

# MÉTODO DE PLANIFICAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS NÃO OSCILANTES PARA O MOVIMENTO LONGITUDINAL DE TRENS

**Paulo Ricardo Arantes Gilz**

paulo.gilz@outlook.com

***Resumo.** Choques entre vagões durante o deslocamento de uma locomotiva é um exemplo de como vibrações podem fazer com que sistemas mecânicos operem de maneira indesejada. Neste trabalho, métodos de planificação de trajetórias visando a eliminação de oscilações para sistemas compostos por um número finito de modos vibrantes são apresentados. Em um primeiro momento, são determinadas as condições de controlabilidade dos sistemas em estudo. Em seguida, propõe-se um algoritmo de planificação de trajetórias e se adicionam etapas de otimização com o intuito de reduzir o consumo do controle e a magnitude das oscilações. Por fim, simulações numéricas e experimentos são conduzidos afim de verificar a exequibilidade e eficiência dos métodos propostos.*

***Palavras chave:** Trens (Controle), Vibrações, Planificação de trajetórias.*

## 1. Introdução

Um problema recorrente em diversos campos da engenharia (industrial, civil, aeroespacial, militar, etc) é a presença de vibrações em sistemas mecânicos. Quando estas vibrações atingem determinadas frequências e amplitudes, ou duram muito tempo, podem ocasionar a disfunção ou até mesmo a deterioração dos equipamentos pelos quais estes sistemas são formados (THOMSON, 1973).

O foco deste trabalho será o estudo de sistemas mecânicos compostos por um número finito de modos vibrantes excitados por entradas externas, como guas portuárias, satélites e trens. Para estes sistemas, vibrações residuais devem ser evitadas a fim de impedir que choques ou forças excessivas provoquem o mau funcionamento do equipamento.

Os métodos comumente apresentados na literatura (PETIT; ROUCHON, 2013; ZANDI, 2011; FRIEDLAND, 2005; LAROCHE, 2004-2005; MARTIN, 1999) para a planificação de trajetórias de sistemas não levam em conta a eliminação de vibrações residuais, sendo dedicados principalmente a estabilizar o sistema em torno de uma trajetória pré-definida e a conduzir o sistema de um ponto inicial a um ponto final (por exemplo, o método das saídas de Brunovský e o método da equação de Riccati para o problema de controle entre dois pontos, respectivamente – ambos apresentados Petit e Rouchon (2013)).

O trabalho desenvolvido por Gilz (2013) fornece um primeiro método para a planificação de trajetórias sem vibrações residuais ao final do percurso de sistemas a modos não acoplados. Um resumo deste método será apresentado neste trabalho e servirá como base para o desenvolvimento da estratégia de planificação para sistemas a modos vibrantes acoplados.

O objetivo deste artigo é de propor dois métodos de planificação de trajetórias para sistemas caracterizados por um número finito de modos vibrantes: um método voltado para o caso de sistemas a modos não acoplados e outro para sistemas a modos acoplados. Em ambos os casos, a trajetória resultante deve deslocar o sistema entre dois pontos estacionários dados, de forma a não provocar vibrações residuais ao fim do percurso.

Em um primeiro momento, será apresentado um método de planificação de trajetórias que pode ser aplicado a sistemas contendo modos vibrantes fisicamente não acoplados, que neste artigo serão representados de maneira genérica por um conjunto de pêndulos amortecidos movimentados por um carro motorizado. Para este primeiro método, resultados obtidos por meio de experiências práticas baseadas no deslocamento de estruturas compostas por um número finito de graus de liberdade sobre um carro motorizado serão utilizados para o estudo da exequibilidade e do funcionamento da estratégia proposta.

Em seguida, baseando-se nos primeiros desenvolvimentos realizados para sistemas contendo modos desacoplados, um método específico será proposto para a planificação de trajetórias para o movimento longitudinal de trens, permitindo a determinação de um percurso a ser realizado de forma a transferir o conjunto de vagões que compõe o trem de uma posição a outra em tempo finito sem que existam vibrações remanescentes entre vagões após a realização deste deslocamento. Por fim, simulações numéricas do comportamento da dinâmica longitudinal dos vagões sob influência de trajetórias geradas a partir da estratégia proposta serão apresentadas e permitirão a análise do desempenho da técnica em questão.

## 2. Sistemas compostos de um número finito de modos vibrantes acoplados

### 2.1. Modelo

A Fig. (1) apresenta o sistema que se deseja estudar, um conjunto de  $n$  pêndulos independentes ligados a um mesmo carro motorizado rígido. Este é um caso particular de um sistema composto por  $n$  subsistemas do tipo massa-mola-amortecedor independentes para os quais os termos forçantes de cada subsistema são equivalentes.

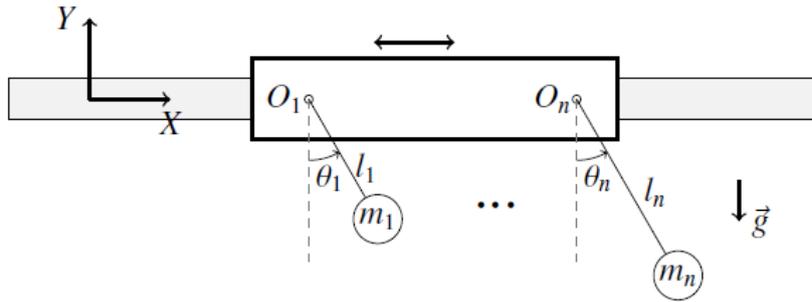


Figura 1 - Sistema n-pêndulos-carro

Matematicamente, um sistema genérico do tipo massa-mola-amortecedor pode ser modelado pela Eq. (1):

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\theta}_1(t) + c_1 \dot{\theta}_1(t) + k_1 \theta_1(t) &= a(t) \\
 &\vdots \\
 m_n \ddot{\theta}_n(t) + c_n \dot{\theta}_n(t) + k_n \theta_n(t) &= a(t) \\
 \forall (1 \leq i \leq n), m_i > 0, k_i > 0, c_i \geq 0 & \\
 \text{et} & \\
 \ddot{p}(t) = a(t), \dot{a}(t) = u(t) &
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $m_i$ ,  $c_i$  e  $k_i$  são respectivamente a massa, o coeficiente de dissipação e o coeficiente de rigidez do modo  $i$ ,  $p(t)$  é o deslocamento do carro,  $\dot{p}(t)$  é a velocidade de deslocamento do carro,  $a(t)$  é a aceleração do carro,  $\theta_i(t)$  o deslocamento angular do modo  $i$  e  $\dot{\theta}_i(t)$  a velocidade angular do modo  $i$ .

O estado do sistema acima é dado pela Eq. (2):

$$x(t) = [p(t), \dot{p}(t), a(t), \theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \dots, \theta_n(t), \dot{\theta}_n(t)]^T \tag{2}$$

O problema se resume a determinar uma lei horária que transfira o sistema do repouso, definido pela Eq. (3), ao estado final dado pela Eq. (4):

$$x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0]^T \tag{3}$$

$$x(T) = [p_T, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0]^T \tag{4}$$

## 2.2. Controlabilidade

Antes de se buscar desenvolver um método para planificação de trajetórias para o sistema em estudo, devem-se determinar as condições necessárias para que sua controlabilidade seja garantida.

Utilizando-se uma representação sob forma de espaço de estados e para o sistema representado pelas Eq. (1) e fazendo-se o estudo do posto de sua matriz de controlabilidade, é possível demonstrar que o mesmo é controlável se, e somente se, todos os autovalores da matriz dinâmica do sistema são distintos entre si.

## 2.3. Método de planificação proposto

Particularmente, o sistema representado pela Fig. (1) pode ser descrito pelas Eq. (5):

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{m_1 l_1^2} \dot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1} \theta_1 &= -\frac{\ddot{x}}{l_1} \\
 &\vdots \\
 \ddot{\theta}_n + \frac{c_n}{m_n l_n^2} \dot{\theta}_n + \frac{g}{l_n} \theta_n &= -\frac{\ddot{x}}{l_n}
 \end{aligned} \tag{5}$$

onde  $l_i$  é o comprimento do pêndulo  $i$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade local e  $x$  é o deslocamento do carro medido em um referencial inercial ( $x_T$  é o deslocamento para o tempo final  $t=T$ ).

As condições de deslocamento do sistema e ausência de oscilações implicam 8 restrições para cada um dos graus de liberdade, dadas pelas Eq. (6):

$$\begin{aligned} \int_0^T \theta dt = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad \ddot{\theta}(0) = 0 \\ \int_0^T \int_0^s \theta ds dt = -\frac{x_T}{g} \quad \theta(T) = 0 \quad \dot{\theta}(T) = 0 \quad \ddot{\theta}(T) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Além disso, como a entrada do sistema é a mesma para todos os graus de liberdade, as Eq. (7) também devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} l_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{m_1 l_1} \dot{\theta}_1 + g \theta_1 - \left( l_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{c_2}{m_2 l_2} \dot{\theta}_2 + g \theta_2 \right) &= 0 \\ &\vdots \\ l_n \ddot{\theta}_n + \frac{c_n}{m_n l_n} \dot{\theta}_n + g \theta_n - \left( l_n \ddot{\theta}_n + \frac{c_n}{m_n l_n} \dot{\theta}_n + g \theta_n \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Para cada grau de liberdade, deseja-se utilizar um polinômio para representar a trajetória a ser realizada, como indica a Eq. (8):

$$\theta(t) = \sum_{i=0} a_i t^i \quad (8)$$

Para que se possa determinar o grau dos polinômios associados a cada grau de liberdade, a seguinte análise é feita:

- Para cada modo deve-se ter ao menos um polinômio do sétimo grau para poder atender as oito restrições indicadas em Eq. (6);
- Isso produz  $8n$  equações a serem respeitadas segundo a Eq. (5) e  $8(n-1)$  outras equações segundo a Eq. (7);
- Cada vez que se aumenta de  $p$  o grau de cada polinômio, o número total de variáveis a serem determinadas se torna  $n(8+p)$  e o número de equações se torna  $8n+8(n-1)+p(n-1)$ ;
- O número de variáveis deve ser pelo menos igual ao número de equações para que os coeficientes possam ser determinados. Admitindo-se a igualdade, obtém-se  $p=8n-8$  e, deste modo, o número de variáveis relacionadas a cada polinômio é  $8+p=8n$ .

Uma vez estabelecidos o grau dos polinômios e o número total de equações, podem-se definir as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & \dots & T^{8n-1} \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & \dots & (8n-1)T^{8n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 & \dots & (8n-1)(8n-2)T^{8n-3} \\ T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{4} & \frac{T^5}{5} & \frac{T^6}{6} & \dots & \frac{T^{8n}}{8n} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} & \frac{T^4}{12} & \frac{T^5}{20} & \frac{T^6}{30} & \frac{T^7}{42} & \dots & \frac{T^{8n+1}}{8n(8n+1)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} g & \alpha_i & 2l_i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g & 2\alpha_i & 6l_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g & 3\alpha_i & 12l_i & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g & (8n-2)\alpha_i & \frac{(8n-1)!}{(8n-3)!}l_i \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g & (8n-1)\alpha_i \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{m_i l_i} \quad (11)$$

Definem-se ainda os coeficientes  $(a_j)_{1 \leq j \leq 8n}$  do polinômio que define  $\theta_i(t)$  e os seguintes vetores:

$$D = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{x_r}{g} \right]^T \quad (12)$$

$$c^j = \left[ a_1^j \ \dots \ a_{8n}^j \right]^T \quad (13)$$

Com isto, é possível escrever o sistema de equações lineares a ser resolvido, cuja solução fornece os coeficientes dos polinômios que definem as trajetórias planejadas para cada grau de liberdade:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & P \\ \hline Q_1 & -Q_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Q_1 & 0 & -Q_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ Q_1 & 0 & \dots & 0 & -Q_{n-1} & 0 \\ Q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c^{n-2} \\ c^{n-1} \\ c^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ D \\ \vdots \\ \vdots \\ D \\ D \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 2.3. Experiências e resultados

Experiências foram conduzidas com o objetivo de verificar a aplicabilidade e o bom funcionamento do método proposto para evitar oscilações ao fim do deslocamento de estruturas compostas por um número finito de modos vibrantes. Para tanto, hastes cilíndricas em latão, placas de madeira, pequenos pedaços de plástico e cola epóxi foram utilizados para produzir sistemas mecânicos que seriam acoplados a um carro motorizado se deslocando sobre um trilho (Gilz (2013) dá mais detalhes sobre as especificações dos materiais utilizados e a montagem).

Em geral, foi possível notar que as oscilações residuais constatadas ao fim do percurso das trajetórias planejadas eram inferiores às amplitudes referentes às oscilações constatadas para trajetórias arbitrárias. A existência dessas oscilações residuais foi devida principalmente ao fato de que o carro motorizado não era capaz de executar com

perfeição os movimentos solicitados, uma vez que a trajetória era dividida em 32 sub-trajetórias de aceleração constante, havendo assim uma diferença entre a trajetória efetivamente realizada e aquela idealizada para a solução do problema.

No entanto, mesmo em se utilizando uma trajetória um pouco diferente da que fora planejada, as oscilações residuais constatadas para estas trajetórias foram visivelmente inferiores às oscilações provocadas por movimentos arbitrários, o que indica a aplicabilidade e eficiência do método proposto.

### 3. Sistemas compostos de um número finito de modos vibrantes desacoplados

#### 3.1 Modelo

A Fig. (2) ilustra o modelo proposto para a dinâmica longitudinal de trens, baseado nos modelos comumente adotados na literatura (IWNICKI, 2006; BARBOSA, 1993; TODESCO, 2011; GAO et al., 2013).

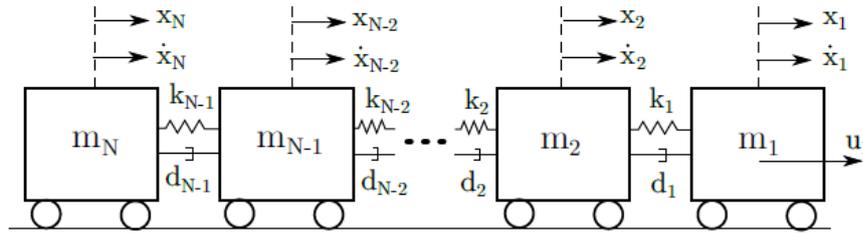


Figura 2 - Modelo adotado para o movimento longitudinal do trem

Admitindo-se as hipóteses de modelo unidimensional, percurso retilíneo, resistências ao rolamento e aerodinâmica participando como perturbações externas e motorização apenas no primeiro vagão, obtêm-se as Eq. (15) para a dinâmica simplificada de um sistema de N vagões:

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= m_1 \ddot{x}_1 = u_1 + k_1(x_2 - x_1) + d_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \sum F_i &= m_i \ddot{x}_i = k_i(x_{i+1} - x_i) + k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + d_i(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + d_{i-1}(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i), \quad 1 < i < N \\ \sum F_N &= m_N \ddot{x}_N = k_{N-1}(x_{N-1} - x_N) + d_{N-1}(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_N) \end{aligned} \quad (15)$$

onde:

- $u_1$  é a força motriz do primeiro vagão;
- $k_i(x_{i+1}-x_i)$  e  $k_{i-1}(x_{i-1}-x_i)$  são forças elásticas respectivamente caracterizadas pelos coeficientes de mola  $k_i$  e  $k_{i-1}$  e pelos deslocamentos relativos entre vagões vizinhos;
- $d_i(\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i)$  e  $d_{i-1}(\dot{x}_{i-1}-\dot{x}_i)$  são forças de dissipação respectivamente caracterizadas pelos coeficientes de dissipação  $d_i$  e  $d_{i-1}$  e pelas velocidades relativas entre vagões vizinhos;
- $m_i$  é a massa do vagão  $i$ .

#### 3.2 Controlabilidade

Para possibilitar o estudo da controlabilidade do sistema, a representação sob forma de espaço de estados dada pela Eq. (16) é utilizada:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B u_1(t) \quad (16)$$

Analisando-se a matriz de controlabilidade do sistema em questão, é possível verificar que sua controlabilidade não depende dos autovalores da matriz de dinâmica A (diferentemente do caso de sistemas cujos modos vibrantes são desacoplados), mas de outras relações algébricas entre os parâmetros físicos do mesmo. Constata-se ainda que, quando estas relações são satisfeitas, os valores admitidos pelos parâmetros do sistema são destoantes dos que normalmente são empregados nos modelos físicos reais. Por exemplo, quando  $N=3$ , demonstra-se que o sistema é controlável se a seguinte inequação for válida:

$$k_1^2 m_2 m_3 + d_1(m_2 + m_3)(d_1 k_2 - d_2 k_1) \neq 0 \quad (17)$$

Assim, analisando a ordem de grandeza dos termos da inequação anterior, obtém-se:

$$o(k_1^2 m_2^2) - o(d_1^2 k_1 m_2) \neq 0 \Rightarrow o(k_1 m_2) \neq o(d_1^2) \quad (18)$$

Uma configuração que não respeite a inequação (18) é muito incomum para sistemas físicos com modos vibrantes acoplados, uma vez que os coeficientes de dissipação geralmente assumem valores muito baixos em relação aos parâmetros de inércia e rigidez (segundo (BARBOSA, 1993), os coeficientes de dissipação são da ordem de  $10^4$  N.s/m, enquanto que as massas e os coeficientes elásticos são da ordem de  $10^5$  kg e  $10^7$  N/m respectivamente). Isto indica que a inequação (18) é geralmente respeitada e que configurações comumente encontradas para os trens resultam em sistemas dinâmicos controláveis.

### 3.3 Método de planificação proposto

O método de planificação desenvolvido a seguir é baseado na representação da evolução temporal dos estados por meio da matriz de transição de estados do sistema. Nesta representação, a convolução entre a matriz de transição e a força atuante sobre o primeiro vagão são associados a constantes numéricas. Estas constantes fazem parte da descrição do perfil da entrada do sistema, que permite a determinação da trajetória que satisfaz as condições de deslocamentos, velocidades e eliminação de oscilações impostas.

Primeiramente, define-se a matriz de transição:

$$\Phi(t_0, t_1) = \exp(A(t_1 - t_0)) \quad (19)$$

Para qualquer tempo  $t$ , o estado do sistema pode ser determinado com auxílio desta matriz pela Eq. (20):

$$X(t) = \Phi(t, 0)X(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) B u_1(\tau) d\tau \quad (20)$$

A força motriz  $u_1(t)$  será descrita da seguinte forma:

$$u_1(t) = f(t) \left( a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + a_3 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \right) \quad (21)$$

onde  $f(t)$  é a função apresentada na Fig. (3):

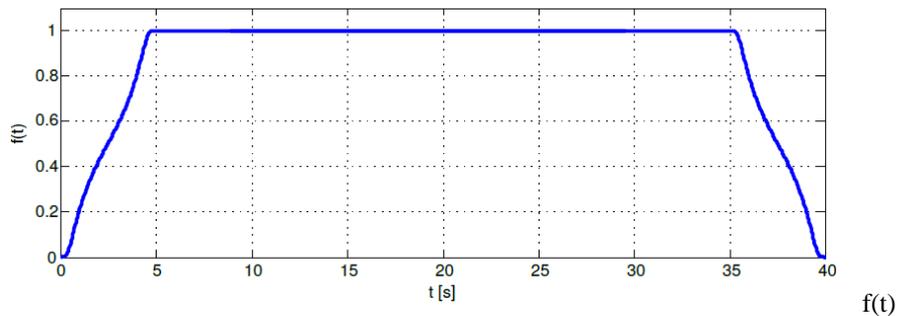


Figura 3 - Função

A ideia é representar  $u_1(t)$  como uma série de Fourier truncada multiplicada por uma função contínua  $f(t)$ , que é nula e possui derivadas de todas as ordens nulas para os tempos iniciais e finais  $t=0$  e  $t=T$  (o que evita a presença de oscilações após a realização da trajetória desejada) e que vale 1 para tempos entre  $t=T_{\text{int}}$  e  $t=T-T_{\text{int}}$ .

Esta representação de  $u_1(t)$  pode ser reformulada, obtendo-se:

$$u_1(t) = a_0 \tilde{f}_0(t) + a_1 \tilde{f}_1(t) + a_2 \tilde{f}_2(t) + a_3 \tilde{f}_3(t) + a_4 \tilde{f}_4(t) + \dots \quad (22)$$

Com esta outra representação de  $u_1(t)$ , o termo de convolução da Eq. (20) pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\int_0^T \Phi(T, \tau) B u_1(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \int_0^T \Phi(T, \tau) B \tilde{f}_i(\tau) d\tau \quad (23)$$

e a Eq. (20) pode ser reescrita como segue:

$$X(T) - \Phi(T, 0)X(0) = Q_{(2N) \times (M)} a \quad (24)$$

onde

$$a = [a_0, a_2, \dots, a_{M-1}]' \quad (25)$$

e cada coluna  $i$  da matriz  $Q$  é dada por:

$$Q(i) = \int_0^T \Phi(T, \tau) B \tilde{f}_i(\tau) d\tau \quad (26)$$

A partir do cálculo da matriz  $Q$ , resolve-se o sistema de equações lineares dado pela Eq. (24) e se determinam os coeficientes que descrevem  $u_1(t)$ , solução do problema de planificação.

Se o sistema de equações descrito em Eq. (24) possuir um número de variáveis maior do que o número de equações, infinitas soluções são possíveis. Esta condição pode ser alcançada em se utilizando um número de termos na série de Fourier que descreve  $u_1(t)$  maior do que duas vezes o número de vagões ( $M > 2N$ ). Neste caso, é possível definir uma função objetivo a ser minimizada em função dos parâmetros  $a_0, \dots, a_{M-1}$  que caracterizam  $u_1(t)$ .

Com o intuito de reduzir o consumo de energia provocado pela força aplicada no deslocamento dos vagões e a magnitude dos choques entre vagões durante o percurso da trajetória planificada, uma etapa de otimização será adicionada ao método de planificação proposto. O critério de minimização relacionado ao consumo de energia da engendrado pela força motriz é dado pela Eq. (27) e o critério referente aos choques é dado pela Eq. (28).

$$\int_0^T u_1(t)^2 dt \quad (27)$$

$$\int_0^T (\tilde{I} \cdot \tilde{X}(t))' \cdot (\tilde{I} \cdot \tilde{X}(t)) dt \quad (28)$$

onde

$$\tilde{X} = [X_1, \dot{X}_1, X_1 - X_2, \dot{X}_1 - \dot{X}_2, \dots, X_{N-1} - X_N, \dot{X}_{N-1} - \dot{X}_N]' \quad (29)$$

e  $\tilde{I}$  é uma matriz com uma estrutura similar à da matriz identidade de tamanho  $2N$  com as duas primeiras entradas da diagonal principal nulas.

Esses critérios podem ser reescritos em função dos parâmetros  $a_0, \dots, a_{M-1}$ , dando lugares à matrizes definidas positivas  $R$  e  $S$ :

$$\int_0^T u_1(t)^2 dt = a' \cdot R \cdot a \quad (30)$$

$$\int_0^T (\tilde{X}'(t) \cdot \tilde{I}) \cdot (\tilde{I} \cdot \tilde{X}(t)) dt = a' \cdot S \cdot a \quad (31)$$

Por fim, deve-se levar em conta que o modelo adotado considera  $u_1(t)$  como uma força de tração. Isto implica que esta função deve ser sempre maior ou igual a zero. Uma maneira de obrigar a função a ser não-negativa é impor que seu valor calculado em alguns instantes  $t_{1 \leq i \leq p}$  deve ser maior ou igual a zero. Sendo assim, para cada  $t_i$ , uma restrição é imposta. Estas restrições podem ser formuladas da seguinte maneira:

$$u_1(t_i) = [f_0(t_i) \dots f_{M-1}(t_i)] \cdot a' \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq p \quad (31)$$

Estas últimas restrições podem ser reescritas sob a forma de um sistema de inequações  $U a \geq 0$ . Sendo assim, o problema completo de planificação de trajetórias pode-se escrever como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_a a \cdot (R + \alpha S) \cdot a' \\ Q a = X(T) - \Phi(T, 0)X(0) \\ U a \geq 0 \end{array} \right. \quad (32)$$

### 3.4 Simulação numérica e resultados

Para ilustrar a aplicação e estudar as propriedades método proposto, um exemplo numérico é apresentado e resolvido a seguir. Os parâmetros utilizados para este exemplo (número de vagões, massas, coeficientes elásticos e de dissipação) foram baseados nos valores apresentados por Barbosa (1993):

- $N=10$  (dez vagões);
- $t_1=0$  e  $T=t_{2N+1}=120$  [s];
- Posição inicial: 0; Posição final: 150 [m];
- Velocidade inicial: 0; Velocidade final: 18 [km/h];
- $m_1=108000$ ,  $m_2=110670$ ,  $m_3=113330$ ,  $m_4=116000$ ,  $m_5=118670$ ,  $m_6=121330$ ,  $m_7=124000$ ,  $m_8=126670$ ,  $m_9=129330$ ,  $m_{10}=132000$  [kg];
- $k_1=1.2600$ ,  $k_2=1.2075$ ,  $k_3=1.1550$ ,  $k_4=1.1025$ ,  $k_5=1.0500$ ,  $k_6=0.9975$ ,  $k_7=0.9450$ ,  $k_8=0.8925$ ,  $k_9=0.8400$  [ $\times 10^7$  N/m];
- $d_1=72000$ ,  $d_2=74000$ ,  $d_3=76000$ ,  $d_4=78000$ ,  $d_5=80000$ ,  $d_6=82000$ ,  $d_7=84000$ ,  $d_8=86000$ ,  $d_9=88000$  [N.s/m];
- $M$  (número de termos da série de Fourier): 60.

Este cenário foi simulado por meio de rotinas numéricas do software Matlab. Os deslocamentos, velocidades, potência necessária e forças internas entre vagões são apresentadas em Fig. (4), Fig. (5) e Fig. (6).

Observando-se a Fig. (4), verifica-se que o sistema partiu do repouso até a posição e velocidade desejadas dentro do tempo solicitado (todos os vagões deslocaram-se de 150 m e atingiram 18 km/h em um intervalo de 120 s). Além disso, não são constatadas oscilações residuais, tanto para o gráfico do deslocamento, quanto para o gráfico da velocidade. Conclui-se, assim, que o método permite a resolução do problema enunciado de planificação de trajetórias.

As Fig. (5) e (6) mostram que a força e a potência obtidas apresentam variações rápidas entre os valores máximos e mínimos, o que é causado pelo fato de que a condição de não-negatividade da força motriz é imposta de maneira discreta. Isto sugere um estudo mais aprofundado de como impor esta condição de maneira contínua, com o intuito de obter perfis de força e potência mais lisos, com picos e vales mais suaves.

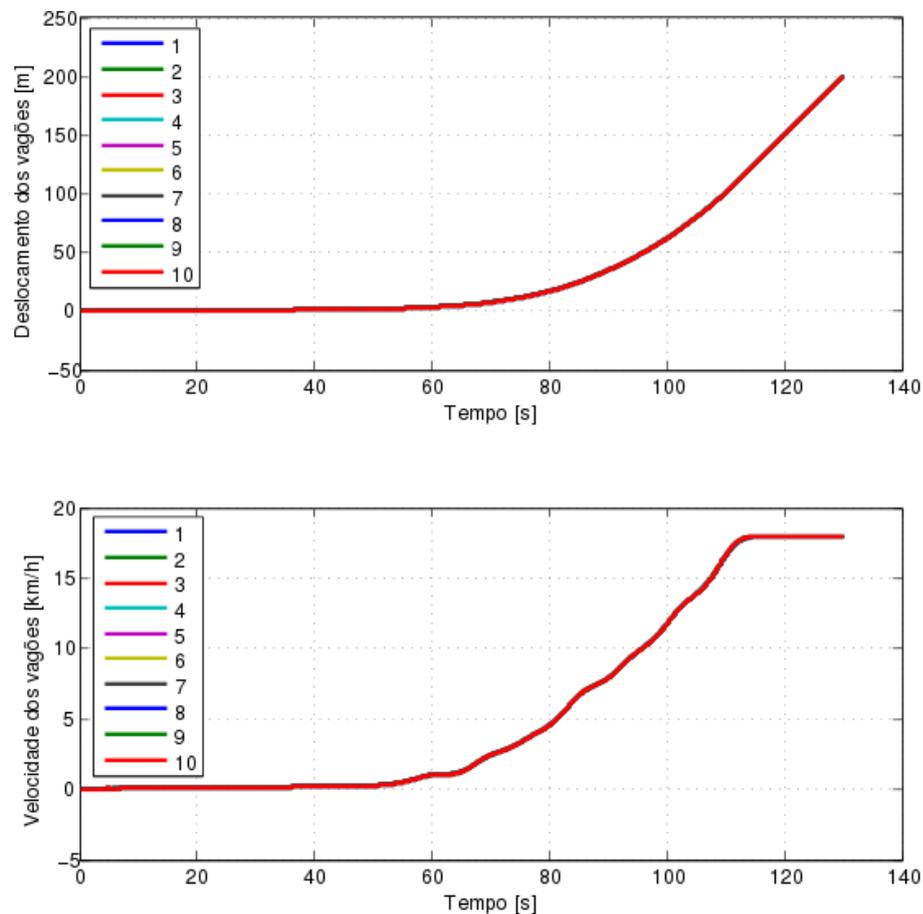


Figura 4 - Deslocamentos e velocidades dos vagões

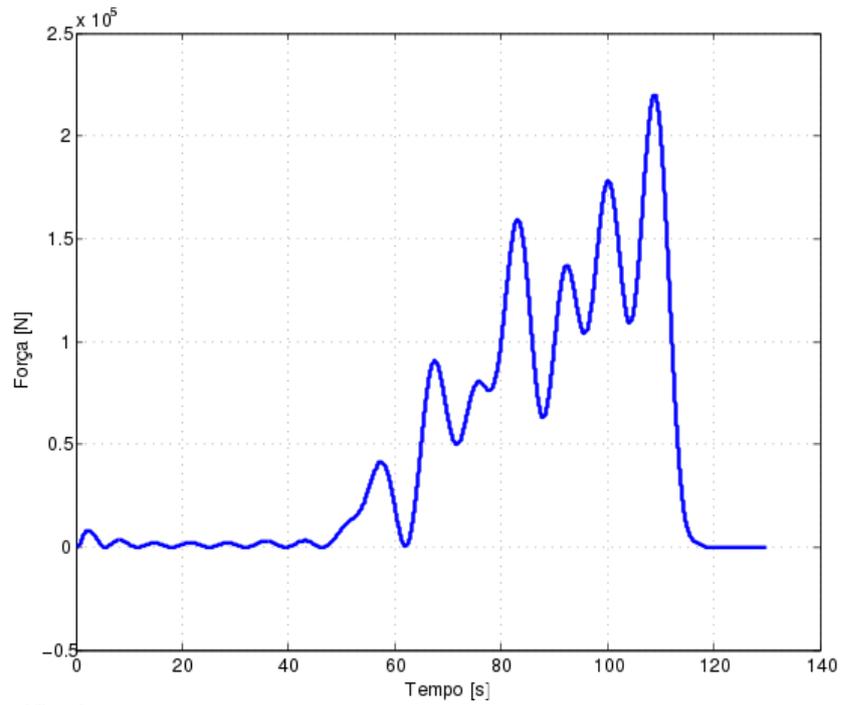


Figura 5 - Força planejada

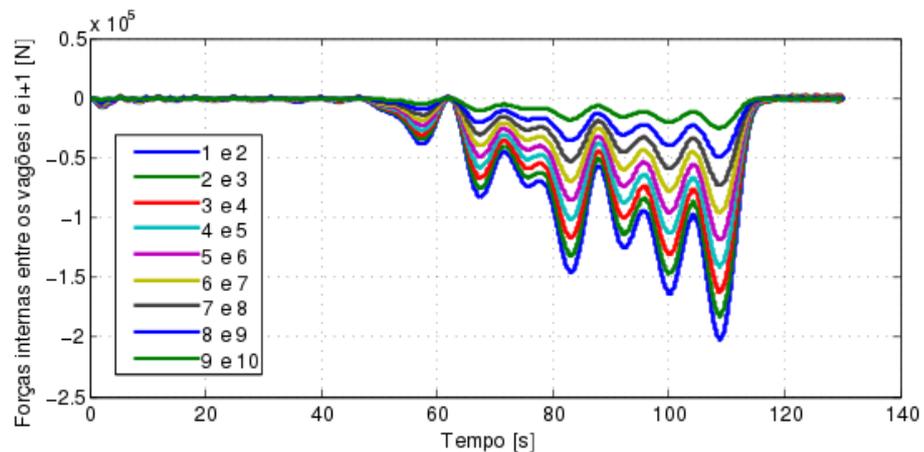
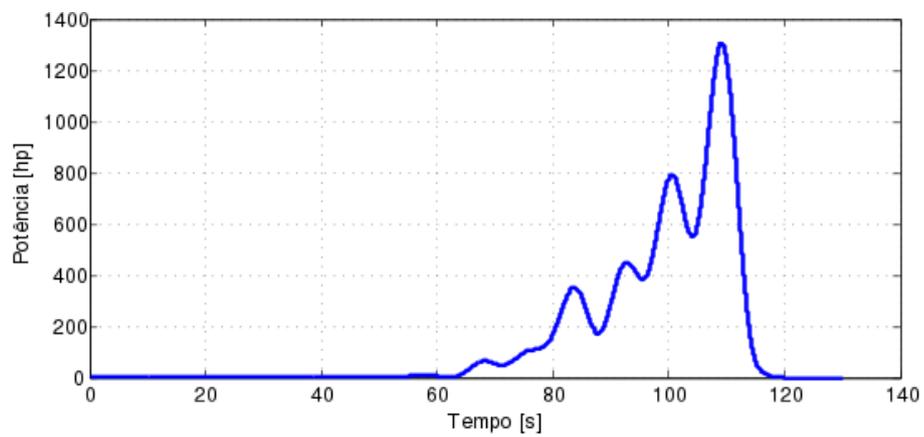


Figura 6 - Potência necessária e forças internas entre vagões consecutivos

#### 4. Conclusão

Tanto para sistemas compostos por modos desacoplados, quanto para sistemas a modos acoplados, foi possível estabelecer métodos de planificação diretos, de fácil implementação computacional e baixo custo numérico, capazes de atender os requisitos de deslocamento do sistema do repouso a um estado dado com eliminação de oscilações residuais. Além disso, para o caso de modos acoplados, uma etapa de otimização permitiu a minimização do consumo de energia engendrado pela força motriz atuante sobre o primeiro vagão e a redução da magnitude das oscilações durante o percurso da trajetória planificada. Neste caso também foi possível incluir um conjunto de restrições que permitiram a imposição da não-negatividade da força motriz, não havendo dispensa de energia com a frenagem dos vagões.

#### 5. Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa, por ter me guiado e colaborado no desenvolvimento dos trabalhos aqui apresentados.

#### 6. Referências

- BARBOSA, R. Estudo da Dinâmica Longitudinal do Trem. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1993.
- FRIEDLAND, B. Control System Design: An introduction to state-space methods. New York, USA: Dover Books, 2005.
- GAO, K. et al. Decentralized control of heavy-haul trains with input constraints and communication delays. Control Engineering Practice, Elsevier, v. 21, p. 420–427, 2013.
- GILZ, P. R. A. Projet de recherche: Planification de trajectoires n’engendrant pas d’oscillation à la fin du mouvement pour des systèmes possédant un nombre fini ou infini de modes de vibration. In: ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNIQUES AVANCÉES. Palaiseau, FRA, 2013.
- IWNICKI, S. Handbook of Railway Vehicle Dynamics. Florida, US: CRC Press, 2006. LAROCHE, B. Commande par platitude. Palaiseau, FRA: École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2004–2005.
- MARTIN, P. Systèmes plats: planification et suivi de trajectoires. Paris, FRA: École des Mines de Paris - Centre Automatique et Systèmes, 1999.
- PETIT, N.; ROUCHON, P. Automatique: dynamique et contrôle des systèmes. Paris, França: École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2013.
- THOMSON, W. Theory of vibrations with applications. New Jersey, USA: Prentice Hall Inc., 1973.
- TODESCO, J. Otimização do controle da dinâmica longitudinal do trem de carga equipado com um sistema de frenagem eletropneumático. Tese (Graduação em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.
- ZANDI, M. Flatness based control of a non-ideal dc/dc boost converter. IECON 2011 - 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, Shahid Beheshti Univ., Tehran, Iran, 2011.

#### 7. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

#### **NON-OSCILLATORY TRAJECTORIES DESIGN AND OPTIMISATION FOR THE LONGITUDINAL MOTION OF TRAINS**

**Paulo Ricardo Arantes Gilz**

paulo.gilz@outlook.com

**Abstract.** Shocks between wagons during the displacement of a locomotive are an example of how vibrations can make mechanical systems cease to function optimally. In this report, trajectory planning methods aiming the elimination of oscillations for systems composed by a finite number of vibrational modes are presented. Firstly, conditions guaranteeing the studied systems controllability are determined. Then, a trajectory planning algorithm is proposed and optimization steps are added in order to reduce the consumption and the magnitude of oscillations. Finally, numerical simulations and experiments are conducted in order to assess the proposed methods practicability and efficiency.

**Keywords.** *Trains (control), Vibrations, Trajectory design*