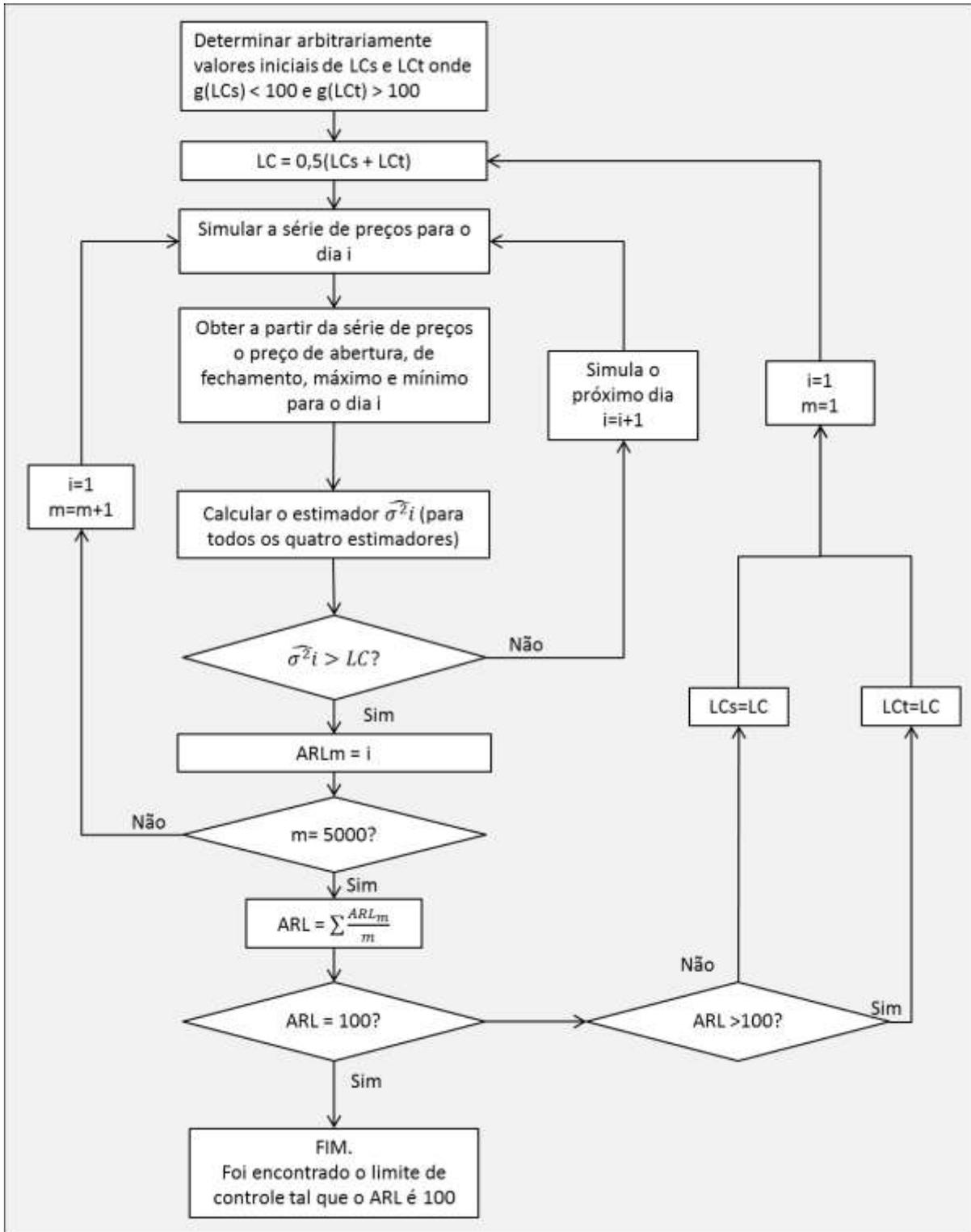
Utiliza-se para isso um algoritmo simples, conhecido como *Método da Dicotomia*. Seja LC_s , LC_t os limites de um intervalo que contenha LC^* em que a função $f(LC)$ assuma valores de sinais opostos nos limites LC_s , LC_t deste intervalo. O método consiste em “cercar” a raiz a cada iteração em intervalos cada vez menores, com um tamanho igual a metade do tamanho do intervalo anterior. Os passos a serem seguidos são:

- ❖ Determina-se o intervalo inicial $[LC_s, LC_t]$
- ❖ Escolhe-se o ponto médio $LC_u = 0,5(LC_s + LC_t)$
- ❖ Calcula-se $f(LC_u)$. Se $f(LC_u) > 0$ define-se o novo intervalo como sendo $[LC_s, LC_u]$. Se $f(LC_u) < 0$ define-se o novo intervalo como sendo $[LC_u, LC_t]$
- ❖ O processo segue desta maneira até se chegar em um intervalo satisfatoriamente pequeno que contenha a raiz LC^* .

Como mencionado, por não ser conhecido qual a distribuição das características da qualidade que serão monitoradas pelo gráfico, não é possível obter uma expressão analítica para $g(LC)$ que relacione o Limite de Controle LC com o comprimento médio de sequência $ARL_0=100$ desejado. O valor de $g(LC)$ será calculado, portanto através de simulação, como sendo o valor do comprimento de sequência médio (número de observações até que um ponto seja plotado fora do limite de controle) obtido utilizando um dado LC .

Figura 20 apresenta de maneira esquematizada o que foi discutido nessa seção.

Figura 20 – Esquema da metodologia utilizada para se determinar os limites de controle para os gráficos que satisfazem $ARL_0 = 100$



Fonte: Autor

Vale ressaltar que a realização destas etapas segue de maneira similar para a construção dos gráficos de todos os quatro estimadores que serão utilizados. Com isso, neste

ponto serão conhecidos os limites de controle para o Gráfico de Controle do estimador clássico, LC_c , os limites de controle para o estimador de Parkinson, LC_p , os limites de controle para o estimador de Garman-Klass, LC_{gk} e por fim os limites para o estimador de Roger-Satchell, LC_{rg} .

A fim de orientar o leitor para o entendimento do que foi discutido nesta seção e nos esquemas da figura 20, a tabela 5 apresenta de forma resumida a notação utilizada.

Tabela 5 - Resumo da notação utilizada na metodologia para se determinar o LC que satisfaz $ARL_0 = 100$

Símbolo	Descrição
$(\sigma^2)_i^{\wedge}$	Estimador de σ^2 calculado para o dia i
σ_{FC}	σ utilizado na simulação fora de controle. Igual a $k\sigma_0$
ARL	Comprimento médio de sequência obtido utilizando o Limite de Controle LC
ARL _m	Comprimento de sequência para a m-ésima iteração
i	Número de dias
k	Constante utilizada para alterar a variância do processo na situação fora de controle
LC _s	Intervalo inferior do Limite de controle tal que $ARL_0 < 100$
LC _t	Intervalo superior do Limite de controle tal que $ARL_0 > 100$
LC	Limite de controle que está sendo testado
LC_c	Limite de controle obtido para o gráfico do estimador Clássico tal que $ARL_0 = 100$
LC_p	Limite de controle obtido para o gráfico do estimador de Parkinson tal que $ARL_0 = 100$
LC_{gk}	Limite de controle obtido para o gráfico do estimador de Garman-Klass tal que $ARL_0 = 100$
LC_{rg}	Limite de controle obtido para o gráfico do estimador de Roger-Satchell tal que $ARL_0 = 100$
m	Número de iterações para o cálculo do ARL

Fonte: Autor

5.6. Obtendo o comprimento médio de sequência fora de controle.

Conhecidos os limites de controle que atendem à condição inicial especificada: comprimento médio de sequência para processo sob controle igual a 100, $ARL_0 = 100$, o desempenho de cada um dos gráficos será então testado para diferentes condições e situações fora de controle.

Para simular o processo fora de controle serão introduzidas perturbações de diferentes magnitudes na constante de difusão σ do processo. Sabe-se que, quando em controle estatístico, a volatilidade σ do processo é $\sigma_0 = 1$. O processo fora de controle será simulado

de forma similar à descrita na seção 5.2. Desta vez, porém, a constante de difusão fora de controle σ_{FC} será dada por:

$$\text{Ou} \quad \sigma_{FC} = \sqrt{k}\sigma_0 \quad (5.11)$$

$$\sigma_{FC}^2 = k\sigma_0^2 \quad (5.12)$$

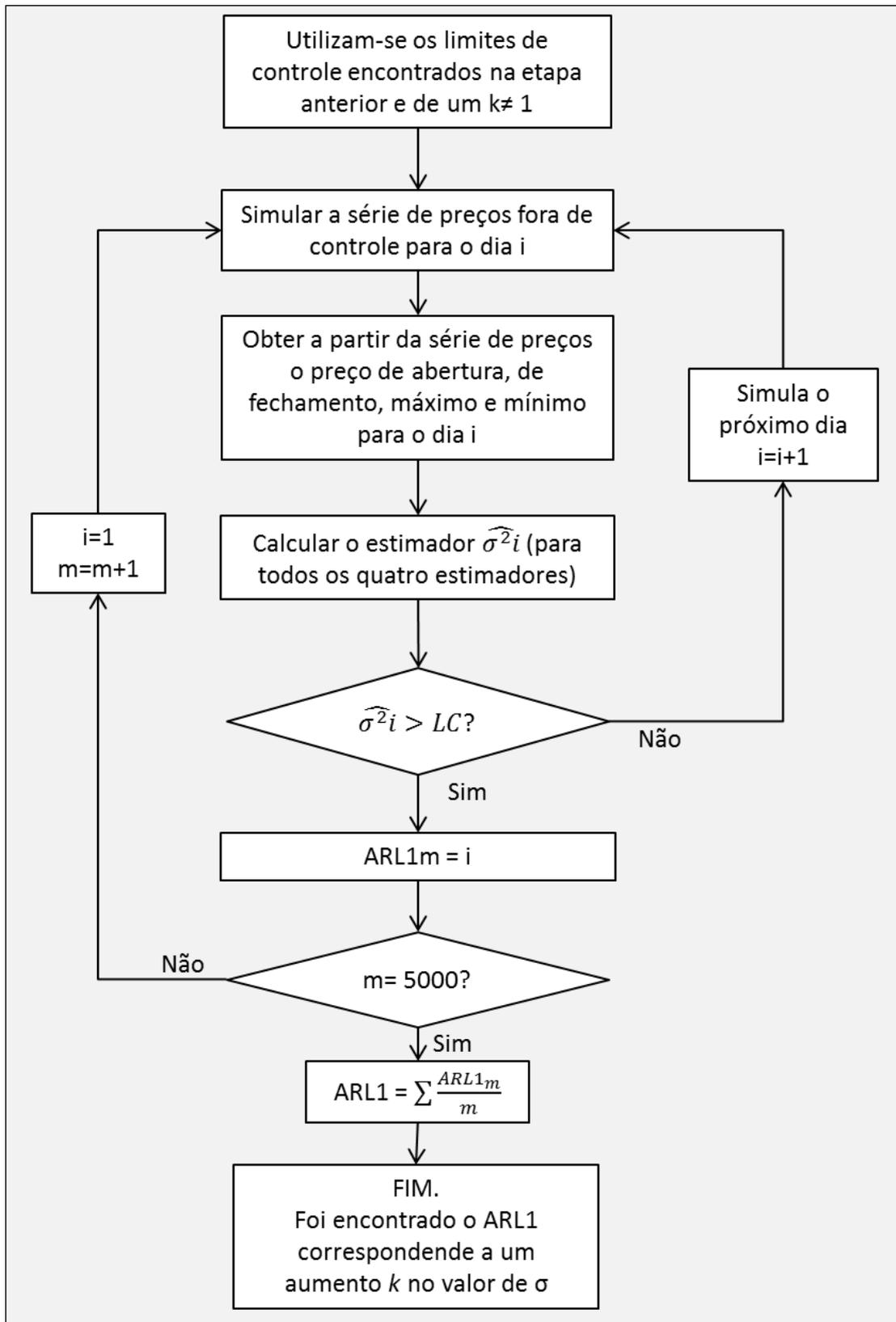
Onde k é uma constante que assumirá diferentes valores para realização dos testes.

Com isso, busca-se identificar, para diferentes cenários, qual dos gráficos de controle construídos é o mais eficiente no que diz respeito à velocidade que ele indicará que o processo não está mais sob controle. Isso será medido pelo comprimento médio de sequência fora de controle, ARL_1 , ou seja, quantas observações são necessárias, em média, até que o primeiro ponto seja plotado fora dos limites de controle. A comparação entre o desempenho dos gráficos seguirá a seguinte lógica: uma vez que todos gráficos compartilham o mesmo ARL_0 , dar-se-á preferência, portanto, àquele que possuir o menor ARL_1 para uma dada alteração k na volatilidade do processo gerador dos preços.

A simulação do ARL_1 para um dado gráfico será da seguinte forma: A série de preços passará a ser gerada utilizando-se σ_{FC} no lugar de σ_0 . Ao final de cada dia i é calculado um estimador $\widehat{\sigma^2}_i$ de σ^2 , repetindo esse processo até que o estimador seja superior ao limite de controle correspondente a este estimador, calculado na etapa anterior. O ARL_1 será o valor médio obtido após 5.000 iterações.

Figura 21 mostra de maneira esquemática como obter o ARL_1 para cada um dos gráficos de controle para um determinado valor de k . Novamente, vale ressaltar que o processo seguido é o mesmo para os diferentes gráficos e diferentes valores de k que serão testados.

Figura 21 - Fluxograma do processo para determinação do ARL1 para um determinado k



Fonte: Autor

6. APLICAÇÃO DO MODELO E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, a metodologia proposta no capítulo 5 será posta em prática. Ela será aplicada para o projeto dos gráficos de controle para o estimador Clássico, para o projeto do gráfico do estimador de Parkinson, para o do estimador de Garman-Klass e para o do estimador de Roger-Satchell. Com isso, busca-se identificar qual é o mais eficiente para detectar um aumento na volatilidade σ do processo gerador da série de preços em diferentes cenários.

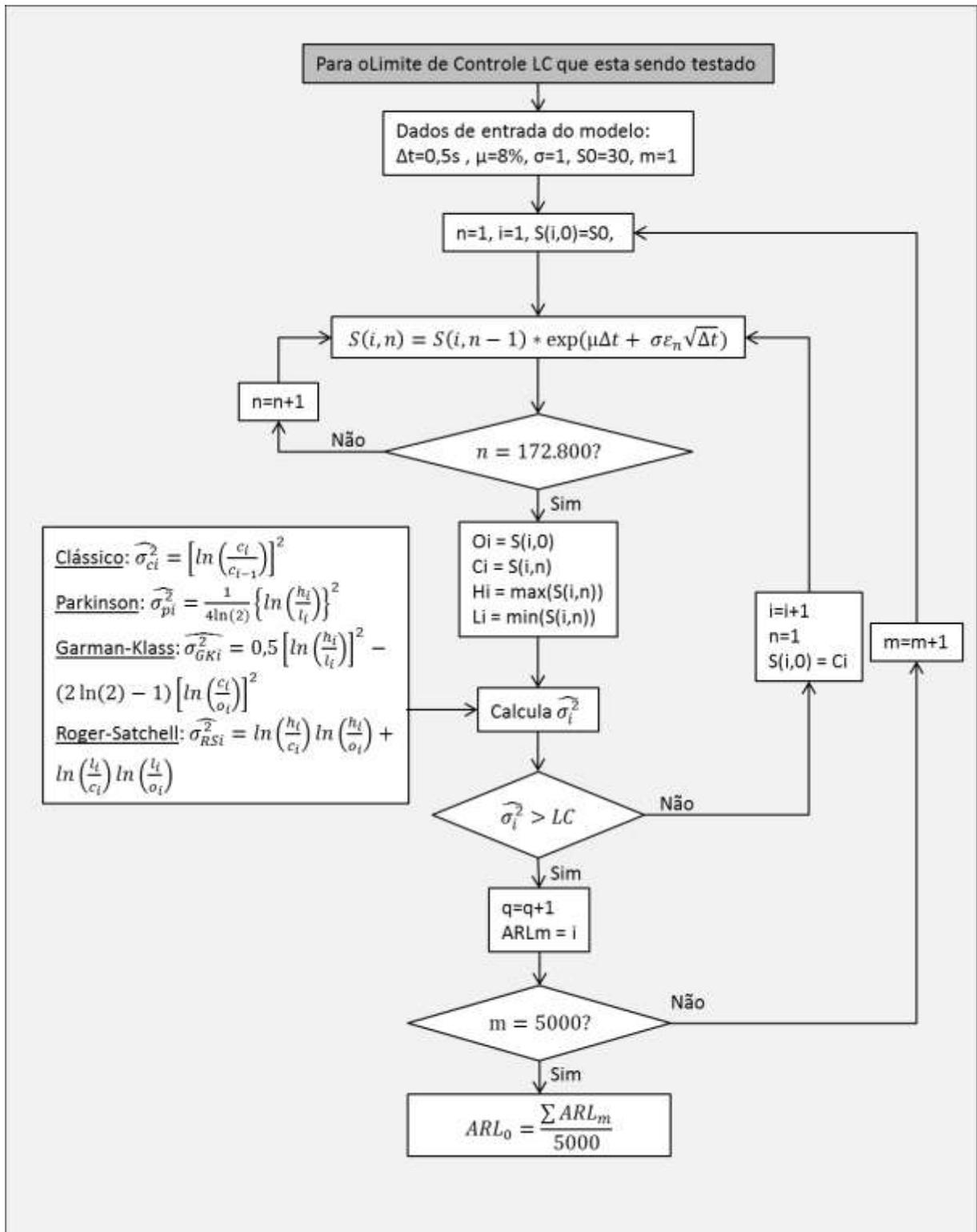
O Modelo foi inteiramente desenvolvido no software Microsoft Excel e programado utilizando linguagem VBA. A escolha deste software se deve, entre outros fatores, a sua grande difusão no mercado financeiro, à sua boa interface com o programador e também à maior familiaridade do autor com suas funções em relação a outros softwares e linguagens. Os resultados obtidos, bem como os detalhes da construção do modelo serão apresentados nas seções que se seguem.

6.1. Projeto dos Gráficos de Controle: Calculando os Limites de Controle

Os limites de controle para cada um dos quatro gráficos foram simulados da maneira descrita na seção 5.5, a fim de satisfazerem a condição $ARL_0 = 100$. A simulação da série de preços foi feita na própria planilha, enquanto as iterações para se chegar ao limite de controle pelo Método da Dicotomia foram programadas em VBA.

Figura 22 mostra a interface da planilha onde a série de preços $S(n,i)$ é simulada para o cálculo dos limites de controle do gráfico do estimador Clássico. O seu principal *output* são os preços de abertura O_i , de máximo H_i , de mínimo L_i e de fechamento C_i do dia i , que são plotados na *range* N4:Q4. A partir deles é possível calcular o valor de qualquer um dos quatro estimadores para um dado dia. No caso do exemplo ilustrado pela Figura 22, a célula R4 calcula o estimador clássico $\widehat{\sigma}_{Cl}^2$ para o dia i simulado. Vale lembrar que, para os demais estimadores, a estrutura é bastante similar, bastando alterar o cálculo feito na célula R4.

Figura 23 - Representação esquemática de $g(\cdot)$, que calcula o ARL0 com base em um Limite de controle



Fonte: Autor

Realizada todas as rodadas de simulações foram obtidos os limites de controle apresentados na Tabela 6.

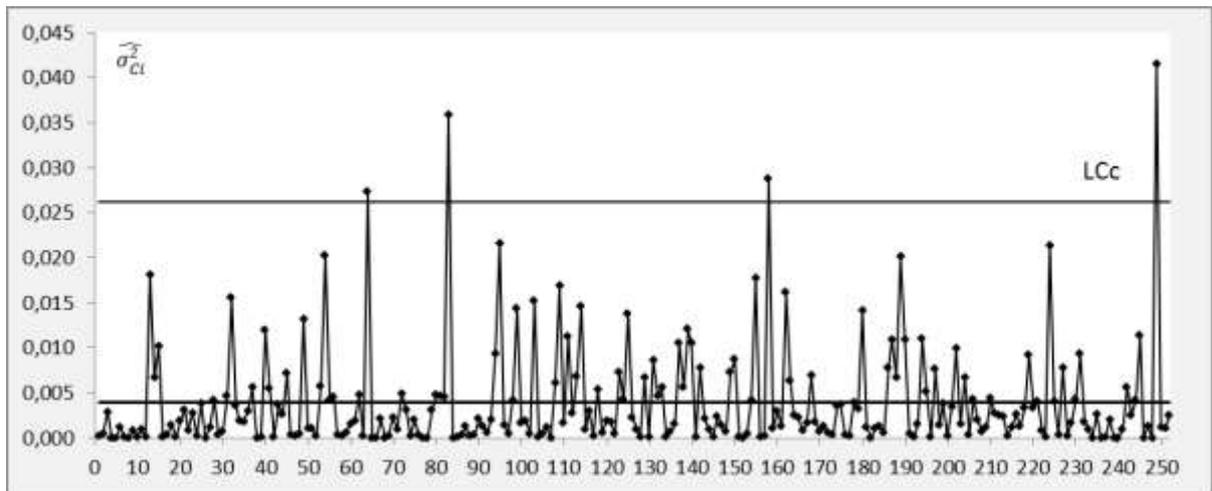
Tabela 6 - Limites de controle simulados para $ARL_0 = 100$

Gráfico	Limite de Controle
Clássico	0,026244
Parkinson	0,013072
Garman-Klass	0,010649
Roger-Satchell	0,011415

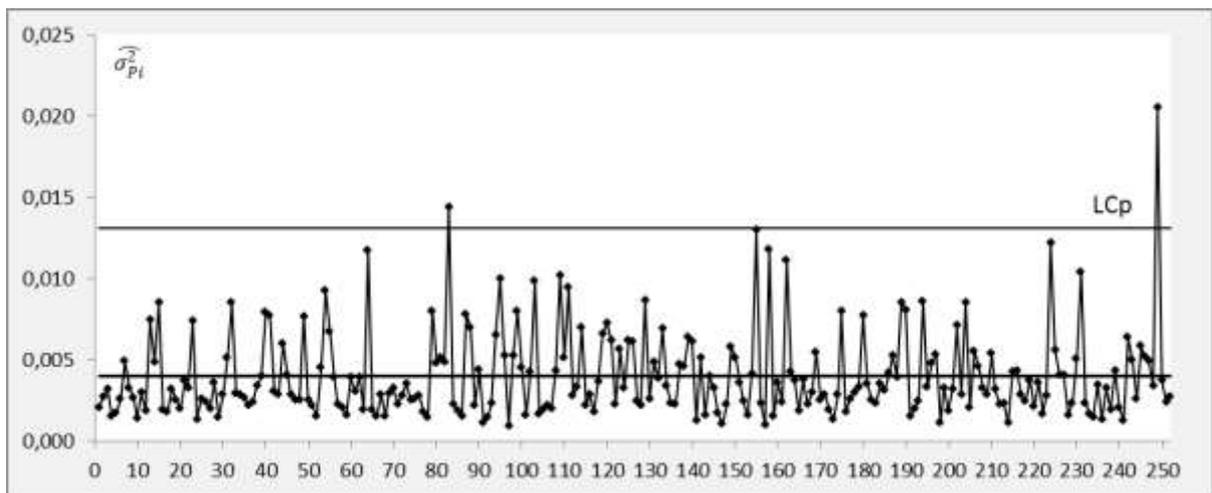
Fonte: Autor

Como é possível observar, os limite de controle do gráfico de controle do estimador clássico LCc é o maior entre todos os gráficos. Isso se deve ao fato deste estimador ter menor eficiência que os demais, tendo, portanto, maior variabilidade, como ilustrado no histograma figura 19. Em um gráfico de controle, os limites são tão maiores quanto maior for a variabilidade da característica da qualidade que está sendo monitorada. Esta observação também é válida para explicar o limite mais estreito LCgk encontrado para o gráfico do estimador de Garman-Klass, uma vez que este é o de menor variabilidade dentre os estimadores utilizados. Em ordem crescente do tamanho dos limites de controle simulados chegou-se, portanto, em: Estimador de Garman-Klass, estimador de Roger-Satchell, estimador de Parkinson e estimador Clássico, que é condizente com a variabilidade de cada um destes indicadores.

Figuras 24-27 ilustram os gráficos de controle obtidos para os estimadores de considerados. Neles foram plotados as observações preliminares dos 252 dias de simulação de $\widehat{\sigma}_{Ci}^2$, $\widehat{\sigma}_{Pi}^2$, $\widehat{\sigma}_{GKi}^2$ e $\widehat{\sigma}_{RSi}^2$ encontradas no Apêndice A deste trabalho. Como era de se esperar, as estatísticas se distribuem aleatoriamente ao redor da linha central uma vez que nesta fase o processo se encontra em controle estatístico. Apenas algumas observações foram plotadas fora dos limites de controle LCc, LCp, LCgk e LCrs, encontrado que neste caso representam alarmes falsos.

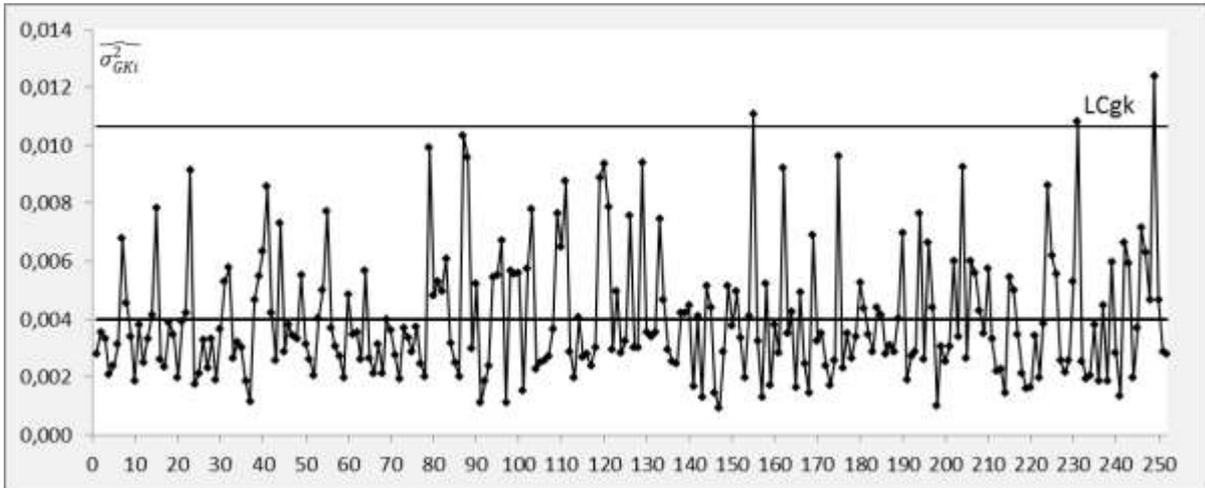
Figura 24 - Gráfico de Controle do Estimador Clássico. $LCc = 0,026244$ 

Fonte: Autor

Figura 25 - Gráfico de Controle do estimador de Parkinson. $LCp=0,013072$ 

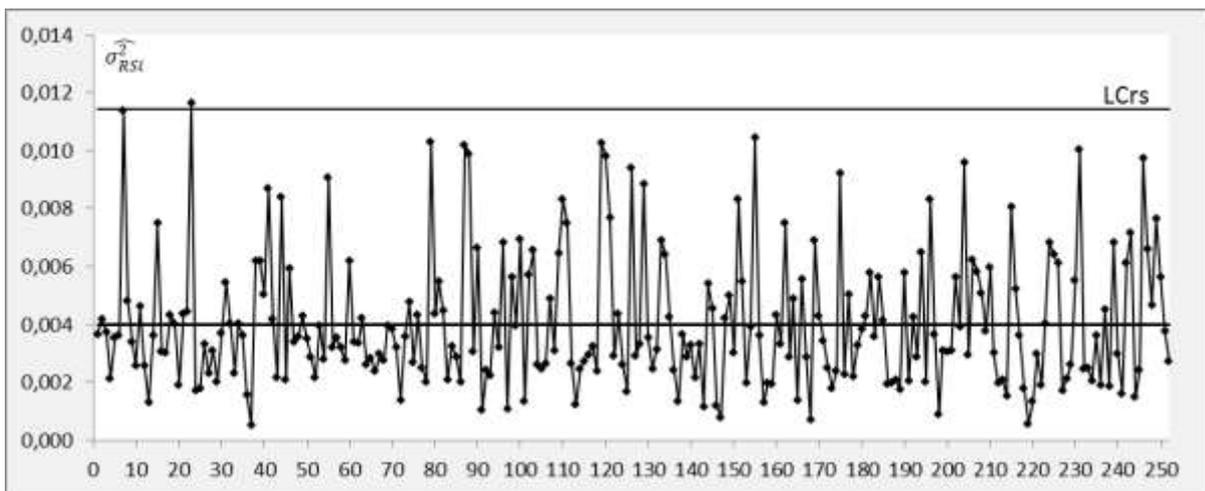
Fonte: Autor

Figura 26 – Gráfico de Controle do estimador de Garman Klass. LCgk=0,010649



Fonte: Autor

Figura 27 - Gráfico de Controle do estimador de Roger-Satchell. LCrs=0,011415



Fonte: Autor

Nota-se que, como mencionado, a variabilidade de $\widehat{\sigma}_{Ci}^2$ é notavelmente maior que a dos demais indicadores, de forma que os pontos encontram-se bem mais espaçados em torno da linha central do gráfico.

6.2. Determinando o ARL_1 para diferentes situações.

Uma vez conhecidos os limites de controle que satisfazem a condição inicial de $ARL_0 = 100$, para cada um dos gráficos, encerra-se a fase do projeto dos Gráficos de Controle. Da maneira como todos eles foram projetados, tem-se portanto que, estando o processo em

controle estatístico, $\sigma^2=1$, os gráficos possuem o mesmo risco α de induzir o tomador de decisão a cometer um erro do tipo I, já que compartilham todos o mesmo comprimento médio de sequência ARL_0 .

Para simular diferentes situações fora de controle, nesta etapa foi então introduzida uma perturbação k , de valores variados, no processo gerador da série de preços. Como mencionado, nestes cenários fora de controle, o valor do parâmetro σ^2 do processo gerador da série preços fora de controle é dado por $\sigma_{FC}^2 = k\sigma_0^2$. Os valores de k utilizados e os respectivos valores de σ_{FC}^2 são apresentados na tabela 6.

Tabela 7 – Valores de k simulados e respectivos σ_{FC}^2 para cenários fora de controle

k	σ_{FC}^2 diário (%)
1,05	0,4167
1,10	0,4365
1,25	0,4960
1,50	0,5952
1,75	0,6944
2,00	0,7937

Fonte: Autor

Em cada uma dessas situações, o processo passa a oscilar em torno de uma nova média e com maior variabilidade, de forma a tirá-lo do estado de controle estatístico. O ARL_1 para os diferentes valores de k e para os diferentes gráficos foram então simulados.

Tabela 8 mostra os comprimentos médios de sequência fora de controle que foram obtidos após as simulações, para todos estimadores e para cada situação fora de controle.

Tabela 8 - Valores de ARL_1 para diferentes k simulados

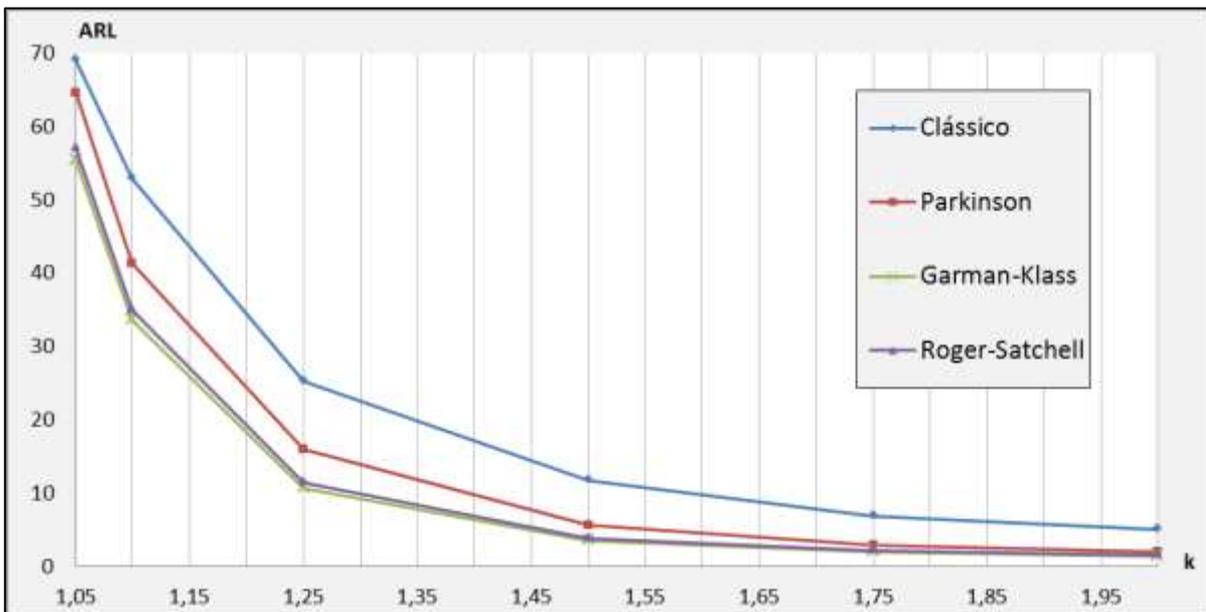
k	Clássico	Parkinson	Garman-Klass	Roger-Satchell
1,05	69,0132	64,5994	55,3702	57,0230
1,10	52,8988	41,4678	33,6148	35,0158
1,25	25,2648	16,0736	10,6310	11,5060
1,50	11,7790	5,7350	3,5570	3,8924
1,75	6,9678	2,9864	1,9736	2,2140
2,00	5,0438	1,9818	1,4252	1,5776

Fonte: Autor

Como era de se esperar, para qualquer estimador o valor do ARL1 decresce a medida que k aumenta. Em outras palavras, quanto maior a alteração no valor de σ^2 mais rápido o gráfico é capaz de indicar que o processo já não se encontra sob controle. Nota-se que o desempenho dos gráficos para perturbações pequenas como $k=1,05$ ou $k=1,10$ não é muito satisfatório.

Os três estimadores alternativos de volatilidade estudados, o de Parkinson, de Garman-Klass e de Roger-Satchell se mostraram superiores ao Clássico no que diz respeito à velocidade que o gráfico de controle é capaz de alertar o usuário a respeito de um aumento na volatilidade, para qualquer deslocamento k . Figura 28 apresenta a curva do ARL_1 de cada gráfico em função do deslocamento k do valor de σ^2 .

Figura 28 - Curvas de ARL1 x k para os diferentes estimadores estudados



Fonte: Autor

Particularmente, o estimador de Garman-Klass foi o que apresentou o melhor desempenho, ou seja, para um dado valor de k é o gráfico que possui o menor ARL1, sendo capaz, portanto, de identificar com maior antecedência um aumento na volatilidade da série. Uma análise crítica dos resultados obtidos é feita na seção 7.1. deste trabalho.

7. CONCLUSÃO

Seja para prever momentos de *stress* no mercado, para mensurar o risco de um determinado investimento, ou para negociar derivativos e determinar o valor justo de opções, monitorar a volatilidade de um ativo é uma atividade de muita relevância para os participantes do mercado financeiro. Gráficos de Controle podem ser aplicadas para este fim, com o intuito de indicar ao tomador de decisões momentos onde há um aumento na volatilidade dos retornos dos preços deste ativo. Neste trabalho, buscou-se identificar se a utilização de estimadores de volatilidade alternativos ao clássico, que se baseia no log-retorno diário do ativo, traria algum benefício no que diz respeito à velocidade com que o gráfico de controle seria capaz de emitir um alerta ao tomador de decisão sobre um aumento na volatilidade do ativo. Identificar este aumento o mais cedo possível permite ao investidor se posicionar melhor diante deste novo cenário, o que pode significar ganhos significativos em relação aqueles que não identificaram tal mudança.

Este capítulo final apresenta os principais resultados e conclusões obtidas com a realização deste projeto. Serão também apresentadas as dificuldades encontradas durante sua execução além de sugestões para trabalhos futuros que possam vir a complementar o que foi aqui desenvolvido.

7.1. Análise da Metodologia e dos Resultados Obtidos

Como já mencionado, a volatilidade de um ativo financeiro não é um parâmetro diretamente observável. Sendo assim, neste trabalho a série de preços de um ativo hipotético foi modelada como um movimento Browniano Geométrico, de maneira que o valor real da volatilidade σ deste ativo era conhecido durante qualquer etapa de simulação.

Para monitorar a volatilidade, utilizando os gráficos de controle, é então necessário estimar seu valor a partir dos dados disponíveis e observáveis: a série de preços. Foram utilizados para este fim quatro diferentes estimadores não viesados da constante de difusão σ^2 deste processo: o estimador Clássico, o estimador de Parkinson, o estimador de Garman-Klass e o estimador de Roger-Satchell. Estes indicadores tem em comum o fato de estimarem a volatilidade se baseando apenas em dados diários de fácil acesso e de fácil manipulação a

respeito do ativo: os preços de abertura, fechamento, de máximo e de mínimo, que são diariamente publicados em jornais e sites especializados.

Em um primeiro momento foram projetados gráficos de controle para monitorar cada uma destas estatísticas através de ferramentas de simulação. Os limites de controle para os gráficos foram escolhidos de forma a satisfazer a condição inicial de $ARL_0 = 100$, ou seja, todos os gráficos possuem o mesmo comprimento médio de sequência quando o processo está sob controle e compartilham, portanto, o mesmo risco α de induzir o usuário a cometer um erro do tipo I.

Simulando cenários fora de controle, o desempenho de cada gráfico foi então medido pelo ARL_1 , para diferentes graus k de mudança no valor de σ^2 . Os resultados mostraram que todos os três gráficos, o gráfico para o estimador de Parkinson, o gráfico para o estimador de Garman-Klass e o gráfico para o estimador de Roger-Satchell, apresentaram vantagens significativas no que diz respeito à velocidade de detecção de um aumento na volatilidade quando comparados ao gráfico que utiliza o estimador clássico.

Dos três estimadores alternativos analisados, o que apresentou pior desempenho foi o estimador de Parkinson, mas, ainda assim, notavelmente superior ao estimador Clássico. O cálculo de $\widehat{\sigma}_p^2 i$ é bastante simples e similar ao cálculo de $\widehat{\sigma}_c^2 i$. Porém, enquanto este se baseia nos preços de fechamento do ativo, aquele utiliza os preços máximos e mínimos assumidos pelo ativo ao longo do dia. Essa simples mudança garante, porém, uma grande vantagem ao gráfico projetado para $\widehat{\sigma}_p^2 i$. Os preços de máximo e mínimo contêm mais informações a respeito do processo do que os preços de abertura e fechamento. A obtenção destes valores extremos implica uma observação contínua da trajetória realizada pela v.a. que segue o movimento Browniano Geométrico, no caso deste trabalho, o preço do ativo. Os preços de abertura e fechamento, por outro lado, são apenas observações pontuais do processo em um dado instante, não carregando implicitamente consigo informações adicionais dos demais valores assumidos pelo preço do ativo ao longo do dia. Segundo este aspecto, ao se utilizar uma estatística mais rica em informações, mesmo que de estrutura simples, o gráfico para o estimador de Parkinson é capaz de detectar e sinalizar um aumento da volatilidade do ativo mais rapidamente que o clássico, qualquer que seja a magnitude dessa mudança.

Ao combinar ao preço de máximo e mínimo às informações contidas nos preços de abertura e fechamento, os estimadores de Roger-Satchell e Garman-Klass melhoram ainda

mais o desempenho dos gráficos de controle elaborados para monitorar a volatilidade de um ativo. O gráfico de melhor performance de todos analisados foi o de Garman-Klass que se mostrou marginalmente melhor que o gráfico do estimador de Roger-Satchell. Apesar de possuir uma estrutura relativamente mais complexa que a dos estimadores Clássico e de Parkinson, os dados necessários para o cálculo tanto do estimador de Garman-Klass como o de Roger-Satchell (preços de abertura, fechamento máximo e mínimo) são diariamente publicados para qualquer ativo. Dessa forma, a aplicação prática destes estimadores se tornam bastante simples. As melhorias alcançadas são notáveis. Tabela 9 mostra com quantos dias de antecedência o gráfico construído com o indicador de Garman-Klass é capaz de indicar, em média, que houve um aumento na volatilidade do ativo para diferentes valores de k .

Tabela 9 - Número médio de dias que o gráfico de Garman-Klass é capaz de indicar um aumento de volatilidade para diferentes valores de k em relação ao estimador Clássico

k	Performance relativa (número de dias)
1,05	13,6430
1,10	19,2840
1,25	14,6338
1,50	8,2220
1,75	4,9942
2,00	3,6186

Fonte: Autor

Um aumento de 10% no valor de σ^2 pode ser identificado em média com quase 20 dias de antecedência se comparados ao estimador clássico com um mesmo grau de confiança. Os resultados permitem ainda interpretações adicionais. Por possuir um menor valor de ARL_1 , o gráfico de controle construído com o indicador de Garman-Klass possui também um risco β menor de se cometer um erro do tipo II. Em outras palavras, as chances de não se detectar um aumento na volatilidade do ativo é reduzida ao se utilizar este estimador.

7.2. Dificuldades Encontradas

Um grande desafio que teve que ser superado para obtenção dos resultados deste trabalho diz respeito à sua grande demanda por recursos computacionais. Para garantir a precisão dos estimadores que se valiam dos preços de máximo e mínimo do ativo, foi necessário simular a série de preços para um intervalo de tempo diminuto. Dessa forma, a grande quantidade de valores aleatórios gerados e cálculos necessários a cada iteração tornavam a simulação lenta, mesmo que utilizando computadores potentes do ambiente de estágio do autor. Para se simular, por exemplo, 5.000 iterações de um processo com $ARL_0 \approx 100$ são necessários, portanto, simular dados de aproximadamente 500.000 dias sendo que a cada dia são gerados 172.000 dados para série de preços. Como é possível inferir, foram necessários diversos computadores e longas horas de simulação para garantir resultados confiáveis.

Por fim, alguns dos temas de séries temporais, econometria e até mesmo de CEP tratados no trabalho eram novos ao aluno. Para que pudessem ser aplicados ao modelo foi necessário ao autor, em primeiro momento, a dedicação de um período para se familiarizar e dominar os novos conceitos, o que foi possível graças à orientação da Professora Linda Lee e esforço por parte do autor.

7.3. Sugestões para Próximos Estudos

O trabalho que foi aqui apresentado não esgota as possibilidades de estudo da eficiência de gráficos de controle aplicados ao monitoramento da volatilidade de ativos financeiros. Há possíveis melhorias ou novas abordagens passíveis de serem aplicadas ao modelo desenvolvido neste trabalho, em trabalhos futuros.

Uma sugestão seria a aplicação de ferramentas sensibilizantes aos gráficos de controle, com o intuito de tornar o ARL_1 ainda menor. Os gráficos desenvolvidos neste trabalho, como os gráficos de controle de Shewhart, utilizam informação apenas da última observação da característica da qualidade monitorada, ignorando todos os dados passados, que contém informações relevantes a respeito do processo. Segundo Montgomery (2004) ignorar as informações contidas nas observações passadas do processo torna os gráficos de Shewhart

relativamente insensíveis a pequenos desvios no processo. De fato, analisando os valores de ARL_1 obtidos para $k=1,05$ os resultados encontrados neste trabalho não são muito satisfatórios. Quando estes pequenos desvios são de interesse, Montgomery (2004) sugere a aplicação dos gráficos de controle da soma cumulativa, CUSUM ou dos gráficos de controle de média móvel exponencialmente ponderada, EWMA na sigla em inglês. Os gráficos CUSUM por serem cumulativos, tem em tese maior capacidade de detectar mudanças pequenas, porém persistentes no processo. O EWMA por sua vez se vale de uma estatística que leva em conta as observações anteriores, atribuindo peso maior para as mais recentes. Estudar os benefícios da aplicação destes gráficos aos indicadores tratados neste trabalho pode ser alvo de futuros trabalhos.

Uma outra sugestão diz respeito à forma de mensurar o desempenho do gráfico durante sua fase de projeto. A utilização do comprimento médio de sequência, que foi abordada neste trabalho, surgiu como uma alternativa natural por ser a medida tratada usualmente na literatura. Porém, o ARL apresenta uma distribuição geométrica, que é bastante assimétrica. Dessa forma, a média não é um valor típico de um comprimento de sequência. Sendo assim, o projeto inicial do gráfico poderia ser feito de modo que a mediana ou a moda de seu comprimento de sequência fosse compartilhada entre os gráficos quando sob controle, no lugar de se usar a média. Seriam deduzidos outros limites de controle para os gráficos, cujo desempenho poderia então ser estudado e comparado aos que foram desenvolvidos neste trabalho.

Finalmente, há na literatura outros estimadores de volatilidade, menos difundidos do que os tratados neste trabalho, mas que também poderiam ser objeto de estudos futuros. Pode-se citar os estimadores de Yang-Zhang e o Estimador estendido de Garman-Klass por Yang-Zhang (YANG; ZHANG, 2000) por exemplo ou também estimadores de alta frequência, que trabalham com grande volume de dados intra-diários do preço dos ativos (MORETTIN, 2011). A eficiência do uso destes indicadores poderia ser comparada aos aqui estudados.

7.4. Comentários Finais

Por fim, mas não menos importante, é relevante citar a importância dos conhecimentos adquiridos pelo autor durante o curso de Graduação em Engenharia de Produção que tornaram possível a realização deste trabalho. Disciplinas cursadas ao longo dos anos de Poli como Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico, Controle da Qualidade, Estatística, Engenharia Econômica, Simulação, Programação entre outras, deram ao autor a bagagem e o ferramental técnico necessários para elaboração deste projeto.

Tão importante quanto estes conhecimentos técnicos adquiridos, os atributos e qualidades típicas de um Engenheiro Politécnico como forte capacidade analítica, raciocínio lógico e visão sistêmica dos processos, que também foram adquiridas ao longo do curso, certamente foram relevante para elaboração deste trabalho de formatura. A capacidade de modelar e solucionar problemas complexos, de naturezas variadas e multidisciplinares, possibilitou a aplicação de uma coleção de ferramentas e habilidades adquiridas durante o curso para solucionar o problema proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, v.81, 1973.

BROWN, R. **A bried account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827** Philosophical Magazine. 1828.

COSTA, A.F.B. et al., **Controle Estatístico de Qualidade**. 2ª Edição. São Paulo: Atlas, 2005. 334p.

GARMAN, M. B.; KLASS, M. J. **On the estimation of security price volatilities from historical data**. Journal of Business, 53:67 – 78, 1980.

HULL, J., **Options, Futures and Other Derivatives**, 8th ed. Prentice Hall, 2011. 841p.

ITÔ, K. **On Stochastic Differential Equations**. Memoirs of the American Mathematical Society, v.4, pp. 1-51, 1951.

MONTGOMERY, D. C., **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**, 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 513 p.

MORETTIN, P.A. **Econometria Financeira: um curso em séries temporais financeiras**. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2011.383p.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C., **Análise de Séries Temporais**. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2006. 564 p.

NATANBERG, S., **Options Volatility&Pricing**, advanced trading strategies and techniques. 1st ed. McGraw-Hill. 1994. 470 p

PARKINSON, M. **The extreme value method for estimatinog the variance of the rate of return**. Journal of Business 53:61 – 65, 1980

PESSÔA, T. M. **Modelo para Determinação da Curva de Volatilidade de Ativos**. 2003. 106p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROGERS, L. C. G; SATCHELL, S. E. **Estimating variance from high,low and closing prices**. Annals of Applied Probability 1:504 – 12, 1991.

SANTOS, L. H. P. **Uso de modelos autorregressivos combinados a gráficos de controle para monitorar volatilidade de ativos financeiros**. 2012. 136p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SILVEIRA, T.K.G. **Modelo de previsão com volatilidade estocástica**. 2008. 107p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

TRISUZZI, V. **Análise de volatilidades implícitas através de métodos bayesianos.** 2007. 118p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

YANG, D.; ZHANG, Q. **Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close prices.** Journal of Business, 73, 477 – 491, 2000

APÊNDICE A – SIMULAÇÃO PRELIMINAR DE UM ANO

Dia (i)	Observações do Preço				Estimadores			
	Oi	Hi	Li	Ci	Clássico	Garman-Klass	Parkinson	Roger-Satchell
0				30	98,55%	100,98%	100,30%	101,75%
1	30,0000	30,3179	28,1095	29,6220	0,0001608	0,0027979	0,0020631	0,0036562
2	29,6220	30,0184	27,5308	28,9611	0,0005092	0,0035448	0,0026989	0,0041846
3	28,9611	28,9826	26,3813	27,4464	0,0028856	0,0033070	0,0031896	0,0037330
4	27,4464	28,2636	26,4972	27,5679	0,0000195	0,0020749	0,0015022	0,0021255
5	27,5679	27,8256	25,9743	27,5084	0,0000047	0,0023683	0,0017097	0,0035236
6	27,5084	29,7254	27,3126	28,4817	0,0012090	0,0031160	0,0025846	0,0036120
7	28,4817	31,5478	28,0754	28,2452	0,0000695	0,0067721	0,0049044	0,0113924
8	28,2452	29,3516	26,6827	28,3858	0,0000246	0,0045346	0,0032779	0,0048067
9	28,3858	29,8469	27,3847	29,2323	0,0008636	0,0033726	0,0026734	0,0033883
10	29,2323	29,3927	27,6361	28,8895	0,0001392	0,0018450	0,0013697	0,0025851
11	28,8895	31,3571	28,6326	29,7643	0,0008900	0,0037871	0,0029798	0,0046190
12	29,7643	30,9137	28,7923	29,4667	0,0001010	0,0024879	0,0018228	0,0025849
13	29,4667	33,7499	29,2339	33,7094	0,0180945	0,0033276	0,0074424	0,0012928
14	33,7094	37,6068	33,4965	36,5707	0,0066372	0,0041344	0,0048318	0,0036130
15	36,5707	36,8061	31,5693	33,0610	0,0101794	0,0078455	0,0084958	0,0074782
16	33,0610	33,6233	31,2656	32,7712	0,0000775	0,0026126	0,0019062	0,0030587
17	32,7712	34,8934	32,5258	33,3496	0,0003062	0,0023503	0,0017807	0,0030275
18	33,3496	33,6904	30,6624	32,0945	0,0014717	0,0038659	0,0031988	0,0043280
19	32,0945	33,8781	31,1564	31,7850	0,0000939	0,0034706	0,0025297	0,0040418
20	31,7850	33,9788	31,5641	33,1944	0,0018824	0,0019898	0,0019599	0,0019100
21	33,1944	35,2038	31,8153	35,1018	0,0031217	0,0039154	0,0036943	0,0043419
22	35,1018	36,9005	33,5443	36,1240	0,0008240	0,0042284	0,0032798	0,0044256
23	36,1240	41,3537	35,8453	38,0779	0,0027748	0,0091454	0,0073702	0,0116262
24	38,0779	39,5358	37,2100	38,7088	0,0002700	0,0017337	0,0013259	0,0017049
25	38,7088	39,4125	36,2056	36,3931	0,0038055	0,0021312	0,0025978	0,0017811
26	36,3931	37,8551	34,9042	36,4965	0,0000080	0,0032903	0,0023757	0,0033030
27	36,4965	38,2304	35,4935	37,7725	0,0011810	0,0023026	0,0019900	0,0022933
28	37,7725	38,8798	35,2026	35,3970	0,0042189	0,0033061	0,0035605	0,0030999
29	35,3970	36,5643	34,3061	36,0353	0,0003194	0,0019085	0,0014657	0,0020122
30	36,0353	38,4692	35,2100	37,0130	0,0007167	0,0036418	0,0028267	0,0036792
31	37,0130	38,6789	34,3404	34,5730	0,0046508	0,0052806	0,0051051	0,0054466
32	34,5730	39,8444	34,1697	39,1675	0,0155689	0,0057888	0,0085141	0,0040331
33	39,1675	40,0269	36,5888	36,8774	0,0036300	0,0026307	0,0029091	0,0023138
34	36,8774	36,8959	33,7625	35,3219	0,0018573	0,0032208	0,0028408	0,0040063
35	35,3219	35,3667	32,4516	33,8483	0,0018158	0,0029984	0,0026689	0,0036272
36	33,8483	36,0109	33,3225	35,7503	0,0029887	0,0018555	0,0021713	0,0015509
37	35,7503	38,6758	35,6493	38,5292	0,0056038	0,0011553	0,0023949	0,0005185
38	38,5292	41,6165	37,7879	38,6131	0,0000047	0,0046551	0,0033592	0,0061933
39	38,6131	39,7791	35,8197	38,3134	0,0000607	0,0054725	0,0039645	0,0061707
40	38,3134	38,8180	33,4809	34,3453	0,0119543	0,0063206	0,0078904	0,0050383
41	34,3453	37,5996	32,4902	36,9763	0,0054482	0,0085613	0,0076938	0,0086949

42	36,9763	38,9348	35,5053	37,3823	0,0001193	0,0042050	0,0030665	0,0041914
43	37,3823	37,8021	34,5768	35,1896	0,0036540	0,0025653	0,0028687	0,0021703
44	35,1896	39,5297	34,7451	37,0377	0,0026201	0,0073102	0,0060033	0,0083852
45	37,0377	40,9323	36,8052	40,3138	0,0071837	0,0028728	0,0040740	0,0020958
46	40,3138	43,9143	40,1930	41,0028	0,0002872	0,0038094	0,0028280	0,0059282
47	41,0028	42,4289	39,0291	40,4762	0,0001671	0,0034234	0,0025160	0,0034068
48	40,4762	42,2506	38,8481	39,5675	0,0005156	0,0033253	0,0025423	0,0035682
49	39,5675	44,5584	38,5184	44,3829	0,0131900	0,0055136	0,0076527	0,0042766
50	44,3829	46,3196	42,5841	45,8205	0,0010161	0,0031427	0,0025501	0,0034935
51	45,8205	47,7506	44,1839	47,3275	0,0010473	0,0026088	0,0021736	0,0028670
52	47,3275	48,9428	45,8578	46,6280	0,0002217	0,0020338	0,0015289	0,0021514
53	46,6280	52,0885	46,5832	50,2908	0,0057186	0,0040299	0,0045005	0,0039631
54	50,2908	50,3799	42,9264	43,6156	0,0202800	0,0049829	0,0092455	0,0027772
55	43,6156	43,8698	38,2612	40,8690	0,0042305	0,0077216	0,0067488	0,0090480
56	40,8690	41,7850	37,6605	38,2230	0,0044802	0,0036695	0,0038954	0,0031870
57	38,2230	39,4520	36,4417	38,8823	0,0002924	0,0030368	0,0022720	0,0035539
58	38,8823	40,7054	37,7644	38,3197	0,0002124	0,0027299	0,0020284	0,0031933
59	38,3197	40,9185	38,2960	39,2467	0,0005714	0,0019730	0,0015824	0,0027525
60	39,2467	41,6821	37,5580	37,7328	0,0015475	0,0048293	0,0039148	0,0061968
61	37,7328	40,7392	37,1736	39,4212	0,0019162	0,0034543	0,0030257	0,0033977
62	39,4212	40,6386	36,6297	36,7887	0,0047765	0,0035482	0,0038905	0,0033452
63	36,7887	38,9835	36,2335	36,2619	0,0002080	0,0025955	0,0019302	0,0042058
64	36,2619	36,3853	30,3917	30,7420	0,0272709	0,0056642	0,0116849	0,0025958
65	30,7420	31,5825	29,3732	30,7937	0,0000028	0,0026286	0,0018969	0,0028334
66	30,7937	32,1215	30,0906	30,7027	0,0000088	0,0021295	0,0015385	0,0023721
67	30,7027	31,1612	28,5137	29,3192	0,0021258	0,0031205	0,0028433	0,0029638
68	29,3192	29,7749	27,9022	29,3754	0,0000037	0,0021084	0,0015219	0,0027570
69	29,3754	30,8767	28,2138	29,8272	0,0002330	0,0039769	0,0029337	0,0039670
70	29,8272	31,0196	28,2117	28,4382	0,0022741	0,0036226	0,0032468	0,0038508
71	28,4382	29,5578	27,3076	29,3241	0,0009409	0,0027714	0,0022613	0,0031968
72	29,3241	31,8304	29,1598	31,4620	0,0049524	0,0019266	0,0027698	0,0013816
73	31,4620	33,6054	30,4419	33,2777	0,0031480	0,0036711	0,0035253	0,0035814
74	33,2777	33,5011	30,8227	32,7328	0,0002727	0,0033663	0,0025043	0,0047629
75	32,7328	34,7630	31,9245	34,2186	0,0019707	0,0028665	0,0026169	0,0026849
76	34,2186	36,0745	33,0460	33,6334	0,0002976	0,0037296	0,0027732	0,0043153
77	33,6334	34,6610	32,3190	33,6242	0,0000001	0,0024471	0,0017653	0,0024922
78	33,6242	34,6561	32,5106	33,4139	0,0000394	0,0020269	0,0014731	0,0020264
79	33,4139	37,7149	32,4924	35,3129	0,0030556	0,0099274	0,0080125	0,0102959
80	35,3129	36,3949	32,4355	32,9621	0,0047460	0,0047993	0,0047844	0,0043587
81	32,9621	34,4639	30,5944	30,7848	0,0046699	0,0052877	0,0051156	0,0054921
82	30,7848	33,5883	29,9184	32,9176	0,0044871	0,0049605	0,0048286	0,0044854
83	32,9176	32,9289	26,9684	27,2404	0,0358362	0,0060931	0,0143811	0,0020653
84	27,2404	28,4970	26,3158	27,1784	0,0000052	0,0031682	0,0022868	0,0032500
85	27,1784	27,6269	25,7250	26,8892	0,0001145	0,0024995	0,0018349	0,0028755
86	26,8892	27,9932	26,2240	27,3470	0,0002851	0,0020213	0,0015375	0,0019903
87	27,3470	30,0430	25,9304	28,3502	0,0012979	0,0103344	0,0078164	0,0101984
88	28,3502	29,7957	25,9290	27,9527	0,0001994	0,0095834	0,0069685	0,0098839
89	27,9527	29,5415	27,3122	28,4245	0,0002802	0,0029698	0,0022204	0,0030560
90	28,4245	31,6355	28,3427	29,7784	0,0021652	0,0052040	0,0043572	0,0066176

91	29,7784	30,9600	29,2616	30,8653	0,0012853	0,0010951	0,0011481	0,0010533
92	30,8653	31,6812	29,7112	31,5854	0,0005318	0,0018553	0,0014865	0,0024102
93	31,5854	31,9494	29,4980	30,1853	0,0020555	0,0023924	0,0022985	0,0022257
94	30,1853	33,8311	29,5668	33,2563	0,0093873	0,0054497	0,0065470	0,0043887
95	33,2563	39,2160	33,2028	38,5177	0,0215720	0,0055198	0,0099928	0,0032007
96	38,5177	42,2011	37,4079	40,0249	0,0014732	0,0066988	0,0052427	0,0068123
97	40,0249	40,6950	38,6549	39,1240	0,0005182	0,0011225	0,0009541	0,0010738
98	39,1240	39,6244	35,1198	36,6661	0,0042098	0,0056557	0,0052528	0,0056385
99	36,6661	37,0274	31,9005	32,5223	0,0143823	0,0055498	0,0080110	0,0039596
100	32,5223	34,1403	30,5347	33,8622	0,0016300	0,0055993	0,0044933	0,0069201
101	33,8622	34,1752	31,9638	32,4372	0,0018485	0,0015234	0,0016140	0,0013284
102	32,4372	33,9798	30,4718	31,7216	0,0004975	0,0057443	0,0042823	0,0057074
103	31,7216	31,8912	27,0297	28,0372	0,0152444	0,0077886	0,0098662	0,0065439
104	28,0372	28,7876	26,8938	28,3790	0,0001469	0,0022584	0,0016700	0,0026154
105	28,3790	29,7968	27,6945	28,9917	0,0004562	0,0025006	0,0019309	0,0024532
106	28,9917	29,3294	27,1218	27,9898	0,0012369	0,0025841	0,0022087	0,0026419
107	27,9898	28,0213	26,0275	27,8377	0,0000297	0,0027127	0,0019650	0,0048947
108	27,8377	28,0251	25,1182	25,7460	0,0061015	0,0036394	0,0043254	0,0031072
109	25,7460	26,7533	22,6115	22,6115	0,0168528	0,0076350	0,0102036	0,0064552
110	22,6115	23,7306	21,0614	23,5478	0,0016462	0,0064828	0,0051351	0,0082981
111	23,5478	26,9560	22,9253	26,1872	0,0112860	0,0087564	0,0094613	0,0074755
112	26,1872	26,5141	24,2714	24,8634	0,0026909	0,0028657	0,0028170	0,0026281
113	24,8634	24,9288	22,6558	22,9008	0,0067607	0,0019590	0,0032970	0,0012233
114	22,9008	23,2454	20,2215	20,2910	0,0146399	0,0040554	0,0070048	0,0024570
115	20,2910	21,6027	19,9880	20,9074	0,0008957	0,0026718	0,0021769	0,0027261
116	20,9074	22,8328	20,8884	22,0915	0,0030349	0,0027884	0,0028571	0,0029585
117	22,0915	22,2363	20,7231	21,7517	0,0002403	0,0023906	0,0017914	0,0032416
118	21,7517	22,0558	19,9367	20,2059	0,0054344	0,0030027	0,0036803	0,0023848
119	20,2059	22,4595	19,6270	20,6743	0,0005252	0,0088836	0,0065545	0,0102690
120	20,6743	22,1204	19,1918	19,7899	0,0019114	0,0093460	0,0072743	0,0098103
121	19,7899	21,5783	18,9327	20,6421	0,0017778	0,0078672	0,0061704	0,0076651
122	20,6421	21,7423	20,0931	21,0790	0,0004387	0,0029417	0,0022443	0,0028999
123	21,0790	21,2736	18,7741	19,3478	0,0073445	0,0049735	0,0056342	0,0043571
124	19,3478	19,8461	18,0525	18,1270	0,0042479	0,0028455	0,0032363	0,0025896
125	18,1270	20,5736	18,0490	20,3867	0,0138011	0,0032392	0,0061823	0,0016815
126	20,3867	21,5775	18,9457	21,3918	0,0023163	0,0075645	0,0061021	0,0093916
127	21,3918	21,9006	20,1705	20,7370	0,0009665	0,0030126	0,0024425	0,0029115
128	20,7370	21,2329	19,6401	20,6007	0,0000435	0,0030234	0,0021930	0,0033094
129	20,6007	21,5913	18,4959	18,9823	0,0066942	0,0093865	0,0086363	0,0088459
130	18,9823	19,9421	18,3244	19,1721	0,0000990	0,0035402	0,0025813	0,0035373
131	19,1721	19,2817	17,1711	17,4706	0,0086372	0,0033829	0,0048470	0,0024681
132	17,4706	17,9190	16,1576	16,3154	0,0046798	0,0035449	0,0038611	0,0031347
133	16,3154	18,2686	15,9041	17,5793	0,0055663	0,0074554	0,0069290	0,0069061
134	17,5793	17,9678	16,3136	17,6990	0,0000461	0,0046464	0,0033645	0,0064202
135	17,6990	18,1777	16,7806	18,1555	0,0006482	0,0029475	0,0023068	0,0042290
136	18,1555	19,3447	17,8783	18,8698	0,0014894	0,0025321	0,0022415	0,0024075
137	18,8698	20,9214	18,6645	20,9048	0,0104888	0,0024633	0,0046997	0,0013222
138	20,9048	21,1976	18,9319	19,3966	0,0056070	0,0042234	0,0046089	0,0036393
139	19,3966	21,9718	19,2297	21,6492	0,0120710	0,0042222	0,0064093	0,0028686

140	21,6492	22,0162	19,3212	19,5381	0,0105262	0,0044586	0,0061493	0,0032776
141	19,5381	19,7123	18,5944	19,3568	0,0000869	0,0016707	0,0012294	0,0021511
142	19,3568	21,6244	19,1986	21,1350	0,0077238	0,0040951	0,0051062	0,0033247
143	21,1350	21,4889	20,1225	20,1688	0,0021895	0,0013123	0,0015567	0,0011656
144	20,1688	21,2165	19,1036	19,5550	0,0009553	0,0051332	0,0039690	0,0053969
145	19,5550	20,1994	18,3781	19,3292	0,0001349	0,0044126	0,0032206	0,0045598
146	19,3292	19,4414	18,1495	18,4022	0,0024153	0,0014310	0,0017053	0,0011886
147	18,4022	19,3365	18,3226	19,1046	0,0014031	0,0009083	0,0010462	0,0007787
148	19,1046	20,6760	19,1046	19,6053	0,0006695	0,0028654	0,0022535	0,0042029
149	19,6053	21,3993	18,8601	21,3547	0,0073053	0,0051554	0,0057545	0,0049970
150	21,3547	21,8620	19,4014	19,4538	0,0086917	0,0037716	0,0051426	0,0029992
151	19,4538	19,5131	17,6546	19,2269	0,0001377	0,0049557	0,0036132	0,0083243
152	19,2269	19,3532	17,8280	19,1553	0,0000139	0,0033640	0,0024305	0,0054915
153	19,1553	20,1208	18,8391	19,5858	0,0004941	0,0019754	0,0015626	0,0019723
154	19,5858	20,2396	18,1874	18,3584	0,0041882	0,0040968	0,0041223	0,0038962
155	18,3584	18,3923	15,2171	16,0661	0,0177893	0,0110857	0,0129537	0,0104384
156	16,0661	16,4490	15,1736	15,9609	0,0000432	0,0032403	0,0023494	0,0036009
157	15,9609	16,4857	15,6395	16,1919	0,0002065	0,0013083	0,0010013	0,0012876
158	16,1919	16,3263	13,6276	13,6675	0,0287262	0,0052258	0,0117742	0,0019737
159	13,6675	14,5327	13,6250	14,1075	0,0010038	0,0016919	0,0015001	0,0019311
160	14,1075	14,1270	12,7905	13,3588	0,0029736	0,0037900	0,0035625	0,0043374
161	13,3588	14,4272	13,2946	13,8546	0,0013280	0,0028290	0,0024107	0,0033146
162	13,8546	14,0988	11,8263	12,2030	0,0161119	0,0092224	0,0111422	0,0074868
163	12,2030	13,3249	11,9512	13,2097	0,0062835	0,0034919	0,0042698	0,0028514
164	13,2097	13,2687	11,9836	12,5695	0,0024676	0,0042352	0,0037426	0,0048911
165	12,5695	12,7046	11,8300	11,9793	0,0023132	0,0016500	0,0018348	0,0013887
166	11,9793	12,6696	11,4399	11,6446	0,0008027	0,0049020	0,0037597	0,0055437
167	11,6446	12,1466	11,2281	12,1210	0,0016078	0,0024702	0,0022299	0,0028762
168	12,1210	12,2025	11,1440	11,1551	0,0068967	0,0014527	0,0029697	0,0006848
169	11,1551	11,7381	10,3787	10,6924	0,0017945	0,0068815	0,0054640	0,0069013
170	10,6924	11,2708	10,3669	10,4187	0,0006726	0,0032344	0,0025206	0,0042950
171	10,4187	10,6299	9,7214	10,0507	0,0012929	0,0034918	0,0028791	0,0034325
172	10,0507	10,6574	9,9128	10,3050	0,0006242	0,0023815	0,0018918	0,0025068
173	10,3050	10,4584	9,8433	10,1317	0,0002877	0,0017261	0,0013253	0,0017927
174	10,1317	10,8018	9,8811	10,7562	0,0035777	0,0025865	0,0028627	0,0023964
175	10,7562	11,9342	10,2857	11,4284	0,0036747	0,0096298	0,0079704	0,0092130
176	11,4284	11,9302	11,1252	11,6540	0,0003821	0,0022924	0,0017601	0,0022549
177	11,6540	12,6102	11,5833	11,8500	0,0002784	0,0034995	0,0026020	0,0050412
178	11,8500	12,0410	10,9921	11,1298	0,0039313	0,0026346	0,0029959	0,0021939
179	11,1298	12,1445	11,0304	11,7770	0,0031945	0,0033953	0,0033393	0,0032686
180	11,7770	13,5734	11,7264	13,2614	0,0140913	0,0052540	0,0077166	0,0038311
181	13,2614	14,2408	12,9054	13,7324	0,0012179	0,0043777	0,0034972	0,0042810
182	13,7324	14,8227	13,6413	13,7497	0,0000016	0,0034490	0,0024884	0,0057939
183	13,7497	14,2561	13,1498	14,1918	0,0010012	0,0028758	0,0023534	0,0035655
184	14,1918	15,5812	14,1121	14,7070	0,0012717	0,0044124	0,0035372	0,0056254
185	14,7070	15,1211	13,7713	14,3407	0,0006362	0,0041259	0,0031535	0,0041348
186	14,3407	15,7673	14,1576	15,6605	0,0077511	0,0028038	0,0041824	0,0019408
187	15,6605	15,9024	14,0903	14,1081	0,0108970	0,0031088	0,0052790	0,0019687
188	14,1081	14,2675	12,8503	12,9959	0,0067435	0,0028675	0,0039475	0,0021007

189	12,9959	15,0826	12,9356	14,9749	0,0200916	0,0040298	0,0085054	0,0017484
190	14,9749	16,8951	14,5483	16,6259	0,0109383	0,0069564	0,0080660	0,0057952
191	16,6259	17,1862	16,1158	16,9815	0,0004478	0,0018946	0,0014914	0,0020277
192	16,9815	17,2248	15,9930	17,1468	0,0000938	0,0027162	0,0019854	0,0042420
193	17,1468	17,7052	16,2971	16,4932	0,0015100	0,0028505	0,0024770	0,0028805
194	16,4932	17,0155	14,5847	14,8532	0,0109698	0,0076439	0,0085707	0,0064802
195	14,8532	16,1125	14,6427	15,9559	0,0051289	0,0025930	0,0032996	0,0020200
196	15,9559	16,3596	14,5777	15,8407	0,0000525	0,0066286	0,0047962	0,0083109
197	15,8407	17,4626	15,4690	17,2844	0,0076071	0,0044087	0,0053000	0,0036347
198	17,2844	17,3610	16,4240	16,6501	0,0013980	0,0009992	0,0011103	0,0008829
199	16,6501	16,6721	15,1550	15,6494	0,0038417	0,0030671	0,0032830	0,0031041
200	15,6494	15,8483	14,7441	15,4314	0,0001967	0,0025321	0,0018813	0,0030521
201	15,4314	16,4053	14,9390	16,3643	0,0034449	0,0030529	0,0031621	0,0031090
202	16,3643	18,8150	16,3524	18,0787	0,0099270	0,0060039	0,0070970	0,0056432
203	18,0787	19,6344	17,9607	18,7937	0,0015044	0,0033884	0,0028634	0,0039097
204	18,7937	19,9411	17,0983	17,3198	0,0066705	0,0092516	0,0085324	0,0095693
205	17,3198	18,3925	17,0650	17,6647	0,0003888	0,0026558	0,0020241	0,0029382
206	17,6647	18,5377	16,3794	16,5403	0,0043251	0,0059904	0,0055264	0,0062382
207	16,5403	17,3797	15,5294	15,8222	0,0019705	0,0055744	0,0045702	0,0058255
208	15,8222	17,1637	15,6016	16,2357	0,0006657	0,0042955	0,0032841	0,0050829
209	16,2357	16,9209	15,4799	15,6959	0,0011431	0,0035196	0,0028574	0,0037671
210	15,6959	16,9208	14,9757	16,7767	0,0044337	0,0057426	0,0053779	0,0059765
211	16,7767	17,1841	15,6492	15,9131	0,0027929	0,0032982	0,0031574	0,0030071
212	15,9131	17,0505	15,7454	16,7259	0,0024819	0,0022121	0,0022872	0,0019671
213	16,7259	17,7251	16,3594	17,5720	0,0024351	0,0022733	0,0023184	0,0020873
214	17,5720	18,0630	17,0892	17,3087	0,0002278	0,0014477	0,0011078	0,0015312
215	17,3087	19,2864	17,3054	17,9014	0,0011336	0,0054355	0,0042368	0,0080691
216	17,9014	19,7160	17,6724	18,8404	0,0026139	0,0049772	0,0043187	0,0052098
217	18,8404	20,3060	18,5755	19,5375	0,0013199	0,0034571	0,0028615	0,0036051
218	19,5375	21,0418	19,3773	20,6924	0,0032983	0,0021216	0,0024495	0,0017827
219	20,6924	22,9066	20,6916	22,7821	0,0092559	0,0015957	0,0037302	0,0005579
220	22,7821	24,2214	22,4360	24,1371	0,0033382	0,0016420	0,0021147	0,0013324
221	24,1371	24,4935	22,1642	22,6494	0,0040475	0,0034295	0,0036017	0,0029938
222	22,6494	23,0509	21,5377	21,9935	0,0008636	0,0019718	0,0016630	0,0018793
223	21,9935	22,8783	20,9491	22,2148	0,0001003	0,0038416	0,0027991	0,0040149
224	22,2148	26,6712	22,1969	25,7103	0,0213548	0,0086108	0,0121619	0,0068265
225	25,7103	27,7277	24,4809	27,4106	0,0041009	0,0061709	0,0055941	0,0064077
226	27,4106	28,6629	25,7691	27,9098	0,0003256	0,0055380	0,0040855	0,0061179
227	27,9098	30,9205	27,8214	30,4918	0,0078288	0,0025529	0,0040230	0,0017209
228	30,4918	31,6708	29,6229	30,9687	0,0002409	0,0021412	0,0016117	0,0021349
229	30,9687	33,2694	30,7073	32,2768	0,0017117	0,0025500	0,0023164	0,0025932
230	32,2768	32,4966	28,8795	30,2173	0,0043472	0,0052833	0,0050225	0,0055301
231	30,2173	30,9754	26,1368	27,4365	0,0093204	0,0108238	0,0104049	0,0100461
232	27,4365	27,7533	25,6057	26,2884	0,0018271	0,0025376	0,0023396	0,0024398
233	26,2884	26,3128	24,5918	25,5134	0,0008955	0,0019420	0,0016504	0,0024833
234	25,5134	26,3261	24,6950	25,4040	0,0000185	0,0020383	0,0014755	0,0020409
235	25,4040	27,1817	24,6432	26,7360	0,0026118	0,0037973	0,0034670	0,0035966
236	26,7360	27,7711	26,1335	26,8224	0,0000104	0,0018431	0,0013324	0,0019135
237	26,8224	28,0610	25,5258	27,0187	0,0000532	0,0044628	0,0032341	0,0045251

238	27,0187	27,1096	25,1970	25,8157	0,0020744	0,0018753	0,0019308	0,0018578
239	25,8157	27,8133	24,9330	25,7904	0,0000010	0,0059750	0,0043103	0,0068040
240	25,7904	26,6278	24,6881	25,9381	0,0000326	0,0028476	0,0020632	0,0029960
241	25,9381	26,7485	25,2328	26,7424	0,0009325	0,0013412	0,0012273	0,0016089
242	26,7424	27,3091	23,9108	24,8026	0,0056699	0,0066398	0,0063695	0,0061175
243	24,8026	24,9482	22,1823	23,5845	0,0025362	0,0059245	0,0049804	0,0071730
244	23,5845	23,8296	21,9011	22,1113	0,0041601	0,0019537	0,0025685	0,0014810
245	22,1113	24,7494	21,7936	24,6057	0,0114252	0,0036746	0,0058343	0,0024130
246	24,6057	25,1372	22,3007	24,4788	0,0000267	0,0071571	0,0051702	0,0097330
247	24,4788	26,0122	23,1534	25,3656	0,0012665	0,0062881	0,0048888	0,0066091
248	25,3656	26,5642	24,1195	25,3025	0,0000062	0,0046577	0,0033615	0,0046584
249	25,3025	25,7544	20,2931	20,6388	0,0415048	0,0123660	0,0204856	0,0076470
250	20,6388	21,8399	19,7384	19,9254	0,0012375	0,0046400	0,0036919	0,0056100
251	19,9254	20,6291	19,0208	20,5871	0,0010671	0,0028819	0,0023762	0,0037474
252	20,5871	21,8204	20,0031	21,6530	0,0025484	0,0027961	0,0027271	0,0027284

APÊNDICE B

```
Sub LC()
```

```
Application.ScreenUpdating = False
```

```
Application.EnableEvents=False
```

```
Application.Calculation = xlCalculationManual
```

```
Dim hi As Double 'maximo
```

```
Dim li As Double 'mínimo
```

```
Dim oi As Double 'abertura
```

```
Dim ci As Double 'fechamento
```

```
Dim i As Integer ' contador de dias
```

```
Dim q As Integer ' contador de numeros e simulacoes (incrementa cada vez que um ponto cai fora do LC)
```

```
Dim sigma As Double ' estimador
```

```
Dim ARL As Integer ' calcula o ARL barra
```

```
Dim LC As Double 'guardo o valor do LC
```

```
Dim aux As Integer 'para o loop do numero de simulacoes
```

```
Dim Nsim As Integer
```

```
ThisWorkbook.Sheets("Sheet1").EnableCalculation = True
```

```
Nsim = 5000
```

```
LC = 0.03
```

```
For aux = 1 To Nsim
```

```
'atualiza S0 para 30
```

```
Range("R1").Value = Range("B7").Value
```

```
i = 1
```

```
q = 0
```

sigma = 0

calculate

Do While sigma < LC

oi = Range("n4").Value

hi = Range("o4").Value

li = Range("p4").Value

ci = Range("q4").Value

sigma = Log(ci / oi) * Log(ci / oi) 'neste caso estamos calculando o clássico

If sigma < LC Then

i = i + 1

Range("R1").Value = Range("Q4").Value 'abertura do dia i recebe fechamento do dia 1-1

Calculate

If Not Application.CalculationState = xlDone Then

DoEvents

End If

Else

Exit Do

End If

Loop

Range("u" & aux).Value = i 'plota na coluna U os comprimentos de sequencia

Next aux

Application.Calculation = xlCalculationAutomatic

```
Application.ScreenUpdating = True
```

```
Application.EnableEvents = True
```

```
End Sub
```