Exemplo: Dinâmica do Monociclo

Considere o problema da dinâmica do monociclo motorizado mostrado na Figura 11a. Um modelo simplificado de representação física composto de um disco (representando a roda motorizada) e uma barra homogênea (representando a estrutura do veículo, carcaça do motor elétrico e passageiro), está ilustrado na Figura 11b. Determinar o torque ***T***(t) do motor elétrico necessários para manter uma aceleração translacional constante do monociclo e o valor do ângulo θ (t) de regime constante. Considere o contato unilateral de rolamento do disco com a superfície sem escorregamento e sem descolamento.

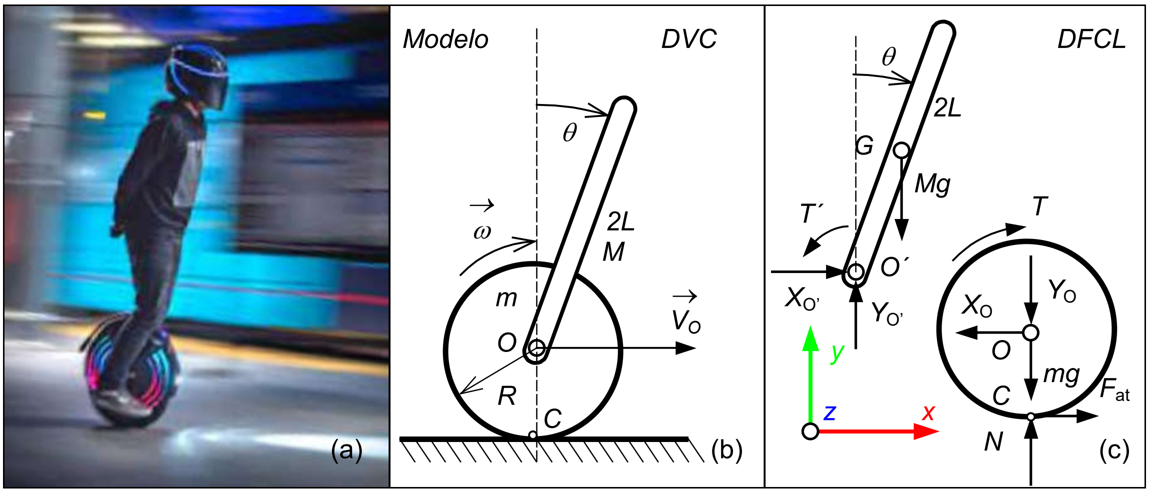

Figura 11 – Dinâmica do Monociclo

Resolução: a) **Sistema**: sistema composto por um disco de raio ***R*** e massa ***m*** e uma barra de comprimento 2***L*** e massa ***M***. Há um vínculo de contato de rolamento em ***C*** e uma articulação em ***O***; b) **Diagramas:** *DVC*, *DFCL*, conforme ilustrado na Figura 11c. c) **Referencial** e Pólo: Móvel solidário ao disco mas não girante ***Oxyz***. d) **Teoremas**: *TR* e *TQMA*.

Da condição cinemática de contato de rolamento sem escorregamento nem descolamento, rotação do disco $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$, obtêm-se a velocidade e aceleração do disco: $\vec{V}_O = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (O - C)$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_O = 0 - \omega \vec{k} \wedge R \vec{j} = R\omega \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_O = R\alpha \vec{i} \, .$$

Utilizando o ***TQMA*** na barra, considerando o pólo acelerado em ***O'***, tem-se que $\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_O\right)+(G-O)\wedge m\,\vec{a}_O=\vec{M}_O^{ext}$ para a barra de comprimento 2***L*** homogênea e simétrica e observando o ***DFCL***, obtêm-se:

$$-J_{Oz}\,\ddot{\theta}\,\vec{k}+L\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\right)\wedge a_{Ox}\,\vec{i}=L\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\right)\wedge -Mg\,\vec{j}+T'\,\vec{k}\qquad\Rightarrow$$

$-J_{Oz}\,\ddot{\theta}-ML\,a_{Ox}\cos\theta=-MLg\operatorname{sen}\theta+T'$; considerando a condição de equilíbrio quando $\dot{\theta}=0\ \therefore\ \ddot{\theta}=0$ obtêm-se: $\boxed{T'=ML\left(g\operatorname{sen}\theta-a_{Ox}\cos\theta\right)}$

Aplicando o ***TR*** no disco: $m\vec{a}_O=\vec{R}_O+\vec{R}_C+m\vec{g}\ \Rightarrow\ mR\alpha\,\vec{i}=X_O\,\vec{i}+Y_O\,\vec{j}+F_{at}\,\vec{i}+N\,\vec{j}-mg\,\vec{j}$

$$\begin{cases} mR\alpha=-X_O+F_{at} \\ 0=-Y_O+N-mg \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} F_{at}=mR\alpha+X_O \\ N=Y_O+mg=(M+m)g \end{cases}$$

Para aplicar o *TQMA*, obtêm-se inicialmente o momento da quantidade de movimento considerando o pólo em ***C*** do disco homogêneo e simétrico (matriz de inércia diagonal):

$$\left\{\vec{H}_C\right\}=[J]_C\{\vec{\omega}\}=\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_C\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{Cz}\,\omega_z \end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\vec{H}_C=-J_{Cz}\,\omega_z\,\vec{k}\ ;$$

Utilizando o ***TQMA*** descrito por: $\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_O\right)+(G-O)\wedge m\vec{a}_O=\vec{M}_O^{ext}$, considerando o pólo ***C*** acelerado do disco e identificando o momento externo aplicado ao disco observando o ***DFCL***, obtêm-se: $\dot{\vec{H}}_C+(G-C)\wedge m\,\vec{a}_C=\vec{M}_C^{ext}\ \Rightarrow$

$$-J_{Cz}\,\dot{\omega}_z\,\vec{k}+\left(R\,\vec{j}\wedge mR\omega^2\,\vec{j}\right)=-T\,\vec{k}+(O-C)\wedge -X_O\,\vec{i}\quad\Rightarrow\quad -J_{Cz}\,\dot{\omega}_z\,\vec{k}=-T\,\vec{k}+R\,X_O\,\vec{k}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\omega}_z=\frac{T-R\,X_O}{J_{Cz}}}$$

Aplicando o ***TR*** na barra: $M\,\vec{a}_G=\vec{R}_{O'}+M\,\vec{g}$

A aceleração do centro de massa ***G*** da barra é: $\vec{a}_G=\vec{a}_O+\dot{\vec{\dot{\theta}}}\wedge(G-O)+\vec{\dot{\theta}}\wedge\left[\vec{\dot{\theta}}\wedge(G-O)\right]\ \Rightarrow$

$$\vec{a}_G=R\alpha\,\vec{i}-\ddot{\theta}\,\vec{k}\wedge L\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\right)-\dot{\theta}\,\vec{k}\wedge\left[-\dot{\theta}\,\vec{k}\wedge L\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\right)\right]\qquad\Rightarrow$$

$\vec{a}_G=R\alpha\,\vec{i}+L\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{i}-\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right)-L\dot{\theta}^2\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\right)$ para $\boldsymbol{\theta}$(t) constante ($\dot{\theta}=0\ e\ \ddot{\theta}=0$)

$$\begin{cases} MR\alpha = X_{O'} \\ 0 = Y_{O'} - Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{O'} = M\,a_{Ox} \\ Y_{O'} = Mg \end{cases}$$

A título ilustrativo aplicando novamente o ***TQMA*** na barra, considerando agora o pólo em ***G***, obtêm-se inicialmente o momento da quantidade de movimento para o barra de comprimento 2***L*** homogênea e simétrica:

$$\left\{\vec{H}_G\right\} = [J]_G\left\{\dot{\theta}\right\} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{Gz}\,\dot{\theta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_G = -J_{Gz}\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$; derivando com relação ao tempo e obtendo o momento externo observando o ***DFCL*** , termo cruzado nulo e considerando que $\ddot{\theta} = 0$, obtêm-se: $-J_{Gz}\,\ddot{\theta}\,\vec{k} = \vec{T}' + (O' - G) \wedge \left(X_{O'}\,\vec{i} + Y_{O'}\,\vec{j}\right) \Rightarrow$

$0 = T'\,\vec{k} - L\left(\cos\theta\,\vec{j} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{i}\right) \wedge \left(X_{O'}\,\vec{i} + Y_{O'}\,\vec{j}\right) \Rightarrow T' = L\left(-X_{O'}\cos\theta + Y_{O'}\operatorname{sen}\theta\right)$ utilizando os valores das forças em ***O***': $\boxed{T' = ML\left(g\operatorname{sen}\theta - a_{Ox}\cos\theta\right)}$

Note no ***DFCL*** que o motor de acionamento do conjunto produz um torque ***T*** de interação interna que aciona o disco e reage na barra com ***T***'.

Finalmente considerando: $a_{Ox} = R\alpha = R\dot{\omega}$; $X_O = M\,a_{Ox}$ e $J_{Cz} = \bar{J}_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

$$\dot{\omega}_z = \frac{T - R\,X_O}{J_{Cz}} \Rightarrow T = J_{Cz}\dot{\omega} + RX_O = \frac{3}{2}mR^2\frac{a_{Ox}}{R} + RM\,a_{Ox} \Rightarrow \boxed{T = \left(M + 3m/2\right)R\,a_{Ox}}$$

Adicionalmente a aceleração é função do ângulo razão entre as massas (***M/m***), entre as dimensões (***L/R***) e gravidade (***g***):

$$\dot{\omega}_z = \frac{T - R\,X_O}{J_{Cz}} \Rightarrow -\frac{a_{Ox}}{R} = \frac{-L\left(M\,a_{Ox}\cos\theta - Mg\operatorname{sen}\theta\right) - RM\,a_{Ox}}{J_{Cz}}$$

$$\boxed{a_{Ox} = \frac{(M/m)(L/R)\operatorname{sen}\theta}{\left[(M/m)(L/R)\cos\theta + (M/m)(2/3R) - 1\right]}g}$$