Engenharia Automotiva I – PME-3540

Notas de Aula

GEOMETRIA E IRREGULARIDADE DO PAVIMENTO CONFORTO DO PASSAGEIRO

Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

1 Introdução

No processo de estudo do desempenho dinâmico do veículo em tráfego e avaliação do conforto dos passageiros é necessário o conhecimento das características do veículo e do tipo de excitação ao qual ele está submetido. O trato do desempenho dinâmico do veículo é realizado pela modelagem, identificação de suas características próprias e a simulação do seu comportamento em movimento. Esta estratégia requer o conhecimento da entrada do sistema. Neste caso a geometria e o conteúdo de irregularidade do pavimento são necessários para avaliação de desempenho do veículo, determinação do conforto do passageiro e investigação da segurança no tráfego.

A descrição geometria de uma trilha da pista de rolamento corresponde às variações da direção, da elevação ou curvatura, de longo comprimento de onda, que uma linha apresenta ao longo do percurso (ver Figura 1). As irregularidades são as variações de menor comprimento de onda, que ocorrem em torno da grande variação de geometria (ver Figura 2 e Figura 3).

Figura 1 – Geometria da Pista (Serra do Rio do Rastro, SC. Fonte: foto internet)

Figura 2 – Traçado Irregular da Rodovia (Fonte: foto internet)

Figura 3 - Traçado Irregular da Via Férrea (Fonte: foto internet)

As irregularidades tem definição em cada seção (variação da bitola e superelevação) ao longo de um trecho, conforme utilizado na ferrovia (nivelamento vertical, alinhamento lateral) conforme mostrado na Figura 4.

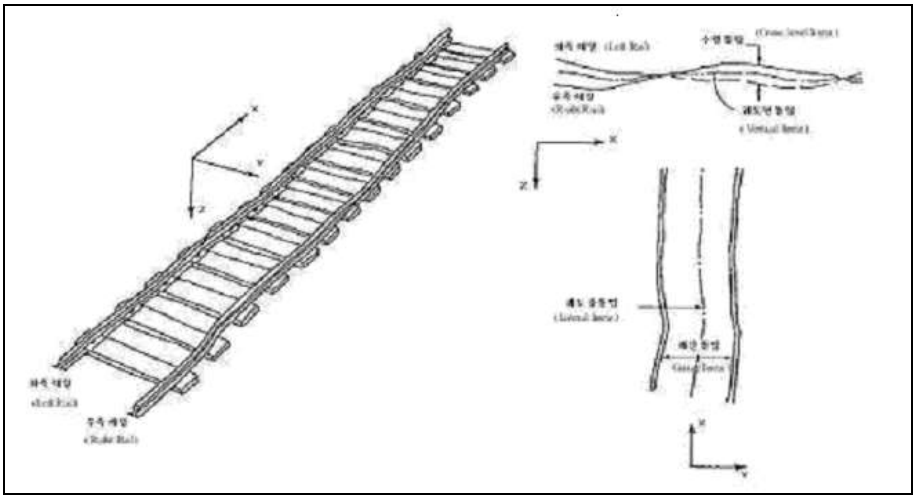


Figura 4 - Irregularidade de Seção da Via Férrea

O traçado de uma via tem descrição geometrica plana definida em cada trecho, conforme utilizado na ferrovia (direção, aclive/declive, curvatura, transição) ao longo do seu comprimento, conforme mostrado na Figura 5.

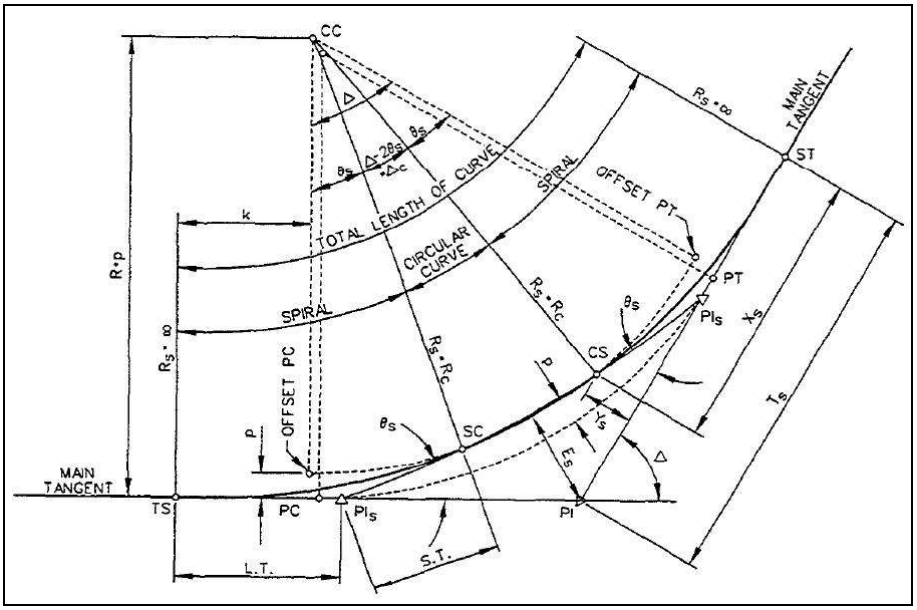


Figura 5 – Curvatura Horizontal (Fonte: foto internet)

A geometria da pista é definida ao longo do traçado ***S***. A variável independente de posição (***s***) guarda similaridade com variável tempo (***t***) se a velocidade ***Vx*** de percurso do veículo for constante segundo a expressão: $s = s_0 + V_x \cdot t$.

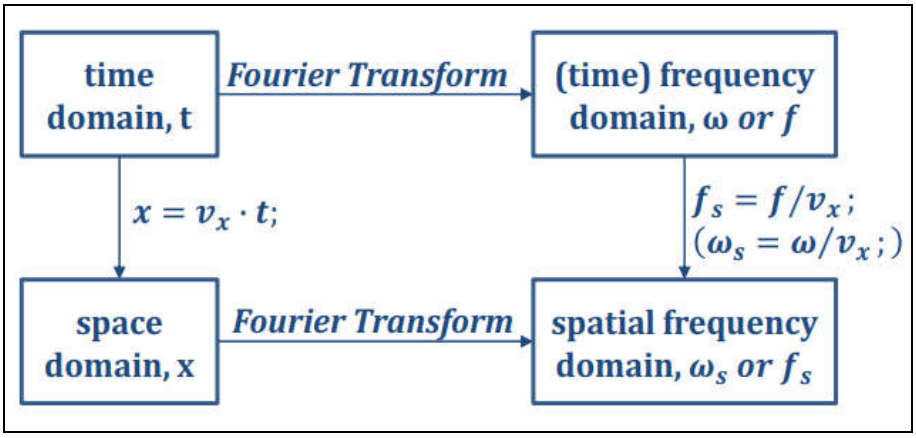


Figura 6 – Relação Temporal/Espacial (fonte: *Jacobson* et al 2020)

Uma irregularidade periódica pode ser descrita por uma função periódica "**espacial**" com frequência Ω (em unidade de rad/metro), do tipo:

$$z(s) = Z\,\mathrm{sen}(\Omega \cdot s + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad z(s) = Z\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s + \phi_0\right) \tag{1}$$

Para variável independente "espaço" tem-se que: $\Omega = 2\pi \cdot \mathrm{fs} = 2\pi/\lambda$ ou $\lambda = 1/\mathrm{fs} = 2\pi/\Omega$.

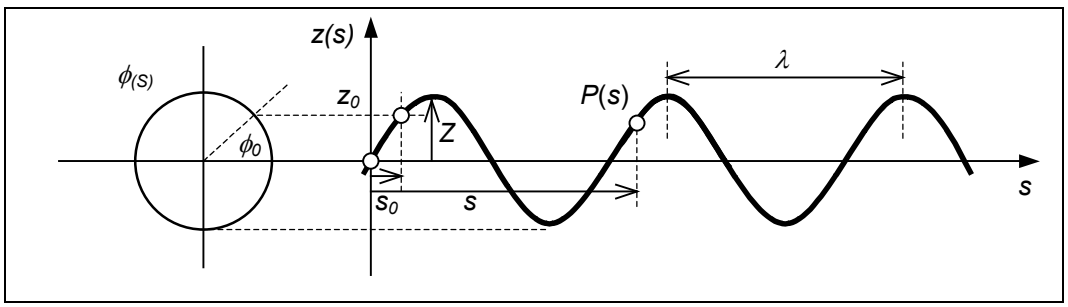


Figura 7 – Função Periódica Espacial

onde o comprimento de onda é $\lambda = V_x \cdot T$ em metros. A função "espacial" é equivalente a uma função periódica "**temporal**" $y(t) = Y\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi)$ com frequência ω (em unidade de rad/s) com período de cada oscilação é $T = \lambda / V$ em segundos. Portanto para variável independente "tempo" tem-se que: $\omega = 2\pi \cdot \mathrm{f}$ e $T = 1/\mathrm{f} = 2\pi/\omega$ e considerando a velocidade translacional V_x obtêm-se: $\omega = V_x \cdot \Omega$ e $\mathrm{f} = V_x \cdot \mathrm{fs}$.

$$y(t) = Y\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) \qquad \text{onde} \qquad \omega \cdot t = \phi \tag{2}$$

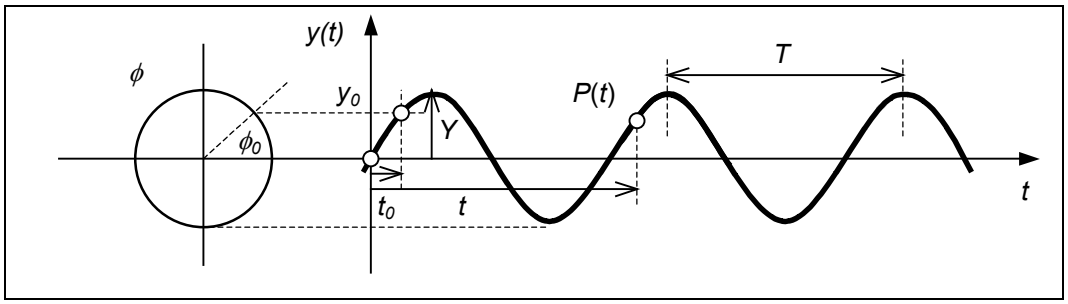


Figura 8 – Função Periódica Temporal

2 Fundamentos de Geometria Analítica

Um ponto ***P*** no espaço $\Re^3$ descreve a localização de um ponto da trilha com o vetor posição instantâneo $\vec{r}(s)$, do traçado ***S***, medido a partir de uma origem ***O***. Uma sequência de pontos $\boldsymbol{P}_i$, com vetores posição $\vec{r}(s_i)$, mostram o percurso ***S*** da via ao longo do espaço, conforme apresentado na Figura 9.

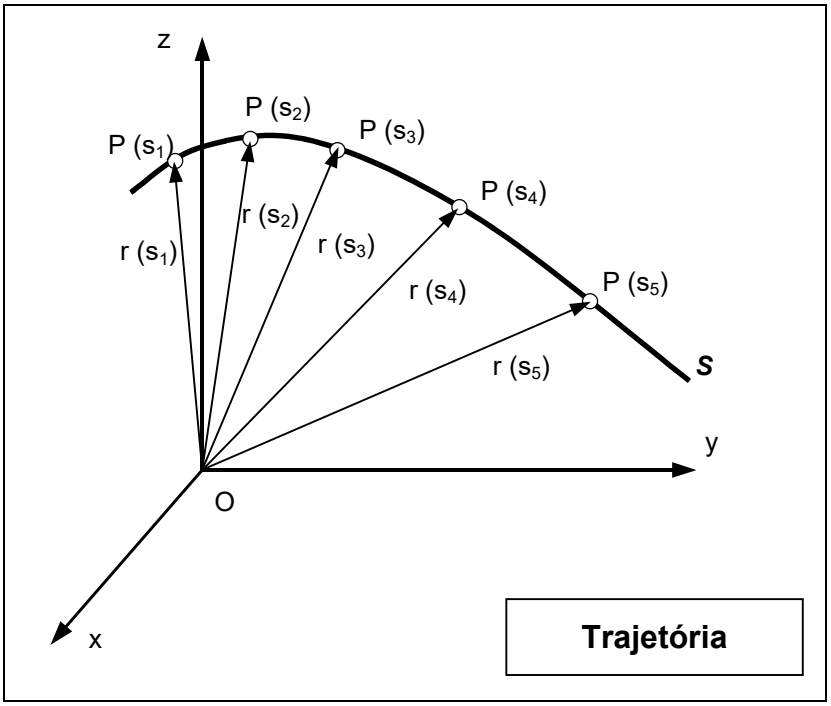


Figura 9 – Trajetória do Ponto

Um ponto qualquer $P(s)$ do traçado ***S*** tem sua posição expressa no $\Re^3$ em função do parâmetro ***s*** que pode ser um comprimento de arco (medido em metros) como:

$$(P(s)-O)=\vec{r}(s) \quad \text{ou} \quad P(s)=O+\vec{r}(s) \tag{3}$$

Para um ponto ***O*** coincidente com a origem (0, 0, 0) fixa, obtêm-se as coordenada cartesianas do ponto $P(s)$:

$$P(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k} \tag{4}$$

Um pequeno segmento *d**s*** de ***P***(s) em ***S***, expresso no referencial cartesiano, tem seu comprimento dado por:

$$P(s+ds) - P(s) = ds = (x(s+ds) - x(s))\,\vec{i} + (y(s+ds) - y(s))\,\vec{j} + (z(s+ds) - z(s))\,\vec{k} \tag{5}$$

$$ds = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad |ds| = \sqrt{dx^2 + dx^2 + dz^2} \tag{6}$$

A variação da posição do ponto $P(s)$ ao longo do traçado ***S*** terá direção do próprio traçado ***S***. Portanto a variação de $P(s)$ ao longo da curva ***S*** na direção tangencial $\vec{t}$, corresponde à derivada de $P(s)$ em relação à ***s*** resultando em:

$$\vec{t} = \frac{d}{ds} P(s) = \frac{d}{ds} \vec{r}(s) \tag{7}$$

que é um vetor unitário tangente ao traçado ***S*** e de sentido concordante com o sentido adotado dos arcos crescentes, conforme mostrado na Figura 10. Decorre da geometria diferencial que o produto escalar de um vetor por sua derivada, são ortogonais resultando numa direção normal $\vec{n}$:

$$\vec{t} \cdot \frac{d\,\vec{t}}{ds} = 0 \qquad \text{onde} \qquad \frac{d\,\vec{t}}{ds} \perp \vec{t} \qquad \text{portanto} \qquad \frac{d\,\vec{t}}{ds} \Rightarrow \vec{n} \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} P(s) = \frac{d}{ds} \vec{t} = \kappa\,\vec{n} \tag{9}$$

onde o escalar $\boldsymbol{\kappa}$ é a curvatura de ***S***. Os versores $\vec{t}$ e $\vec{n}$ formam o plano normal onde a curvatura de ***S***, com raio ***R***, se desenvolve ($\kappa = 1/R$). De maneira simplificada e ilustrativa a Figura 10 apresenta o deslocamento d***s*** para um correspondente deslocamento angula de arco d$\boldsymbol{\phi}$ e os

versores ortogonais $\vec{t}$ e $\vec{n}$ descritos no plano "*osculador*". Durante um deslocamento infinitesimal d***s***, obtêm-se a relação entre a curvatura e o raio:

$$\frac{d}{ds}\vec{t} = \kappa\vec{n} \quad \text{como} \quad ds = R\cdot d\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R}\frac{d\vec{t}}{d\phi} = \kappa\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{R} \tag{10}$$

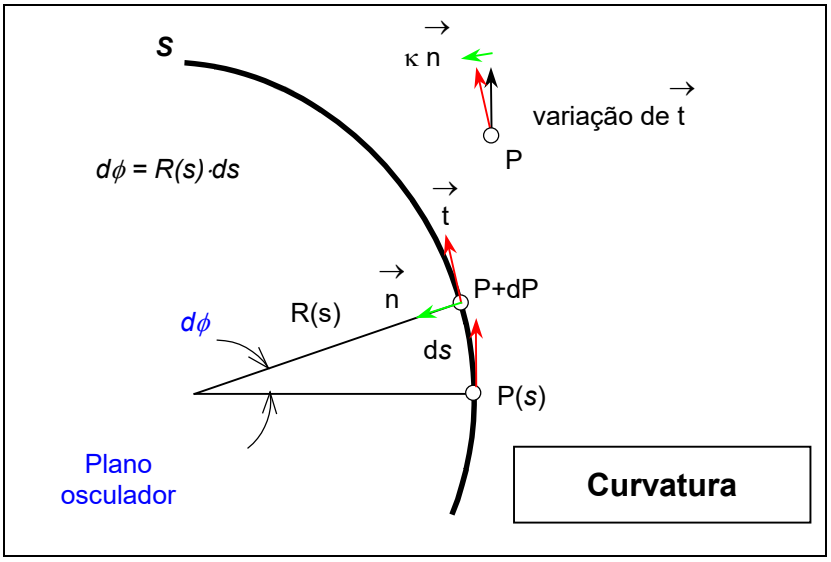


Figura 10 – Curvatura e Plano Osculador

A direção para onde a trilha se estende ou seja, a orientação do trilho/Via, pode ser descrita em um referencial intrínseco que acompanha o ponto $P(s)$. Este tipo de referencial é conhecido como triedro de ***Frenet***, conforme mostrado na Figura 11, sendo constituído por um versor tangencial $\vec{t}$, um versor normal $\vec{n}$ a este e um terceiro versor $\vec{b}$ normal aos outros dois (binormal).

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad ; \quad \vec{n} = \kappa\frac{d\vec{t}}{ds} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \vec{t}\wedge\vec{n} \tag{11}$$

Os versores $\vec{t}$ e $\vec{n}$ definem o plano osculador onde a curvatura ocorre. Portanto no plano binormal $\vec{b}$ não tem variação.

2.1 Fórmulas de FRENET

Da geometria diferencial resultam as fórmulas de ***Frenet*** que indicam como o traçado ***S*** se curva no espaço $\Re^3$. Derivando a relação $\vec{b}\cdot\vec{t}=0$ com respeito a ***s*** obtêm-se:

$$\frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{t}+\vec{b}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{t}+\vec{b}\cdot\frac{\vec{n}}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{t}=0 \tag{12}$$

Logo, a derivada do versor $\vec{b}$ é normal a $\vec{t}$ e $\vec{b}$ sendo portanto, paralelo a $\vec{n}$. Defini-se a torção do traçado ***S*** como:

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=\gamma\,\vec{n} \tag{13}$$

onde o termo γ é a torção da curva em ***P***(s) que tem a direção $\vec{n}$, conforme mostrado na Figura 11.

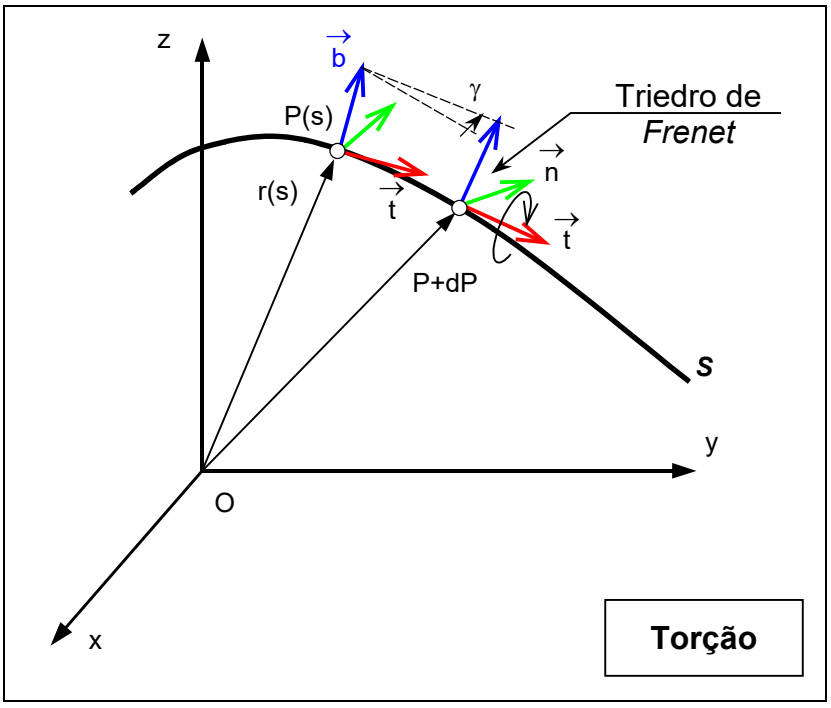


Figura 11 – Torção do Traçado

Finalmente derivando o produto vetorial $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ obtêm-se:

$$\frac{d}{ds}\vec{n} = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\vec{n} = \gamma\,\vec{n} \wedge \vec{t} + \kappa\,\vec{b} \wedge \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\vec{n} = -\gamma\,\vec{b} - \kappa\,\vec{t} \qquad (14)$$

As relações de *Frenet* resultam em:

$$\frac{d}{ds}\vec{t} = \frac{1}{R}\vec{n} = \kappa\,\vec{n} \qquad \Rightarrow \quad \text{curvatura } \kappa \text{ de } \boldsymbol{s} \qquad (15)$$

$$\frac{d}{ds}\vec{b} = \gamma\,\vec{n} \qquad \Rightarrow \quad \text{torção } \gamma \text{ de } \boldsymbol{s} \qquad (16)$$

$$\frac{d}{ds}\vec{n} = -\kappa\,\vec{t} - \gamma\,\vec{b} \qquad (17)$$

onde $\boldsymbol{\kappa}$ é a curvatura de $\boldsymbol{s}$ no plano osculador ($\vec{t}$ e $\vec{n}$). Portanto a torção γ de $\boldsymbol{s}$ corresponde a variação da direção do versor binormal $\vec{b}$, ou torção do plano osculador.

2.2 Velocidade do Ponto

Considerando agora que a posição do ponto ***P*** é uma função do tempo (não mais da posição ***s***) tem-se num referencial fixo a posição e velocidade, conforme mostrado na Figura 12:

$$P(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_P(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_P(t) = \frac{d}{dt}P(t)\,\vec{t} \tag{18}$$

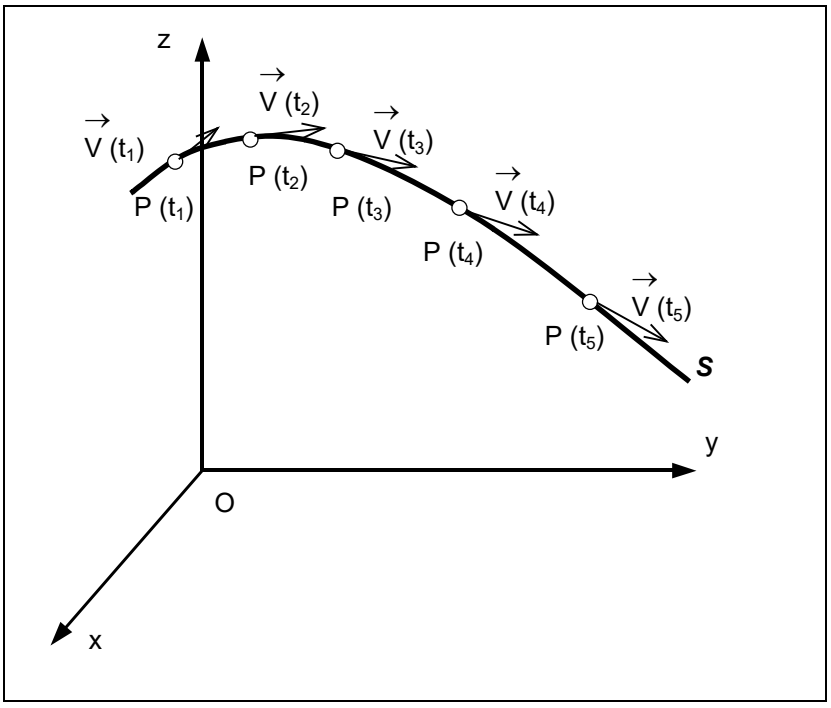


Figura 12 - Velocidade do Ponto

O versor tangente $\vec{t}$ neste caso tem a direção da velocidade e a aceleração tem componentes tangencial e normal:

$$\vec{a}_P(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_P(t) = \dot{V}(t)\,\vec{t} + \frac{V^2}{R}\,\vec{n} \tag{19}$$

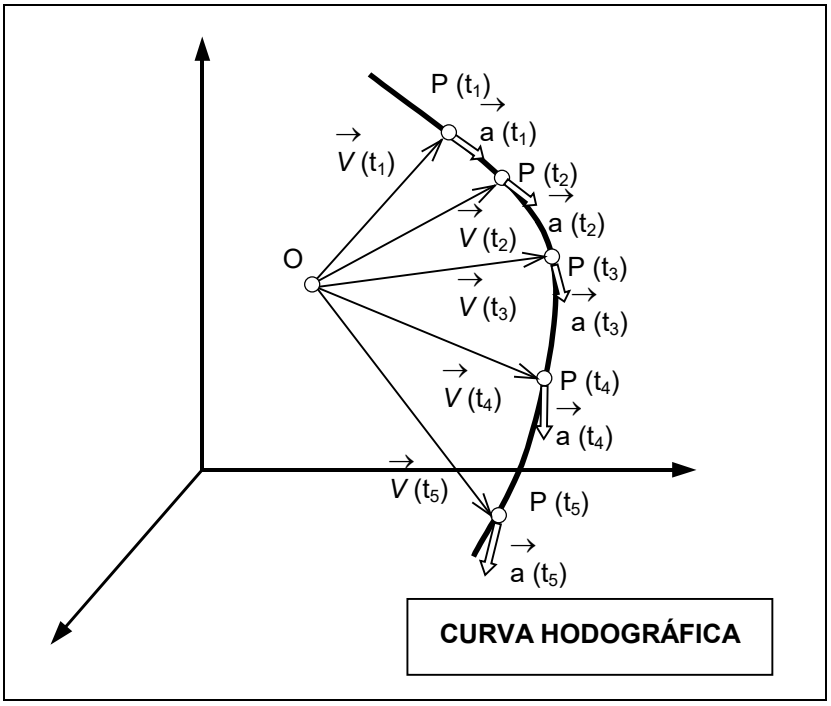


Figura 13 – Curva Hodográfica

Note que para velocidade constante, $\dot{V}(t) = 0$ e o vetor binormal pode ser obtido do produto vetorial entre a velocidade (que é tangencial) e a aceleração que tem a direção normal:

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{b} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{a}}{\left|\vec{V} \wedge \vec{a}\right|} = \frac{1}{\kappa V^3}\left(\vec{V} \wedge \vec{a}\right) \tag{20}$$

Tomando os vetores velocidades $\vec{V}_P = V_P(t) \cdot \vec{t}$ com origem coincidentes com um único ponto, pode-se traçar a curva hodográfica que descreve os vetores de velocidade $\vec{V}_P(t)$ a cada instante e as respectivas acelerações $\vec{a}_P(t)$, conforme apresentado na Figura 13.

3 Traçado da Via

O traçado de uma via em geral é composto por classes de objetos (*ISO*-19107) como trechos retos e inevitavelmente algumas curvas, conforme mostrado na Figura 14. Adicionalmente devido a conveniências dinâmicas a transição entre trechos retos e curvos é feita por uma curva de raio variável chamada de Curva de Transição. Cada trecho é identificado entre dois pontos sucessivos. Será adotado por convenção que as propriedades do trecho sejam descritas no ponto inicial.

Um trecho reto quando descrito por $\vec{r}(s)$ expresso no referencial fixo ***Oxyz*** , entre os pontos $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$, forma um ângulo absoluto de direção $\boldsymbol{\phi}_1$. Uma curva circular de raio ***R*** (curvatura $\kappa = 1/R$) entre os pontos $\boldsymbol{P}_3$ e $\boldsymbol{P}_4$, tem centro ***O***' na direção normal $\vec{n}$ à direção da curva $\vec{t}$ percorrendo um arco de comprimento $\boldsymbol{\phi}_{43}$. Uma curva de transição entre os pontos $\boldsymbol{P}_2$ e $\boldsymbol{P}_3$, de raio variável tem comprimento de arco $\boldsymbol{\phi}_{32}$ e deve ser tangente aos objetos (reta e curva circular) nas suas extremidades, conforme mostrado na Figura 15.

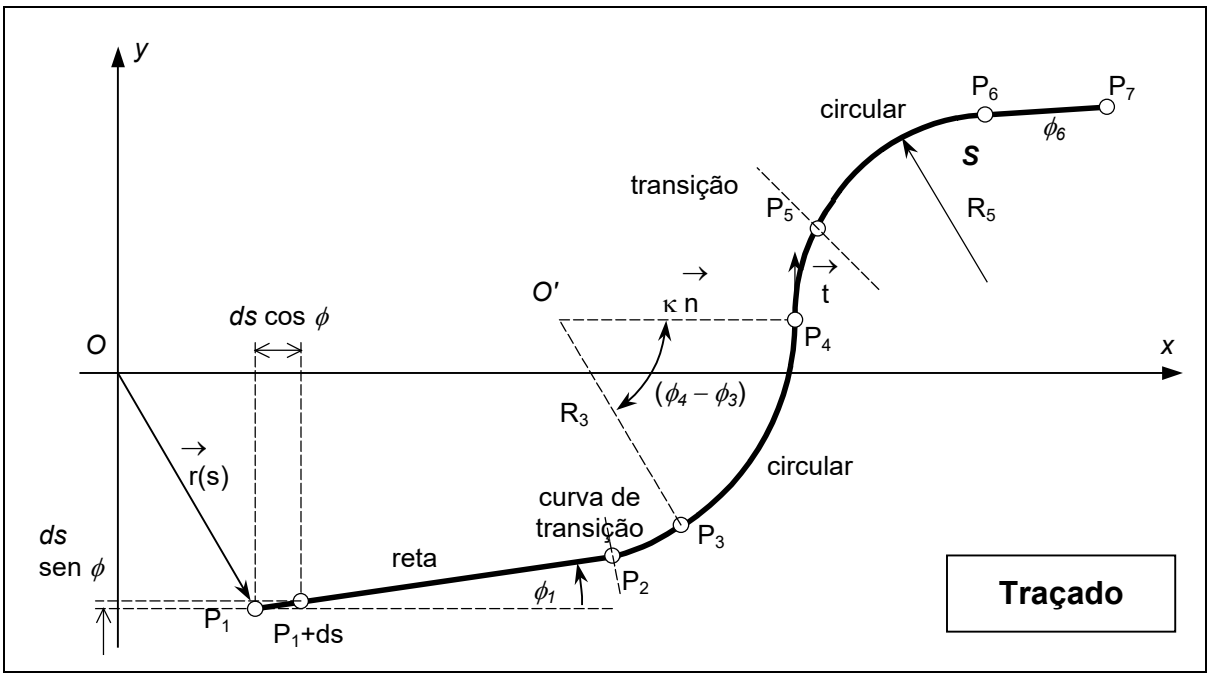


Figura 14 – Traçado da Via no Plano Cartesiano

Note que um pequeno segmento ***ds*** na direção de $\vec{t}$ ao longo de ***S***, conforme apresentado na Figura 14, tem sua projeção no referencial fixo cartesiano ***Oxy*** como:

$$ds \cdot \vec{t} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad dx = ds \cdot \cos\phi \quad \text{e} \quad dy = ds \cdot \operatorname{sen}\phi \tag{21}$$

A curvatura $\kappa(s)$ em função do traçado ***S*** , com variação de primeira ordem, pode ser descrita por segmentos entre ***n*** pontos notáveis $\boldsymbol{P}_i$, para ***i*** = 1...***n***, conforme apresentado na Figura 15.

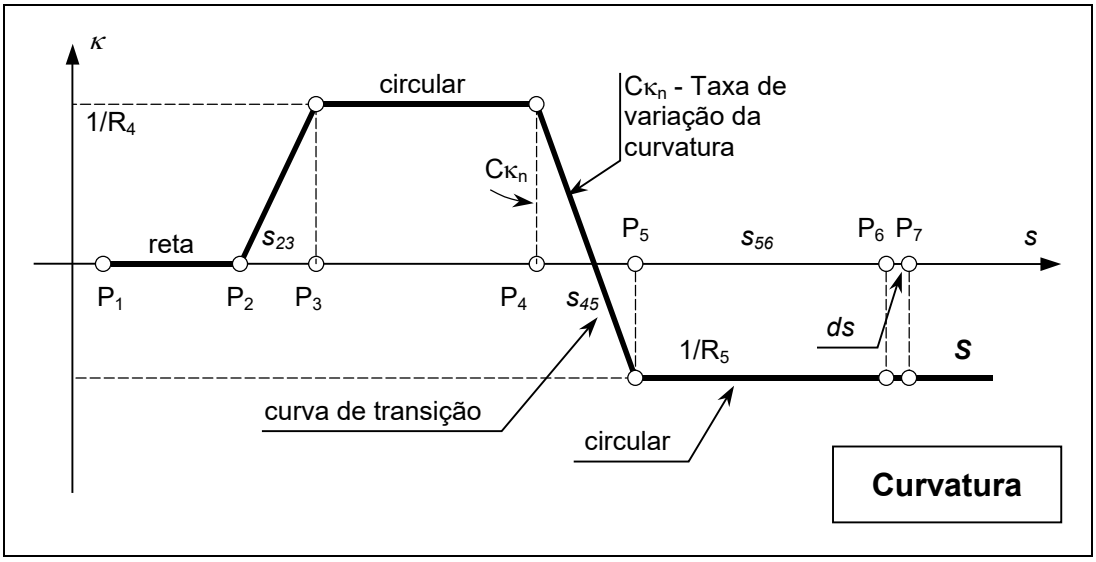


Figura 15 – Curvatura da Via

A curvatura $\kappa(s)$ em qualquer localização ***s*** do tipo *Clotoide*, pode ser obtida pela seguinte relação linear:

$$\kappa(s) = \frac{\kappa(n+1) - \kappa(n)}{s(n+1) - s(n)}(s - s(n)) + \kappa(n) \qquad \text{ou} \qquad \kappa(s) = C\kappa_n \cdot (s - s(n)) + \kappa(n) \tag{22}$$

onde $C\kappa_n = \big(\kappa(n+1) - \kappa(n)\big)/(s(n+1) - s(n))$ é a taxa de variação da curvatura entre os pontos (n + 1) e (n), conforme mostrado na Figura 15.

Portanto a curva de transição entre os pontos $\boldsymbol{P}_4$ e $\boldsymbol{P}_5$ tem valor inicial curvatura $\kappa(4) = 1/R_4$ e valor final $\kappa(5) = 1/R_5$, ou seja, a taxa de variação da curvatura neste trecho será:

$$C\kappa_{45} = \big(\kappa(5) - \kappa(4)\big)/(s(5) - s(4)) \tag{23}$$

Um pequeno segmento de via de comprimento $ds = (s - s_0)$ está apresentado entre os pontos $\boldsymbol{P}_6$ e $\boldsymbol{P}_7$ do traçado $\boldsymbol{S}$, mostrada na Figura 15. Note ainda que a integral da curvatura permite reconstituir novamente o ângulo de direção $\boldsymbol{\phi}$(s):

$$\kappa(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{d}{ds}\phi \quad \Rightarrow \quad d\phi = \kappa(s)ds \quad \Rightarrow \quad \phi(s) = \phi(s_0) + \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, ds \tag{24}$$

Utilizando a expressão da curvatura em função de $\boldsymbol{s}$ na expressão anterior e resolvendo a integral obtêm-se a função $\boldsymbol{\phi}$(s):

$$\phi(s) = \phi(s_0) + \int_{s_0}^{s} (C\kappa(s - s_0) + \kappa(s_0))\, ds \tag{25}$$

$$\phi(s) = \phi(s_0) + C\kappa\int_{s_0}^{s} s\, ds - C\kappa \cdot s_0 \int_{s_0}^{s} ds + \kappa(s_0)\int_{s_0}^{s} ds \tag{26}$$

$$\phi(s) = \phi(s_0) + C\kappa \cdot \frac{1}{2}(s^2 - s_0^2) - C\kappa \cdot s_0 \cdot (s - s_0) + \kappa(s_0) \cdot (s - s_0) \tag{27}$$

$$\boxed{\phi(s) = \frac{1}{2} C\kappa \cdot (s - s_0)^2 + \kappa(s_0) \cdot (s - s_0) + \phi(s_0)} \tag{28}$$

Considerando que no plano cartesiano, os segmentos $d\boldsymbol{s}$ do traçado $\boldsymbol{r}$(s) (ver Figura 14), podem ser escritos por:

$$\vec{r}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} \quad ; \quad dx = \cos\phi \cdot ds \quad \text{e} \quad dy = \operatorname{sen}\phi \cdot ds \tag{29}$$

obtêm-se por integração a posição do traçado no plano cartesiano em função de $\boldsymbol{\phi}$(s):

$$\begin{aligned} x &= x(0) + \int dx \\ y &= y(0) + \int dy \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(s) &= x(s_0) + \int_{s_0}^{s} \cos\phi \, ds \\ y(s) &= y(s_0) + \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\phi \, ds \end{aligned} \tag{30}$$

Finalmente substituindo a função de ϕ(s) na integral resulta em:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s_0) + \int_{s_0}^{s} \cos\left(0.5 \cdot C\kappa \cdot (s - s_0)^2 + \kappa(s_0) \cdot (s - s_0) + \phi(s_0)\right) ds \\ y(s) &= y(s_0) + \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\left(0.5 \cdot C\kappa \cdot (s - s_0)^2 + \kappa(s_0) \cdot (s - s_0) + \phi(s_0)\right) ds \end{aligned} \tag{31}$$

Estas integrais podem ser expressas em função das integrais de *Fresnel*. A seguir são descritos os três tipos de objetos e forma de geração ao longo do comprimento ***s*** do traçado ***S***.

3.1 A Reta

O objeto geométrico "trecho reto", é um circulo de curvatura nula no plano. Portanto o azimute (direção descrita pelo absoluto ângulo ϕ) do objeto "linha reta" permanece constante ao longo do trecho. O vetor posição $\vec{r}(s)$ dos pontos $P(s)$ ao longo do percurso ***S*** tem seu valor determinado pela posição inicial $P(s_0)$ acrescida de um segmento ***ds*** na direção tangencial $\vec{t}(s)$ que tem a direção $\phi(s)$:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + ds \cdot \vec{t} \tag{32}$$

Expressando a posição $P(s)$ no referencial cartesiano, as componentes na direção ***x*** e ***y*** para a um deslocamento infinitesimal $ds = (s - s_0)$ com posição inicial $\vec{r}(s_0)$ e direção $\phi(s)$, resultam em:

$$\begin{aligned} Px(s) &= x(s_0) + ds \cdot \cos\phi(s) \\ Py(s) &= y(s_0) + ds \cdot \operatorname{sen}\phi(s) \end{aligned} \tag{33}$$

Note que o ângulo $\phi(s)$ é absoluto expresso em relação a um referencial fixo. A direção $\phi(s)$ do trecho reto é constante e também pode ser utilizada alternativamente para representar a elevação no trecho (neste caso inclinação vertical $\theta(s)$). O comprimento total do trecho é expresso no referencial intrínseco por:

$$d_{(n+1,n)} = (P_{n+1} - P_n) \quad \text{ou} \quad \left|d_{(n+1,n)}\right| = \sqrt{(Px_{n+1} - Px_n)^2 + (Py_{n+1} - Py_n)^2} \tag{34}$$

Ou no referencial cartesiano tem-se:

$$dx_n = (P_{n+1} - P_n) \cdot \cos\phi_n \quad \text{e} \quad dy_n = (P_{n+1} - P_n) \cdot \operatorname{sen}\phi_n \tag{35}$$

3.2 A Curva Circular

O objeto geométrico: “curva circular", corresponde a um trecho de direção variável, com curvatura constante. Portanto o azimute da linha (direção descrita pelo ângulo ϕ) varia linearmente ao longo do trecho. O vetor posição $\vec{r}(s)$ do ponto $P(s)$ ao longo do percurso ***S*** tem seu valor determinado pela posição inicial $P(s_0)$ acrescida de um segmento ***ds*** na direção tangencial $\vec{t}(s)$ descrita pelo ângulo $\phi(s)$ que varia ao longo de ***s***, conforme a curvatura constante $\kappa(s_0)$:

$$\phi(s) = \phi(s_0) + \kappa(s_0) \cdot ds \tag{36}$$

Expressando a posição $P(s)$ no referencial cartesiano, as componentes na direção ***x*** e ***y*** para um deslocamento infinitesimal $ds = (s - s_0)$, medido à partir da posição inicial $\vec{r}(s_0)$, curvatura constante de $\kappa(s_0)$ (equivalente à $1/R(s_0)$) e direção inicial $\phi(s_0)$ resultam em:

$$\begin{aligned} Px(s) &= x(s_0) + \left(\text{sen}\left(\phi(s_0) + \kappa(s_0)\cdot ds\right) - \text{sen}\left(\phi(s_0) + \kappa(s_0)\cdot s_0\right)\right)/\kappa(s_0) \\ Py(s) &= y(s_0) - \left(\cos\left(\phi(s_0) + \kappa(s_0)\cdot ds\right) - \cos\left(\phi(s_0) + \kappa(s_0)\cdot s_0\right)\right)/\kappa(s_0) \end{aligned} \tag{37}$$

O comprimento total do trecho circular entre os pontos $P_{(n)}$ até $P_{(n+1)}$, corresponde ao perímetro do arco de circulo de raio R_n, que tem comprimento ***d*** igual:

$$d\,(n+1,n) = [\phi(n+1) - \phi(n)]\cdot R_n \tag{38}$$

3.3 A Curva de Transição

O objeto geométrico: "CURVA DE TRANSIÇÃO" consiste de um segmento de direção variável $\phi(s)$ e curvatura $\kappa(s)$ também variável, ao longo do trecho. Existem diferentes tipos de curvas de transição. A curva de transição mais comum é de curvatura linearmente variável em função do comprimento ***s***. Este tipo de curva de transição é chamada de *Clotoide* (ou espiral de *Euler* ou espiral de *Cornu*). Existem outras representações de transição de ordem elevada que não serão abordadas neste texto.

A descrição paramétrica do objeto *Clotoide* ao longo do comprimento de arco ***s*** é feita por integrais de *Fresnel*. A *Clotoide* ***r***(***s***) descrita num referencial fixo tem curvatura linearmente variável em relação ao seu comprimento ***s*** e portanto o ângulo de $\phi(s)$ tem variação quadrática conforme a constante $C\kappa$:

$$\boxed{\phi(s) = \frac{1}{2}C\kappa\cdot(s-s_0)^2 + \kappa(s_0)\cdot(s-s_0) + \phi(s_0)} \tag{39}$$

onde a constante $C\kappa$ é a inclinação da variação da curvatura $\kappa(s)$ a partir de $\kappa(s_0)$, conforme mostrado na Figura 15.

A curva de transição em função de ***s*** é dado pelas seguintes integrais de *Fresnel*:

$$Px(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^{s} \cos\phi(s)\ ds$$
$$Py(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\phi(s)\ ds \tag{40}$$

A Figura 16 apresenta uma espiral gerada utilizando programa numérico com a função:

$$\phi(s) = 0 + 1 \cdot s + 1 \cdot s^2 \tag{41}$$

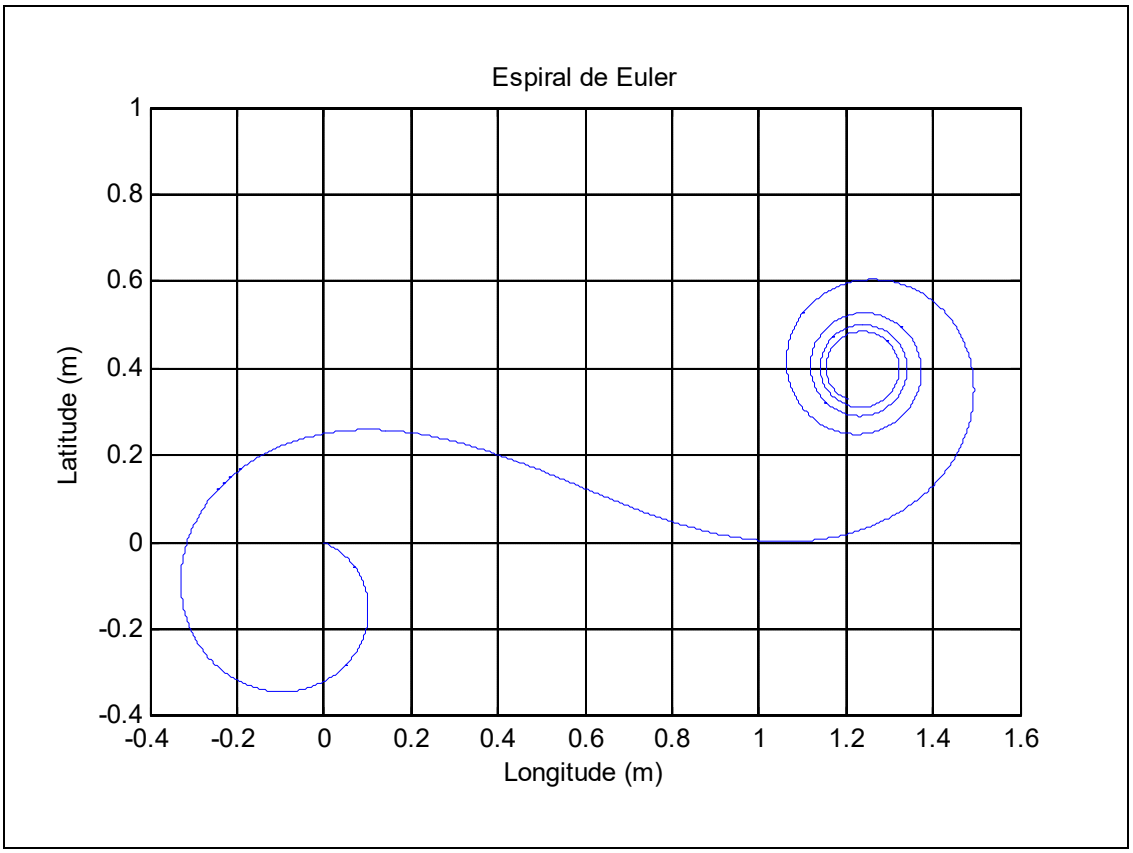


Figura 16 – Espiral de *Euler (Clotoide)*

O comprimento total do trecho espiral corresponde a integral dos elementos de posição cartesiana *P*x e *P*y que tem comprimento ***d*** igual:

$$d_{(n+1,n)} = \int_{P_n}^{P_{(n+1)}} d_{(n+1,n)} \cdot ds = \int_{Pn}^{P_{(n+1)}} \sqrt{Px^2(s) + Py^2(s)} \cdot ds \tag{42}$$

3.4 Movimento no Plano Cartesiano

Para o movimento no plano cartesiano ***Oxy*** (*Giacaglia*, 1982), onde a posição do ponto ***P*** é descrito pela função $y = f(x)$, tem-se para a projeção da velocidade no eixo ***x*** constante e igual a μ:

$$\dot{x} = \mu = \text{cte} \qquad \text{e portanto:} \qquad \ddot{x} = 0 \tag{43}$$

Derivando duas vezes a função $y = f(x)$ com respeito ao tempo, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} f(x) = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \dot{x} = y' \cdot \mu$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \dot{x}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \dot{x} + \frac{dy}{dx} \cdot \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = (y'' \cdot \dot{x}) \cdot \dot{x} + y' \cdot \ddot{x} = y'' \cdot \dot{x}^2 + y' \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{y} = y'' \cdot \mu^2 + y' \cdot 0 = y'' \mu^2 \tag{44}$$

Portanto o vetor aceleração expresso no referencial cartesiano será:

$$\vec{V} = \mu \vec{i} + \mu \cdot y' \vec{j} \qquad \text{e} \qquad \vec{a} = y'' \mu^2 \vec{j} \tag{45}$$

Verifica-se também que:

$$\frac{d}{dt}(\mu \cdot y') = \mu \frac{d}{dt} y' = \mu \frac{dy'}{dt} \frac{dx}{dx} = \mu \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{dt} = \mu \cdot y'' \cdot \dot{x} = y'' \cdot \mu^2 \tag{46}$$

Portanto o vetor velocidade expressa no referencial cartesiano será:

$$\vec{V} = \mu \vec{i} + \mu \cdot y' \vec{j} \tag{47}$$

O versor normal $\vec{n}$ é obtido da rotação de π/2 (i – operador de rotação) do vetor tangente $\vec{t}$:

$$\pm\vec{n} = i\cdot\vec{t} = i\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \quad \Rightarrow \quad \pm\vec{n} = i\frac{\mu\cdot(\vec{i}+y'\vec{j})}{\mu\cdot\sqrt{1+y'^2}} = \frac{-y'\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{48}$$

Tomando a componente normal (expresso no referencial intrínseco) da aceleração obtêm-se o raio de curvatura:

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = (y''\cdot\mu^2)\vec{j}\cdot\frac{-y'\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{(y''\cdot\mu^2)}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \text{e} \qquad \vec{a}\cdot\vec{n} = \frac{V^2}{R} \tag{49}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{(y''\cdot\mu^2)}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V^2(1+y'^2)^{1/2}}{(y''\cdot\mu^2)} \quad \text{mas} \quad V^2 = \mu^2+\mu^2\cdot y'^2 \tag{50}$$

resultando no raio da curva para movimento no plano:

$$\boxed{R = \frac{1}{\kappa} = \pm\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}} \tag{51}$$

4 Métodos de Quantificação

A geometria e irregularidades do pavimento podem ser obtidas por dois métodos distintos:

- Medida Experimental ou
- Geração Analítica ou Numérica.

Em qualquer caso a quantificação é discreta, por pontos distintos com determinado espaçamento *ds*, ao longo do traçado ***S***.

4.1 Discretização do Traçado

A discretização do traçado da via em geral é realizada com espaçamento constante *ds* entre as amostras (por exemplo: 1 amostra a cada *ds* = 0.25 metros ou 4 amostras por metro). No caso da elevação de cada ponto $\boldsymbol{P}(i)$ a sua cota $\boldsymbol{z}(i)$ é identificada ao longo do traçado $\boldsymbol{S}$, conforme ilustrado na Figura 17.

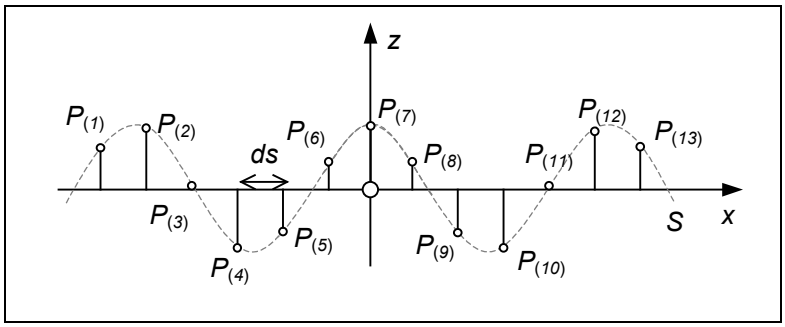


Figura 17 – Discretização no Domínio Espacial (d*s*)

4.2 Transformação de Domínio

Uma das formas mais importantes de análise é realizada utilizando uma "**Transformação de Domínio**" (espacial $\Rightarrow$ espectral) que permite identificar o conteúdo em comprimento de onda ($\lambda = 1/\Omega$) das irregularidades existente na pista.

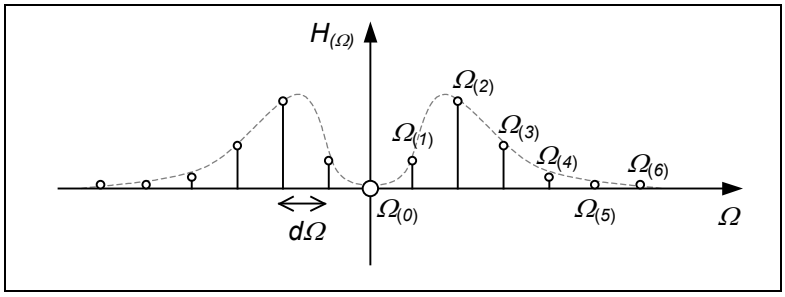


Figura 18 – Discretização no Domínio Espacial Inverso ($d\Omega$ em rad/metro)

A seguir são apresentados métodos típicos de medição da geometria e irregularidades da trilha. Estas informações são necessária para realização de análise de conteúdo de onda das irregularidades (Transformação de Domínio) ou para as avaliações por simulação.

5 Medida Experimental

Existem várias técnicas para realizar a medida experimental da irregularidade do pavimento. Os principais métodos são:

- Topografia Referenciada;
- Sistema Móvel de Três Pontos;
- Sistema de Resposta em Aceleração – *IRI*;
- Rastreamento à Laser.

5.1 Topografia

O método topográfico é o mais preciso pois é referenciado (medida a partir de ponto fixo) e identifica as cotas verticais reais do traçado da pista, em pontos específicos ao longo do seu comprimento.

Figura 19 – Topografia de Estrada

5.2 Sistema Móvel de Três Pontos

O sistema de medida do traçado baseado no principio da cota (fecha) em base móvel (corda) é utilizado em diversos dispositivos de medida (ex.: régua de medida, carro controle, conforme apresentado na Figura 20. É composto tipicamente de uma estrutura móvel com dois pontos de apoio (constituindo uma corda) e uma medida da cota ortogonal (flecha) numa fração do comprimento da base (corda).

Figura 20 - Sistema de Medida em Três Pontos

Este método consiste em uma régua móvel de comprimento ***L*** (a + *b*) formando uma reta (corda) que é apoiada em dois pontos extremos, onde o vão (flecha: **f**(s)) é medido numa fração do comprimento (*a*/*b*), conforme mostrado na Figura 21. Note que a flecha **f**(s) é função da direção $\boldsymbol{\kappa}$(s) da via.

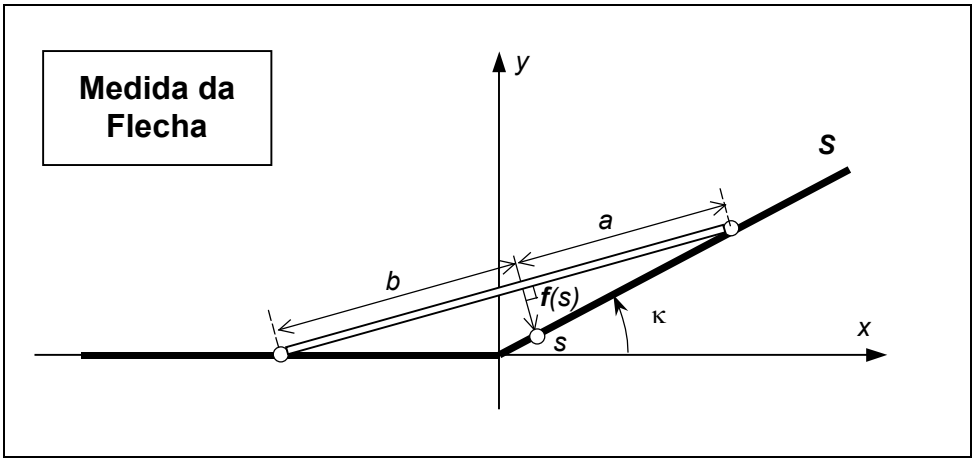


Figura 21 – Régua de medida

Considerando o sistema de medida linear e estacionário a resposta **f**(s) pode ser obtida pela função de resposta impulsiva (*Aknin*, 1995):

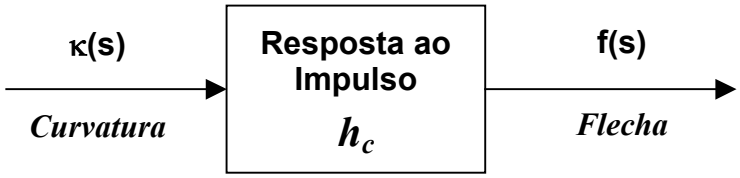


Figura 22 – Modelo do Sistema de Medida

A flecha medida é obtida da resposta impulsiva da intergral de convolução da entrada $\boldsymbol{\kappa}$(s) e a resposta impulsiva $\boldsymbol{h}_C$:

$$\mathrm{f}(s) = \int h_C(\tau) \cdot \kappa(s-\tau) \cdot d\tau = \left(h_C \cdot \kappa\right)(s) \tag{52}$$

5.3 Relação Geometria entre Flecha e Curvatura

Para a identificação de $\boldsymbol{h}_C$ é conveniente aplicar uma entrada impulsiva no sistema. Um impulso unitário de um *Delta de Dirac* de curvatura (κ_0) será uma aplicação ao sistema, conforme mostrado na Figura 23 (superior à esquerda).

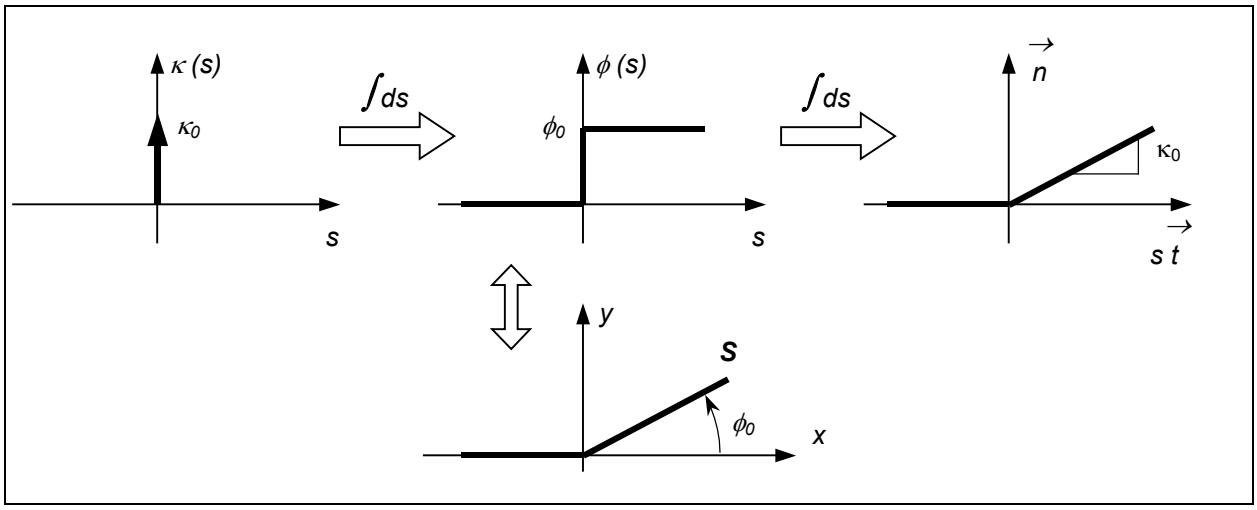


Figura 23 – Traçado Equivalente a um Impulso de Curvatura

Após uma primeira integração obtêm-se a variação degrau em direção ϕ(s) (figura superior ao centro). Finalmente após uma segunda integração obtêm-se o movimento em rampa decorrente com inclinação $\tan(\kappa_0)$ expresso no referencial intrínseco ($P(s)\ \vec{t}\ \vec{n}$) .

5.4 Função de Transferência do Sistema de Medida

A identificação da flecha medida é complexa por se tratar do problema da régua deslizante sobre uma parede não ortogonal. A dedução completa desta formulação é proposta por *Aknim* (1995), sendo aqui apresentada apenas a dedução simplificada.

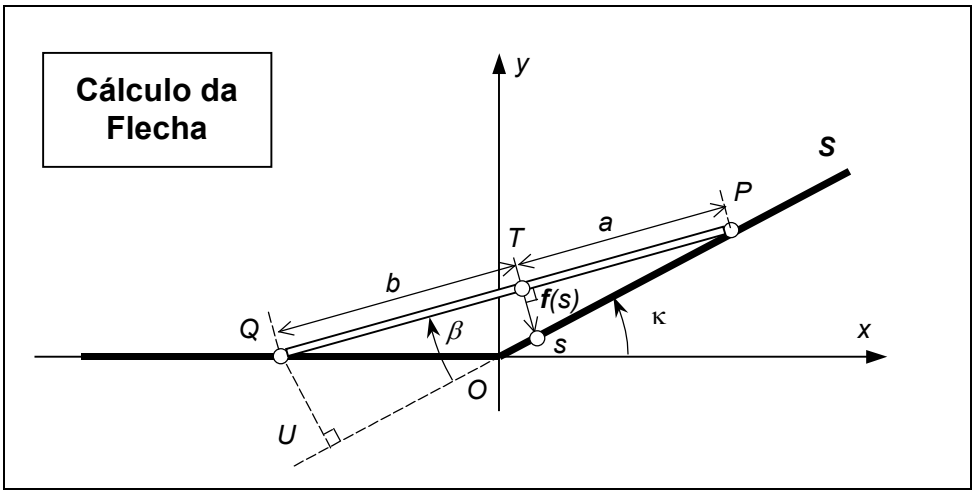


Figura 24 – Geometria para o cálculo da flecha

Para sistema com corda (***P*** – ***Q***) muito menor que as flechas (f(s) << a e f(s) << b) a fórmula completa (apresentada por *Aknim* - 1995) pode ser simplificada, resultando em:

$$\mathrm{f}(s)=\frac{-b\cdot(\mathrm{a}+s)}{L}\tan\kappa \quad \text{para s} < 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{f}(s)=\frac{\mathrm{a}\cdot(-b-s)}{L}\tan\kappa \quad \text{para s} > 0 \tag{53}$$

As duas expressões podem ser concatenadas ao longo do traçado (***s***) como:

$$\mathrm{f}(s)=\left[\frac{a}{L}\cdot ramp(s+\mathrm{b})-\frac{b}{L}\cdot ramp(s+a)-ramp(s)\right]\tan\kappa \tag{54}$$

onde *ramp*(***s***) é a função rampa casual de inclinação unitária sempre crescente (para ***s*** > 0 e ***s*** <0).

$$hc(s) = \frac{a}{L} \cdot ramp(s + \mathrm{b}) - \frac{b}{L} \cdot ramp(s - a) - ramp(s) \tag{55}$$

que pode ser escrita de forma sintética como:

$$hc(s) = \sum_{i=1..3} \lambda_i \cdot ramp(s + \mathrm{x}_i) \quad \text{para} \quad \lambda_{i=1..3} = \left\{ \frac{\mathrm{a}}{L}, \frac{-b}{L}, -1 \right\} \quad \text{e} \quad x_{i=1..3} = \{a, -b, 0\} \tag{56}$$

A resposta da função ***hc*** para a = 7 e $b = -3$, está apresentada na Figura 25.

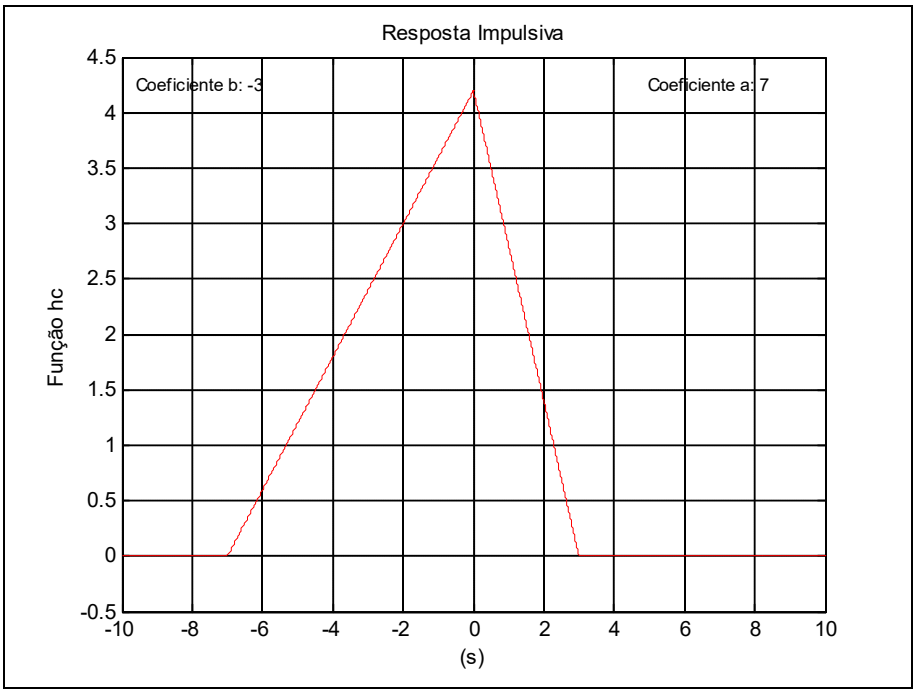


Figura 25 – Resposta Impulsiva de *hc* (b = –3 e a = 7)

A função de transferência ***Hc***(p), associada ao modelo do sistema é a transformada bilateral de *Laplace* de ***hc***(s):

$$Hc(p) = \frac{F(p)}{C(p)} = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1..3} \lambda_i \cdot i\, e^{i x_i p} \tag{57}$$

A resposta aproximada em comprimento de onda (ou seu inverso f) se obtêm pela substituição de "*p*" por "i2πf " resultando em:

$$Hc(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2} \sum_{i=1..3} \lambda_i \cdot ie^{i x_i 2\pi f} = \frac{1}{(2\pi f)^2} \left(\lambda_1 \cdot ie^{ib2\pi f} + \lambda_2 \cdot ie^{ia2\pi f} - 1 \right) \tag{58}$$

Para o caso simétrico (***a*** = ***b*** = 0.5****L***) a expressão que se refere à base fixa, se reduz a:

$$Hc(f) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\text{sen}(\pi a f)}{\pi a f} \right)^2 \tag{59}$$

A Figura 26 apresenta os valores de ***Hc*** em função do comprimento de onda. Note que a amplitude máxima é de 12.5 ($a^2/2$) conforme a expressão descritiva de ***Hc*** para frequências baixas.

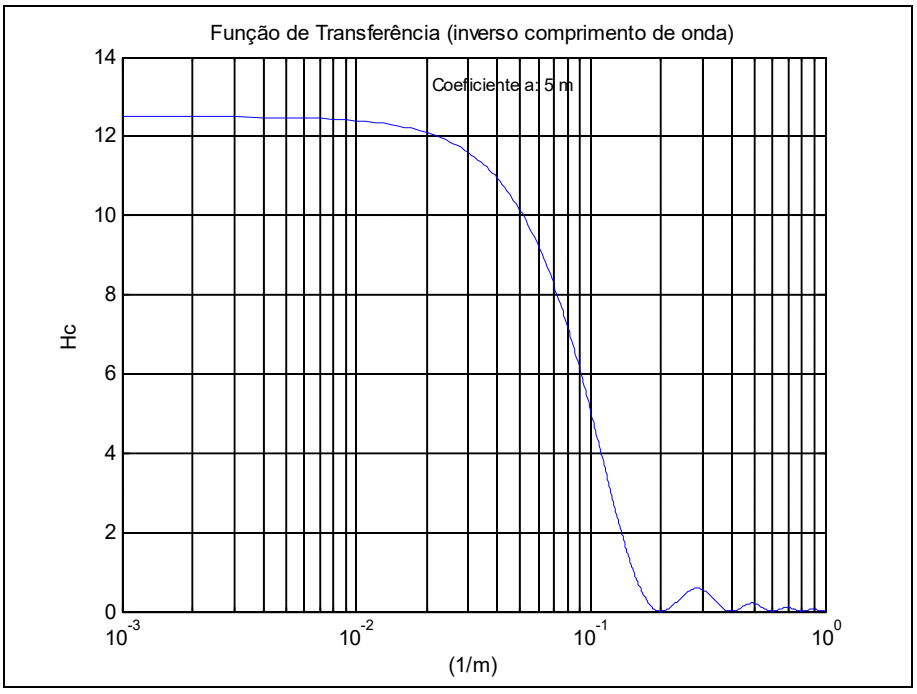


Figura 26 – Módulo da Função de Transferência (inverso do comprimento de onda)

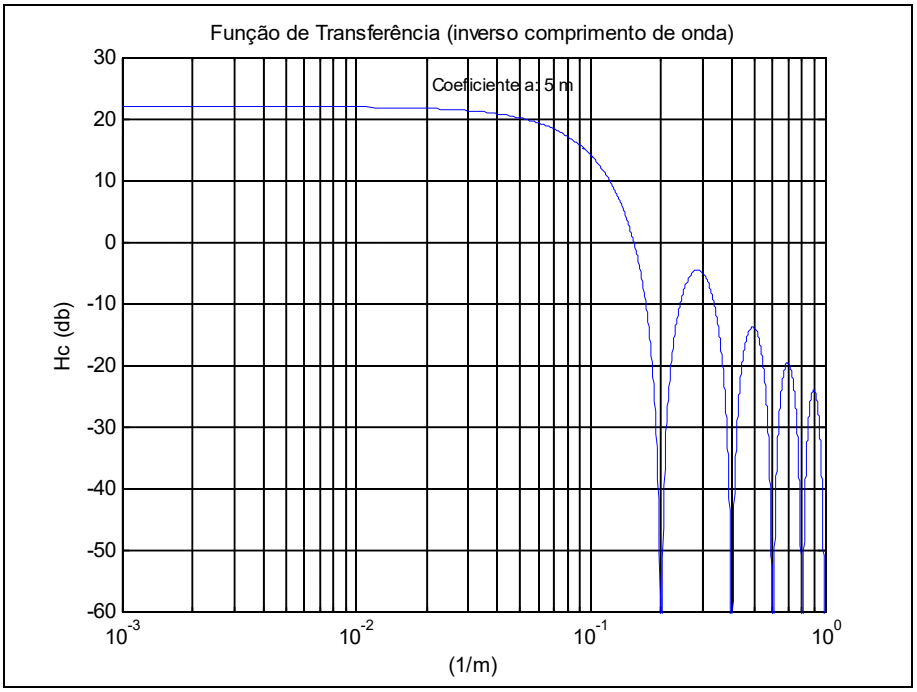


Figura 27 - Função de Transferência (*dB*)

Note na Figura 27, expressa em decibéis (*dB*), a anulação da expressão descritiva de ***Hc*** para frequências f = k/a (ou seja: 0.2; 0.4 m^{-1}) que corresponde ao comprimento de onda na mesma distância entre os pontos de apoio da régua de medida.

Finalmente a integração da flecha medida (ou curvatura) medida no referencial intrínseco ($P(s)\,\vec{t}\,\vec{n}$) resulta na direção normal e a segunda integral resulta na coordenada transversal, conforme apresentado na Figura 23. Uma aproximação pode ser tomada em relação ao referencial cartesiano (***Oxz***) onde a coordenada transversal é a altura ***z*** ao longo do percurso em ***x***.

5.5 Sistema de Resposta em Aceleração – IRI

Um esforço americano foi empreendido na validação do sistema do tipo resposta (*Sayers*, 1998). Este método consiste em medir a resposta de aceleração de um dos eixos de um veículo, trafegando sobre o pavimento com irregularidades, conforme mostrado na Figura 28.

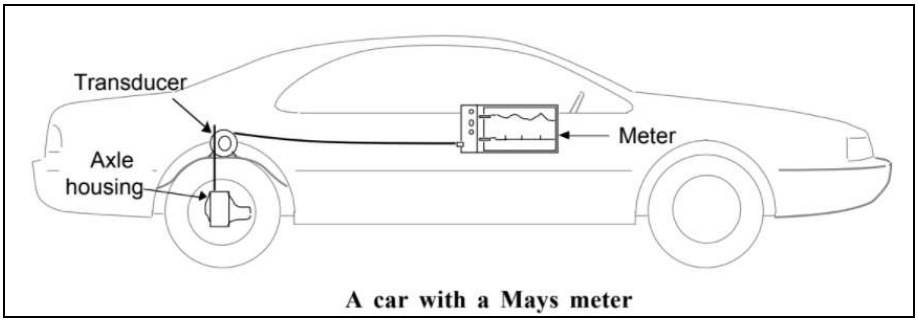


Figura 28 – Sistema do Tipo Resposta (*Sayers*, 1998)

A função de transferência do deslocamento vertical Z(r) do sistema massa-mola-amortecedor de 1GL em função deflexão da amplitude da entrada u_o, quando excitado pela base é descrito por:

$$\frac{Z}{u_o} = \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2} \right]^{0.5} \tag{60}$$

onde ***r*** é a razão entre a frequência de excitação e natural $r = \omega_e / \omega_n$.

Para um sistema de 2GL a função de transferência resulta em:

$$Gu(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{-m_1(b_2 s + k_2)s^2}{(m_1 s^2 + b_1 s + k_1)(m_2 s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2)) - (b_1 s + k_1)^2} \tag{61}$$

onde o numerador é a função de transferência do curso da suspensão e o denominador a função de transferência da entrada pela base.

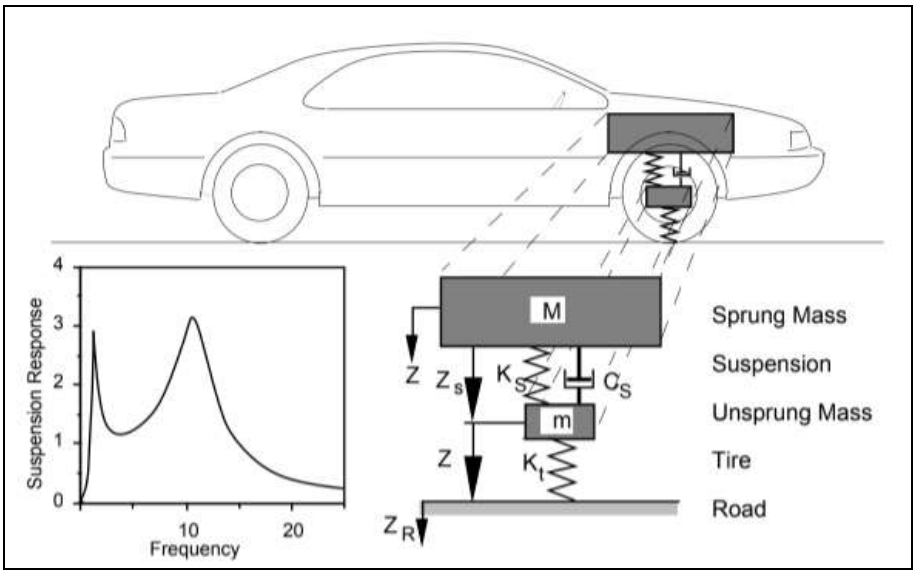


Figura 29 – Função de Transferência do Sistema com Massa Concentrada (*Sayers*, 1998)

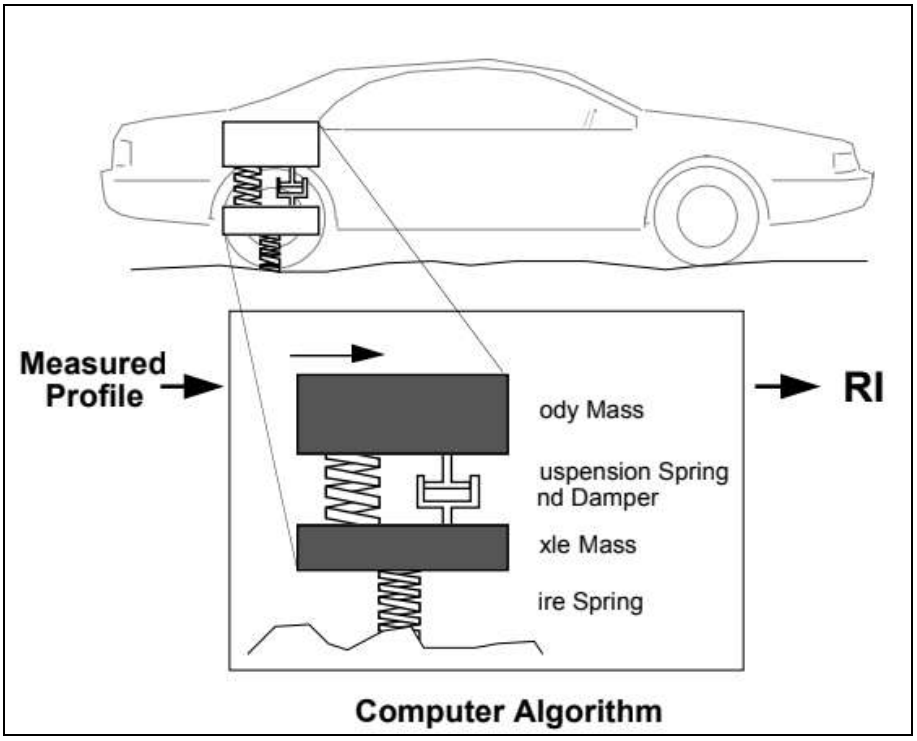


Figura 30- Fluxo de Informações (*Sayers*, 1998)

Nota-se que por mais detalhado que seja o modelo de representação as informações coletadas são apenas a deflexão de um dos eixos da suspensão e a aceleração do chassi na mesma posição. Os demais movimentos naturais do veículo (arfagem e rolagem) não são contemplados na reconstituição da entrada do sistema, obviamente comprometendo o resultado da identificação.
O modelo e o algoritmo propostos e implementado por *Sayers* (1995) estão apresentados no Anexo A – Modelo de Quarto de Veículo e estão relatado nas normas EN 13036-5 [European Committee for Standardization (CEN 2019)] e na ASTM E1926-08 (ASTM 2015).

5.6 Rastreamento à Laser.

A superfície tridimensional da estrada pode ser integralmente quantificada com sistemas de rastreamento à laser, conforme mostrado na Figura 31. É um processo complexo que produz um volume enorme de dados de todo a ambiente no em torno da estrada. Cada ponto do espaço 3D recebe uma identificação com 3 escalares no domínio espacial, identificado por sistema de medida à laser, conforme mostrado na Figura 32.

Figura 31 – Rastreamento a Laser (Fonte: figura da internet)

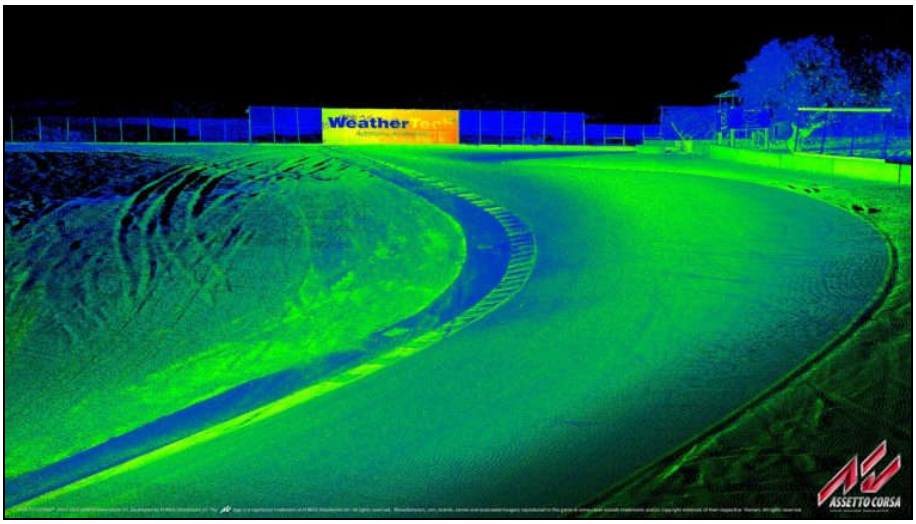


Figura 32 - Rastreamento a Laser (Fonte: figura da internet)

Note que a superfície rastreada por triangulação vai produzir um conjunto de informações cartesianas na forma matricial da elevação $z(x, y)$ do tipo:

$$z(x,y) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & : & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & : & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & : & z_{nn} \end{bmatrix} \tag{62}$$

6 Geração Numérica

Existem diferentes métodos formas e amplitude de geração de informações das irregularidades do pavimento.

- Geração Unidimensional Periódica;
- Geração Unidimensional Aleatória (PSD);
- Geração de Descontinuidade (Série Fourier);
- Geração Multidimensional (Vertical, Lateral, Bitola, Elevação e Torção);
- Geração de Superfície Tridimensional.

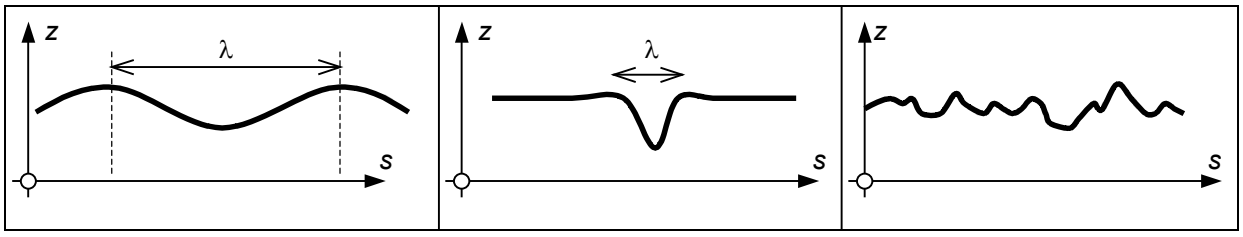


Figura 33 – Irregularidades (periódica, descontínua e aleatória)

6.1 Geração de Irregularidade Periódica

A irregularidade unidimensional vertical $z(s)$ de uma trilha do pavimento pode ser harmônica periódica em função do comprimento em s com comprimento de onda λ do tipo:

$$z(s) = A \cdot \text{sen}(\Omega \cdot s + \phi) \quad \text{ou} \quad z(s) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda} s + \phi\right) \tag{63}$$

A irregularidade de uma trilha do pavimento também pode ser um somatório de n funções periódicas com n diferentes comprimentos de onda λ_N do tipo:

$$z(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \text{sen}\left(2\pi\, f_i\, s + \phi_i\right) \qquad \text{ou} \qquad z(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_i} s + \phi_i\right) \tag{64}$$

Para tanto, pode-se produzir um vetor de coordenadas ***z***(s) ao longo de um trecho, incrementando ***s*** por ***ds*** na equação periódica acima.

6.2 Geração Aleatória (PSD)

A geração de irregularidade de uma trilha do pavimento pode ser aleatória com conteúdo espectral prescrito. Algumas normas propõem espectros de pavimentos em diferentes classes. Este é o caso da norma européia *ISO*-8608. Para gerar um perfil de irregularidades de uma trilho, pode-se utilizar de uma soma harmônica de vários termos de comprimentos de onda distintos com fase aleatória do tipo:

$$z(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \text{sen}\left(2\pi\, f_i\, s + \phi_i\right) \tag{65}$$

Para tanto seleciona-se uma faixa de frequências ($\boldsymbol{f}_1$ até $\boldsymbol{f}_n$) com espaçamento $\boldsymbol{\Delta f}$ regular entre elas:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta f \qquad \text{para} \qquad \boldsymbol{i} = 1, 2, 3, ..., \boldsymbol{n} \tag{66}$$

Para cada frequência sorteia-se de forma aleatória uma fase $\boldsymbol{\phi}_i$ correspondente, utilizando uma função de números randômicos do tipo:

$$\{\phi_i\} = randon(n, normal) \qquad \text{para} \qquad \boldsymbol{i} = 1, 2, 3, ..., \boldsymbol{n} \tag{67}$$

Determina-se a amplitude A_i de uma curva normalizada com densidade espectral de potência G(f) (por exemplo *ISO*-8608), com valores P_i de potência $G_{(RMS)}$ (*root mean square*) na frequência f_i , em unidade G^2/Hz , com espaçamento Δf , utilizando a expressão:

$$A_i = \sqrt{2}\sqrt{P_i \cdot \Delta f_i} \tag{68}$$

Finalmente defini-se um vetor de posições s com espaçamento($1/\Delta f$) do comprimento L desejado ($L = n / \Delta f$) para os quais se determina a elevação y(s) da trilha na posição s utilizando a função periódica:

$$\boxed{y(s) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \text{sen}\left(2\pi f_i s + \phi_i\right)} \tag{69}$$

6.3 Amplitude do Espectro

De acordo com a norma internacional *ISO*-8608 (1995) a densidade espectral de potencia (*PSD*) da irregularidade vertical Sd(n), para uma determinada classe de pavimento é obtida pela expressão logarítmica em unidade de m^3 (metro/(1/m^2)) como:

$$Sd(n) = Sd(n_0) \cdot (n / n_0)^{\varpi} \tag{70}$$

onde a inclinação da curva log-log de ϖ é fixada em −2 (40 dB por década). A magnitude espacial identificada como *Sd* para n_0 é obtida como:

$$Sd(n_0) = 4^{cn+1.0} \tag{71}$$

onde *cn* é a classe de qualidade do pavimento variando de 1 to 8 (de classe A até H, de acordo com a norma *ISO*). O expoente +1.0 na equação anterior corresponde a media geométrica para n_0 em 0.1 cycle/m, conforme mostrado na Tabela 2.

Tabela 1 - Road Class Roughness

Class Number (*cn*)	Road Class	Sd(n = 1)* ($\times 10^{-6}$ m^3)	S_{RMS}(n = 1)** ($\times 10^{-3}$ m)	S_{RMS}(n = 1) (mm)
1	A	0.16	0.4	0.4
2	B	0.64	0.8	0.8
3	C	2.56	1.6	1.6
4	D	10.24	3.2	3.2
5	E	40.96	6.4	6.4
6	F	163.84	12.8	12.8
7	G	655.36	25.6	25.6
8	H	2621.44	51.2	51.2

Ob.: *: Geometric Mean; **:rms value; n = 1 meter, from ISO 8608.

Considerando as irregularidades do pavimento como um processo aleatório estacionário ergódigo, descrito pela função de distribuição normal a densidade de irregularidade pode ser expressa pela raiz do valor médio quadrático (*rms*). De acordo com o teorema de *Perseval* (*Oppenheim*, 1975), o valor *rms* da distribuição aleatória normal da irregularidade vertical é igual a raiz quadrada da densidade espectral de potência. Portanto obtêm-se tomando a raiz quadrada de expressão anterior o valor médio quadrático da irregularidade:

$$S_{RMS}(n) = \sqrt{Sd(n)} = Sd(n_0)^{1/2} \cdot (n / n_0)^{\theta} \tag{72}$$

onde a inclinação do logaritmo θ muda para (−1), que é a metade da inclinação de Sd (ϖ) (20 dB por década).

Portanto para a função ***Sd***(n) que descreve a densidade espectral da potência do sinal de amplitude da irregularidades (***y***(s) em metros) em função do inverso do comprimento de onda (1/metros) que é a frequência espacial ***n***, pode-se obter a variação média quadrática de ***y***(s) em uma determinada faixa de frequência espacial ($\boldsymbol{n}_1 \rightarrow \boldsymbol{n}_2$), utilizando a expressão:

$$y_{RMS}(n_1 \to n_2) = \sqrt{\int_{n_1}^{n_2} Sd(n) \cdot dn} \tag{73}$$

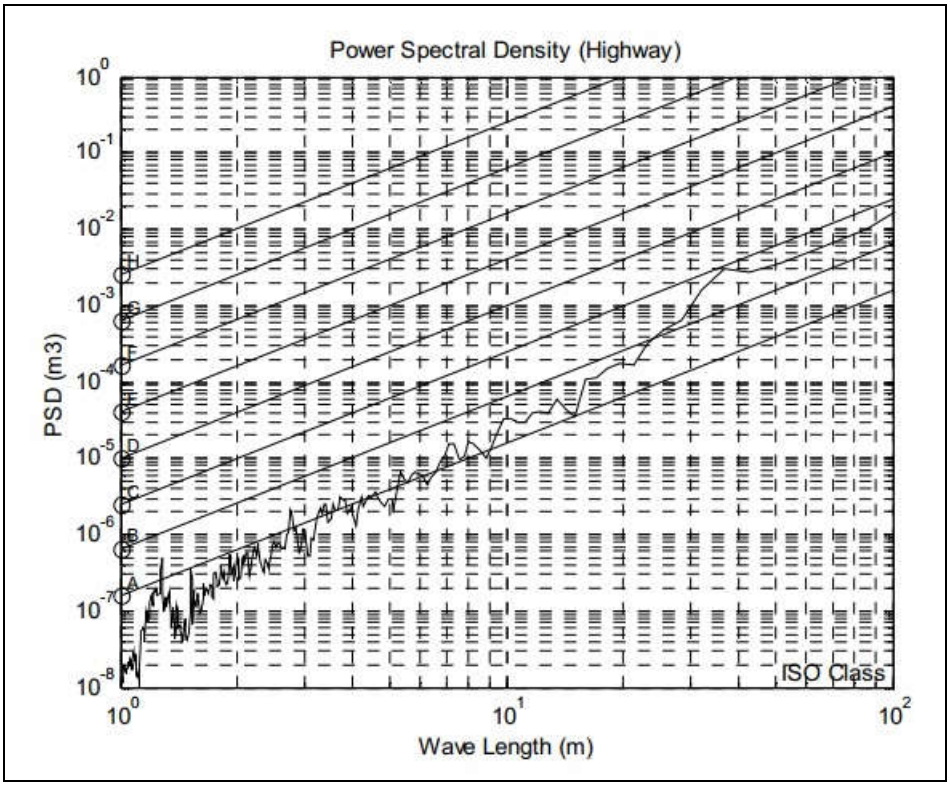


Figura 34 – PSD de Irregularidade do Pavimento

6.4 Geração Multidimensional

A geração da irregularidade pode ser de caráter multidimensional como é o caso na ferrovia. Para a via férrea os parâmetros de irregularidade em relação ao desvio: vertical, lateral e torção, ao longo do trecho, podem ser quantificadas por funções conforme apresentado na Figura 35. Para uma seção as propriedade de :Bitola e Elevação são quantificadas de forma análoga.

A formulação espectral típica tem a forma:

$$Z(\phi) = \frac{A\phi_2^2}{\left(\phi^2 + \phi_1^2\right)\cdot\left(\phi^2 + \phi_2^2\right)} \quad \text{ou} \quad Z(\phi) = \frac{A\phi_2^2 \cdot \left(\phi^2 + \phi_1^2\right)}{\phi^4\left(\phi^2 + \phi_2^2\right)} \tag{74}$$

A seguir são apresentados valores dos coeficientes das funções espectrais para a geração de irregularidade de forma espectral.

Table 3.6

Analytical Characterization of Typical Track Geometry Variations

Process track geometry	Model	Parameter Symbol	Parameter Unit	Values of parameters by track class 6	5	4	3	2	1
Stationary random									
Gage	$s(\phi) = \frac{A\phi_2^2}{(\phi^2 + \phi_1^2)(\phi^2 + \phi_2^2)}$	A	10^4 in.^{2}/cpf	0.3	0.5	0.9	1.6	2.8	5.0
		ϕ_1	10^3 cpf	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9	8.9
		ϕ_2	10^2 cpf	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1
Cross level	Same as gage	A	10^4 in.^{2}/cpf	0.3	0.5	0.7	1.1	1.6	2.3
		ϕ_1	10^3 cpf	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1
		ϕ_2	10^2 cpf	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
Profile	$s(\phi) = \frac{A\phi_2^2(\phi^2 + \phi_1^2)}{\phi^4(\phi^2 + \phi_2^2)}$	A	10^4 in.^{2}/cpf	0.5	0.8	1.4	2.5	4.5	7.9
		ϕ_1	10^3 cpf	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1	7.1
		ϕ_2	10^2 cpf	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
Alignment	Same as profile	A	10^4 in.^{2}/cpf	0.3	0.5	0.9	1.6	2.8	5.0
		ϕ_1	10^3 cpf	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
		ϕ_2	10^2 cpf	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6
Periodic									
Profile	$y(x) = Ae^{-k\|x\|}$	A	in.	0.11	0.14	0.19	0.25	0.33	0.45
		k	ft^{-1}	0.25	0.20	0.15	0.14	0.13	0.13
Alignment	Same as profile	A	in.	0.08	0.11	0.15	0.20	0.27	0.35
		k	ft^{-1}	0.57	0.46	0.35	0.20	0.15	0.12

Figura 35 – Características Espectral de uma Via Férrea (fonte: *Garg*, 1996)

6.5 Geração de Descontinuidade (Série Fourier)

A geração de uma descontinuidade pode ser feita utilizando série de *Fourier* que consiste em produzir um sinal com componentes harmônicas do seu domínio inverso associado (comprimento de onda). A cota vertical z(s) da via pode ser obtida por um somatório de uma função periódica fundamental (maior comprimento de onda) e suas múltiplas harmônicas,

criando um trecho de irregularidade repetitiva e não linear. Esta transformação pode ser realizada com auxílio da Série de *Fourier*.

A Série de *Fourier* que forma o sinal ***z***(s) ao longo do comprimento ***s*** é descrita por (*Vierck*, 1979):

$$z(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot s) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot s) \tag{75}$$

onde: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z(s)\,ds$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(s)\cdot\cos(n\cdot s)\,ds$ e $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} z(s)\cdot\text{sen}(n\cdot s)\,ds$

Exemplo: Seja a função $z(x) = -A\cdot\left[1 \mp \cos(2\pi\, x / 2L)\right]$ que descreve aproximadamente a depressão de uma junta de trilho. Resolvendo as integrais para obtenção dos coeficientes a_0, a_n e b_n , pode-se compor a cota vertical ***z***(s) conforme mostrado na Figura 36 e suas respectivas contribuições em função das harmônicas do somatório, conforme mostrado na Figura 37.

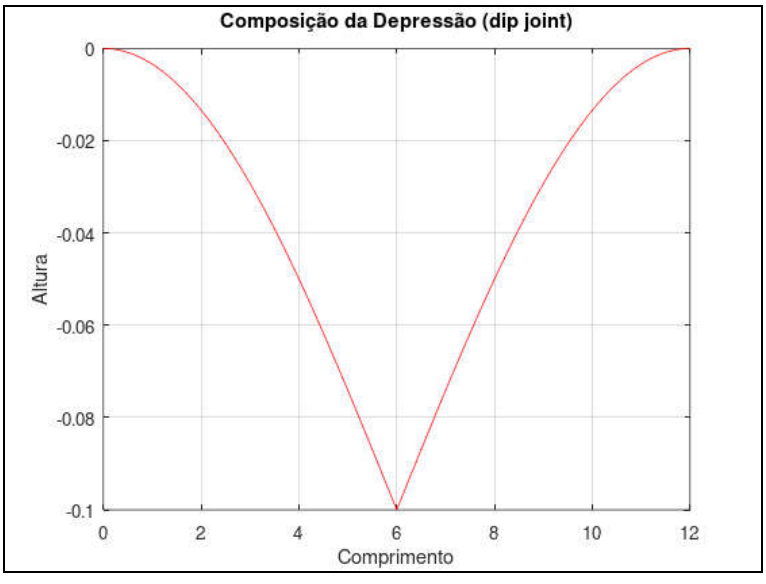


Figura 36 – Depressão do Trilho em Junta

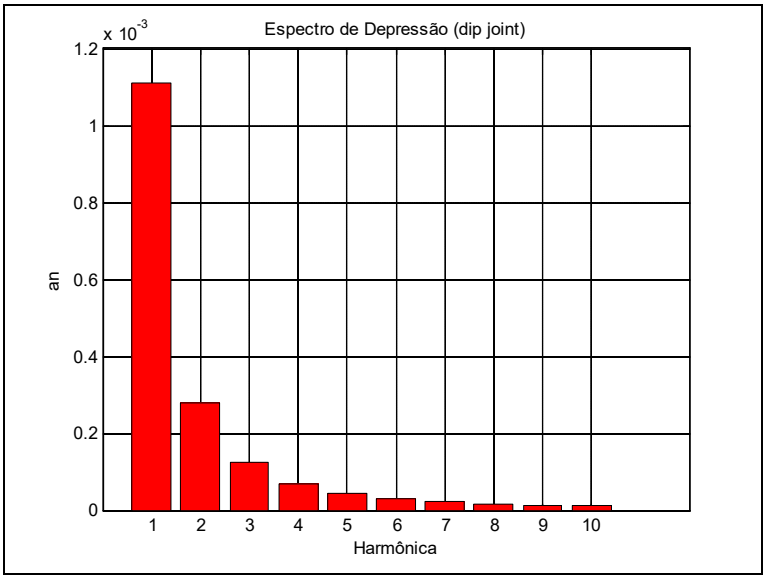


Figura 37 – Espectro em Freqüência da Harmônicas (módulo: an)

6.6 Geração de Superfície.

Para gerar um superfície aleatória com conteúdo espectral definido, pode-se utilizar a transforma rápida de *Fourier* bidimensional (FFT2) definida como:

$$y_{p,q} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \omega_m^{jp} \cdot \omega_n^{kq} \cdot x_{j,k} \quad \text{onde} \quad \omega_m = e^{-2\pi/m} \quad \text{e} \quad \omega_n = e^{-2\pi/n} \tag{76}$$

Um resultado típico da altura $\boldsymbol{y}_{\mathrm{p,q}}$ da superfície discreta no plano ***Opq***, está apresentado na Figura 38.

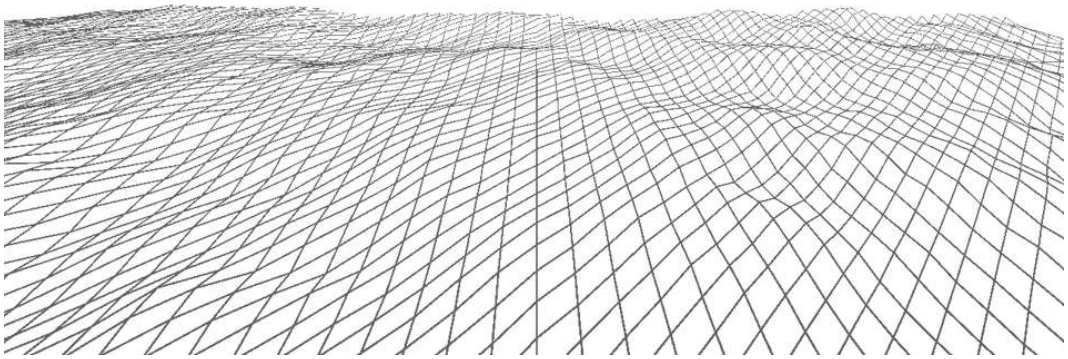


Figura 38 – Superfície com Irregularidades (Fonte: internet)

7 Analise Espectral

A análise de medidas da via pode ser realizada utilizando a técnica de quantificação do conteúdo em comprimento de onda das irregularidades. A análise espectral corresponde à mudança do domínio do espaço ***s*** para o domínio inverso associado, obtido pela transformação harmônica da medida da ondulação da via, resultando na densidade espectral do comprimento de onda (1/metro).

Um exemplo de transformação espectral da cota vertical do topo do trilho medida com carro de medida da via férrea (carro controle) está apresentado na Figura 39. Os valores z(s) medidos foram transformados por uma *FFT* (*Fast Fourier Transform*) e a densidade média do conteúdo espectral (*PSD* em mm^2/m) foi decomposto em faixas de comprimentos de onda (eixo das abscissas). Verifica-se que há faixas de comprimentos de onda com maiores densidades (ex.: faixa de 12 metros de comprimento de onda apresentado na Figura 39).

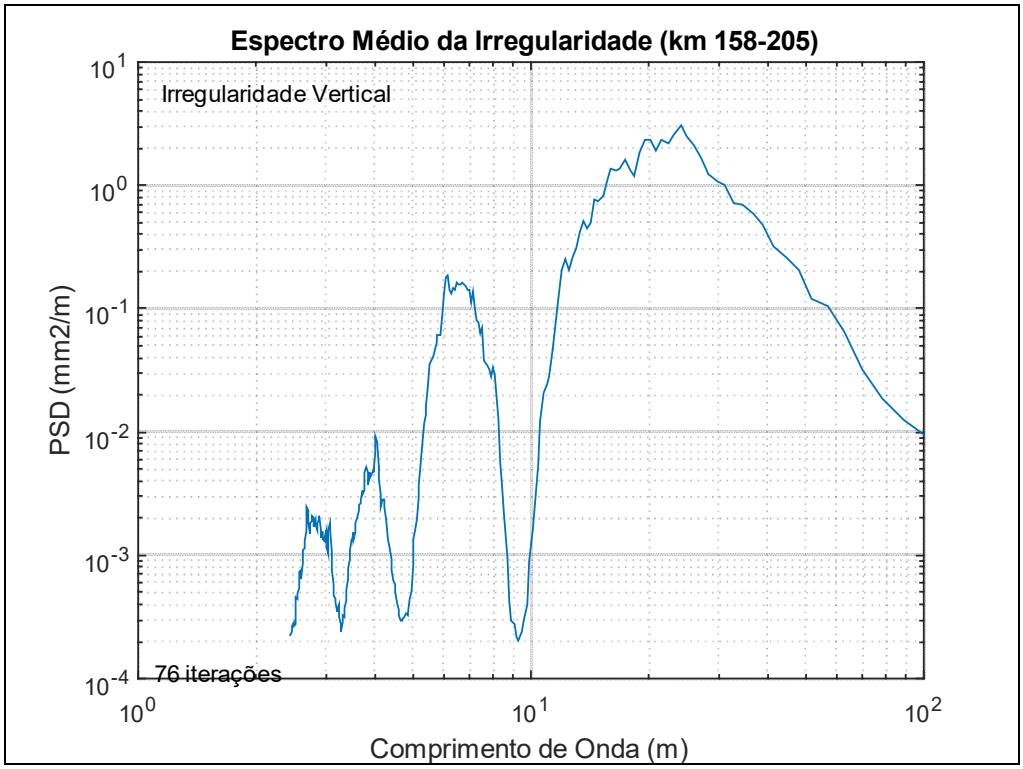


Figura 39 – Espectro Médio de Irregularidade Vertical da Via

Outra forma de apresentação do resultado é a utilização de "**Espectrograma**" que apresenta o espectro, por trechos de comprimento sucessivos, conforme mostrado na Figura 40 . Verifica-se no espectrograma da Figura 40 que há maior densidade de ondas de 20~25 metros (eixos das ordenadas) em torno do quilometro 35 da via (eixo das abscissas).

Note que o comprimento de onda da irregularidade λ afeta a forma como o veículo é excitado. Assim, comprimentos de onda múltiplos da distância entre os truques (lt), conforme mostrado na Figura 41, excitam apenas o movimento vertical do veículo. Comprimento 50% maior e seus múltiplos, vão excitar dominantemente o movimento de arfagem (*pitch*).

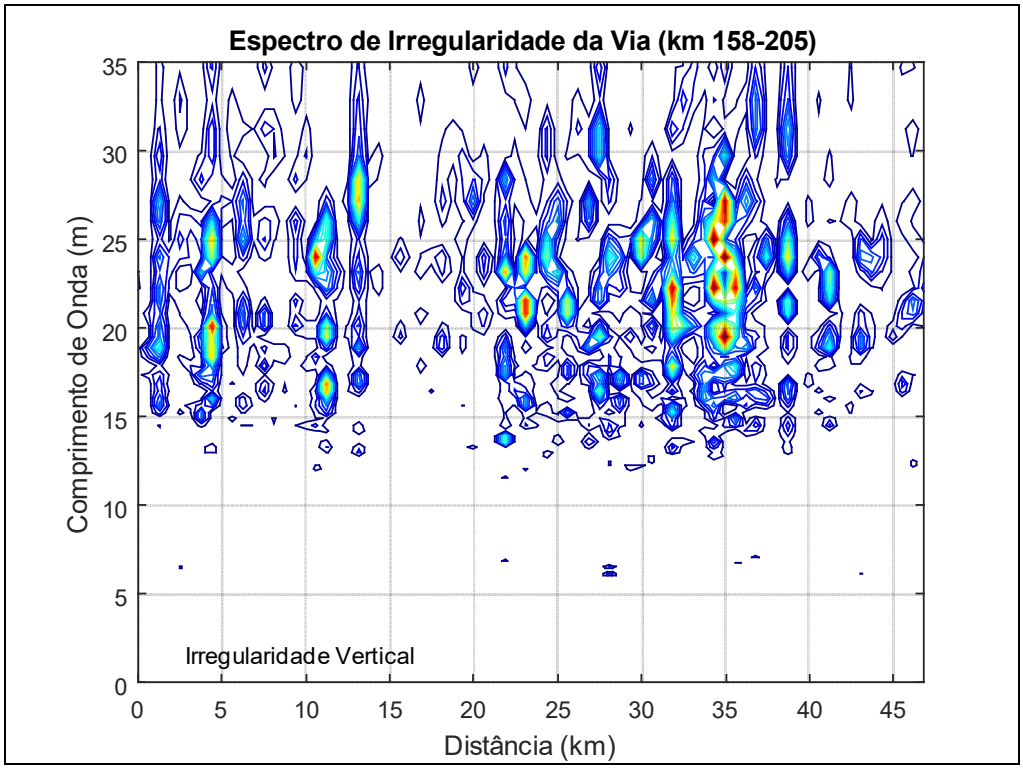


Figura 40 – Espectrograma Longitudinal de Irregularidade Vertical da Via

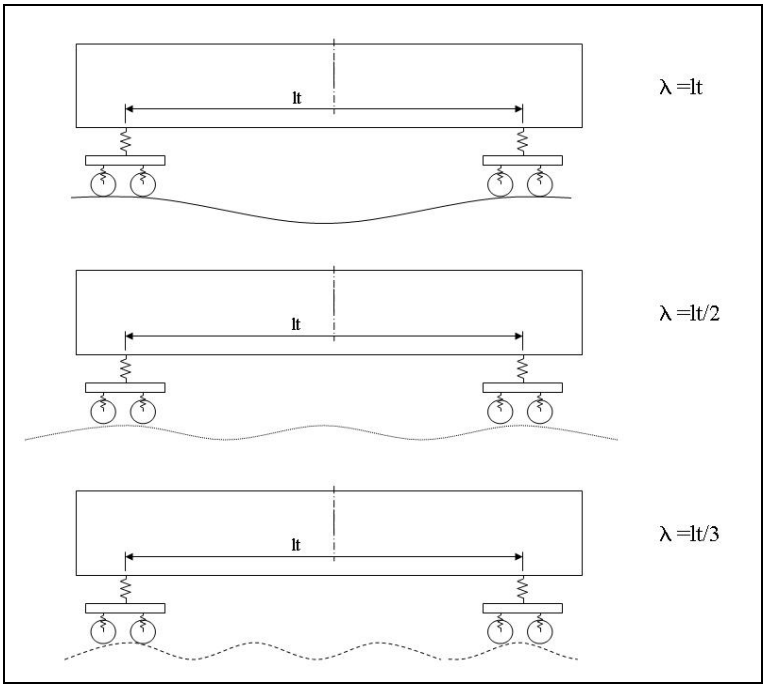


Figura 41 – Influência do Comprimento de Onda

8 Referencias Bibliográficas

Aknin, P. (1995) Outils de description de la géométrie des voies et déconvolution des relevés expérimentaux: Application aux tracés ferroviaires. Institut National de Recherche sur les Transport et leur Sécurité – INRETS. Rapport INRETS nº 204, pp. 76.

Giacaglia, G. E. O (1982) Mecânica Geral. Editora Campus, 10º Ed. RJ. p. 587.

Esveld, C. (2001) Modern Railway Track. Published by MRT-Productions, p. 654.

Glaus, Ralph (2006) The Swiss Trolley – A Modular System for Track Surveying. Siebzigster Band Volume 70, p. 185.

ISO-2631-4 (2001) Mechanical Vibration And Shock -- Evaluation Of Human Exposure To Whole-Body Vibration. Part 4: Guidelines For The Evaluation Of The Effects Of Vibration And Rotational Motion On Passenger And Crew Comfort In Fixed-Guideway Transport Systems. International Organization for Standardization.

ISO-8608 (2016) Mechanical Vibration - Road Surface Profiles - Reporting Of Measured Data. International Organization for Standardization.

ISO-19107 (2003) Geographic information - Spatial schema. International Organization for Standardization - ISO, pp. 164.

Raspopov, O. S. *Kravets*, T. V. (2002) Dynamic Loading of Railway Vehicle Under Motion on Curvilinear Railway Track. 8th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies. Budapest, pp. 159-165.

Vierck, R. K. (1979) Vibration Analysis. Haper Collins Publisher, 2nd Edition, pp. 511.

Sayers, M. W. *Karamihas* S. M. (1998) The Little Book of Profiling - Basic Information about Measuring and Interpreting Road Profiles. University of Michigan, p. 102.

Irvine, T. (2014) Synthesizing a Time History to Satisfy a Power Spectral Density using Sinusoids. Shock and Vibration Response Spectra Course (Unit 12) . p. 14.

V. K. *Garg*, R. *Kumar*, S. I. *Marcus*, (1996) Modeling Stochastic Discrete Event Systems Using Probabilistic Languages, in Mathematical Theory of Networksand Systems.

9 Anexo A – Modelo de Quarto de Veículo

O índice internacional de rugosidade (*International Roughness Index* - *IRI*) é o índice de irregularidade vertical do pavimento obtido a partir de perfis de estradas longitudinais medidos. Ela é calculada usando um modelo matemático de um quarto de carro (*Quarter Car Model* - *Sayers*, 1986), cuja resposta é acumulada para produzir um índice de rugosidade com unidades de inclinação.

A descrição mais detalhada do sistema veicular com 2 *GL* é feita com um corpo suspenso de massa m_1 e outro corpo intermediário (pneu ou truque) com massa m , formando portanto dois grau de liberdade z_1 e z_2, conhecido como modelo de um quarto de veículo, conforme mostrado na Figura 42. Foi considerada adicionalmente as irregularidades do pavimento como uma função periódica de entrada dependente da posição $\boldsymbol{u}_{(x)} = \boldsymbol{u}_{(0)}$ sen (ω x). Neste caso os movimentos verticais dos corpos do sistema (z_1 e z_2) ficam mutuamente dependentes devido à interligação da suspensão secundária ($\boldsymbol{k}_1$ e $\boldsymbol{c}_1$) e ocorrem os modos de movimento acoplados.

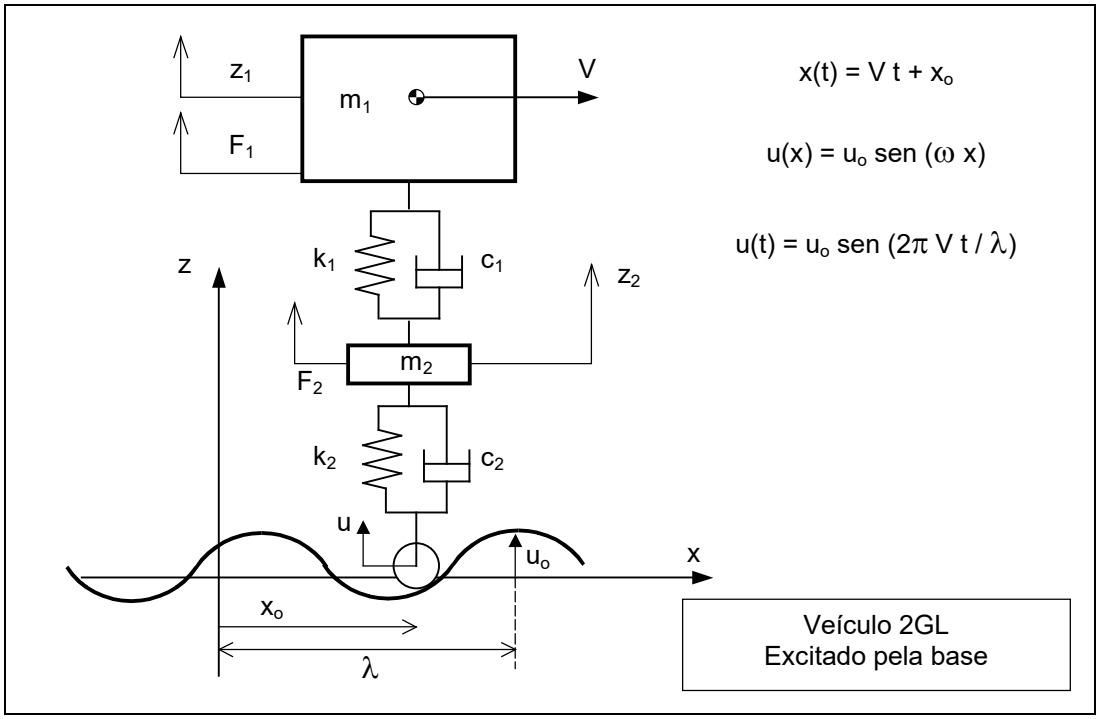


Figura 42 – Modelo com dois graus de liberdade

Neste caso o pneu foi considerado como corpo rígido rolante (disco) de massa desprezível que acompanha as irregularidades da pista ($\boldsymbol{u}_{(x)}$) e sua elasticidade representada por k_2. O sistema de equações diferenciais do sistema com dois corpos (com massas m_1 e m_2) e dois graus de liberdade (z_1 e z_2) com excitação pela base (u_0) é descrito por:

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{z}_1 + c_1\,(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_2) = F_1(t) \\ m_2\,\ddot{z}_2 + c_2\,(\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2\,(z_2 - u(t)) - c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1(z_1 - z_2) = F_2(t) \end{cases} \tag{77}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} \tag{78}$$

Para o sistema homogêneo ($\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = 0$), normalizado pela massa do veículo ($\boldsymbol{m}_1$) e desconsiderando a dissipação do pneu ($\boldsymbol{c}_2 = 0$), obtêm-se as equações na forma:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + c_s(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s(z_1 - z_2) = 0 \\ \mu\,\ddot{z}_2 + k_u z_2 - c_s(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_s(z_1 - z_2) = k_s\,u(t) \end{cases} \tag{79}$$

onde adotam-se os seguintes valores: $c_s = c_1 / m_1 = 6.0$; $k_u = k_2 / m_1 = 653$; $k_s = k_1 / m_1 = 63.3$; $\mu = m_2 / m_1 = 0.15$, correspondente às características do veículo padrão (*Quarter Car Model - Sayers*, 1986).

Descrevendo o sistema na forma de espaço de estados para $\{X\} = \{z_1 \quad z_2 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2\}^T$, obtêm-se:

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]u(t) \tag{80}$$

onde: $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s & k_s & -c_s & c_s \\ -k_s/\mu & -(k_u + k_s)/\mu & c_s/\mu & -c_s/\mu \end{bmatrix}$ e $[B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_s/\mu \end{Bmatrix}$

O índice internacional de rugosidade (*International Roughness Index - IRI*) é finalmente obtido da deflexão (integral da velocidade) na suspensão ao longo do tempo (***L*** = 250 mm):

$$IRI = \frac{1}{L}\int_0^{L/V} |\dot{z}_1 - \dot{z}_2| \cdot dt \tag{81}$$

que é válido para medidas realizadas com o "*Golden Car*" trafegando à velocidade constante de 80 km/h (22.2 m/s).

A função de transferencia da matriz [***A***] está apresentada na Figura 43 onde os picos corrspondem as frequencias naturais do primeiro (0.05 ciclos/metro ou 0.6 Hz a 22.2 m/s) e segundo (0.5 ciclos/metro ou 8.0 Hz a 22.2 m/s) modo de vibrar.

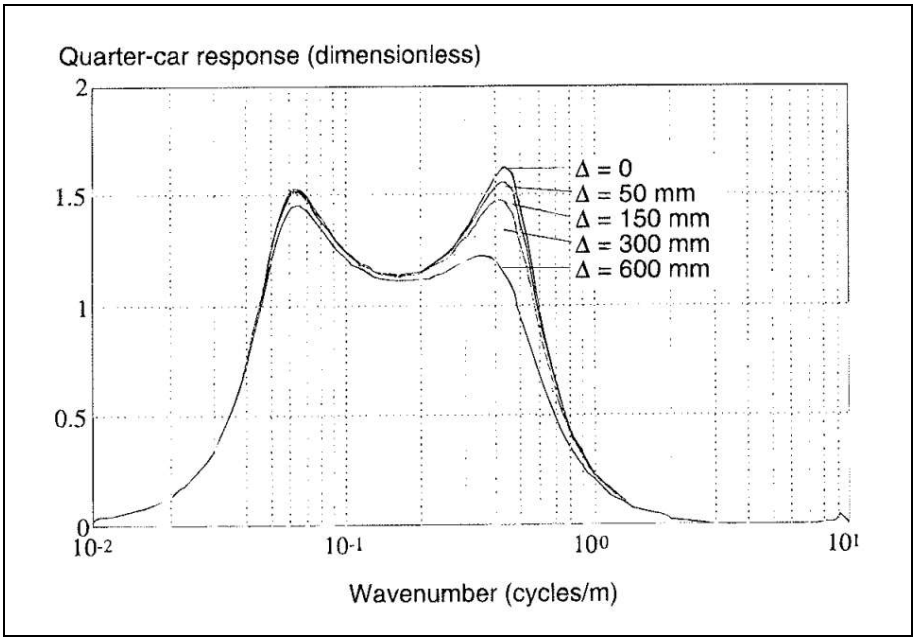


Figura 43 – Função de Transferencia do Modelo Dinâmico com 2GL (*Sayers*, 1986)

A irregularidade do pavimento pode ser qualificada com o IRI. Assim auto estradas bem pavimentadas tem IRI na faixa de 2~3 m/km, conforme ilustrado na Figura 44. Já estradas sem pavimento tem IRI na faixa de 10~16 m/km.

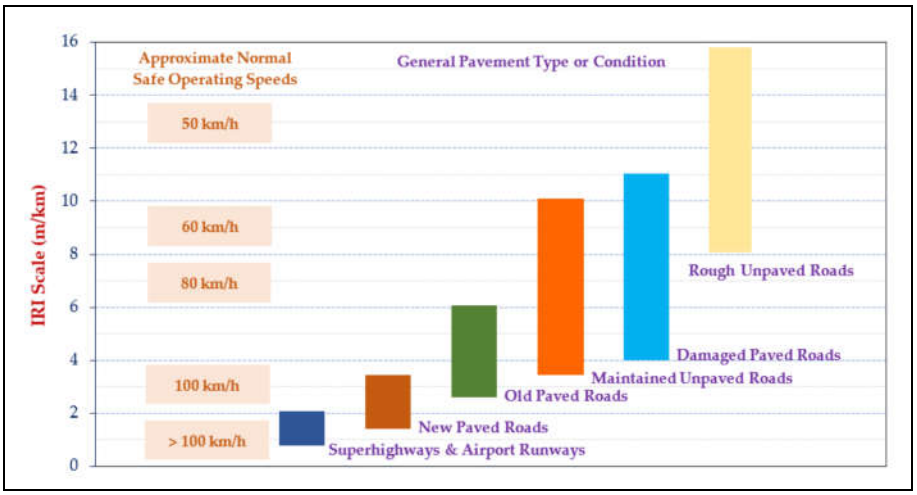


Figura 44 – Escala do IRI

Sayers, M.W.; Gillespie, T.D.; Queiroz, C.A.V. The International Road Roughness Experiment: A Basis for Establishing a Standard Scale for Road Roughness Measurement; Transportation Research Record 1084; Transportation Research Board, National Research Council: Washington, DC, USA, 1986.

5. Sayers, M.W.; Gillespie, T.D.; Queiroz, C.A.V. International Experiment to Establish Correlations and Standard Calibration Methods for Road Roughness Measurements; Technical Paper Number 45; World Bank: Washington, DC, USA, 1986.

6. Sayers, M.W.; Gillespie, T.D.; Paterson, W.D. Guidelines for the Conduct and Calibration of Road Roughness Measurements; Technical Paper No. 46; World Bank: Washington, DC, USA, 1986.

8. Sayers, M.W. On the Calculation of International Roughness Index from Longitudinal Road Profile. Available online: https://trid.trb.org/view/452992 (accessed on 30 September 2020).

9. Sayers, M.W.; Karamihas, S.M. The Little Book of Profiling: Basic Information about Measuring and Interpreting Road Profiles; University of Michigan Transportation Research Institute: Ann Arbor, MI, USA, 1998.

Rail track twist geometry and vehicle safety (artigo com Porto na VSD) (análise da torção cross level) transversal elevation (track section properties); longitudinal torcion (cant gradient – rate of change of cant along the track length)

ROAD VERTICAL IRREGULARITIES AND PASSANGER CONFORT

Artigo na ABCM (analise vertical e comprimento de onda bounce pitch conforto)

Roberto Spinola Barbosa

Espectral generated road profile

PSD x RMS

Ver GENTA pg 394 bounce pitch model com excitção pg. 418

10 Introduction

Safety in this context is related to the hability of the vehicle suspension in keeping the wheelset in the track. If a lateral load is acting on the wheel-set it can climb the rail promoting derailment. The ratio between lateral and vertical loads (L/V) governs the tradicional safety against derailment. Therefore to inprove vehicle safety it is recomneded to keep the lateral force as small as possible and mantain the vertical load as stable as possible (not oscillating).

Different from automibiles, the railway vehicle is very sensitive to track twist. In transition curves with superelevation (cant) the vertical wheel load can be relived reducing the safety margin.

International standards (EN-14363) suggest test and measure on vehicle weighting and wheel unloading and equalization, suspension Roll Coefficient (also known as lean testing, sway or souplesse test), bogie rotational resistance and X factor determination. Carbody suspension torsional stiffness.

Tree point measurng system

Track twist (torcion) does affect the vertical wheel load distribution. This effect is not related to the vehicle oscilating modes. Therefore is independent of the vehicle speed.

The wave legnth λ of the track cross (FRA) is crussial when in the vicinity of the ddp. Particularly at the exit of a transition curve with superelevation.

Casamento de λ com dpp

$$\frac{dpp}{\lambda} = n \qquad \text{integer n = 1, 2, } \infty$$

$$z = A \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi) \quad \text{e} \quad RMS = \frac{A}{\sqrt{2}} \tag{82}$$

According to *Lei* (*Lei*, *Noda*, 2002 pg 153) the irregularity of the track vertical profile can be regarded as stationary ergodic Gaussian random processes. Considering a stationary stochastic process $\eta(x)$ with expectation zero and power spectral density function $S_x(\omega)$, the sample function of the stochastic process $\eta(x)$ can be calculated by harmonic series as:

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot sin(\omega_n x + \phi_n) \tag{83}$$

where a_n is a Gaussian random variable with expectation zero with variance σ_n and the phase ϕ_n is a random variable with uniformity distribution in the range of 0 - 2π that can be generated by a pseudo-random variable method. The magnitude a_n, the variance σ_n and the phase ϕ_n are all independent of each other for n = 1; 2; ... ; N.

$Var(x)^2 = STD = \sigma$

For a zero mean harmonic function rms = std = A/sqrt(2)

According to *Podwórna* (*Podwórna*, 2015), *Lei* (*Lei*, *Noda*, 2002), *Zhang* (*Zhang et al.*, 2001) and *Claus* (*Claus*, *Schiehlen*, 1998) the

$$Z(\Omega) = A_v \frac{\Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2) \cdot \Omega^2} \tag{84}$$

$$S_n = \sqrt{Z(\Omega_n) \cdot \Delta\Omega} \tag{85}$$

$$z(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} S_n \cdot \cos(\Omega_n x + \phi_n) \tag{86}$$

$$z(mag) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{pxx}{2\pi}} \tag{87}$$

10.1 Tom Irvine

Synthesis steps to generate irreg

1 - Choose the frequencies f i. These frequencies can be chosen arbitrarily. For simplicity, constant frequency spacing is recommended.
2 - Choose the phase angles fi. Typically, the phase angles are generated using a random number routine.

3- Calculate the amplitudes Ai from the specified power spectral density. Let Pi represent the power spectral density amplitude at frequency index i. Note that the units of Pi are G2/Hz. Furthermore, the G is actually GRMS.

$$A_i = \sqrt{2} \sqrt{P_i \cdot \Delta f_i} \tag{88}$$

Dfi is the frequency bandwidth associated with each frequency *f*i. Again, a simple approach is to make the bandwidth a constant term.

4 - Sum the individual spectral components for each time t of interest. Choose a constant sampling rate. The sampling rate should be ten times the highest spectral frequency. The acceleration is Y(t) as given by the following formula.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \text{sen}\left(2\pi f_i t + \phi_i\right) \tag{89}$$

10.2 GENERATING TRACK IRREGULARITIES FROM PSD

According to *Berawi* (2013) thte generation of the irregularities from PSD can performed as:

Broeck [2001], Xia [2002], Lei & Noda [2002], Zhang et al. [2001], Song et al. [2003], Ju et al. [2010] and Gupta [2008] have all employed a similar method for creating an excitation force in the vehicle dynamic analysis.

(first method) Supposing a stationary stochastic process *r* (*x*) with zero mean and variance, σ_k^2, the sample function of the stochastic process *r* (*x*) can be simulated by:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \cos\left(2\pi n_k x - \theta_k\right) \tag{90}$$

where: A_k = Gaussian random variable with zero mean and variance, σ_k^2, as defined by

$$\sigma_k^2 = 2 \cdot G_{rr}\left(n_k\right)\Delta n \tag{91}$$

para $k = 1, 2, , N$

G_{rr} (n_k) = Power Spectral Density Standard

θ_k = Phase angle distributed between 0 and 2π randomly

n_k = Center wavenumber. In order to attain this value, a wave band, Δ*n*, can be defined as:

$$\Delta n = \frac{n_{up} - n_{low}}{N} \quad \Rightarrow \quad n_k = n_1 + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta n \tag{92}$$

para k = 1, 2, , N ; where N is the total number increments in the range of (n_{low} , n_{up}).

GENERATING TRACK IRREGULARITIES (second method)

Another method for creating rail track irregularity was inspired by Claus and Schiehlen [1997], Yang et al. [2004] and Dias et al. [2008]. Assume that PSD standard is defined as a function of the spatial wavenumber (rad/m). The random track irregularity can be produced by implementing the trigonometric series, as expressed by:

$$r(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cdot \cos\left(\Omega_n \cdot x + \theta_n\right) \tag{93}$$

where:

N = total number of discrete angular wavenumber considered

Ωn = discrete angular wavenumber (rad/m), which defined as:

$$\Omega_n = n \cdot \Delta\Omega = n \cdot \frac{\left(\Omega_{upper} - \Omega_{lower}\right)}{N} \tag{94}$$

where n = 1, 2, , (N-1) ; in the range of (Ω_{low} , Ω_{up}).

θ_{n} = Phase angle distributed between 0 and 2π randomly

A_{n} = the amplitude coefficient of random series, defined as: $A_0 = 0$ and:

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\cdot G_{rr}\Delta\Omega + \frac{4}{12\pi}\cdot G_{rr}(0)\right)\cdot\Delta\Omega}$$
$$A_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\cdot G_{rr}\Delta\Omega + \frac{1}{12\pi}\cdot G_{rr}(0)\right)\cdot\Delta\Omega} \quad (95)$$
$$A_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\cdot G_{rr}\cdot\Omega_n\right)\cdot\Delta\Omega}$$

where n = 3, 4, , (N-1).

The *pwelch* function on Octave () may be used to calculate the spectral denity function. The spectral density is the mean of the periodograms, scaled so that the area under the spectrum is the same as the mean square of the data.

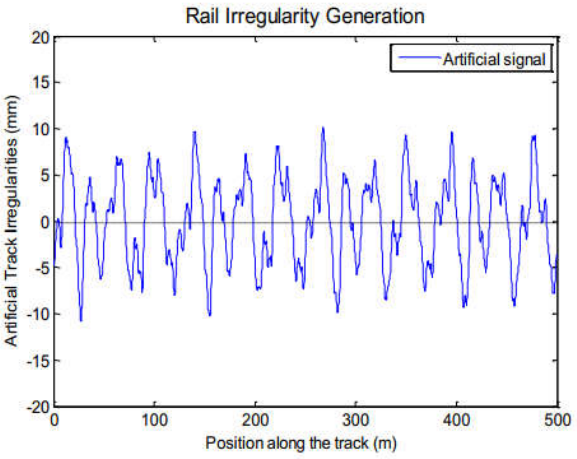


Figure 4.5 – Simulated track irregularities

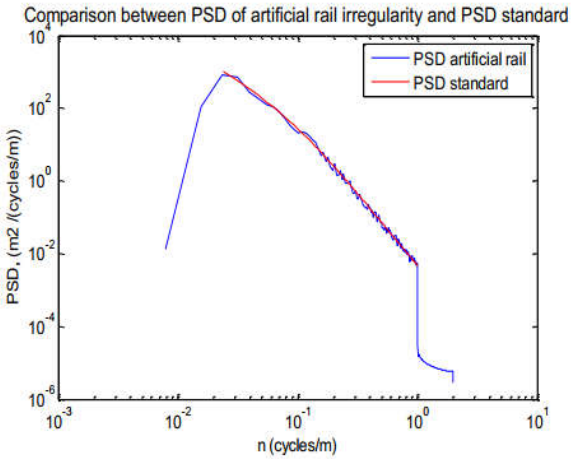
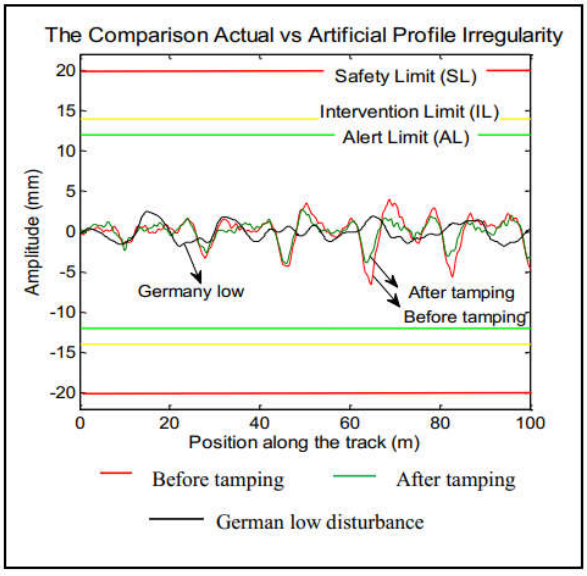
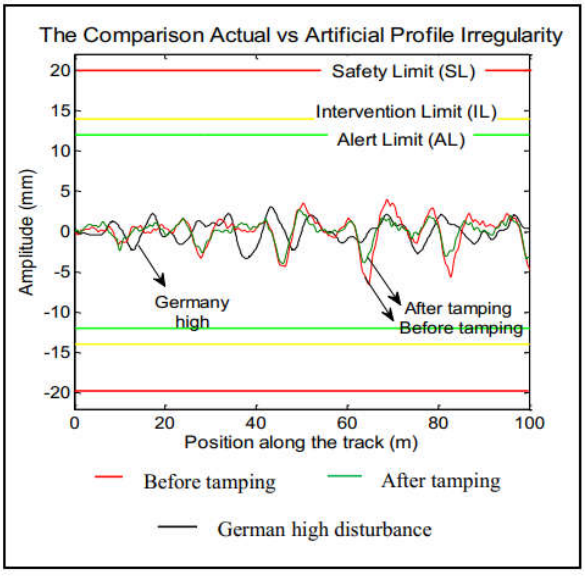


Figure 4.6 – Comparison of PSDs

Figura 45 – Verificação qualidade da Geração



a) Actual and Artificial German low (best classes)



b) Actual and Artificial German high (same classes)

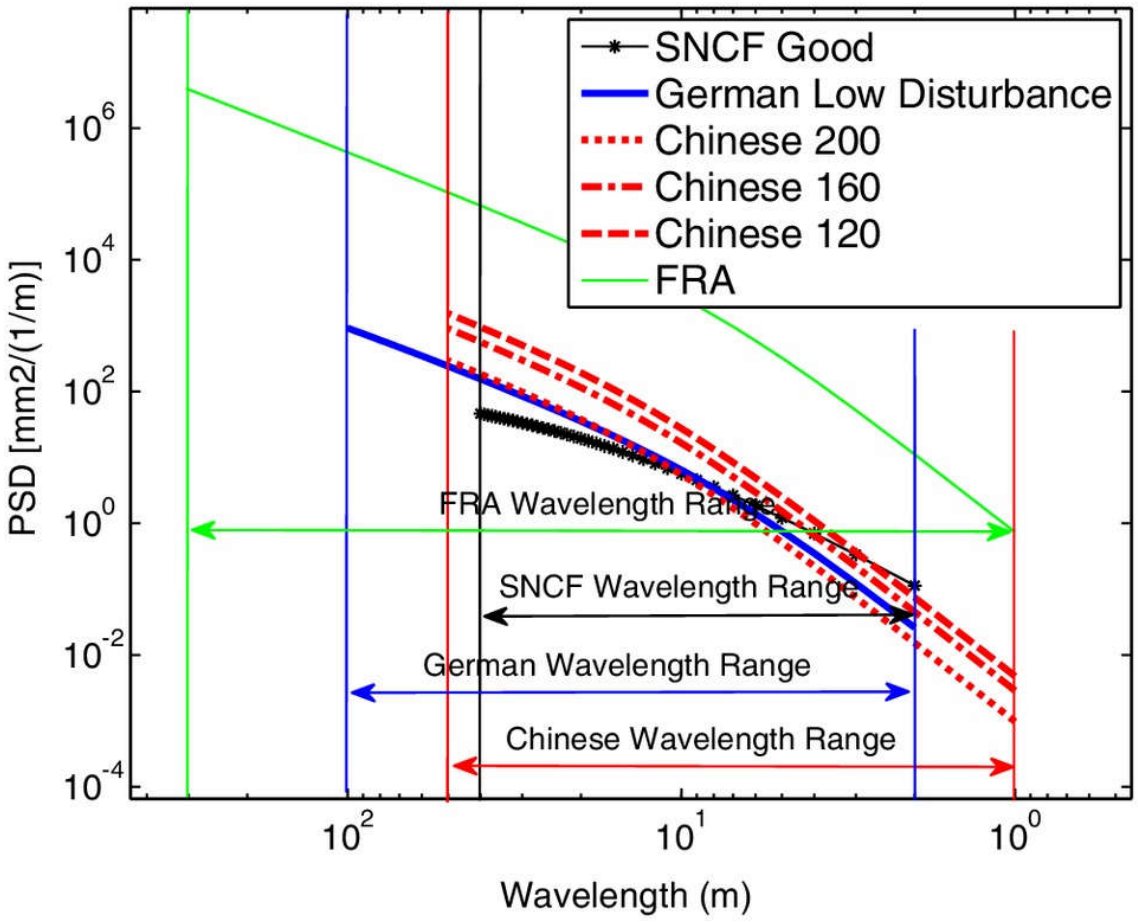
Figura 46 -

Limite de intervenção (European Standard EN- 13848-5)

- Limite de Alerta (Alert Limit AL) ± 12 mm;
- Limite de Intervenção (Intervention Limit IL) ± 14 mm;
- Limite de Segurança (Safety Limit SF) ± 20 mm;

Wavelength intervals as defined in the European Standard EN- 13848-5.

- D1: wavelength of irregularities within the interval of $3 < \lambda \leq 25$ m
- D2: wavelength of irregularities within the interval of $25 < \lambda \leq 70$ m
- D3: wavelength of irregularities within the interval of $70 < \lambda \leq 200$ m



Mesasuring system

The range of the spectral contend depends on the type of measuring system.

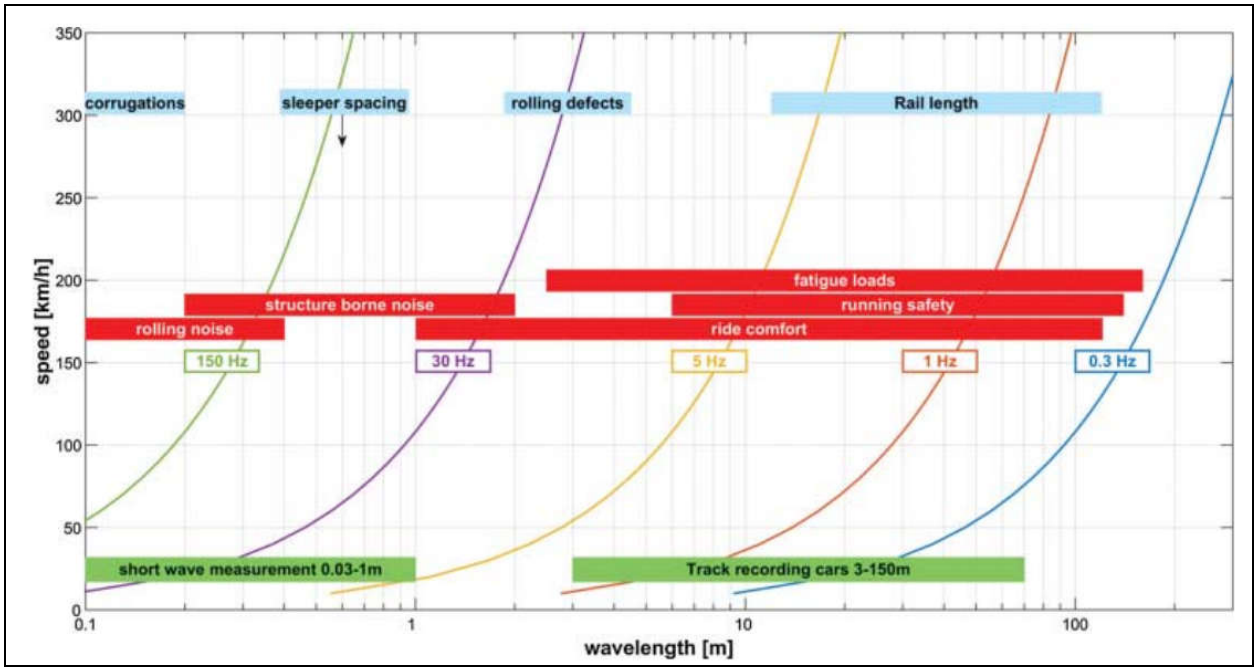


Figura 47 – Comprimento de Onda da Irregularidade

Andreas Haigermoser, Bernd Luber, Jochen Rauh & Gunnar Gräfe (2015)
Road and track irregularities: measurement, assessment and simulation, Vehicle System Dynamics, 53:7, 878-957, DOI: 10.1080/00423114.2015.1037312

11 Pavement Spectral Elevation

According to the international standard ISO-8086 (1995) the vertical elevation power spectral density (*PSD*) for a road roughness class is obtained by a logarithm expression in units of m^3:

$$Sd(n) = Sd(n_0) \cdot (n / n_0)^{\varpi} \tag{96}$$

where the slope in the log-log curve $\boldsymbol{\varpi}$ is fixed at −2 (40 dB per decade). The spatial frequency dependence term *Sd* at n_0 is obtained from:

$$Sd(n_0) = 4^{cn+1.0} \tag{97}$$

where *cn* is the class number varying from 1 to 8 (from *A* to **H** for different classes of roads, according to ISO). The +1.0 exponent in the previous equation applies for the mean geometric roughness for n_0 at 0.1 cycle/m, as shown in Tabela 2. It should be pointed out that the high quality of the asphalted road section measured is classified as ISO class A, with a *Sd*(n) wave-length value of 1 meter, given a 16×10^{-8} m^3 for the geometric mean and a *IRI* (International Roughness Index) of 1.92. These values were used as vehicle excitation in the frequency domain.

Tabela 2 - Road Class Roughness

Class Number (*cn*)	Road Class	*Sd*(n = 1)* ($\times 10^{-6}$ m^3)	S_{RMS}(n = 1)** ($\times 10^{-3}$ m)	S_{RMS}(n = 1) (mm)
1	A	0.16	0.4	0.4
2	B	0.64	0.8	0.8
3	C	2.56	1.6	1.6
4	D	10.24	3.2	3.2
5	E	40.96	6.4	6.4
6	F	163.84	12.8	12.8
7	G	655.36	25.6	25.6
8	H	2621.44	51.2	51.2

Ob.: *: Geometric Mean; **:rms value; n = 1 meter, from ISO 8608.

Considering the pavement irregularities as an ergodic stationary random process, described by the normal distribution, the evenness density can be expressed by the roughness root mean square value (rms-value). According to the *Perseval's* theorem (*Oppenheim*, 1975), the rms-value of a normally distributed random vertical displacement roughness is equal to the square root of the power spectral density. Therefore, by taking the square root of the previous expression, one gets:

$$S_{RMS}(n) = \sqrt{Sd(n)} = Sd(n_0)^{1/2} \cdot \left(n / n_0\right)^{\theta} \tag{98}$$

where the logarithm slope θ changes to (−1), which is half of the inclination of Sd (ϖ) (20 dB per decade).

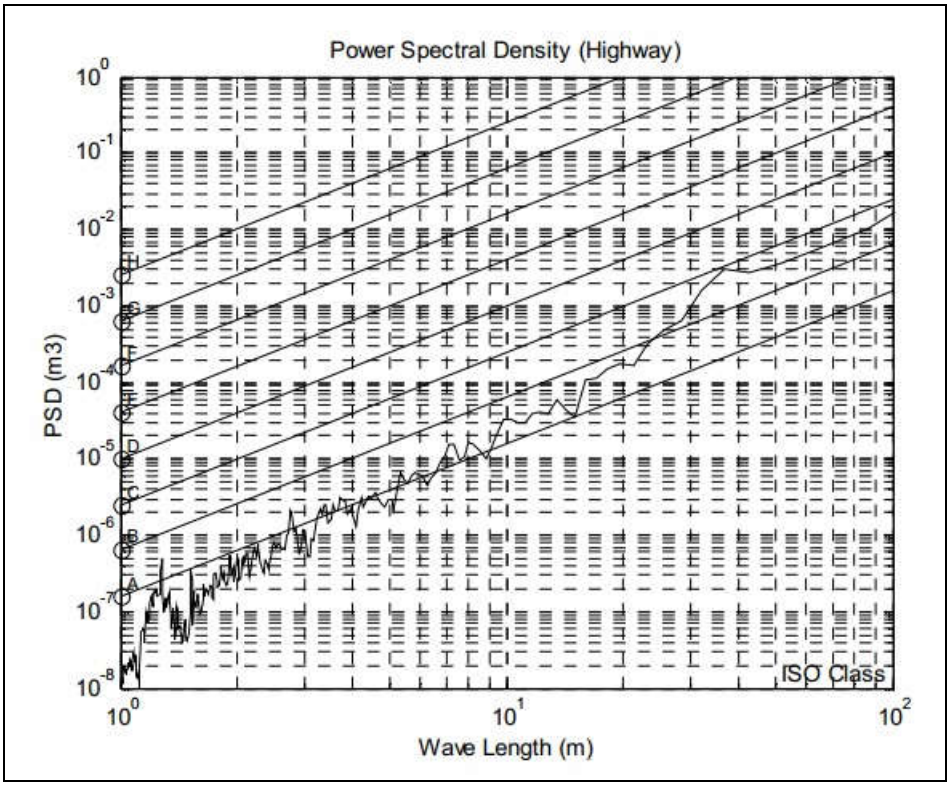


Figura 48 – PSD Road Roughness

12 References

Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engeneering - ABCM, pp Vol. 23, nº. 3,. 302-307

Barbosa, R. S. (1998). “Interação veículo/pavimento, conforto e segurança veicular.” Proc., 31a Reunião Anual de Pavimentação, Vol. 2, Associação Brasileira de Pavimentação (ABPv), Rio de Janeiro, Brazil, 1164–1182 (in Portuguese).

Barbosa, R. S. (1999). “Aplicação de sistemas multicorpos na dinâmica de veículos guiados.” Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo (USP), Sao Paulo, Brazil, 273 (in Portuguese).

Barbosa, R. S., Costa, A. (2001). “Safety vehicle traffic speed limit.” Proc., IX Int. Symp. on Dynamic Problems of Mechanics (IX—DINAME), Brazilian Society of Mechanical Science (ABCM), Rio de Janeiro, Brazil, 435–443.

ISO 8608 International Standard (2016) Mechanical vibration — Road surface profiles — Reporting of measured data. Second edition, p. 36.

Gonçalves J. P. C., Ambrósio J. A. C. (2003) Optimization of Vehicle Suspension Systems for Improved Comfort of Road Vehicles Using Flexible Multibody Dynamics. Nonlinear Dynamics Vol.: 34, pp. 113–131.

ISO 2631 – Guide for Evaluation of Human Exposure to Whole Body Vibration, International Organisation for Standardisation, 1974.

Abdur Rohim Boy Berawi (2013) Improving Railway Track Maintenance Using Power Spectral Density (PSD). Dissertation Submitted Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. pp. 224.

Tom Irvine (2014) Synthesizing a Time History to Satisfy a Power Spectral Density using Sinusoids. Shock and Vibration Response Spectra Course (Unit 12) . pp???

Aknin Patrice

Loprencipe, G. Zoccali, P. Cantisani, G. (2019) Effects of Vehicular Speed on the Assessment of Pavement Road Roughness. Applied Sciences, MDPI. pp. 18. DOI: 10.3390/app9091783.

Podwórna, M. (2015) Modelling of Random Vertical Irregularities of Railway Tracks. International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol.: 20, nº. 3, pp.647-655, DOI: 10.1515/ijame-2015-0043.

Claus H. Schiehlen, W. (1998) Modeling and Simulation of Railway Bogie Structural Vibrations. International Journal of Vehicle System Dynamics, Vol.: 29, nº: S1, pp. 538-552, DOI: 10.1080/00423119808969585.

Lei, X. Noda, N A. (2002) Analyses Of Dynamic Response Of Vehicle And Track Coupling System With Random Irregularity Of Track Vertical Profile. Journal of Sound and Vibration. Vol.: 258, Issue nº 1, pp. 147-165. DOI.: 10.1006/jsvi.2002.5107

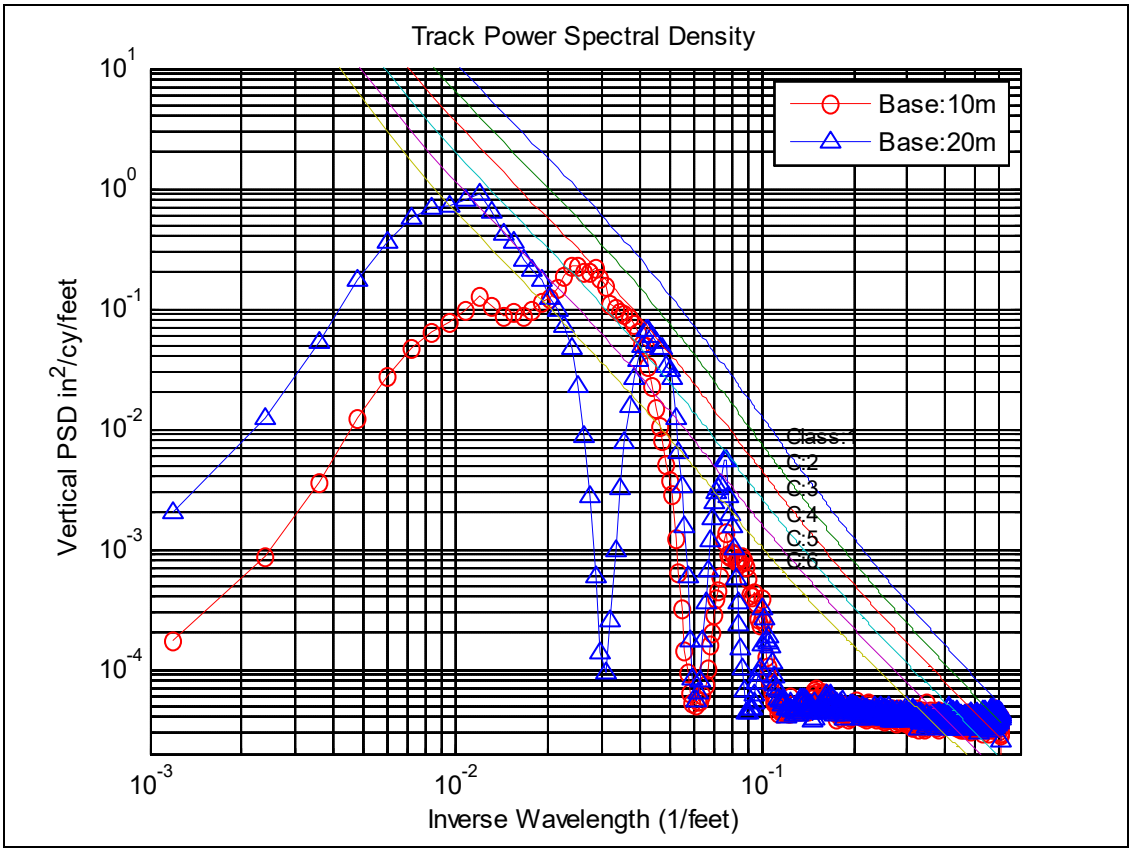


Figure 1 - Vertical Track PSD

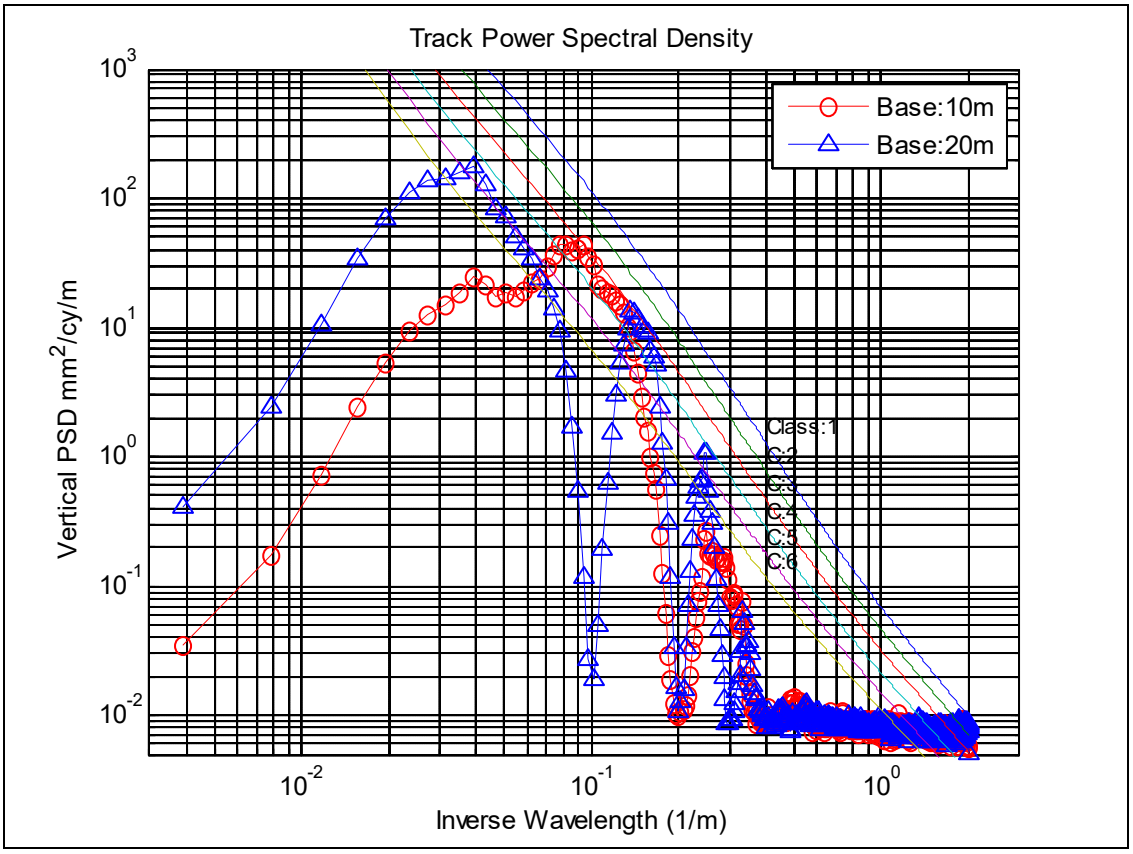


Figure 2 –Vertical Track PSD (SI)

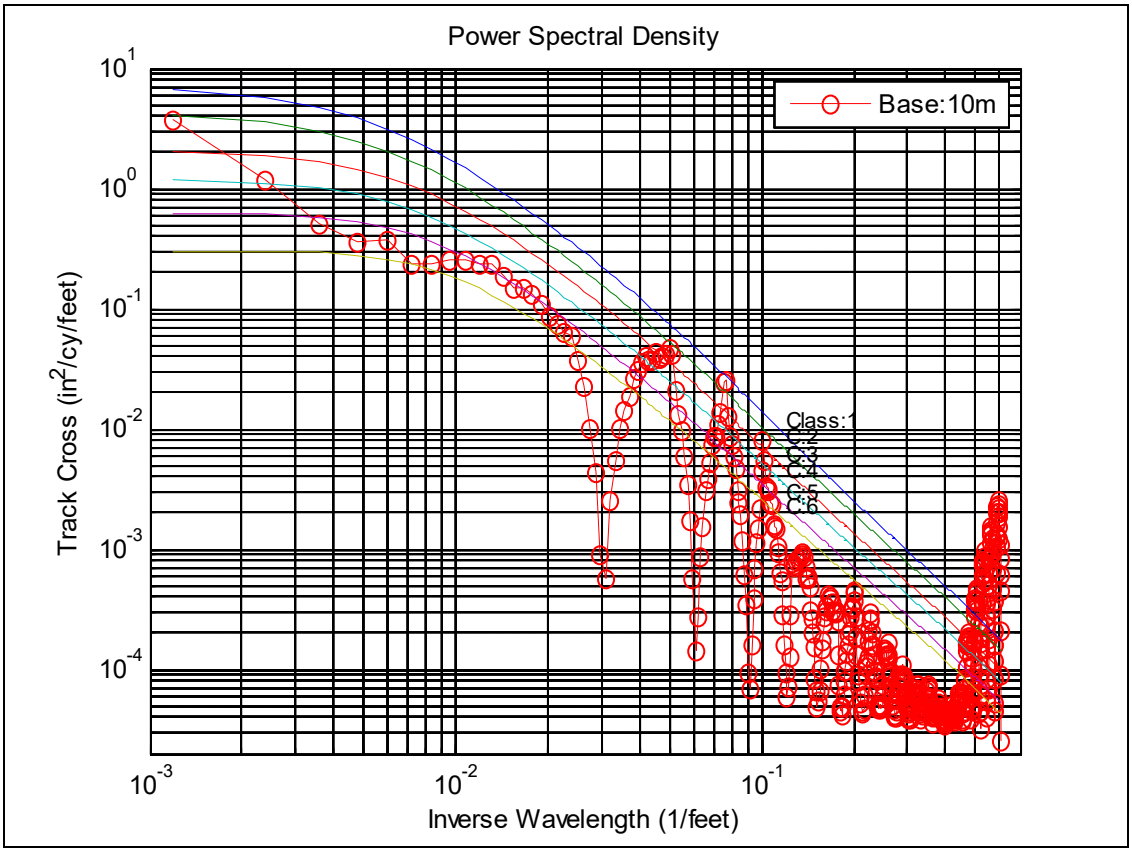


Figure 3 – PSD Track Cross - Base 10 m

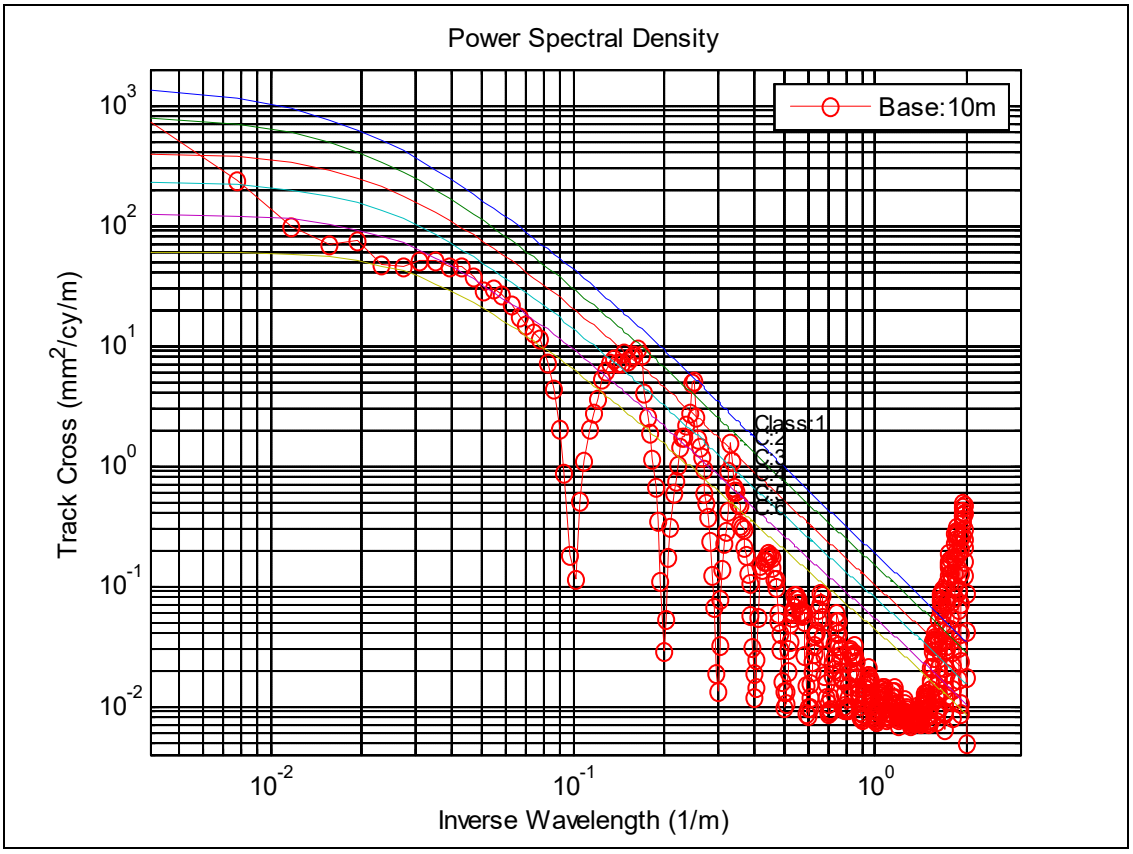


Figure 4 - PSD Track Cross - Base 10 m (SI)

o valor de referência da torção da norma EN 13848-5

AL - limite para alerta

IL - limite para intervenção

IAL - limite para ação imediata

Todos na base de 3 m

B.2.5 Twist

In practice, twist is measured on a 3 m base by the majority of networks, therefore IL and AL values are only given for that base-length (ℓ = 3 m).

Table B.7 — Twist – AL & IL – Isolated defects – Zero to peak value (ℓ = 3 m)

Speed (in km/h)	Zero to peak value AL (in mm/m)	Zero to peak value IL (in mm/m)	Zero to peak value IAL (reminder) (in mm/m)
$V \leq 80$	4	5	7
$80 < V \leq 120$	4	5	7
$120 < V \leq 160$	4	5	7
$160 < V \leq 200$	4	5	7
$200 < V \leq 300$	3	4	5

If necessary, the Infrastructure Manager can give values for other base-lengths, with the help of both the above table and the Figure 1 in 8.6, applying a factor to the IAL values, such as 0,6 for AL and 0,7 for IL.

NOTE In order to take into account the high rate of change of cross level of certain transition curves by design, the IL and AL can be increased provided the IAL is not exceeded.

13 Figura

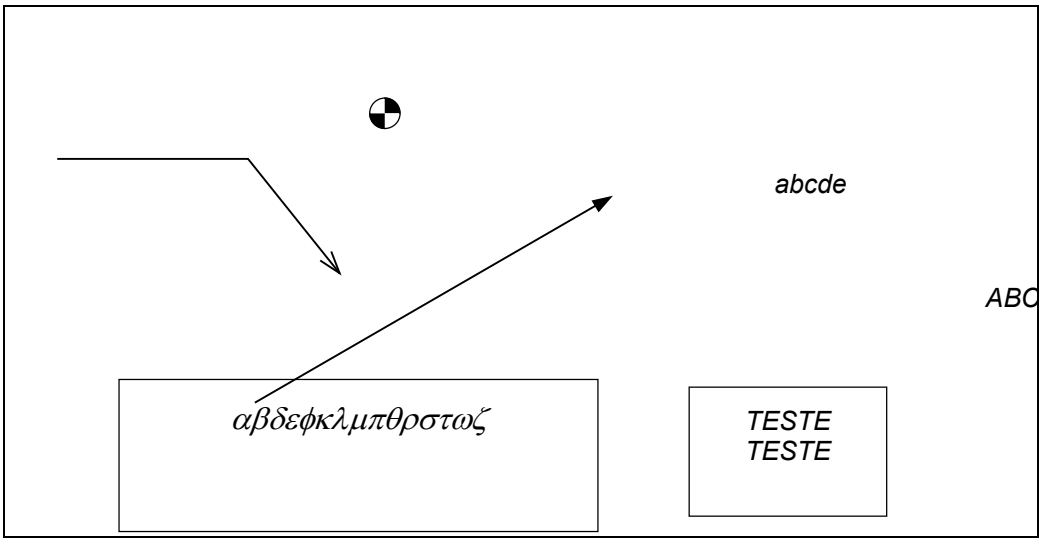


Figura 49 – Teste

$$\dot{\vec{\omega}} = \sqrt{2\pi} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \vec{k} \tag{99}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \sqrt{2\pi} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \vec{k} \tag{100}$$

Tabela 3 - Teste