

ANDRÉ SEIJI SANDES IANAGUI

MODELAGEM E ANÁLISE DE MOVIMENTO DE CABINE DE SIMULAÇÃO DE
LASTRO

Monografia apresentada como
projeto para a disciplina PME5236 -
Dinâmica de Sistemas Multicorpos e
Suas Aplicações em Robótica e
Engenharia Veicular

Professores:

Prof. Dr. Roberto Spínola Barbosa
Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho
Prof. Dr. Flavius Portella Ribas

São Paulo

2015

Sumário

1. Introdução	4
2. Objetivos.....	7
3. Motivação	7
4. Descrição do Modelo.....	8
4.1. Diagramas	8
4.2. Parâmetros.....	9
4.3. Sistemas de Coordenadas	10
4.4. Hipóteses.....	10
4.5. Requisitos de projeto	10
5. Modelagem Cinemática	11
5.1. Matrizes de Transformação Homogênea	11
5.2. Cinemática Inversa	13
5.3. Matriz Jacobiana.....	14
5.4. Coordenadas Generalizadas	15
5.5. Velocidades e quasi-velocidades	16
5.5.1. Campo de velocidades da cabine	16
5.5.2. Campo de velocidades dos atuadores	17
5.5.3. Velocidades Parciais	19
5.6. Acelerações	20
5.6.1. Campo de acelerações da cabine	20
5.6.2. Campo de acelerações dos atuadores	21
6. Dinâmica	24
6.1. Forças externas	24
6.2. Momento Angular	24
6.3. Equações de Movimento	24
6.3.1. Formulação completa.....	24
6.3.2. Formulação Reduzida	28
6.4. Dinâmica Inversa.....	28
6.5. Forma de espaço de estados	29
7. Simulação Numérica: Dinâmica Inversa	31
7.1. Testes estáticos.....	31
7.2. Movimento de Roll Puro	32
7.3. Movimento de Pitch Puro	36

7.4. Movimento de Roll e Pitch Simultâneos	39
7.5. Movimento de Roll e Pitch Defasados de 90°	43
8. Controlador	48
9. Simulação Numérica: Dinâmica Direta (integração)	50
10. Conclusões	53
11. Bibliografia	54
12. Anexo A – Códigos Matlab	55
13. Anexo B – Modelo Simulink	63

1. Introdução

Sistemas de simulação de operações que envolvem interação do homem com máquinas são ferramentas hoje consideradas indispensáveis para atividades de treinamento. Simuladores de voo simples foram desenvolvidos desde o princípio da era da aviação, com sistemas mecânicos realizando movimentos para treinamento de habilidades de manobra de pilotos de caça da 1ª e 2ª guerra mundial. Em 1954 foi desenvolvido o primeiro simulador de voo com a integração de sistemas de visualização, som e movimento [1]. Simuladores automobilísticos são ferramentas importantes no desenvolvimento de novos automóveis e, no caso de automobilismo competitivo (esportes a motor) são ferramenta crucial no desenvolvimento e aperfeiçoamento do carro em conjunto com o piloto. Em 2014, o Detran tornou obrigatória a prática de candidatos à habilitação utilizando o simulador antes de passar às aulas em pistas reais. O candidato deve passar por cinco aulas de 30 minutos cada, após o término das aulas teóricas, treinando nos simuladores.

Operações navais e oceânicas requerem também tipos específicos de simuladores. Os mais comuns são simuladores hidroviários de embarcações, que simulam o ambiente do passadiço de navios para uso em treinamentos acadêmicos de oficiais, de práticos ou uso em engenharia de portos e operações. O laboratório Tanque de Provas Numérico (TPN), da Universidade de São Paulo, conta com diversos simuladores hidroviários, utilizados frequentemente para simulações de operações portuárias, operações offshore e pesquisa de novas operações e métodos de controle de embarcações. A Figura 1 ilustra o simulador *Full Mission* do TPN, composto por 25 telas de visualização criando 360 graus de imagem [2].

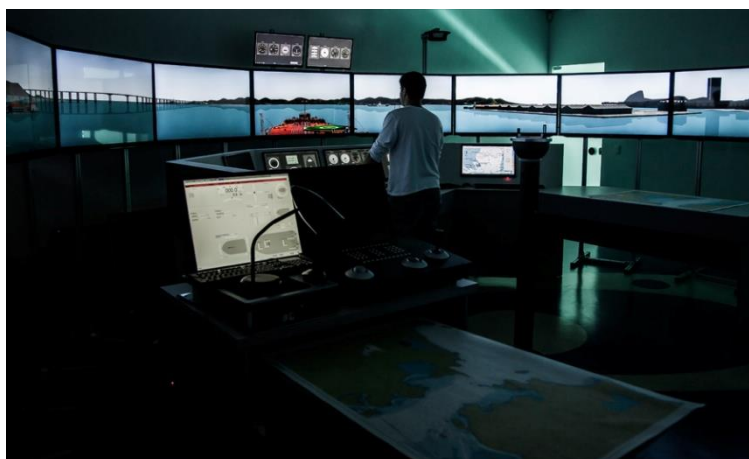


Figura 1 - Simulador Full Mission do Tanque de Provas Numérico

Enquanto muitos simuladores são estáticos, simulando apenas condições audiovisuais dos ambientes, alguns sistemas devem também apresentar movimentações de forma a tornar a manobra ainda mais realista. São diversas possíveis configurações de plataformas de movimentação, dependendo do número de graus de liberdade requeridos para o simulador. A plataforma de movimentação mais difundida e aplicada em simuladores com seis graus de liberdade é a chamada Plataforma de Stewart ou Hexapod, composta por seis atuadores lineares dispostos em forma de treliça. A Figura 2 ilustra uma plataforma e sua aplicação em uma cabine de simulação de voo. Os sistemas de movimentação podem ser usados também em simulações de operações marítimas, conforme ilustrado na Figura 3, na qual um hexapod é usado para simular os movimentos de um rebocador.

A modelagem e controle de sistemas de movimentação de simuladores compõe um assunto bastante interessante e vasto, sendo um perfeito exemplo da aplicação da teoria da mecânica de sistemas multicorpos.

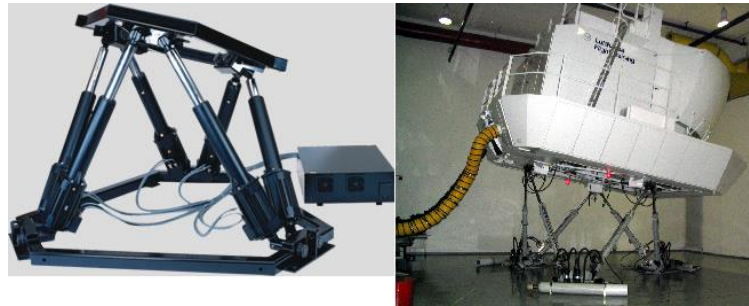


Figura 2 - Plataforma de Stewart e aplicação em cabine de simulação de voo [3].



Figura 3 - Simulador 4D do Tanque de Provas Numérico, acionado por uma plataforma de Stewart

Em 2016 o Tanque de Provas Numérico deverá comissionar um novo simulador, que treinará operadores de sistemas de Lastro de navios e plataformas de extração. Os sistemas de lastro são necessários para a manutenção do equilíbrio das embarcações em diferentes condições de carga. São compostos por tanques de água distribuídos ao longo dos cascos, além de um sistema de bombeamento que retira ou insere água nos tanques de acordo com o centro de massa da embarcação, de forma a manter a mesma estável e nivelada. A Figura 4 exemplifica o sistema de lastro de um navio de carga.

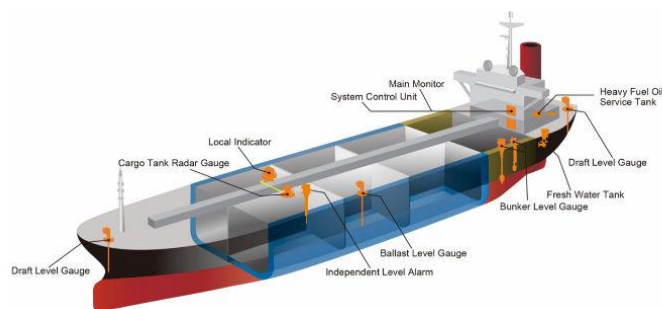


Figura 4 - Sistema de Lastro de navio de carga

Durante uma operação de lastro os operadores devem ser capazes de equilibrar as embarcações mesmo quando estas estão sujeitas a efeitos de ondas. Por este motivo, um simulador de lastro deve ser capaz de gerar estes movimentos de forma a imprimir realismo na manobra. As ondas simuladas devem infligir um efeito de *Roll* (Rolagem ou Balanço) e *Pitch* (Arfagem ou Caturro) na cabine de simulação. Efeitos de variação de

altura (ou heave) não são considerados por serem lentos ou decorrentes do próprio lastro.

Motivado pelo desenvolvimento deste simulador, este trabalho consiste na derivação de um modelo cinemático e dinâmico de um simulador de cabine de lastro, assim como a obtenção de parâmetros de projeto para a execução do mesmo.

2. Objetivos

Desenvolver um modelo cinemático e dinâmico de uma cabine de simulação de lastro, afetada por movimentos de rotação em dois graus de liberdade (*Roll* e *Pitch*). A partir dos resultados obtidos, determinar parâmetros de projeto como torque, velocidade, potência e dimensão de atuadores, energia regenerada. Determinar cálculos a serem integrados no software de sistema de controle da cabine.

3. Motivação

Projeto e execução de um sistema de simulação de lastro integrado ao simulador numérico do Tanque de Provas numérico para ensaios e treinamentos de operações de Lastro. Obter maior entendimento da aplicação da metodologia proposta pela disciplina PME 5236 no projeto de sistemas mecânicos.

4. Descrição do Modelo

O sistema de simulação de lastro é composto por uma estrutura metálica dentro da qual ficarão os operadores. Esta é a estrutura que sofrerá a movimentação e será denominada Cabine. A Figura 5 mostra a foto da Cabine sem os atuadores.



Figura 5 - Foto da Cabine de Lastro sem os atuadores.

A cabine deve ser mantida suspensa e apoiada em seu centro por uma junta universal ou Cardã, que permitirá livremente os movimentos de *Roll* e *Pitch*. O movimento de Guinada ou *Yaw* é bloqueado. Dois atuadores lineares serão dispostos verticalmente na parte frontal da cabine, conectados à mesma por meio de juntas esféricas em uma extremidade e ao piso, também por juntas esféricas em outra extremidade. Os atuadores lineares utilizados são sistemas eletromecânicos compostos por fusos de esfera acionados por servomotores de alto desempenho. A Figura 6 ilustra um atuador linear como o que será utilizado.

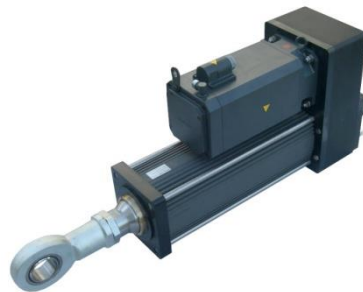


Figura 6 - Atuador Linear Eletromecânico

Para fins de dimensionamento, será considerado que uma massa extra estará alocada em uma das extremidades da cabine, de forma a representar desbalanceamentos devido ao peso das pessoas e equipamentos que estarão dentro da cabine.

4.1. Diagramas

A Figura 7 ilustra as vistas frontal e lateral cabine e alguns de seus parâmetros dimensionais. Também localiza os sistemas de coordenadas, descritos mais adiante.

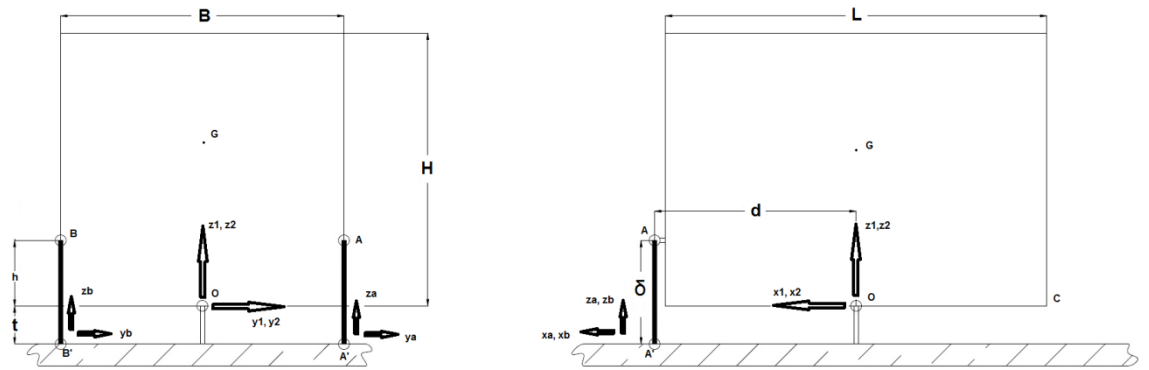


Figura 7 - Ilustração da cabine

Os atuadores são ilustrados na figura acima por barras ligando os pontos A e A' e os pontos B e B'. A Figura 8 ilustra em maior detalhe a configuração do atuador.

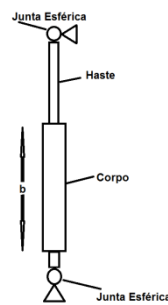


Figura 8 - Diagrama do Atuador

4.2. Parâmetros

Os parâmetros do modelo são descritos de acordo com a Tabela 1 e a Tabela 2.

Tabela 1 - Parâmetros Dimensionais

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
B	Largura da cabine	2,6	m
H	Altura da cabine	2,5	m
L	Comprimento da cabine	3,5	m
d	Distância horizontal entre centro da cabine e atuador	1,85	m
h	Distância vertical entre centro da cabine e atuador	0,6	m
t	Altura da cabine em relação ao piso	0,35	m
b	Comprimento do corpo do atuador	0,3	m

Tabela 2 - Parâmetros inerciais

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
M	Massa da cabine	2000	kg
J_{xxG}	Momento de inércia baricêntrico da cabine em relação ao eixo x	2.1683e+03	kg.m ²
J_{yyG}	Momento de inércia baricêntrico da cabine em relação ao eixo y	3.0833e+03	kg.m ²
J_{zzG}	Momento de inércia baricêntrico da cabine em relação ao eixo z	3.1683e+03	kg.m ²

m_{act}	Massa do atuador	100	kg
J_{act}	Momento de Inércia do atuador em relação à perpendicular a seu eixo	0,8125	kg.m ²
m	Massa da carga	300	kg

4.3. Sistemas de Coordenadas

Serão adotados sistemas de coordenadas conforme descrição abaixo. Os sistemas podem ser visualizados na Figura 7.

$O_1: \{x_1, y_1, z_1\}$: Sistema fixo inercial, com origem no pivô (junta universal). É considerado o sistema de referência para a localização dos outros sistemas.

$O_2: \{x_2, y_2, z_2\}$: Sistema não-inercial solidário à cabine, com origem em O_1 .

$O_a: \{x_a, y_a, z_a\}$: Sistema não-inercial solidário ao corpo do atuador A, com origem em A' .

$O_b: \{x_b, y_b, z_b\}$: Sistema não-inercial solidário ao corpo do atuador B, com origem em B' .

4.4. Hipóteses

Para a derivação do modelo matemático, serão consideradas coordenadas de interesse os movimentos de Roll, ou rotação em torno do eixo x_1 e o movimento de Pitch, ou rotação em torno do eixo y_1 . Outras rotações e movimentos serão considerados travados.

Não serão considerados efeitos elásticos de juntas e estruturas.

Para efeitos de análise do movimento efeitos dissipativos serão desprezados. Efeitos de rendimento de transmissão serão introduzidos à posteriori para análise de potências requeridas.

A matriz de inércia da cabine será considerada diagonal.

As massas das hastes dos atuadores serão consideradas desprezíveis em comparação com as outras massas e inércias envolvidas.

As massas dos corpos dos atuadores serão consideradas idênticas e não desprezíveis inicialmente para o desenvolvimento das equações de movimento. Entretanto, sabendo que as mesmas são de pouca influência na energia do movimento, serão desconsideradas posteriormente nos modelos numéricos simulados.

Os atuadores são simétricos e seus momentos de inércia em torno dos eixos x e y são idênticos.

4.5. Requisitos de projeto

A cabine deverá ser capaz de realizar movimentos de *Roll* e *Pitch* isolados em ângulos de amplitude máxima de 10°. Os movimentos serão senoidais, com período mínimo de 6 s.

5. Modelagem Cinemática

A seguir serão descritas as equações que descrevem os movimentos da cabine e dos atuadores.

5.1. Matrizes de Transformação Homogênea

As matrizes de Transformação Homogêneas serão descritas em termos dos movimentos de *Roll* e de *Pitch*, indicados respectivamente por ϕ e θ . Estes são os ângulos de rotação relativos ao sistema de coordenadas inercial, em torno dos eixos x_1 e y_1 , respectivamente.

As matrizes de transformação entre os sistemas O_1 e O_2 são dadas pelas equações (1) e (2).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}}_{M_1^2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}}_{M_2^1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

As matrizes de transformação entre os sistemas O_2 e O_a e os sistemas O_2 e O_b são dadas pelas equações (3) e (4).

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{M_a^2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_{M_b^2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Os coeficientes das matrizes M_a^2 e M_b^2 são obtidos pelas projeções dos vetores $A - A'$ e $B - B'$ nas direções dos versores do sistema O_2 .

Para o sistema O_a ,

$$\vec{k}_a = \frac{A - A'}{|A - A'|} = a_{31}\vec{i}_2 + a_{32}\vec{j}_2 + a_{33}\vec{k}_2 \quad (5)$$

Onde $a_{31} = \frac{A - A'}{|A - A'|} \cdot \vec{i}_2$, $a_{32} = \frac{A - A'}{|A - A'|} \cdot \vec{j}_2$, $a_{33} = \frac{A - A'}{|A - A'|} \cdot \vec{k}_2$.

Observe que

$$\begin{aligned}
(A - A') &= \left(d\vec{i}_2 + \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2 \right) - \left(d\vec{i}_1 + \frac{B}{2}\vec{j}_1 - t\vec{k}_1 \right) \\
\Leftrightarrow (A - A') &\left[d\vec{i}_2 + \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2 \right] \\
&\quad - \left[(dc_\theta + ts_\theta)\vec{i}_2 + \left(ds_\phi s_\theta + \frac{B}{2}c_\phi - ts_\phi c_\theta \right)\vec{j}_2 \right. \\
&\quad \left. + \left(dc_\phi s_\theta - \frac{B}{2}s_\phi - tc_\phi c_\theta \right)\vec{k}_2 \right] \\
\Leftrightarrow (A - A') &= (d - ts_\theta - dc_\theta)\vec{i}_2 + \left(\frac{B}{2} + ts_\phi c_\theta - ds_\phi s_\theta - \frac{B}{2}c_\phi \right)\vec{j}_2 \\
&\quad + \left(h + tc_\phi c_\theta - dc_\phi s_\theta + \frac{B}{2}s_\phi \right)\vec{k}_2
\end{aligned} \tag{6}$$

Na forma matricial,

$$\begin{aligned}
(A - A') &= \begin{bmatrix} d \\ \frac{B}{2} \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \frac{B}{2} \\ -t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d - dc_\theta - ts_\theta \\ \frac{B}{2} - ds_\phi s_\theta - \frac{B}{2}c_\phi + ts_\phi c_\theta \\ h - dc_\phi s_\theta + \frac{B}{2}s_\phi + tc_\phi c_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

Apesar de apresentadas em suas formas algébricas, as direções de \vec{k}_a podem ser calculadas online de forma simples através da transformação de coordenadas, pois

$$(A - A') = A_2 - M_2^1 A'_1 = M_1^2 A_2 - A'_1 \tag{8}$$

A partir da equação (5) podem-se obter as direções \vec{j}_a e \vec{i}_a descritos no sistema de coordenadas O_1 utilizando-se das equações (9) e (10).

$$\vec{j}_a = \vec{k}_a \wedge \vec{i}_1 \tag{9}$$

$$\vec{i}_a = \vec{j}_a \wedge \vec{k}_a \tag{10}$$

Observe que os versores \vec{i}_a e \vec{j}_a estarão descritos no sistema O_1 . Para obter os parâmetros das matrizes homogêneas descritas acima, é necessário aplicar a transformação M_2^1 nos versores obtidos.

Pode-se proceder da mesma forma com o atuador B.

Para o sistema O_b ,

$$\vec{k}_b = \frac{B - B'}{|B - B'|} = b_{31}\vec{i}_2 + b_{32}\vec{j}_2 + b_{33}\vec{k}_2 \tag{11}$$

Onde $b_{31} = \frac{B - B'}{|B - B'|} \cdot \vec{i}_2$, $b_{32} = \frac{B - B'}{|B - B'|} \cdot \vec{j}_2$, $b_{33} = \frac{B - B'}{|B - B'|} \cdot \vec{k}_2$.

Observe que

$$\begin{aligned}
 (B - B') &= \left(d\vec{i}_2 - \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2 \right) - \left(d\vec{i}_0 - \frac{B}{2}\vec{j}_0 - t\vec{k}_0 \right) \\
 (B - B') &= (d - ts_\theta - dc_\theta)\vec{i}_2 + \left(-\frac{B}{2} + ts_\phi c_\theta - ds_\phi s_\theta + \frac{B}{2}c_\phi \right)\vec{j}_2 \\
 &\quad + \left(h + tc_\phi c_\theta - dc_\phi s_\theta - \frac{B}{2}s_\phi \right)\vec{k}_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

Na forma matricial,

$$\begin{aligned}
 (B - B') &= \begin{bmatrix} d \\ \frac{B}{2} \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \frac{B}{2} \\ -t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} d - dc_\theta - ts_\theta \\ -\frac{B}{2} - ds_\phi s_\theta + \frac{B}{2}c_\phi + ts_\phi c_\theta \\ h - dc_\phi s_\theta - \frac{B}{2}s_\phi + tc_\phi c_\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Apesar de apresentadas em suas formas algébricas, as direções de \vec{k}_b podem ser calculadas online de forma simples através da transformação de coordenadas, pois

$$(B - B') = B_2 - M_2^1 B_1' = M_1^2 B_2 - B_1' \tag{14}$$

A partir da equação (11) podem-se obter as direções \vec{j}_b e \vec{i}_b descritos no sistema de coordenadas O_1 utilizando-se das equações (15) e (16).

$$\vec{j}_b = \vec{k}_b \wedge \vec{i}_1 \tag{15}$$

$$\vec{i}_b = \vec{j}_b \wedge \vec{k}_b \tag{16}$$

Observe que os versores \vec{i}_b e \vec{j}_b estarão descritos no sistema O_1 . Para obter os parâmetros das matrizes homogêneas descritas acima, é necessário aplicar a transformação M_2^1 nos versores obtidos.

5.2. Cinemática Inversa

O sistema aqui descrito possui a particularidade de ter uma descrição cinemática Inversa mais simples que a descrição direta. Isso ocorre porque as variáveis cujo objetivo é o controle no sistema são ângulos, enquanto que os atuadores possuem movimentos lineares. Em sistemas robóticos, normalmente, ocorre o inverso.

Começamos definindo o comprimento instantâneo do atuador como $\delta_a = |A - A'|$. Observe que δ_a é a distância entre os pontos A e A' . A cinemática inversa, que relaciona o comprimento instantâneo do atuador aos ângulos ϕ e θ então é dada pelo cálculo do módulo do vetor $A - A'$.

$$\delta_a^2 = |A - A'|^2 \tag{17}$$

A partir da expansão da equação (17) junto com a descrição de $(A - A')$ dada pela equação (6) temos

$$\begin{aligned}
\delta_a^2 &= (d - ts_\theta - dc_\theta)^2 + \left(\frac{B}{2} + ts_\phi c_\theta - ds_\phi s_\theta - \frac{B}{2} c_\phi\right)^2 \\
&\quad + \left(h + tc_\phi c_\theta - dc_\phi s_\theta + \frac{B}{2} s_\phi\right)^2 \\
\Leftrightarrow \delta_a^2 &= 2d^2(1 - c_\theta) + t^2 + h^2 + \frac{B^2}{2}(1 - c_\phi) \\
&\quad + (Bs_\phi + 2hc_\phi)(tc_\theta - ds_\theta) + Bhs_\phi - 2dts_\theta
\end{aligned} \tag{18}$$

Da mesma maneira, define-se o comprimento instantâneo do atuador como $\delta_b = |B - B'|$. δ_b é a distância entre os pontos B e B' . A cinemática inversa, que relaciona o comprimento instantâneo do atuador aos ângulos ϕ e θ então é dada pelo cálculo do módulo do vetor $B - B'$.

$$\delta_b^2 = |B - B'|^2 \tag{19}$$

A partir da expansão da equação (19) junto com a descrição de $(B - B')$ dada pela equação (12) temos

$$\begin{aligned}
\delta_b^2 &= (d - ts_\theta - dc_\theta)^2 + \left(-\frac{B}{2} + ts_\phi c_\theta - ds_\phi s_\theta + \frac{B}{2} c_\phi\right)^2 \\
&\quad + \left(h + tc_\phi c_\theta - dc_\phi s_\theta - \frac{B}{2} s_\phi\right)^2 \\
\Leftrightarrow \delta_b^2 &= 2d^2(1 - c_\theta) + t^2 + h^2 + \frac{B^2}{2}(1 - c_\phi) \\
&\quad + (2hc_\phi - Bs_\phi)(tc_\theta - ds_\theta) - Bhs_\phi - 2dts_\theta
\end{aligned} \tag{20}$$

As equações (18) e (20) são as formas algébricas do cálculo dos deslocamentos dos atuadores e podem ser facilmente implementadas num sistema de controle no qual as referências de posição linear são dadas para os controladores dos servo-atuadores (controle puramente cinemático).

A partir dessas equações também é possível definir previamente qual o deslocamento requerido pelos atuadores nos movimentos máximos de *Roll* e *Pitch*. Observando que a situação mais crítica ocorre no movimento de *Pitch*, podemos fixar $\phi = 0$ e $\theta = \pm 10^\circ$ e calcular qual o deslocamento requerido pelos atuadores nesta situação, obtendo assim, a partir das equações (18) e (20):

$$\delta_a^2 = \delta_b^2 = 2d^2(1 - c_\theta) + t^2 + h^2 + 2h(tc_\theta - ds_\theta) - 2dts_\theta \tag{21}$$

E

$$\Delta_{max} = \max(\delta_{a,b}) - \min(\delta_{a,b}) \tag{22}$$

A partir dessas equações podemos obter que o deslocamento máximo requerido para os atuadores neste simulador é de 644,8 mm, ou 0,6448 m.

5.3. Matriz Jacobiana

Para encontrar a matriz jacobiana e relacionar as velocidades dos atuadores com as velocidades angulares da cabine, partimos das equações de deslocamento dos atuadores e realizamos as derivadas temporais das equações dos deslocamentos dos atuadores.

No caso do atuador A, a partir da equação (18):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_a^2) = \frac{d}{dt} \left(2d^2(1 - c_\theta) + t^2 + h^2 + \frac{B^2}{2}(1 - c_\phi) - 2dts_\theta \right. \\ \left. + (2hc_\phi + Bs_\phi)(tc_\theta - ds_\theta) + Bhs_\phi \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Obtendo assim

$$\begin{aligned} \delta_a = \frac{1}{\delta_a} \left\{ \dot{\theta} \left[d(ds_\theta - tc_\theta) - \left(\frac{B}{2}s_\phi + hc_\phi \right) (ts_\theta + dc_\theta) \right] \right. \\ \left. + \dot{\phi} \left[\frac{B}{2} \left(\frac{B}{2}s_\phi + hc_\phi \right) + (ds_\theta - tc_\theta) \left(hs_\phi - \frac{B}{2}c_\phi \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Para o atuador B, a partir da equação (20) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_b^2) = \frac{d}{dt} \left(2d^2(1 - c_\theta) + t^2 + h^2 + \frac{B^2}{2}(1 - c_\phi) \right. \\ \left. + (2hc_\phi - Bs_\phi)(tc_\theta - ds_\theta) - Bhs_\phi - 2dts_\theta \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Obtendo assim

$$\begin{aligned} \delta_b = \frac{1}{\delta_b} \left\{ \dot{\theta} \left[d(ds_\theta - tc_\theta) - \left(hc_\phi - \frac{B}{2}s_\phi \right) (ts_\theta + dc_\theta) \right] \right. \\ \left. + \dot{\phi} \left[\frac{B}{2} \left(\frac{B}{2}s_\phi - hc_\phi \right) + \left(hs_\phi + \frac{B}{2}c_\phi \right) (ds_\theta - tc_\theta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

As equações acima podem ser descritas na forma matricial, definindo assim a matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_b \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Onde

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{B}{2} \left(\frac{B}{2}s_\phi + hc_\phi \right) + (ds_\theta - tc_\theta) \left(hs_\phi - \frac{B}{2}c_\phi \right) & d(ds_\theta - tc_\theta) - \left(hc_\phi + \frac{B}{2}s_\phi \right) (ts_\theta + dc_\theta) \\ \frac{B}{2} \left(\frac{B}{2}s_\phi - hc_\phi \right) + (ds_\theta - tc_\theta) \left(hs_\phi + \frac{B}{2}c_\phi \right) & d(ds_\theta - tc_\theta) - \left(hc_\phi - \frac{B}{2}s_\phi \right) (ts_\theta + dc_\theta) \end{bmatrix} \quad (28)$$

É a matriz Jacobiana do sistema.

5.4. Coordenadas Generalizadas

Serão adotadas como coordenadas generalizadas as coordenadas que devem ser controladas, *Roll* e *Pitch*:

$$q_1 = \phi \vec{l}_1$$

$$q_2 = \theta \vec{j}_1$$

As velocidades de rotação são descritas diretamente pelas derivadas das coordenadas generalizadas:

$$\dot{q}_1 = \dot{\phi} \vec{l}_1$$

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta} \vec{j}_1$$

Observe que o sistema está descrito no sistema O_1 .

5.5. Velocidades e quasi-velocidades

Para facilitar a aplicação das equações de Gibbs-Appel as quase-velocidades adotadas serão definidas como as velocidades de rotação descritas no sistema de coordenadas O_2 . A velocidade em torno de x_2 será chamada de r , e a velocidade em torno de y_2 será chamada de p . Assim:

$$u_1 = r$$

$$u_2 = p$$

Observe que r e p estão relacionadas com as velocidades $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ através de uma matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 \\ s_\phi s_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ou, na forma algébrica,

$$\begin{aligned} r &= c_\theta \dot{\phi} \\ p &= s_\phi s_\theta \dot{\phi} + c_\phi \dot{\theta} \end{aligned} \quad (30)$$

A terceira variável, q decorrente da transformação M_1^2 possui valor não-zero dada por $q = c_\phi s_\theta \dot{\phi} - s_\phi \dot{\theta}$. Entretanto, apenas r e q são escolhidas quasi-velocidades, uma vez que o sistema possui apenas dois graus de liberdade. Os termos em q são zerados nas projeções de velocidades na direção de r e p . A transformação inversa decorrente de (29) é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_\theta} & 0 \\ -\frac{s_\phi s_\theta}{c_\phi c_\theta} & \frac{1}{c_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix} \quad (31)$$

As acelerações serão dadas pelas equações (32) a (34):

$$\dot{r} = -s_\theta \dot{\theta} \dot{\phi} + c_\theta \ddot{\phi} \quad (32)$$

$$\dot{p} = s_\phi s_\theta \ddot{\phi} + c_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 + (c_\theta - 1) s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} + c_\phi \ddot{\theta} \quad (33)$$

$$\dot{q} = c_\phi s_\theta \ddot{\phi} - s_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 + (c_\theta - 1) c_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} - s_\phi \ddot{\theta} \quad (34)$$

Ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 \\ s_\phi s_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_\theta \dot{\theta} & 0 \\ c_\phi s_\theta \dot{\phi} & (c_\theta - 1) s_\phi \dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (35)$$

5.5.1. Campo de velocidades da cabine

O vetor velocidade angular da cabine é expresso pela equação (36)

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{i}_1 + \dot{\theta} \vec{j}_1 \quad (36)$$

Observe que o mesmo também pode ser descrito no sistema O_2 de maneira simples:

$$\vec{\omega} = c_\theta \dot{\phi} \vec{i}_2 + (\dot{\phi} s_\phi s_\theta + c_\phi \dot{\theta}) \vec{j}_2 + (c_\phi s_\theta \dot{\phi} - s_\phi \dot{\theta}) \vec{k}_2 = r \vec{i}_2 + p \vec{j}_2 + q \vec{k}_2 \quad (37)$$

A partir do vetor velocidade angular descrito na equação (37) aplica-se a fórmula do campo de velocidades de um corpo nos pontos G , A , B e C :

$$\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (G - O) = (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \wedge \left(\frac{H}{2}\vec{k}_2\right) = \frac{H}{2}(p\vec{i}_2 - r\vec{j}_2) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (A - O) = (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 + \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right) \\ &= \left(\frac{B}{2}r - dp\right)\vec{k}_2 + (dq - hr)\vec{j}_2 + \left(hp - \frac{B}{2}q\right)\vec{i}_2 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (B - O) = (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 - \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right) \\ &= \left(-\frac{B}{2}r - dp\right)\vec{k}_2 + (dq - hr)\vec{j}_2 + \left(hp + \frac{B}{2}q\right)\vec{i}_2 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (C - O) = (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{i}_2 - \frac{B}{2}\vec{j}_2\right) \\ &= \left(-\frac{B}{2}r + \frac{L}{2}p\right)\vec{k}_2 - \frac{L}{2}q\vec{j}_2 + \frac{B}{2}q\vec{i}_2 \end{aligned} \quad (41)$$

5.5.2. Campo de velocidades dos atuadores

As velocidades relacionadas aos atuadores são obtidas a seguir. O objetivo final é obter os vetores velocidade angular dos atuadores e as velocidades de seus baricentros.

Para o atuador A, partimos da equação do campo de velocidades do ponto A aplicado ao atuador:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{\omega}_a \wedge (A - A') + \delta_a \vec{k}_a = \vec{\omega}_a \wedge \delta_a \vec{k}_a + \delta_a \dot{\vec{k}}_a \quad (42)$$

Supondo que o vetor velocidade angular do atuador seja dado por

$$\vec{\omega}_a = \omega_{ai}\vec{i}_a + \omega_{aj}\vec{j}_a + \omega_{ak}\vec{k}_a \quad (43)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= (\omega_{ai}\vec{i}_a + \omega_{aj}\vec{j}_a + \omega_{ak}\vec{k}_a) \wedge \delta_a \vec{k}_a + \delta_a \dot{\vec{k}}_a \\ \Leftrightarrow \vec{v}_A &= \omega_{aj}\delta_a \vec{i}_a - \omega_{ai}\delta_a \vec{j}_a + \delta_a \dot{\vec{k}}_a \end{aligned} \quad (44)$$

Substituindo a equação (39) na equação (44) obtém-se então:

$$\omega_{aj}\delta_a \vec{i}_a - \omega_{ai}\delta_a \vec{j}_a + \delta_a \dot{\vec{k}}_a = \left(\frac{B}{2}r - dp\right)\vec{k}_2 + (dq - hr)\vec{j}_2 + \left(hp - \frac{B}{2}q\right)\vec{i}_2 \quad (45)$$

Na forma matricial pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \omega_{aj}\delta_a \\ -\omega_{ai}\delta_a \\ \dot{\delta}_a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{M_a^2} \begin{bmatrix} hp - \frac{B}{2}q \\ dq - hr \\ \frac{B}{2}r - dp \end{bmatrix} \quad (46)$$

Obtendo, portanto, as componentes de velocidade angular do vetor $\vec{\omega}_a$:

$$\begin{aligned}\omega_{ai} &= -\frac{1}{\delta_a} \left[a_{21} \left(hp - \frac{B}{2}q \right) + a_{22}(dq - hr) + a_{23} \left(\frac{B}{2}r - dp \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\delta_a} \left[(a_{21}h - a_{23}d)p + \left(a_{23} \frac{B}{2} - a_{22}h \right) r \right. \\ &\quad \left. + \left(a_{22}d - a_{21} \frac{B}{2} \right) q \right]\end{aligned}\quad (47)$$

$$\begin{aligned}\omega_{aj} &= \frac{1}{\delta_a} \left[a_{11} \left(hp - \frac{B}{2}q \right) + a_{12}(dq - hr) + a_{13} \left(\frac{B}{2}r - dp \right) \right] \\ &= \frac{1}{\delta_a} \left[(a_{11}h - a_{13}d)p + \left(a_{13} \frac{B}{2} - a_{12}h \right) r \right. \\ &\quad \left. + \left(a_{12}d - a_{11} \frac{B}{2} \right) q \right]\end{aligned}\quad (48)$$

Como consequência também é obtida uma expressão para a velocidade do atuador A em função das quasi-velocidades:

$$\dot{\delta}_a = a_{31}hp - a_{32}hr + a_{33} \left(\frac{B}{2}r - dp \right) \quad (49)$$

A velocidade do baricentro do atuador será dada por

$$\begin{aligned}\vec{v}_{G_a} &= \vec{v}_{A'} + \vec{\omega}_a \wedge (G_a - A') = \vec{0} + (\omega_{ai}\vec{l}_a + \omega_{aj}\vec{j}_a) \wedge \left(\frac{b}{2}\vec{k}_a \right) \\ &= \omega_{aj} \frac{b}{2}\vec{l}_a - \omega_{ai} \frac{b}{2}\vec{j}_a\end{aligned}\quad (50)$$

Para o atuador B, de maneira similar partimos da equação do campo de velocidades do ponto B aplicado ao atuador:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{\omega}_b \wedge (B - B') + \delta_b \vec{k}_b = \vec{\omega}_b \wedge \delta_b \vec{k}_b + \dot{\delta}_b \vec{k}_b \quad (51)$$

Supondo que o vetor velocidade angular do atuador seja dado por

$$\vec{\omega}_b = \omega_{bi}\vec{l}_b + \omega_{bj}\vec{j}_b + \omega_{bk}\vec{k}_b \quad (52)$$

Temos então

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= (\omega_{bi}\vec{l}_b + \omega_{bj}\vec{j}_b + \omega_{bk}\vec{k}_b) \wedge \delta_b \vec{k}_b + \dot{\delta}_b \vec{k}_b \\ \Leftrightarrow \vec{v}_B &= \omega_{bj}\delta_b \vec{l}_b - \omega_{bi}\delta_b \vec{j}_b + \dot{\delta}_b \vec{k}_b\end{aligned}\quad (53)$$

Substituindo a equação (40) na equação (53) obtém-se então:

$$\omega_{bj}\delta_b \vec{l}_b - \omega_{bi}\delta_b \vec{j}_b + \dot{\delta}_b \vec{k}_b = \left(-\frac{B}{2}r - dp \right) \vec{k}_2 + (dq - hr)\vec{j}_2 + \left(hp + \frac{B}{2}q \right) \vec{l}_2 \quad (54)$$

Na forma matricial pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \omega_{bj}\delta_b \\ -\omega_{bi}\delta_b \\ \dot{\delta}_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_{M_b^2} \begin{bmatrix} hp + \frac{B}{2}q \\ dq - hr \\ -\frac{B}{2}r - dp \end{bmatrix} \quad (55)$$

Obtendo-se, portanto, as componentes de velocidade angular do vetor $\vec{\omega}_b$:

$$\begin{aligned}
\omega_{bi} &= -\frac{1}{\delta_b} \left[b_{21} \left(hp + \frac{B}{2} q \right) + b_{22} (dq - hr) + b_{23} \left(-\frac{B}{2} r - dp \right) \right] \\
&= -\frac{1}{\delta_b} \left[(b_{21}h - b_{23}d)p - \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) r \right. \\
&\quad \left. + \left(b_{21} \frac{B}{2} + b_{22}d \right) q \right]
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta_b} \left[b_{11} \left(hp + \frac{B}{2} q \right) + b_{12} (dq - hr) + b_{13} \left(-\frac{B}{2} r - dp \right) \right] \\
= \frac{1}{\delta_b} \left[(b_{11}h - b_{13}d)p - \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) r \right. \\
\left. + \left(b_{11} \frac{B}{2} + b_{12}d \right) q \right]
\end{aligned} \tag{57}$$

Como consequência também é obtida uma expressão para a velocidade do atuador B em função das quasi-velocidades:

$$\delta_b = b_{31}hp - b_{32}hr + b_{33} \left(-\frac{B}{2} r - dp \right) \tag{58}$$

A velocidade do baricentro do atuador será dada por

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{Gb} &= \vec{v}_{B'} + \vec{\omega}_b \wedge (G_b - B') = \vec{0} + (\omega_{bi}\vec{i}_b + \omega_{bj}\vec{j}_b) \wedge \left(\frac{b}{2}\vec{k}_b \right) \\
&= \omega_{bj} \frac{b}{2}\vec{i}_b - \omega_{bi} \frac{b}{2}\vec{j}_b
\end{aligned} \tag{59}$$

5.5.3. Velocidades Parciais

As velocidades parciais dos pontos ligados à cabine são descritas pela Tabela 3.

Tabela 3 - Velocidades parciais nas direções das quasi-velocidades

	$u_1 = r$	$u_2 = p$
v_G	$\mathbf{v}_G^1 = \frac{\partial \vec{v}_G}{\partial u_1} = -\frac{H}{2}\vec{j}_2$	$\mathbf{v}_G^2 = \frac{\partial \vec{v}_G}{\partial u_2} = \frac{H}{2}\vec{i}_2$
v_A	$\mathbf{v}_A^1 = \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial u_1} = \frac{B}{2}\vec{k}_2 - h\vec{j}_2$	$\mathbf{v}_A^2 = \frac{\partial \vec{v}_A}{\partial u_2} = -d\vec{k}_2 + h\vec{i}_2$
v_B	$\mathbf{v}_B^1 = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial u_1} = -\frac{B}{2}\vec{k}_2 - h\vec{j}_2$	$\mathbf{v}_B^2 = \frac{\partial \vec{v}_B}{\partial u_2} = -d\vec{k}_2 + h\vec{i}_2$
v_C	$\mathbf{v}_C^1 = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial u_1} = -\frac{B}{2}\vec{k}_2$	$\mathbf{v}_C^2 = \frac{\partial \vec{v}_C}{\partial u_2} = \frac{L}{2}\vec{k}_2$
ω	$\boldsymbol{\omega}^1 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_1} = \vec{i}_2$	$\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_2} = \vec{j}_2$

Para o cálculo das velocidades parciais dos atuadores será útil o cálculo das direções velocidades angulares parciais. Para o atuador A:

$$\frac{\partial \omega_{aj}}{\partial r} = \frac{1}{\delta_a} \left[-a_{12}h + a_{13} \frac{B}{2} \right] \tag{60}$$

$$\frac{\partial \omega_{aj}}{\partial p} = \frac{1}{\delta_a} [a_{11}h - a_{13}d] \tag{61}$$

$$\frac{\partial \omega_{ai}}{\partial r} = -\frac{1}{\delta_a} \left[-a_{22}h + a_{23} \frac{B}{2} \right] \tag{62}$$

$$\frac{\partial \omega_{ai}}{\partial p} = -\frac{1}{\delta_a} [a_{21}h - a_{23}d] \quad (63)$$

$$\frac{\partial \delta_a}{\partial r} = \left[-a_{32}h + a_{33} \frac{B}{2} \right] \quad (64)$$

$$\frac{\partial \delta_a}{\partial p} = [a_{31}h - da_{33}] \quad (65)$$

A partir das derivadas calculadas em (60 – 65) pode-se calcular as direções:

$$\mathbf{v}_{Ga}^1 = \frac{\partial \vec{v}_{Ga}}{\partial u_1} = \frac{1}{\delta_a} \left[-a_{12}h + a_{13} \frac{B}{2} \right] \frac{b}{2} \vec{i}_a + \frac{1}{\delta_a} \left[-a_{22}h + a_{23} \frac{B}{2} \right] \frac{b}{2} \vec{j}_a \quad (66)$$

$$\mathbf{v}_{Ga}^2 = \frac{\partial \vec{v}_{Ga}}{\partial u_2} = [a_{11}h - a_{13}d] \frac{b}{2\delta_a} \vec{i}_a + [a_{21}h - a_{23}d] \frac{b}{2\delta_a} \vec{j}_a \quad (67)$$

$$\boldsymbol{\omega}_a^1 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_1} = -\frac{1}{\delta_a} \left[-a_{22}h + a_{23} \frac{B}{2} \right] \vec{i}_a + \frac{1}{\delta_a} \left[-a_{12}h + a_{13} \frac{B}{2} \right] \vec{j}_a \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\omega}_a^2 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_2} = -\frac{1}{\delta_a} [a_{21}h - a_{23}d] \vec{i}_a + \frac{1}{\delta_a} [a_{11}h - a_{13}d] \vec{j}_a \quad (69)$$

Para o atuador B:

$$\frac{\partial \omega_{bj}}{\partial r} = -\frac{1}{\delta_b} \left[b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right] \quad (70)$$

$$\frac{\partial \omega_{bj}}{\partial p} = \frac{1}{\delta_b} [b_{11}h - b_{13}d] \quad (71)$$

$$\frac{\partial \omega_{bi}}{\partial r} = \frac{1}{\delta_b} \left[b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right] \quad (72)$$

$$\frac{\partial \omega_{bi}}{\partial p} = -\frac{1}{\delta_b} [b_{21}h - b_{23}d] \quad (73)$$

$$\frac{\partial \delta_b}{\partial r} = -\left[b_{32}h + b_{33} \frac{B}{2} \right] \quad (74)$$

$$\frac{\partial \delta_b}{\partial p} = (b_{31}h - b_{33}d) \quad (75)$$

A partir das derivadas calculadas em (70 – 75) pode-se calcular as direções:

$$\mathbf{v}_{Gb}^1 = \frac{\partial \vec{v}_{Gb}}{\partial u_1} = -\frac{1}{\delta_b} \left[b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right] \frac{b}{2} \vec{i}_b - \frac{1}{\delta_b} \left[b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right] \frac{b}{2} \vec{j}_b \quad (76)$$

$$\mathbf{v}_{Gb}^2 = \frac{\partial \vec{v}_{Gb}}{\partial u_2} = [b_{11}h - b_{13}d] \frac{b}{2\delta_b} \vec{i}_b + [b_{21}h - b_{23}d] \frac{b}{2\delta_b} \vec{j}_b \quad (77)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b^1 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_1} = \frac{1}{\delta_b} \left[b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right] \vec{i}_b - \frac{1}{\delta_b} \left[b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right] \vec{j}_b \quad (78)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b^2 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial u_2} = -\frac{1}{\delta_b} [b_{21}h - b_{23}d] \vec{i}_b + \frac{1}{\delta_b} [b_{11}h - b_{13}d] \vec{j}_b \quad (79)$$

5.6. Acelerações

5.6.1. Campo de acelerações da cabine

Aplicando-se a formula do campo de acelerações de um corpo rígido na cabine, e lembrando que as componentes de aceleração relativa e de coriolis são nulas temos:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \quad (80)$$

A aceleração angular é obtida pela derivada da velocidade angular e é dada por:

$$\vec{\omega} = \dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2 \quad (81)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= (\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(\frac{H}{2}\vec{k}_2\right) + (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \\ &\quad \wedge \left[(\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(\frac{H}{2}\vec{k}_2\right)\right] \\ \Leftrightarrow \vec{a}_G &= \frac{H}{2}[(\dot{p} - rq)\vec{i}_2 - (\dot{r} - pq)\vec{j}_2 - (p^2 + r^2)\vec{k}_2] \end{aligned} \quad (82)$$

Para a obtenção das acelerações angulares dos atuadores será necessária a obtenção do campo de acelerações dos pontos A e B:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)] \quad (83)$$

Obtendo assim

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= (\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 + \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right) + (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \\ &\quad \wedge \left[(\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 + \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right)\right] \Leftrightarrow \vec{a}_A \\ &= \left(\dot{p}h + \frac{B}{2}pr - dp^2 - \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq\right)\vec{i}_2 \\ &\quad + \left(-\dot{r}h + dpr - \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq - \frac{B}{2}q^2\right)\vec{j}_2 \\ &\quad + \left(\dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr + \frac{B}{2}qp\right)\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (84)$$

Para o ponto B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge (B - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - O)] \quad (85)$$

E

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= (\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 - \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right) + (r\vec{i}_2 + p\vec{j}_2 + q\vec{k}_2) \\ &\quad \wedge \left[(\dot{r}\vec{i}_2 + \dot{p}\vec{j}_2 + \dot{q}\vec{k}_2) \wedge \left(d\vec{i}_2 - \frac{B}{2}\vec{j}_2 + h\vec{k}_2\right)\right] \Leftrightarrow \vec{a}_B \\ &= \left(\dot{p}h - \frac{B}{2}pr - dp^2 + \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq\right)\vec{i}_2 \\ &\quad + \left(-\dot{r}h + dpr + \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq + \frac{B}{2}q^2\right)\vec{j}_2 \\ &\quad + \left(-\dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr - \frac{B}{2}qp\right)\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (86)$$

5.6.2. Campo de acelerações dos atuadores

As acelerações relacionadas aos atuadores são obtidas a seguir. O objetivo final é obter os vetores aceleração angular dos atuadores e as acelerações de seus baricentros.

Para o atuador A, partimos da equação do campo de acelerações do ponto A aplicado ao atuador:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A'} + \vec{\omega}_a \wedge (A - A') + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (A - A')] \quad (87)$$

Supondo que o vetor aceleração angular do atuador seja dado por

$$\vec{\omega}_a = \dot{\omega}_{ai}\vec{l}_a + \dot{\omega}_{aj}\vec{j}_a \quad (88)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= (\dot{\omega}_{ai}\vec{l}_a + \dot{\omega}_{aj}\vec{j}_a) \wedge (\delta_a\vec{k}_a) + (\omega_{ai}\vec{l}_a + \omega_{aj}\vec{j}_a) \\ &\quad \wedge [(\omega_{ai}\vec{l}_a + \omega_{aj}\vec{j}_a) \wedge (\delta_a\vec{k}_a)] \\ \Leftrightarrow \vec{a}_A &= \delta_a[\dot{\omega}_{aj}\vec{l}_a - \dot{\omega}_{ai}\vec{j}_a - (\omega_{ai}^2 + \omega_{aj}^2)\vec{k}_a] \end{aligned} \quad (89)$$

Substituindo a equação (84) na equação (89) obtém-se então:

$$\begin{aligned} \delta_a[\dot{\omega}_{aj}\vec{l}_a - \dot{\omega}_{ai}\vec{j}_a - (\omega_{ai}^2 + \omega_{aj}^2)\vec{k}_a] &= \left(\dot{p}h + \frac{B}{2}pr - dp^2 - \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq\right)\vec{l}_2 \\ &+ \left(-\dot{r}h + dpr - \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq - \frac{B}{2}q^2\right)\vec{j}_2 \\ &+ \left(\dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr + \frac{B}{2}qp\right)\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (90)$$

Na forma matricial:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{aj} \\ -\dot{\omega}_{ai} \\ -(\omega_{ai}^2 + \omega_{aj}^2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\delta_a} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{M_a^2} \begin{bmatrix} \dot{p}h + \frac{B}{2}pr - dp^2 - \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq \\ -\dot{r}h + dpr - \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq - \frac{B}{2}q^2 \\ \dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr + \frac{B}{2}qp \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (91)$$

Para o atuador B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{\omega}_b \wedge (B - B') + \vec{\omega}_b \wedge [\vec{\omega}_b \wedge (B - B')] \quad (92)$$

Supondo que o vetor aceleração angular do atuador seja dado por

$$\vec{\omega}_b = \dot{\omega}_{bi}\vec{l}_b + \dot{\omega}_{bj}\vec{j}_b \quad (93)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= (\dot{\omega}_{bi}\vec{l}_b + \dot{\omega}_{bj}\vec{j}_b) \wedge (\delta_b\vec{k}_b) + (\omega_{bi}\vec{l}_b + \omega_{bj}\vec{j}_b) \\ &\quad \wedge [(\omega_{bi}\vec{l}_b + \omega_{bj}\vec{j}_b) \wedge (\delta_b\vec{k}_b)] \\ \Leftrightarrow \vec{a}_B &= \delta_b[\dot{\omega}_{bj}\vec{l}_b - \dot{\omega}_{bi}\vec{j}_b - (\omega_{bi}^2 + \omega_{bj}^2)\vec{k}_b] \end{aligned} \quad (94)$$

Substituindo a equação (86) na equação (94) obtém-se então:

$$\begin{aligned} \delta_b[\dot{\omega}_{bj}\vec{l}_b - \dot{\omega}_{bi}\vec{j}_b - (\omega_{bi}^2 + \omega_{bj}^2)\vec{k}_b] &= \left(\dot{p}h - \frac{B}{2}pr - dp^2 + \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq\right)\vec{l}_2 \\ &+ \left(-\dot{r}h + dpr + \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq + \frac{B}{2}q^2\right)\vec{j}_2 \\ &+ \left(-\dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr - \frac{B}{2}qp\right)\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (95)$$

Na forma matricial:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{bj} \\ -\dot{\omega}_{bi} \\ -(\omega_{bi}^2 + \omega_{bj}^2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\delta_b} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}h - \frac{B}{2}pr - dp^2 + \frac{B}{2}\dot{q} - dq^2 + hrq \\ -\dot{r}h + dpr + \frac{B}{2}r^2 + d\dot{q} + hpq + \frac{B}{2}q^2 \\ -\dot{r}\frac{B}{2} - \dot{p}d - hr^2 - hp^2 + dqr - \frac{B}{2}qp \end{bmatrix} \tag{96}
\end{aligned}$$

6. Dinâmica

6.1. Forças externas

As forças externas são aplicadas nos pontos já descritos e são enumeradas na Tabela 4.

Tabela 4 - Forças externas

Força	Ponto de aplicação	Descrição
$F_a \vec{k}_a$	A	Força do atuador A
$F_b \vec{k}_b$	B	Força do atuador B
$-Mg \vec{k}_1$	G	Força peso da cabine
$-mg \vec{k}_1$	C	Força peso da carga
$-m_{act} g \vec{k}_1$	G_a	Força peso do atuador A
$-m_{act} g \vec{k}_1$	G_b	Força peso do atuador B

6.2. Momento Angular

O momento angular da cabine é calculado por

$$\vec{H}_G = \left(J_{xxG} + \frac{mB^2}{4} \right) r \vec{l}_2 + \left(J_{yyG} + \frac{mL^2}{4} \right) p \vec{j}_2 + \left(J_{zzG} + \frac{mH^2}{4} \right) q \vec{k}_2 \quad (97)$$

A derivada temporal do mesmo nos dá

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(J_{xxG} + \frac{mB^2}{4} \right) \dot{r} \vec{l}_2 + \left(J_{yyG} + \frac{mL^2}{4} \right) \dot{p} \vec{j}_2 + \left(J_{zzG} + \frac{mH^2}{4} \right) \dot{q} \vec{k}_2 \quad (98)$$

Da mesma forma podemos calcular os momentos angulares e a variação temporal dos mesmos de acordo com as equações (99 – 102).

$$\vec{H}_{Gai} = J_{act} (\vec{\omega}_{ai} \vec{l}_a + \vec{\omega}_{aj} \vec{j}_a) \quad (99)$$

$$\dot{\vec{H}}_{Gai} = J_{act} (\dot{\vec{\omega}}_{ai} \vec{l}_a + \dot{\vec{\omega}}_{aj} \vec{j}_a) \quad (100)$$

$$\vec{H}_{Gbi} = J_{act} (\vec{\omega}_{bi} \vec{l}_b + \vec{\omega}_{bj} \vec{j}_b) \quad (101)$$

$$\dot{\vec{H}}_{Gbi} = J_{act} (\dot{\vec{\omega}}_{bi} \vec{l}_b + \dot{\vec{\omega}}_{bj} \vec{j}_b) \quad (102)$$

6.3. Equações de Movimento

6.3.1. Formulação completa

A partir das equações de Gibbs-Appel, apresentadas na eq. (103), procede-se com a derivação das equações de movimento para N corpos, m forças e K graus de liberdade (aqui, N=3, m = 6 e K = 2) [4].

$$\sum_{i=1}^N (v_{Gi}^K \cdot m_i \cdot a_{Gi} + \omega_i^K \cdot \dot{H}_{Gi}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N (v_{ji}^K \cdot F_{ji} + \omega_i^K \cdot M_i) \quad (103)$$

Onde v_{Gi}^K é a velocidade parcial do baricentro do corpo i em relação ao grau de liberdade K , m_i é a massa do corpo i , a_{Gi} é a aceleração baricentro do corpo i , ω_i^K é a velocidade angular parcial do corpo i em relação ao grau de liberdade K , \dot{H}_{Gi} é a derivada temporal momento angular do corpo i , v_{ji}^K são as velocidades parciais dos pontos j do corpo i em relação ao grau de liberdade K , F_{ji} são as forças aplicadas no corpo i no ponto j , M_i são os momentos aplicados ao corpo i .

Para a o grau de liberdade 1 a forma aplicada da equação (103) será então

$$\begin{aligned}
v_G^1 \cdot M \cdot \vec{a}_G + v_{Ga}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} + v_{Gb}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} + \omega^1 \cdot \vec{H}_G + \omega_a^1 \cdot \vec{H}_{Ga} \\
+ \omega_b^1 \cdot \vec{H}_{Gb} \\
= v_A^1 \vec{F}_a + v_B^1 \vec{F}_b + v_G^1 \vec{F}_G + v_{Ga}^1 \vec{F}_{Ga} + v_{Gb}^1 \vec{F}_{Gb} + v_C^1 \vec{F}_C \\
+ \omega^1 \vec{M} + \omega_a^1 \vec{M}_a + \omega_b^1 \vec{M}_b
\end{aligned} \quad (104)$$

Observe que os momentos são nulos, de forma que a eq. (104) se torna

$$\begin{aligned}
v_G^1 \cdot M \cdot \vec{a}_G + v_{Ga}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} + v_{Gb}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} + \omega^1 \cdot \vec{H}_G + \omega_a^1 \cdot \vec{H}_{Ga} \\
+ \omega_b^1 \cdot \vec{H}_{Gb} \\
= v_A^1 \vec{F}_a + v_B^1 \vec{F}_b + v_G^1 \vec{F}_G + v_{Ga}^1 \vec{F}_{Ga} + v_{Gb}^1 \vec{F}_{Gb} + v_C^1 \vec{F}_C
\end{aligned} \quad (105)$$

Cada termo da equação (104) é calculado a seguir pelas equações (106 - 117)

$$\begin{aligned}
v_G^1 \cdot M \cdot \vec{a}_G &= -\frac{H}{2} \vec{j}_2 \cdot M \cdot \frac{H}{2} [(\dot{p} - rq) \vec{i}_2 - (\dot{r} - pq) \vec{j}_2 - (p^2 + r^2) \vec{k}_2] \Leftrightarrow \\
v_G^1 \cdot M \cdot \vec{a}_G &= \frac{MH^2}{4} \dot{r} - \frac{MH^2}{4} pq
\end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned}
v_{Ga}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} &= \left[-\frac{1}{\delta_a} \left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) \frac{b}{2} \vec{i}_a - \frac{1}{\delta_a} \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) \frac{b}{2} \vec{j}_a \right] \cdot \\
m_{act} \cdot \left[\frac{b}{2} (-\dot{\omega}_{ai} \vec{j}_a + \dot{\omega}_{aj} \vec{i}_a) - \frac{b}{2} (\omega_{ai}^2 + \omega_{aj}^2) \vec{k}_a \right] \Leftrightarrow \\
v_{Ga}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} &= \frac{m_{act} b^2}{4\delta_a} \left[-\dot{\omega}_{aj} \left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) + \dot{\omega}_{ai} \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) \right]
\end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned}
v_{Gb}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} &= \left[-\frac{1}{\delta_b} \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) \frac{b}{2} \vec{i}_b - \frac{1}{\delta_b} \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) \frac{b}{2} \vec{j}_b \right] \cdot \\
m_{act} \cdot \left[\frac{b}{2} (-\dot{\omega}_{bi} \vec{j}_b + \dot{\omega}_{bj} \vec{i}_b) - \frac{b}{2} (\omega_{bi}^2 + \omega_{bj}^2) \vec{k}_b \right] \Leftrightarrow \\
v_{Gb}^1 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} &= \frac{m_{act} b^2}{4\delta_b} \left[-\dot{\omega}_{bj} \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) + \dot{\omega}_{bi} \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) \right]
\end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned}
\omega^1 \cdot \vec{H}_G &= \vec{i}_2 \cdot \left[\left(J_{xxG} + \frac{mB^2}{4} \right) \dot{r} \vec{i}_2 + \left(J_{yyG} + \frac{mL^2}{4} \right) \dot{p} \vec{j}_2 + \left(J_{zzG} + \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{mH^2}{4} \right) \dot{q} \vec{k}_2 \right] \Leftrightarrow \\
\omega^1 \cdot \vec{H}_G &= \left(J_{xxG} + \frac{mB^2}{4} \right) \dot{r}
\end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned}
\omega_a^1 \cdot \vec{H}_{Ga} &= \left[-\frac{1}{\delta_a} \left(-a_{22}h + a_{23} \frac{B}{2} \right) \vec{i}_a + \frac{1}{\delta_a} \left(-a_{12}h + a_{13} \frac{B}{2} \right) \vec{j}_a \right] \cdot \\
J_{act} \left[\dot{\omega}_{ai} \vec{i}_a + \dot{\omega}_{aj} \vec{j}_a \right] \Leftrightarrow \\
\omega_a^1 \cdot \vec{H}_{Ga} &= \frac{J_{act}}{\delta_a} \left[\left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) \dot{\omega}_{ai} + \left(-a_{12}h + a_{13} \frac{B}{2} \right) \dot{\omega}_{aj} \right]
\end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned}
\omega_b^1 \cdot \vec{H}_{Gb} &= \left[\frac{1}{\delta_b} \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) \vec{i}_b - \frac{1}{\delta_b} \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) \vec{j}_b \right] \cdot \\
J_{act} \left[\dot{\omega}_{bi} \vec{i}_b + \dot{\omega}_{bj} \vec{j}_b \right] \Leftrightarrow \\
\omega_b^1 \cdot \vec{H}_{Gb} &= \frac{J_{act}}{\delta_b} \left[\left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) \dot{\omega}_{bi} - \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) \dot{\omega}_{bj} \right]
\end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned}
v_A^1 \vec{F}_a &= \left[\frac{B}{2} \vec{k}_2 - h \vec{j}_2 \right] \cdot F_a \vec{k}_a = F_a \left[\frac{B}{2} \vec{k}_2 - h \vec{j}_2 \right] \cdot (a_{32} \vec{j}_2 + a_{33} \vec{k}_2) \Leftrightarrow \\
v_A^1 \vec{F}_a &= \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32}h \right) F_a
\end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned}
v_B^1 \vec{F}_b &= - \left[\frac{B}{2} \vec{k}_2 + h \vec{j}_2 \right] \cdot F_b \vec{k}_b = -F_b \left[\frac{B}{2} \vec{k}_2 + h \vec{j}_2 \right] \cdot (b_{32} \vec{j}_2 + b_{33} \vec{k}_2) \Leftrightarrow \\
v_B^1 \vec{F}_b &= - \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32}h \right) F_b
\end{aligned} \quad (113)$$

$$v_G^1 \vec{F}_G = -\frac{H}{2} \vec{j}_2 \cdot (-Mg \vec{k}_1) \Leftrightarrow \quad (114)$$

$$v_G^1 \vec{F}_G = \frac{MgH}{2} s_\phi c_\theta$$

$$v_C^1 \vec{F}_C = -\frac{B}{2} \vec{k}_2 \cdot (-mg \vec{k}_1) \Leftrightarrow \quad (115)$$

$$v_C^1 \vec{F}_C = \frac{mgB}{2} c_\phi c_\theta$$

$$v_{Ga}^1 \vec{F}_{Ga} = \left[-\frac{1}{\delta_a} \left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) \frac{b}{2} \vec{i}_a - \frac{1}{\delta_a} \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) \frac{b}{2} \vec{j}_a \right] \cdot \quad (116)$$

$$(-m_{act} g \vec{k}_1) \Leftrightarrow$$

$$v_{Ga}^1 \vec{F}_{Ga} = \frac{m_{act} g b}{2 \delta_a} \left[\left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) (-s_\theta a_{11} + s_\phi c_\theta a_{12} + c_\phi c_\theta a_{13}) + \right. \quad (117)$$

$$\left. \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) (-s_\theta a_{21} + s_\phi c_\theta a_{22} + c_\phi c_\theta a_{23}) \right]$$

$$v_{Gb}^1 \vec{F}_{Gb} = \left[-\frac{1}{\delta_b} \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) \frac{b}{2} \vec{i}_b - \frac{1}{\delta_b} \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) \frac{b}{2} \vec{j}_b \right] \cdot$$

$$(-m_{act} g \vec{k}_1) \Leftrightarrow$$

$$v_{Gb}^1 \vec{F}_{Gb} = \frac{m_{act} g b}{2 \delta_b} \left[\left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) (-s_\theta b_{11} + s_\phi c_\theta b_{12} + c_\phi c_\theta b_{13}) + \right. \quad (117)$$

$$\left. \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) (-s_\theta b_{21} + s_\phi c_\theta b_{22} + c_\phi c_\theta b_{23}) \right]$$

A expressão da equação de movimento fica então dada por

$$\left(J_{xxG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mB^2}{4} \right) \dot{r} - \frac{MH^2}{4} p q + \left(J_{act} + \frac{m_{act} b^2}{4} \right) \left[\frac{\dot{\omega}_{ai}}{\delta_a} \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) - \frac{\dot{\omega}_{aj}}{\delta_a} \left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) + \frac{\dot{\omega}_{bi}}{\delta_b} \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) - \frac{\dot{\omega}_{bj}}{\delta_b} \left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) \right] = \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32}h \right) F_a - \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32}h \right) F_b + \frac{g}{2} c_\theta (MHS_\phi + mBc_\phi) + \frac{m_{act} g b}{2 \delta_a} \left[\left(a_{12}h - a_{13} \frac{B}{2} \right) (-s_\theta a_{11} + s_\phi c_\theta a_{12} + c_\phi c_\theta a_{13}) + \left(a_{22}h - a_{23} \frac{B}{2} \right) (-s_\theta a_{21} + s_\phi c_\theta a_{22} + c_\phi c_\theta a_{23}) \right] + \frac{m_{act} g b}{2 \delta_b} \left[\left(b_{13} \frac{B}{2} + b_{12}h \right) (-s_\theta b_{11} + s_\phi c_\theta b_{12} + c_\phi c_\theta b_{13}) + \left(b_{23} \frac{B}{2} + b_{22}h \right) (-s_\theta b_{21} + s_\phi c_\theta b_{22} + c_\phi c_\theta b_{23}) \right] \quad (118)$$

Para a o grau de liberdade 2 a forma aplicada da equação (103) será

$$v_G^2 \cdot M \cdot \vec{a}_G + v_{Ga}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} + v_{Gb}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} + \omega^2 \cdot \vec{H}_G + \omega_a^2 \cdot \vec{H}_{Ga} + \omega_b^2 \cdot \vec{H}_{Gb} = v_A^2 \vec{F}_A + v_B^2 \vec{F}_B + v_G^2 \vec{F}_G + v_{Ga}^2 \vec{F}_{Ga} + v_{Gb}^2 \vec{F}_{Gb} + v_C^2 \vec{F}_C + \omega^2 \vec{M} + \omega_a^2 \vec{M}_a + \omega_b^2 \vec{M}_b \quad (119)$$

Observe que os momentos são nulos, de forma que a eq. (119) se torna

$$v_G^2 \cdot M \cdot \vec{a}_G + v_{Ga}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Ga} + v_{Gb}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{a}_{Gb} + \omega^2 \cdot \vec{H}_G + \omega_a^2 \cdot \vec{H}_{Ga} + \omega_b^2 \cdot \vec{H}_{Gb} = v_A^2 \vec{F}_A + v_B^2 \vec{F}_B + v_G^2 \vec{F}_G + v_{Ga}^2 \vec{F}_{Ga} + v_{Gb}^2 \vec{F}_{Gb} + v_C^2 \vec{F}_C \quad (120)$$

Cada termo da equação (120) é calculado a seguir pelas equações (121 - 132)

$$\begin{aligned} v_G^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{a}}_G &= \frac{H}{2} \vec{l}_2 \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{H}{2} [(\dot{p} - rq) \vec{l}_2 - (\dot{r} - pq) \vec{j}_2 - (p^2 + r^2) \vec{k}_2] \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_G^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{a}}_G &= \frac{MH^2}{4} \dot{p} - \frac{MH^2}{4} rq \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} v_{Ga}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{Ga} &= \\ & \left[(a_{11}h - a_{13}d) \frac{b}{2\delta_a} \vec{l}_a + (a_{21}h - a_{23}d) \frac{b}{2\delta_a} \vec{j}_a \right] \cdot m_{act} \cdot \left[\frac{b}{2} (-\dot{\omega}_{ai} \vec{j}_a + \dot{\omega}_{aj} \vec{l}_a) - \frac{b}{2} (\omega_{ai}^2 + \omega_{aj}^2) \vec{k}_a \right] \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_{Ga}^2 \cdot \mathbf{m}_{act} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{Ga} &= \frac{m_{act} b^2}{4\delta_a} [\dot{\omega}_{aj}(a_{11}h - a_{13}d) - \dot{\omega}_{ai}(a_{21}h - a_{23}d)] \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} v_{Gb}^2 \cdot m_{act} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{Gb} &= \\ & \left[(b_{11}h - b_{13}d) \frac{b}{2\delta_b} \vec{l}_b + (b_{21}h - b_{23}d) \frac{b}{2\delta_b} \vec{j}_b \right] \cdot m_{act} \cdot \left[\frac{b}{2} (-\dot{\omega}_{bi} \vec{j}_b + \dot{\omega}_{bj} \vec{l}_b) - \frac{b}{2} (\omega_{bi}^2 + \omega_{bj}^2) \vec{k}_b \right] \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_{Gb}^2 \cdot \mathbf{m}_{act} \cdot \vec{\mathbf{a}}_{Gb} &= \frac{m_{act} b^2}{4\delta_b} [\dot{\omega}_{bj}(b_{11}h - b_{13}d) + -\dot{\omega}_{bi}(b_{21}h - b_{23}d)] \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_G &= \vec{j}_2 \cdot \left[(J_{xxG} + \frac{mB^2}{4}) \dot{r} \vec{l}_2 + (J_{yyG} + \frac{mL^2}{4}) \dot{p} \vec{j}_2 + (J_{zzG} + \frac{mH^2}{4}) \dot{q} \vec{k}_2 \right] \Leftrightarrow \\ \omega^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_G &= (J_{yyG} + \frac{mL^2}{4}) \dot{p} \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \omega_a^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_{Ga} &= \left[-\frac{1}{\delta_a} (a_{21}h - a_{23}d) \vec{l}_a + \frac{1}{\delta_a} (a_{11}h - a_{13}d) \vec{j}_a \right] \cdot \\ J_{act} [\dot{\omega}_{ai} \vec{l}_a + \dot{\omega}_{aj} \vec{j}_a] &\Leftrightarrow \\ \omega_a^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_{Ga} &= \frac{J_{act}}{\delta_a} [(a_{23}d - a_{21}h) \dot{\omega}_{ai} + (a_{11}h - a_{13}d) \dot{\omega}_{aj}] \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \omega_b^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_{Gb} &= \left[-\frac{1}{\delta_b} (b_{21}h - b_{23}d) \vec{l}_b + \frac{1}{\delta_b} (b_{11}h - b_{13}d) \vec{j}_b \right] \cdot \\ J_{act} [\dot{\omega}_{bi} \vec{l}_b + \dot{\omega}_{bj} \vec{j}_b] &\Leftrightarrow \\ \omega_b^2 \cdot \vec{\mathbf{H}}_{Gb} &= \frac{J_{act}}{\delta_b} [(b_{23}d - b_{21}h) \dot{\omega}_{bi} + (b_{11}h - b_{13}d) \dot{\omega}_{bj}] \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} v_A^2 \vec{\mathbf{F}}_a &= [-d \vec{k}_2 + h \vec{l}_2] \cdot F_a \vec{k}_a = F_a [-d \vec{k}_2 + h \vec{l}_2] \cdot (a_{31} \vec{l}_2 + a_{33} \vec{k}_2) \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_A^2 \vec{\mathbf{F}}_a &= (a_{31}h - a_{33}d) F_a \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} v_B^2 \vec{\mathbf{F}}_b &= [-d \vec{k}_2 + h \vec{l}_2] \cdot F_b \vec{k}_b = F_b [-d \vec{k}_2 + h \vec{l}_2] \cdot (b_{31} \vec{l}_2 + b_{33} \vec{k}_2) \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_B^2 \vec{\mathbf{F}}_b &= (b_{31}h - b_{33}d) F_b \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} v_G^2 \vec{\mathbf{F}}_G &= \frac{H}{2} \vec{l}_2 \cdot (-Mg \vec{k}_1) \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_G^2 \vec{\mathbf{F}}_G &= \frac{MgH}{2} s_\theta \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} v_C^2 \vec{\mathbf{F}}_C &= \frac{L}{2} \vec{k}_2 \cdot (-mg \vec{k}_1) \Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_C^2 \vec{\mathbf{F}}_C &= \frac{mgL}{2} c_\phi c_\theta \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} v_{Ga}^2 \vec{\mathbf{F}}_{Ga} &= \left[(a_{11}h - a_{13}d) \frac{b}{2\delta_a} \vec{l}_a + (a_{21}h - a_{23}d) \frac{b}{2\delta_a} \vec{j}_a \right] \cdot \\ (-m_{act} g \vec{k}_1) &\Leftrightarrow \\ \mathbf{v}_{Ga}^2 \vec{\mathbf{F}}_{Ga} &= \frac{m_{act} g b}{2\delta_a} [(a_{13}d - a_{11}h)(-s_\theta a_{11} + s_\phi c_\theta a_{12} + c_\phi c_\theta a_{13}) + \\ & (a_{23}d - a_{21}h)(-s_\theta a_{21} + s_\phi c_\theta a_{22} + c_\phi c_\theta a_{23})] \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} v_{Gb}^2 \vec{\mathbf{F}}_{Gb} &= \left[(b_{11}h - b_{13}d) \frac{b}{2\delta_b} \vec{l}_b + (b_{21}h - b_{23}d) \frac{b}{2\delta_b} \vec{j}_b \right] \cdot \\ (-m_{act} g \vec{k}_1) &\Leftrightarrow \end{aligned} \quad (132)$$

$$\mathbf{v}_{Gb}^2 \vec{F}_{Gb} = \frac{m_{act} g b}{2 \delta_b} [(b_{13} d - b_{11} h)(-s_\theta b_{11} + s_\phi c_\theta b_{12} + c_\phi c_\theta b_{13}) + (b_{23} d - b_{21} h)(-s_\theta b_{21} + s_\phi c_\theta b_{22} + c_\phi c_\theta b_{23})]$$

A expressão da equação de movimento fica então dada por

$$\begin{aligned} & \left(J_{yyG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mL^2}{4} \right) \dot{p} - \frac{MH^2}{4} r q + \\ & \left(J_{act} + \frac{m_{act} b^2}{4} \right) \left[\frac{\dot{\omega}_{aj}}{\delta_a} (a_{11} h - a_{13} d) - \frac{\dot{\omega}_{ai}}{\delta_a} (a_{21} h - a_{23} d) + \right. \\ & \left. \frac{\dot{\omega}_{bj}}{\delta_b} (b_{11} h - b_{13} d) - \frac{\dot{\omega}_{bi}}{\delta_b} (b_{21} h - b_{23} d) \right] = (a_{31} h - a_{33} d) F_a + \\ & (b_{31} h - b_{33} d) F_b + \frac{MgH}{2} s_\theta + \frac{mgL}{2} c_\phi c_\theta + \frac{m_{act} g b}{2 \delta_a} [(a_{13} d - \\ & a_{11} h)(-s_\theta a_{11} + s_\phi c_\theta a_{12} + c_\phi c_\theta a_{13}) + (a_{23} d - a_{21} h)(-s_\theta a_{21} + \\ & s_\phi c_\theta a_{22} + c_\phi c_\theta a_{23})] + \frac{m_{act} g b}{2 \delta_b} [(b_{13} d - b_{11} h)(-s_\theta b_{11} + s_\phi c_\theta b_{12} + \\ & c_\phi c_\theta b_{13}) + (b_{23} d - b_{21} h)(-s_\theta b_{21} + s_\phi c_\theta b_{22} + c_\phi c_\theta b_{23})] \end{aligned} \quad (133)$$

6.3.2. Formulação Reduzida

As equações (118) e (133) são bastante complexas e possuem termos que não são encontrados de maneira simples, em especial as acelerações angulares dos atuadores. De forma a simplificar o modelo a ser trabalhado, os resultados posteriores serão obtidos a partir de uma simplificação destas equações, nas quais será considerado que a massa dos atuadores é desprezível em comparação com a massa móvel da cabine. Neste caso, as equações serão dadas por (134) e (135).

$$\begin{aligned} & \left(J_{xxG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mB^2}{4} \right) \dot{r} - \frac{MH^2}{4} p q - \frac{g}{2} c_\theta (M H s_\phi + m B c_\phi) \\ & = \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32} h \right) F_a - \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32} h \right) F_b \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} & \left(J_{yyG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mL^2}{4} \right) \dot{p} - \frac{MH^2}{4} r q - \frac{g}{2} (M H s_\theta + m L c_\phi c_\theta) \\ & = (a_{31} h - a_{33} d) F_a + (b_{31} h - b_{33} d) F_b \end{aligned} \quad (135)$$

Na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_{xxG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mB^2}{4} & 0 \\ 0 & J_{yyG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mL^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} - \frac{MH^2}{4} q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix} - \\ & \frac{g}{2} \begin{bmatrix} c_\theta (M H s_\phi + m B c_\phi) \\ M H s_\theta + m L c_\phi c_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} \frac{B}{2} - a_{32} h & -b_{33} \frac{B}{2} - b_{32} h \\ h a_{31} - d a_{33} & h b_{31} - d b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (136)$$

6.4. Dinâmica Inversa

Para o cálculo da dinâmica inversa, isolam-se as forças na equação (136):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_{33} \frac{B}{2} - a_{32} h & -b_{33} \frac{B}{2} - b_{32} h \\ h a_{31} - d a_{33} & h b_{31} - d b_{33} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} J_{x0} & 0 \\ 0 & J_{y0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{bmatrix} - \frac{MH^2}{4} q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix} - \right. \\ & \left. \frac{g}{2} \begin{bmatrix} c_\theta (M H s_\phi + m B c_\phi) \\ M H s_\theta + m L c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (137)$$

Em (137), $J_{x0} = J_{xxG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mB^2}{4}$ e $J_{y0} = J_{yyG} + \frac{MH^2}{4} + \frac{mL^2}{4}$.

A partir da equação acima podemos dimensionar os atuadores ao impor os movimentos requeridos. Também é possível obter dados de potência requerida (utilizando-se as velocidades dos atuadores) e potência regenerada.

A potência instantânea de cada atuador será dada por

$$P_{A,B}(\phi, \theta, t) = F_{a,b}(\phi, \theta, t)\dot{\delta}_{a,b}(\phi, \theta, t) \quad (138)$$

Uma vez impostos os movimentos requeridos, pode-se também calcular a potência máxima:

$$P_{A,B}^{max} = \max[P_{a,b}(\phi, \theta, t)] \Big|_{t=0}^{t=T} \quad (139)$$

Uma característica mais importante que a potência instantânea para um servomotor é a potência RMS da mesma:

$$P_{A,B}^{RMS}(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [F_{a,b}(\phi, \theta, t)\dot{\delta}_{a,b}(\phi, \theta, t)]^2 dt} \quad (140)$$

É importante lembrar que para um dimensionamento adequado deve-se levar em conta o rendimento das transmissões.

Por fim, um parâmetro importante que também deve ser calculado é a Potência Regenerada. A regeneração ocorre quando o torque de um motor funciona em sentido contrário à velocidade de rotação. Isso ocorre, por exemplo, durante a frenagem. Outro exemplo clássico é no controle de velocidade durante a liberação de energia potencial, como no caso de elevadores com descida controlada.

Servo-motores elétricos se utilizam de sistemas dissipativos para se desvencilhar desta potência gerada. O método mais comum de dissipador é o chamado Resistor de Frenagem, que libera energia através de calor, utilizando o efeito Joule. Por estar sujeito à potências limitadas, o resistor deve ser dimensionado adequadamente.

No caso da cabine de simulação, a potência instantânea regenerada é dada por

$$P_{A,B}^{REG}(\phi, \theta, t) = \Re_{-}\{F_{a,b}(\phi, \theta, t)\dot{\delta}_{a,b}(\phi, \theta, t)\} \quad (141)$$

No caso específico do sistema utilizado, os dois atuadores compartilharão um resistor de frenagem, de forma que a potência total regenerada será calculada por

$$P^{REG}(\phi, \theta, t) = P_A^{REG}(\phi, \theta, t) + P_B^{REG}(\phi, \theta, t) \quad (142)$$

Também nesse caso pode-se definir a potência máxima e a potência RMS:

$$P_{A,B}^{REGmax} = \max[P^{REG}(\phi, \theta, t)] \Big|_{t=0}^{t=T} \quad (143)$$

$$P_{A,B}^{REGRMS}(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [P^{REG}(\phi, \theta, t)]^2 dt} \quad (144)$$

Aqui também se aplicam as considerações sobre rendimento de transmissão, além do rendimento de transformação eletromecânica no motor.

6.5. Forma de espaço de estados

Para integrar as equações de movimento é adequado colocar as equações em função das acelerações. As equações (33) e (34) são utilizadas para transformar o

sistema de volta para as coordenadas inerciais. As eqs. (145) e (146) exprimem o resultado das acelerações em função das velocidades e das forças

$$\dot{r} = \frac{MH^2}{4J_{x0}} pq + \frac{g}{2J_{x0}} c_\theta (MHs_\phi + mBc_\phi) + \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32}h \right) \frac{F_a}{J_{x0}} \quad (145)$$

$$- \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32}h \right) \frac{F_b}{J_{x0}}$$

$$\dot{p} = \frac{MH^2}{4J_{y0}} rq + \frac{g}{2J_{y0}} (MHs_\theta + mLc_\phi c_\theta) + (a_{31}h - a_{33}d) \frac{F_a}{J_{y0}} \quad (146)$$

$$+ (b_{31}h - b_{33}d) \frac{F_b}{J_{y0}}$$

Do ponto de vista do projeto de sistemas de controle, é interessante também realizar a transformação das equações dinâmicas de volta para as variáveis em coordenadas inerciais, ϕ e θ . Utilizando as equações (30) e (32) a (34) podemos então escrever

$$\ddot{\phi} = \frac{MH^2}{4J_{x0}} \frac{1}{c_\theta} \left[s_\phi c_\phi (s_\theta^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + \left(c_\phi^2 - s_\phi^2 + \frac{4J_{x0}}{MH^2} \right) s_\theta \dot{\phi} \dot{\theta} \right] + \frac{g}{2J_{x0}} (MHs_\phi + mBc_\phi) + \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32}h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} F_a - \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32}h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} F_b \quad (147)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{s_\phi s_\theta}{c_\phi} \ddot{\phi} + \left(\frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta - 1 \right) s_\theta \dot{\phi}^2 + \left(1 - c_\theta - \frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta \right) \frac{s_\phi}{c_\phi} \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (148)$$

$$+ \frac{g}{2J_{y0}} \left(MH \frac{s_\theta}{c_\phi} + mLc_\theta \right) + (a_{31}h - a_{33}d) \frac{1}{J_{y0}c_\phi} F_a$$

$$+ (b_{31}h - b_{33}d) \frac{1}{J_{y0}c_\phi} F_b$$

Observe que existem termos cruzados de $\ddot{\phi}$ em $\ddot{\theta}$. Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_\phi s_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \quad (149)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{MH^2}{4J_{x0}c_\theta} \left[s_\phi c_\phi (s_\theta^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + \left(c_\phi^2 - s_\phi^2 + \frac{4J_{x0}}{MH^2} \right) s_\theta \dot{\phi} \dot{\theta} \right] + \frac{g}{2J_{x0}} (MHs_\phi + mBc_\phi) \\ \left(\frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta - 1 \right) c_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 + \left(1 - c_\theta - \frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta \right) s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{g}{2J_{y0}} (MHs_\theta + mLc_\phi c_\theta) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \left(a_{33} \frac{B}{2} - a_{32}h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} & - \left(b_{33} \frac{B}{2} + b_{32}h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} \\ \left(a_{31}h - a_{33}d \right) \frac{1}{J_{y0}} & \left(b_{31}h - b_{33}d \right) \frac{1}{J_{y0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix}$$

7. Simulação Numérica: Dinâmica Inversa

Os dimensionamentos requeridos podem ser obtidos através da simulação de dinâmica inversa. Neste caso, são impostos movimentos de acordo com a especificação e calculam-se, para cada estado, os valores de esforços, deslocamentos, velocidades e potências instantâneas.

Foram estipulados quatro testes. Serão verificadas as condições de operação para movimento de Roll puro, com amplitude de 10° , para o movimento de Pitch puro, com amplitude de 10° , para os movimentos de Roll e Pitch simultâneos e para os movimentos de Roll e Pitch com amplitude de 8.3° e fase de 90° entre si.

Os movimentos impostos são senoidais com período de 6s, o que facilita o cálculo das velocidades e acelerações requeridas. Uma carga de 300 kg incorporada à extremidade da cabine é representa o peso das pessoas e equipamentos (conforme estipulado no capítulo 4).

O código do script que calcula os movimentos pode ser encontrado no anexo A. O código gera automaticamente gráficos de forças, deslocamentos e velocidades, além de calcular valores máximos de força, velocidade e deslocamento dos atuadores, valores de potência requerida máxima e RMS, valores de potência RMS no eixo dos motores (com rendimento de 80%) e cálculo dos passos mínimos de fuso de esferas que os atuadores devem ter para motores de 2000 e 3000 rpm.

7.1. Testes estáticos

Para validar o modelo, rodaremos o sistema com dois testes estáticos, o primeiro com 5° em Roll e o segundo com 5° em Pitch. Através de cálculo de equilíbrio estático para estes valores obtemos, respectivamente, forças de cerca de 577,11N para ambos os atuadores e de cerca de 821,27N para o atuador B e -821,27N para o atuador A. A Figura 9 e a Figura 10 ilustram os movimentos impostos em Roll e em Pitch, demonstrando que os cálculos estão coerentes.

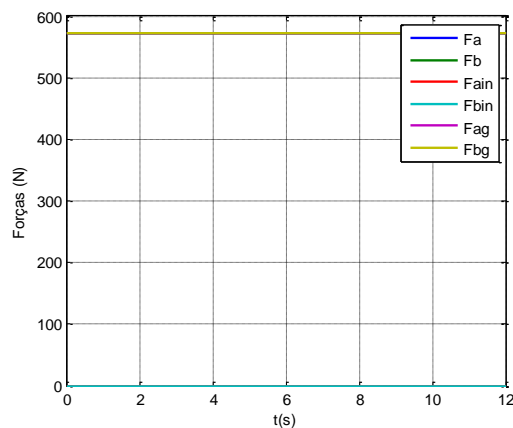


Figura 9 - Pitch estático em 5°

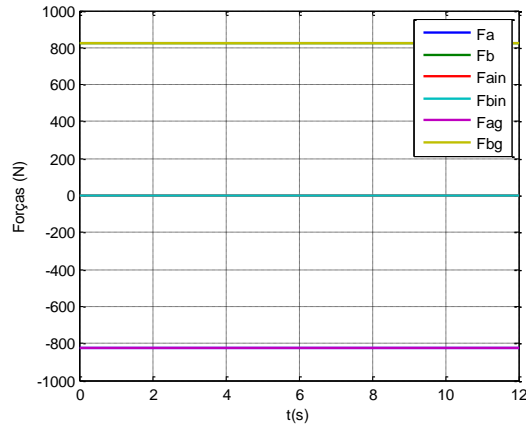


Figura 10 - Roll estático em 5°

7.2. Movimento de Roll Puro

No movimento de Roll Puro os atuadores são acionados simultaneamente com vetores em direção inversa, causando a rotação em torno do eixo x . A Figura 11 ilustra o comportamento da cabine durante um movimento de Roll.

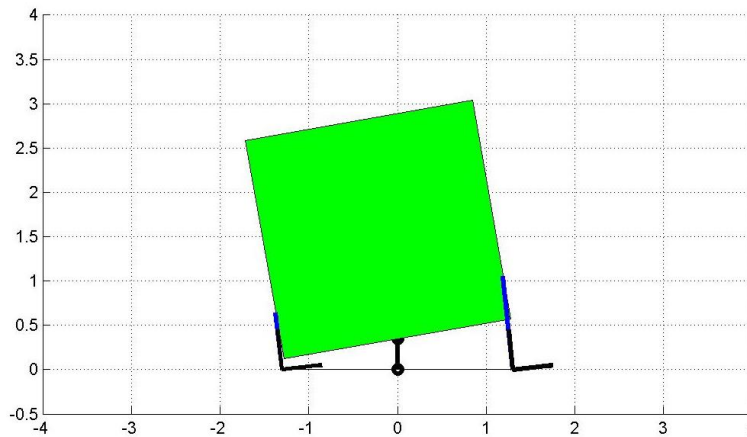


Figura 11 - Movimento de Roll

A Figura 12 apresenta os movimentos impostos na cabine. Os valores do ângulo θ e suas derivadas temporais são mantidos em zero e os valores de ϕ são variados senoidalmente com amplitude de 10° e período de 6 segundos.

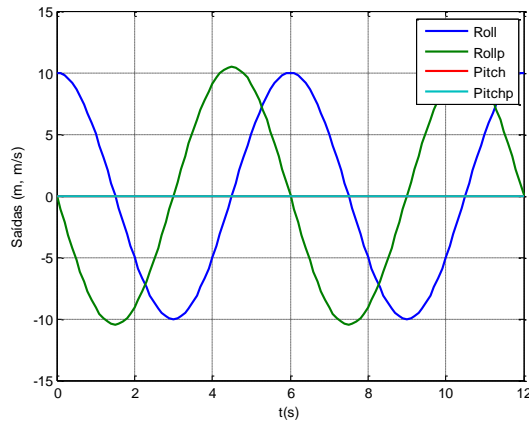


Figura 12 – Referências

A Figura 13 apresenta os deslocamentos dos atuadores. Repare que os mesmos estão defasados de 90° , o que proporciona o movimento de Roll. Nesta figura também podemos verificar que os valores calculados através de transformação de coordenadas e o valor calculado algebricamente estão iguais, o que confirma que não houve erros na derivação algébrica.

No movimento de roll a 10° nota-se que os atuadores operam com deslocamentos entre aproximadamente 0,7m e 1,2m. É requerido então aproximadamente 500mm de curso para este movimento.

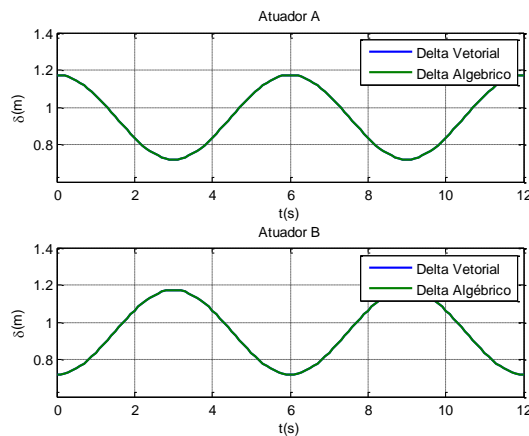


Figura 13 - Vetor δ

A Figura 14 indica as velocidades dos atuadores para os movimentos requeridos. Observa-se um pico de aproximadamente 200 mm/s.

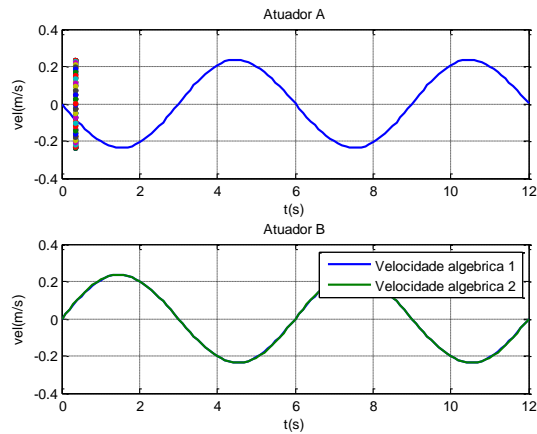


Figura 14 - Velocidades dos atuadores

A Figura 15 apresenta as forças requeridas nos atuadores, decorrentes dos cálculos de dinâmica inversa. Observe que as amplitudes das senoides das forças são iguais para os dois atuadores, apesar dos valores médios diferentes. Isso ocorre devido ao desbalanceamento provocado pela massa da carga alocada em uma das extremidade da cabine. Pode-se observar este fator também ao se observar as componentes relativas às forças inerciais e às forças gravitacionais nos atuadores. As forças inerciais são praticamente balanceadas, pois a massa da carga é relativamente pequena comparada à massa da cabine. Entretanto as forças devido ao desbalanceamento da gravidade são mandatórias e devido ao posicionamento da massa no extremo da cabine provocam diferenças significativas na força média dos atuadores. Nota-se que o atuador B foi mais requerido durante este movimento. É claro que isso apenas reflete a posição da carga, que requereria mais do atuador A caso estivesse em outra extremidade.

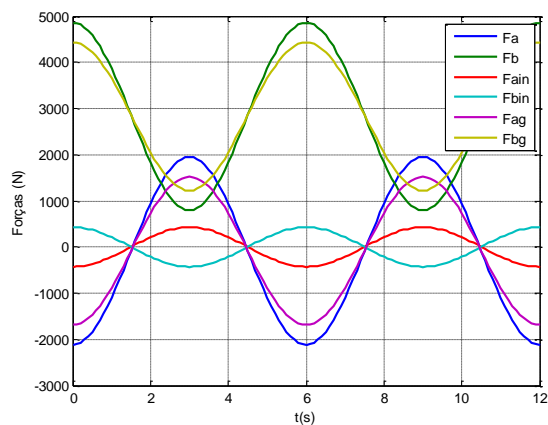


Figura 15 - Forças nos atuadores

A Figura 16 e a Figura 17 mostram a potência total instantânea do movimento para cada atuador e a potência regenerada pelos mesmos. Pode-se observar também aqui que o atuador B foi mais requerido para esta distribuição de carga. É necessário um pico de potência de aproximadamente 800W no mesmo. A potência instantânea regenerada atinge picos de 1000W. Deve-se levar este valor em conta ao se dimensionar o resistor de dissipação.

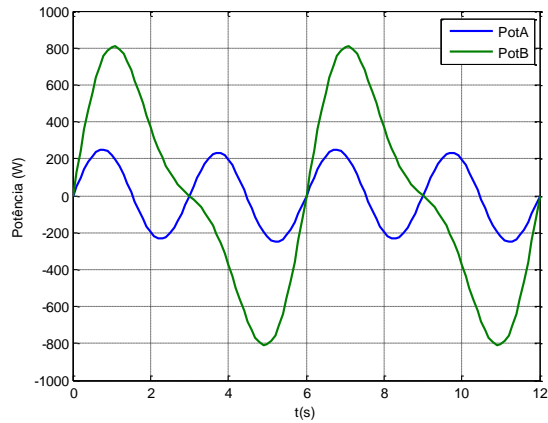


Figura 16 - Potência instantânea

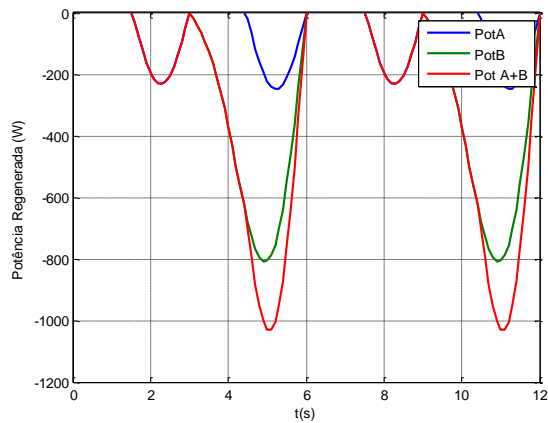


Figura 17 - Potência Regenerada

O quadro a seguir sumariza os resultados. Valores de potência RMS levando-se em conta o rendimento da transmissão e da potência regenerada RMS total são disponibilizados. O software também calcula os valores de deslocamento e velocidades máximos requeridos, e, com base nos mesmos, determina o passo mínimo do fuso de esferas para servomotores de 2000 e 3000 RPM.

Amplitude de Roll: 10 °
Fase de Roll: 90 °
Amplitude de Pitch: 0 °
Fase de Pitch: 0 °
Deslocamento Máximo A: 0.45308 m
Deslocamento Máximo B: 0.45308 m
Velocidade Máxima A: 0.2376 m/s
Velocidade Máxima B: 0.2376 m/s
Força Máxima A: 2116.1796 N
Força Máxima B: 4857.9095 N
Potência Máxima A: 248.7437 w
Potência Máxima B: 807.9781 w
Força na máx. Potência A: -1440.1899 N
Força na máx. Potência B: 3680.8262 N
Velocidade na máx. Potência A: -0.17272 m/s
Velocidade na máx. Potência B: 0.21951 m/s
Potência útil requerida RMS A: 169.735 w
Potência útil requerida RMS B: 510.6222 w

Potência total RMS A:	212.1687 W
Potência total RMS B:	638.2777 W
Potência Regenerada RMS A:	96.0166 W
Potência Regenerada RMS B:	288.8515 W
Potência Regenerada RMS Total:	355.6483 W
Passo 2000RPM A:	0.007128 m/rev
Passo 2000RPM B:	0.007128 m/rev
Passo 3000RPM A:	0.004752 m/rev
Passo 3000RPM B:	0.004752 m/rev

7.3. Movimento de Pitch Puro

No movimento de Pitch Puro os atuadores são acionados simultaneamente com vetores na mesma direção, causando a rotação em torno do eixo y . A Figura 18 ilustra o comportamento da cabine durante um movimento de Pitch.

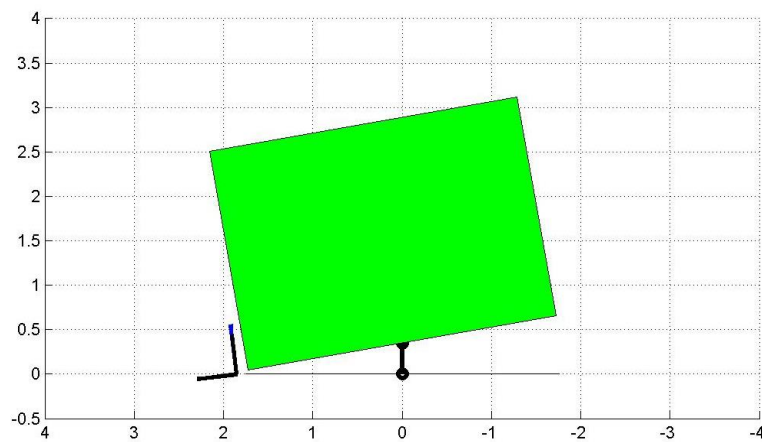


Figura 18 - Movimento de Pitch

A Figura 19 apresenta os movimentos impostos na cabine. Os valores do ângulo ϕ e suas derivadas temporais são mantidos em zero e os valores de θ são variados senoidalmente com amplitude de 10° e período de 6 segundos.

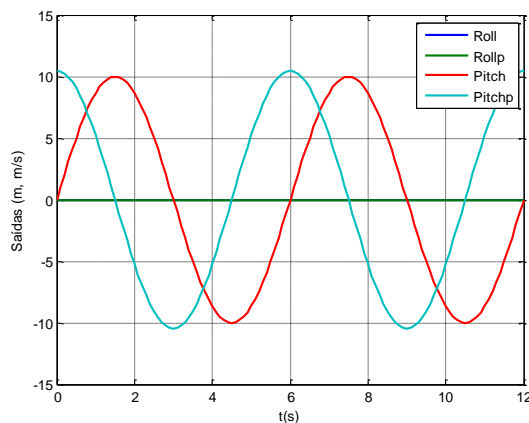


Figura 19 - Referências

A Figura 20 apresenta os deslocamentos dos atuadores. Repare que os mesmos estão em fase o que proporciona o movimento de pitch. Nesta figura também podemos verificar que os valores calculados através de transformação de

coordenadas e o valor calculado algebricamente estão iguais, o que confirma que não houve erros na derivação algébrica.

No movimento de Pitch a 10° nota-se que os atuadores operam com deslocamentos entre aproximadamente 0,65m e 1,3m. É requerido então aproximadamente 650 mm de curso para este movimento.

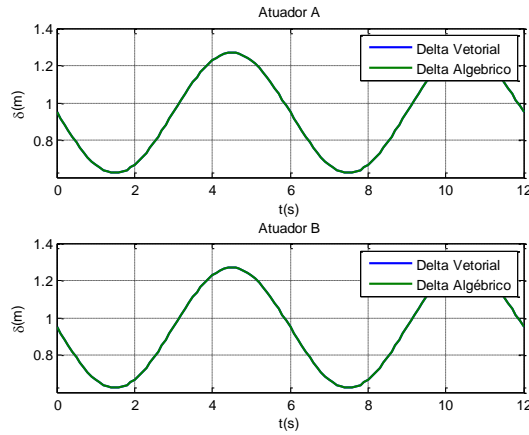


Figura 20 - Vetor δ

A Figura 21 indica as velocidades dos atuadores para os movimentos requeridos. Observa-se um pico de aproximadamente 300 mm/s.

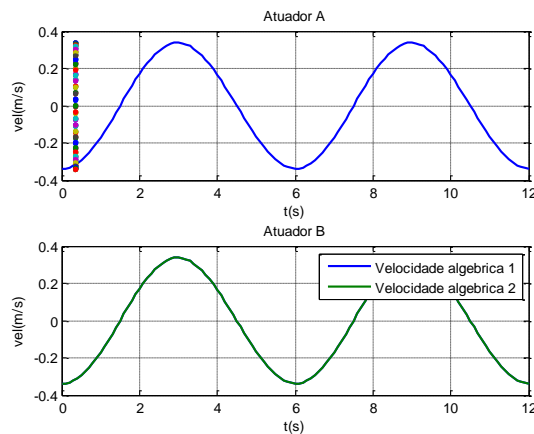


Figura 21 - Velocidade dos atuadores

A Figura 22 apresenta as forças requeridas nos atuadores, decorrentes dos cálculos de dinâmica inversa. Também neste caso as amplitudes das senoides das forças são iguais para os dois atuadores, apesar dos valores médios serem diferentes. O desbalanceamento provocado pela massa da carga alocada em uma das extremidade da cabine também provoca diferença nos atuadores.

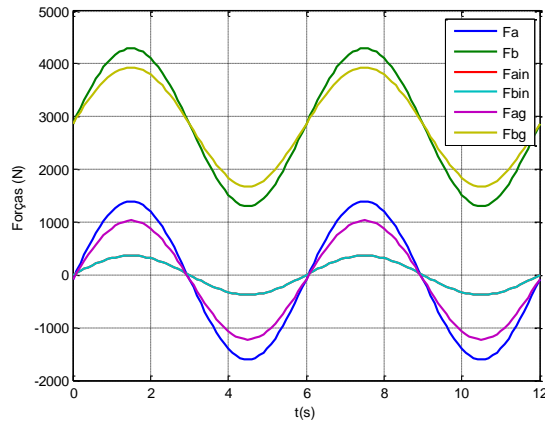


Figura 22 - Forças nos atuadores

A Figura 23 e a Figura 24 mostram a potência total instantânea do movimento para cada atuador e a potência regenerada pelos mesmos. Pode-se observar também aqui que o atuador B foi mais requerido para esta distribuição de carga. É necessário um pico de potência de aproximadamente 1000W no mesmo. A potência instantânea regenerada atinge picos de 1250W. Deve-se levar este valor em conta ao se dimensionar o resistor de dissipação.

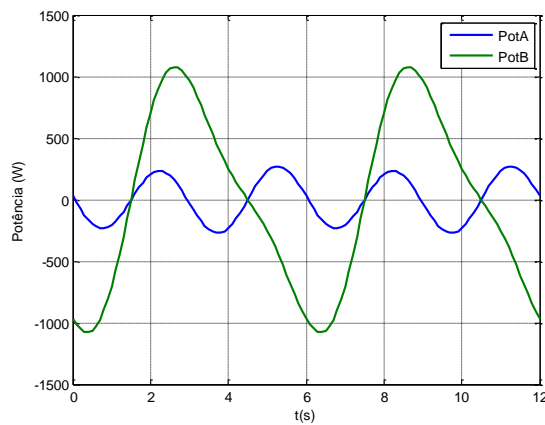


Figura 23 - Potência instantânea

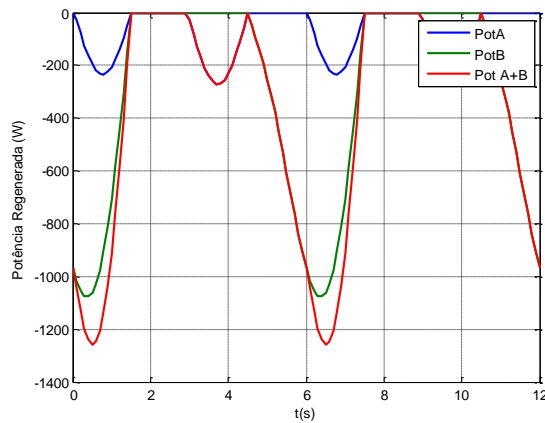


Figura 24 - Potência Regenerada

O quadro a seguir sumariza os resultados. Valores de potência RMS levando-se em conta o rendimento da transmissão e da potência regenerada RMS total são disponibilizados. O software também calcula os valores de deslocamento e velocidades máximos requeridos, e, com base nos mesmos, determina o passo mínimo do fuso de esferas para servomotores de 2000 e 3000 RPM.

```
Amplitude de Roll: 0 °
Fase de Roll: 0 °
Amplitude de Pitch: 10 °
Fase de Pitch: 0 °
Deslocamento Máximo A: 0.64476 m
Deslocamento Máximo B: 0.64476 m
Velocidade Máxima A: 0.33813 m/s
Velocidade Máxima B: 0.33813 m/s
Força Máxima A: 1604.1742 N
Força Máxima B: 4293.2103 N
Potência Máxima A: 270.23 W
Potência Máxima B: 1076.3934 W
Força na máx. Potência A: -1092.8291 N
Força na máx. Potência B: 3458.0888 N
Velocidade na máx. Potência A: -0.24728 m/s
Velocidade na máx. Potência B: 0.31127 m/s
Potência útil requerida RMS A: 178.5753 W
Potência útil requerida RMS B: 708.4457 W
Potência total RMS A: 223.2191 W
Potência total RMS B: 885.5571 W
Potência Regenerada RMS A: 101.008 W
Potência Regenerada RMS B: 403.8324 W
Potência Regenerada RMS Total: 460.0482 W
Passo 2000RPM A: 0.010144 m/rev
Passo 2000RPM B: 0.010144 m/rev
Passo 3000RPM A: 0.0067625 m/rev
Passo 3000RPM B: 0.0067625 m/rev
```

7.4. Movimento de Roll e Pitch Simultâneos

No movimento de Roll e Pitch simultâneos e com mesma amplitude os atuadores se movem em fase mas com amplitudes diferentes, o que proporciona uma rotação em torno de um eixo imaginário localizado no plano xy . A Figura 25 ilustra o comportamento da cabine durante um movimento de Roll e Pitch simultâneos.

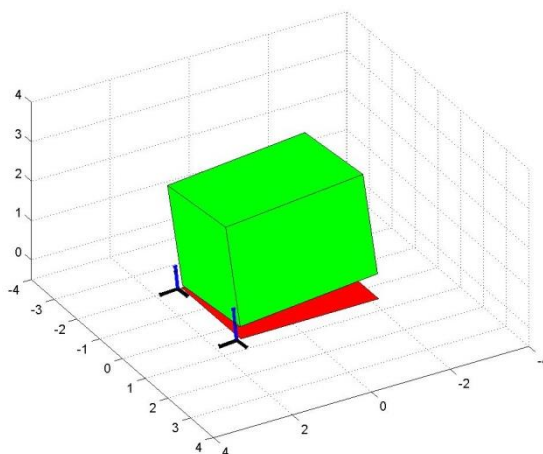


Figura 25 - Movimento Simultâneo

A Figura 26 apresenta os movimentos impostos na cabine. Os valores do ângulo ϕ e os valores de θ são variados senoidalmente e em fase, com amplitude de 5.5° e período de 6 segundos.

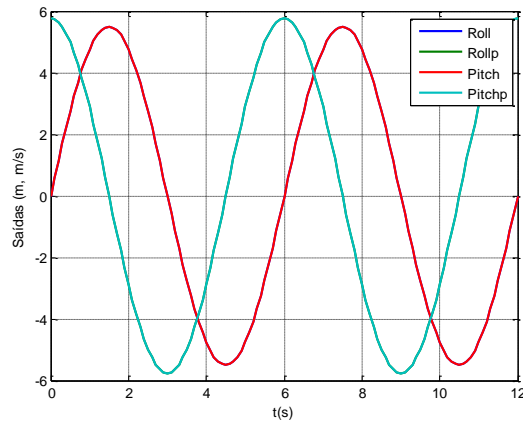


Figura 26 - Referências

A Figura 27 apresenta os deslocamentos dos atuadores. Repare que os mesmos estão em fase, mas possuem amplitudes diferentes.. Nesta figura também podemos verificar que os valores calculados através de transformação de coordenadas e o valor calculado algebricamente estão iguais, o que confirma que não houve erros na derivação algébrica.

Nota-se que o atuador B opera com deslocamentos entre aproximadamente 0,65m e 1,3m, e o atuador A opera com deslocamentos entre 0,9 e 1m. É requerido então aproximadamente 650 mm de curso para este movimento (no atuador B).

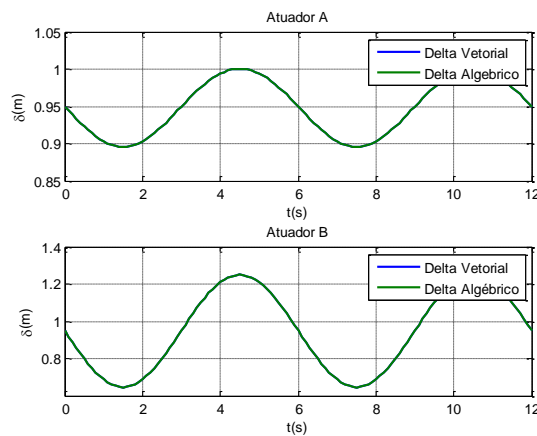


Figura 27 - Vetor δ

A Figura 28 indica as velocidades dos atuadores para os movimentos requeridos. Observa-se um pico de aproximadamente 300 mm/s no atuador B. Observe que o atuador A se move bem mais lentamente.

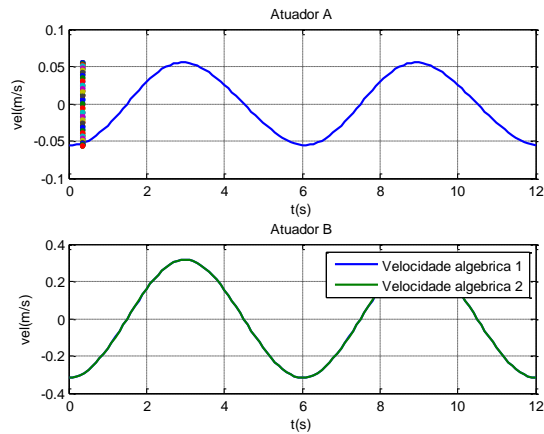


Figura 28 - Velocidades dos atuadores

A Figura 29 apresenta as forças requeridas nos atuadores, decorrentes dos cálculos de dinâmica inversa. Observe que aqui o atuador B é muito mais requerido do que o atuador A, que praticamente trabalha apenas para sustentar uma parte da cabine.

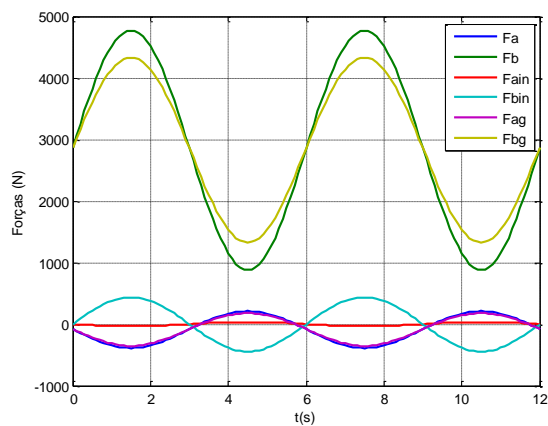


Figura 29 - Força nos atuadores

A Figura 30 e a Figura 31 mostram a potência total instantânea do movimento para cada atuador e a potência regenerada pelos mesmos. Como era de se esperar, o atuador B é mais requerido. A potência requerida neste movimento é bem parecida com a de Pitch puro, de aproximadamente 1000W. A potência regenerada é apenas um pouco maior que isso, uma vez que é praticamente apenas o atuador B que realiza movimento.

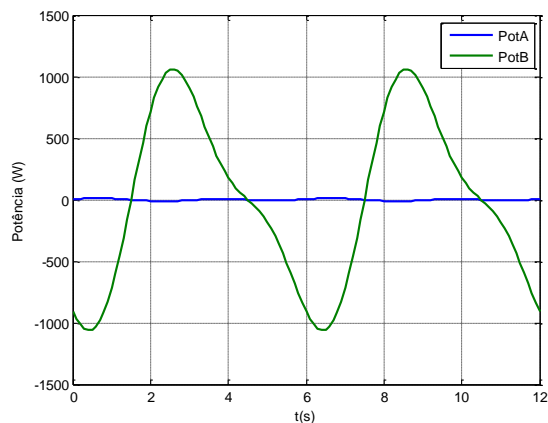


Figura 30 - Potência Instantânea

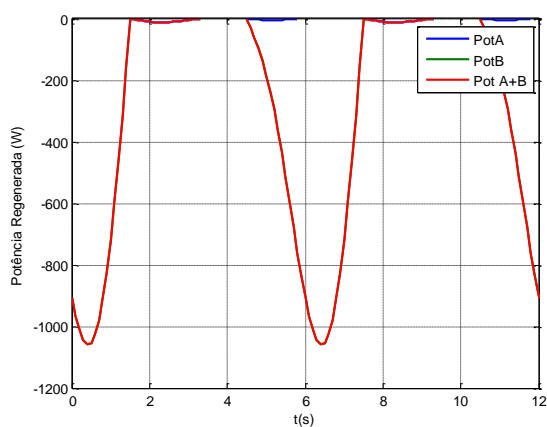


Figura 31 - Potência Regenerada

O quadro a seguir sumariza os resultados. Valores de potência RMS levando-se em conta o rendimento da transmissão e da potência regenerada RMS total são disponibilizados. O software também calcula os valores de deslocamento e velocidades máximos requeridos, e, com base nos mesmos, determina o passo mínimo do fuso de esferas para servomotores de 2000 e 3000 RPM.

Amplitude de Roll: 5.5 °
 Fase de Roll: 0 °
 Amplitude de Pitch: 5.5 °
 Fase de Pitch: 0 °
 Deslocamento Máximo A: 0.10504 m
 Deslocamento Máximo B: 0.60361 m
 Velocidade Máxima A: 0.055419 m/s
 Velocidade Máxima B: 0.31665 m/s
 Força Máxima A: 386.1007 N
 Força Máxima B: 4765.9035 N
 Potência Máxima A: 12.0732 W
 Potência Máxima B: 1058.6175 W
 Força na máx. Potência A: -281.7338 N
 Força na máx. Potência B: 3643.1931 N
 Velocidade na máx. Potência A: -0.042853 m/s
 Velocidade na máx. Potência B: -0.29057 m/s
 Potência útil requerida RMS A: 6.7884 W
 Potência útil requerida RMS B: 678.1556 W

Potência total RMS A: 8.4855 w
 Potência total RMS B: 847.6945 w
 Potência Regenerada RMS A: 3.8335 w
 Potência Regenerada RMS B: 386.4404 w
 Potência Regenerada RMS Total: 386.7561 w
 Passo 2000RPM A: 0.0016626 m/rev
 Passo 2000RPM B: 0.0094995 m/rev
 Passo 3000RPM A: 0.0011084 m/rev
 Passo 3000RPM B: 0.006333 m/rev

7.5. Movimento de Roll e Pitch Defasados de 90°

No movimento de Roll e Pitch Defasados de 90° e com mesma amplitude os atuadores se movem fora de fase e com mesma amplitude, o que proporciona uma rotação em torno do eixo z. A Figura 32 ilustra o comportamento da cabine durante um movimento de Roll e Pitch defasados.

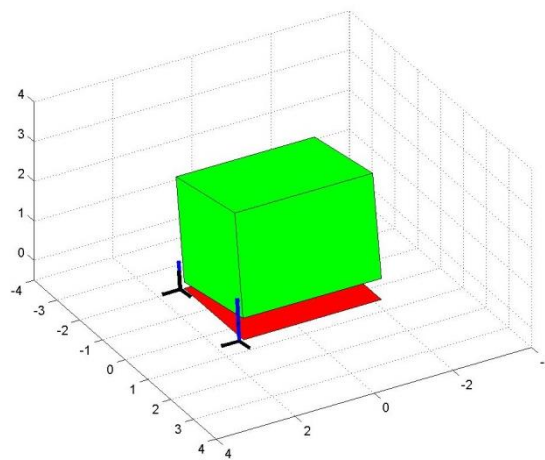


Figura 32 - Movimento Defasado

A Figura 33 apresenta os movimentos impostos na cabine. Os valores do ângulo ϕ e os valores de θ são variados senoidalmente e com fase de 90° entre si, com amplitude de 8.3° e período de 6 segundos.

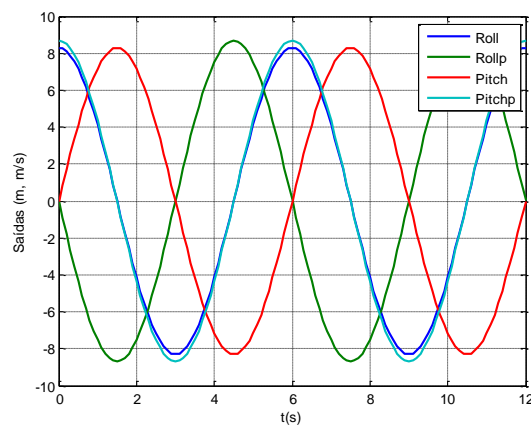


Figura 33 -Referências

A Figura 34 apresenta os deslocamentos dos atuadores. Repare que os mesmos têm mesma amplitude, mas fases diferentes. Nesta figura também podemos verificar que

os valores calculados através de transformação de coordenadas e o valor calculado algebricamente estão iguais, o que confirma que não houve erros na derivação algébrica.

Nota-se que os atuadores opera, com deslocamentos entre aproximadamente 0,65m e 1,3m. É requerido então aproximadamente 650 mm de curso para este movimento (no atuador B).

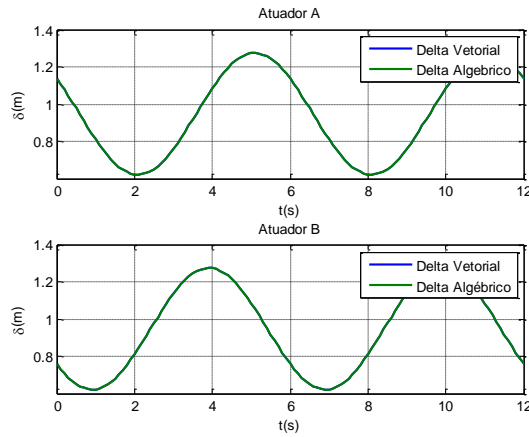


Figura 34 - Vetor δ

A Figura 35 indica as velocidades dos atuadores para os movimentos requeridos. Observa-se um pico de aproximadamente 300 mm/s no atuador B. Observe que o atuador A se move bem mais lentamente.

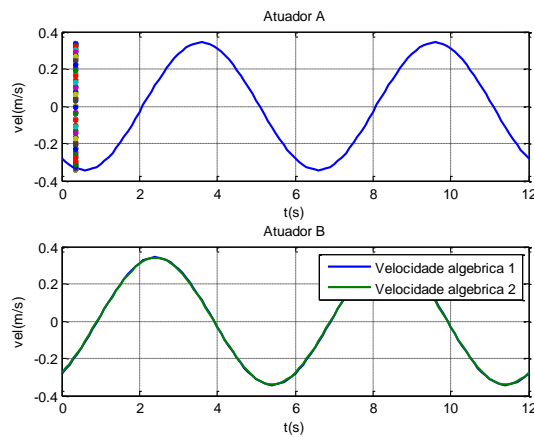


Figura 35 - Velocidades dos Atuadores

A Figura 36 apresenta as forças requeridas nos atuadores, decorrentes dos cálculos de dinâmica inversa. Observe que as amplitudes são similares às de movimento de pitch puro, com diferenças de fase.

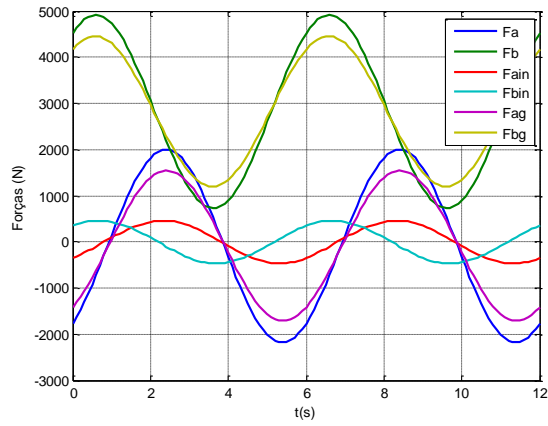


Figura 36 - Forças nos atuadores

A Figura 37 e a Figura 38 mostram a potência total instantânea do movimento para cada atuador e a potência regenerada pelos mesmos. Mais uma vez o atuador B é mais requerido. A potência requerida neste movimento é de aproximadamente 1300W. A potência regenerada é bem parecida com isso, uma vez que os movimentos estão defasados.

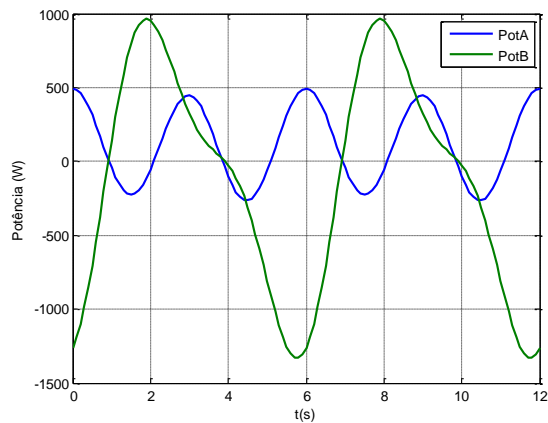


Figura 37 - Potência Instantânea

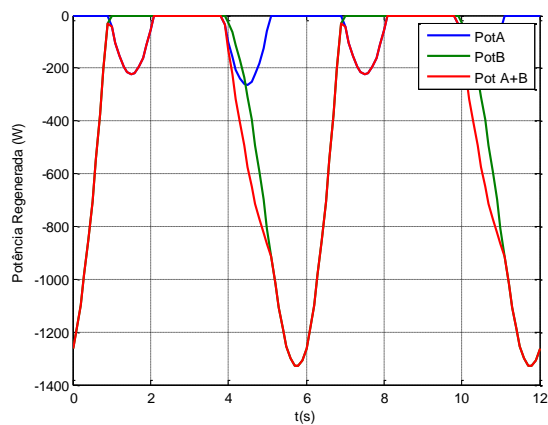


Figura 38 - Potência Regenerada

O quadro a seguir sumariza os resultados. Valores de potência RMS levando-se em conta o rendimento da transmissão e da potência regenerada RMS total são disponibilizados. O software também calcula os valores de deslocamento e velocidades máximos requeridos, e, com base nos mesmos, determina o passo mínimo do fuso de esferas para servomotores de 2000 e 3000 RPM.

```

Amplitude de Roll: 8.3 °
Fase de Roll: 90 °
Amplitude de Pitch: 8.3 °
Fase de Pitch: 0 °
Deslocamento Máximo A: 0.65373 m
Deslocamento Máximo B: 0.65373 m
Velocidade Máxima A: 0.34282 m/s
Velocidade Máxima B: 0.34282 m/s
Força Máxima A: 2179.3077 N
Força Máxima B: 4913.4377 N
Potência Máxima A: 493.2624 w
Potência Máxima B: 1329.3819 w
Força na máx. Potência A: -1764.4926 N
Força na máx. Potência B: 4226.3576 N
Velocidade na máx. Potência A: -0.27955 m/s
Velocidade na máx. Potência B: -0.31455 m/s
Potência útil requerida RMS A: 280.2881 w
Potência útil requerida RMS B: 745.1582 w
Potência total RMS A: 350.3601 w
Potência total RMS B: 931.4477 w
Potência Regenerada RMS A: 88.2899 w
Potência Regenerada RMS B: 491.0862 w
Potência Regenerada RMS Total: 512.9951 w
Passo 2000RPM A: 0.010284 m/rev
Passo 2000RPM B: 0.010284 m/rev
Passo 3000RPM A: 0.0068563 m/rev
Passo 3000RPM B: 0.0068563 m/rev
    
```

Buscando avaliar se os resultados são coerentes também sem carga, foi rodado um teste de dinâmica inversa considerando a massa da carga nula. A Figura 39, Figura 40 e Figura 41 apresentam as forças e potências neste caso. Observe que a distribuição de carga fica homogênea para os dois atuadores.

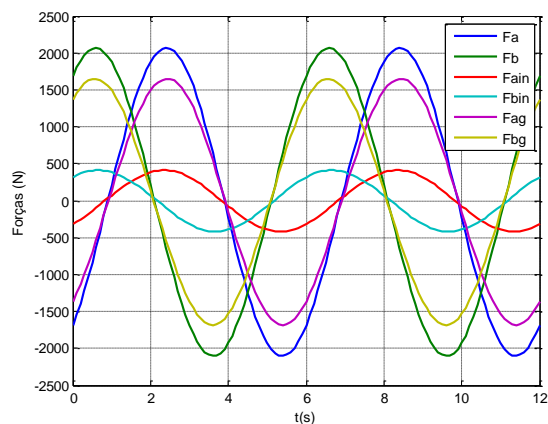


Figura 39 - Forças em movimento defasado sem carga

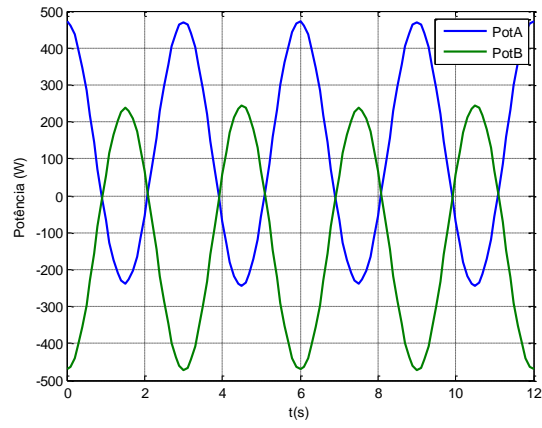


Figura 40 - Potências instantâneas em movimento defasado e sem carga

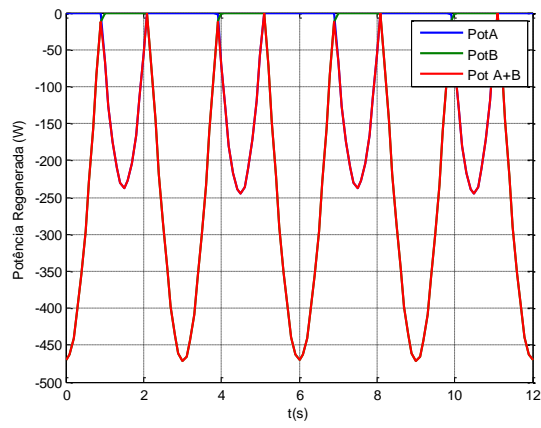


Figura 41 - Potências regeneradas em movimento defasado e sem carga

8. Controlador

O sistema descrito pelas equações de movimento é inerentemente instável, o que é bastante intuitivo, uma vez que a cabine se comporta como um pêndulo invertido. Por este motivo, a integração das equações de movimento só é possível com um servocontrolador incorporado. O sistema é do tipo MIMO (multiple input-multiple output) e seus movimentos são acoplados, o que dificulta a aplicação da teoria de controle clássico. Além disso, a alta não-linearidade requer o uso de técnicas de controle não-lineares para um funcionamento em amplas faixas de movimento.

Apesar de não ser o escopo da disciplina, de forma a possibilitar a integração numérica do sistema será proposto a seguir um método de controle não linear através de modos deslizantes. Maiores detalhes sobre a técnica aplicada podem ser encontrados em [5]. Esta técnica se mostra adequada por ser bastante robusta e relativamente simples de utilizar.

Definiremos inicialmente um vetor s de variáveis de escorregamento.

$$s = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}} + \lambda_1 \tilde{\phi} \\ \dot{\tilde{\theta}} + \lambda_2 \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (150)$$

A variável s determina o comportamento do sistema quando em modos deslizantes. Os ganhos λ_1 e λ_2 refletem a constante de tempo do sistema quando em modos deslizantes. As variáveis $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\theta}$ representam o erro de acompanhamento e são dadas por $\tilde{\phi} = \phi - \phi_d$ e $\tilde{\theta} = \theta - \theta_d$, onde ϕ_d e θ_d são os valores de referência.

Na técnica clássica de modos deslizantes, deve-se manter $\dot{s} = 0$ para que o movimento em modos deslizante seja atingido. Então impomos

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\phi}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_d \\ \ddot{\theta}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \dot{\tilde{\phi}} \\ \lambda_2 \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = 0 \quad (151)$$

Aplicando a equação (149) em (151) temos

$$\dot{s} = T^{-1}F + T^{-1}B_c \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\tilde{\phi}} \\ \ddot{\theta}_d - \lambda_2 \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = 0 \quad (152)$$

Onde

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_\phi s_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \quad (153)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{MH^2}{4J_{x0}c_\theta} \left[s_\phi c_\phi (s_\theta^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) + \left(c_\phi^2 - s_\phi^2 + \frac{4J_{x0}}{MH^2} \right) s_\theta \dot{\phi} \dot{\theta} \right] + \frac{gMhs_\phi}{2J_{x0}} \\ \left(\frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta - 1 \right) c_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 + \left(1 - c_\theta - \frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta \right) s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{gMhs_\theta}{2J_{y0}} \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \left(\frac{B}{2} - h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} & - \left(\frac{B}{2} + h \right) \frac{1}{J_{x0}c_\theta} \\ \frac{h-d}{J_{y0}} & \frac{h-d}{J_{y0}} \end{bmatrix} \quad (155)$$

Portanto, para atingir os modos deslizantes, calcula-se

$$\begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} = B_c^{-1} T \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\phi} \\ \ddot{\theta}_d - \lambda_2 \dot{\theta} \end{bmatrix} - B_c^{-1} F - B_c^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \text{sat}\left(\frac{s}{\Phi_1}\right) \\ k_2 \text{sat}\left(\frac{s}{\Phi_2}\right) \end{bmatrix} \quad (156)$$

A função saturação dada por (157) previne a ocorrência de chaveamentos em alta frequência do controlador.

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\Phi}\right) = \begin{cases} -1, & \text{se } s < -\Phi \\ 1, & \text{se } s > \Phi \\ \frac{s}{\Phi}, & \text{se } -\Phi < s < \Phi \end{cases} \quad (157)$$

Os ganhos k_1 e k_2 estão relacionados com a robustez do sistema e devem ser maiores que o maior erro de modelagem ou distúrbio. Φ está relacionado com a precisão de sistema.

As leis de controle para cada entrada, F_a ou F_b são dadas pelas equações (158) e (159):

$$\begin{aligned} F_a = \frac{1}{B} & \left\{ J_{x0} c_\theta (\ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\phi}) \right. & (158) \\ & - \frac{MH^2}{4} \left[s_\phi c_\phi (s_\theta^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) \right. \\ & + \left(c_\phi^2 - s_\phi^2 + \frac{4J_{x0}}{MH^2} \right) s_\theta \dot{\phi} \dot{\theta} \left. \right] - \frac{gMHs_\phi c_\theta}{2} \\ & - \frac{J_{y0} B}{2d} \left[(\ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\phi}) s_\phi s_\theta + (\ddot{\theta}_d - \lambda_2 \dot{\theta}) c_\phi \right. \\ & - \left. \left(\frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta - 1 \right) c_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 \right. \\ & - \left. \left(1 - c_\theta - \frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta \right) s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} - \frac{gMHs_\theta}{2J_{y0}} \right] \\ & - \frac{J_{x0} c_\theta}{B} k_1 \text{sat}\left(\frac{s_1}{\Phi_1}\right) + \frac{J_{y0}}{2d} k_2 \text{sat}\left(\frac{s_2}{\Phi_2}\right) \\ F_b = \frac{1}{B} & \left\{ -J_{x0} c_\theta (\ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\phi}) + \frac{MH^2}{4} \left[s_\phi c_\phi (s_\theta^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) \right. \right. & (159) \\ & + \left. \left(c_\phi^2 - s_\phi^2 + \frac{4J_{x0}}{MH^2} \right) s_\theta \dot{\phi} \dot{\theta} \right] + \frac{gMHs_\phi c_\theta}{2} \\ & - \frac{J_{y0} B}{2d} \left[(\ddot{\phi}_d - \lambda_1 \dot{\phi}) s_\phi s_\theta + (\ddot{\theta}_d - \lambda_2 \dot{\theta}) c_\phi \right. \\ & - \left. \left(\frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta - 1 \right) c_\phi s_\theta \dot{\phi}^2 - \left(1 - c_\theta - \frac{MH^2}{4J_{y0}} c_\theta \right) s_\phi \dot{\phi} \dot{\theta} - \frac{gMHs_\theta}{2J_{y0}} \right] \\ & \left. + \frac{J_{x0} c_\theta}{B} k_1 \text{sat}\left(\frac{s_1}{\Phi_1}\right) + \frac{J_{y0}}{2d} k_2 \text{sat}\left(\frac{s_2}{\Phi_2}\right) \right\} \end{aligned}$$

Nas equações (158) e (159) a massa da carga m foram consideradas nulas e as projeções das direções das forças a_{nm} e b_{nm} foram consideradas unitárias

9. Simulação Numérica: Dinâmica Direta (integração)

Devido a problemas de sintonização do controlador foram realizadas integrações numéricas apenas em Roll e Pitch isoladamente e sem a presença da carga desbalanceadora. Um modelo numérico desenvolvido em Simulink ® pode ser encontrado no Anexo B.

A Figura 42 e a Figura 43 ilustram resultados preliminares. Observa-se que o sistema de controle segue a referência estipulada e que as forças estão em fase, conforme esperado. Comparando os resultados com os da Figura 44, que mostra o resultado da dinâmica inversa observa-se coerência nas amplitudes e fases das forças.

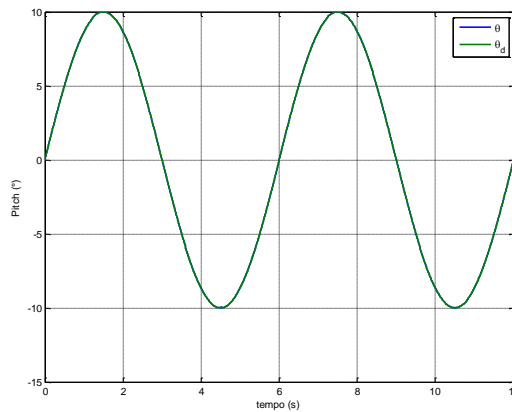


Figura 42 - Ângulo de Pitch

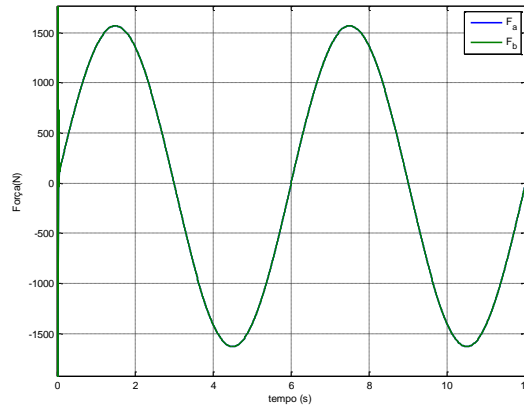


Figura 43 - Forças em Pitch Puro

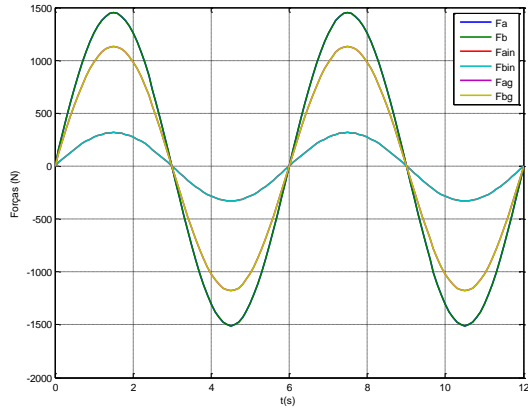


Figura 44 - Forças em Pitch Puro - Dinâmica Inversa

A Figura 45 e a Figura 46 ilustram resultados preliminares. Observa-se que o sistema de controle segue a referência estipulada e que as forças estão defasadas de 180°, conforme esperado. Comparando os resultados com os da Figura 47, que mostra o resultado da dinâmica inversa observa-se coerência nas amplitudes e fases das forças.

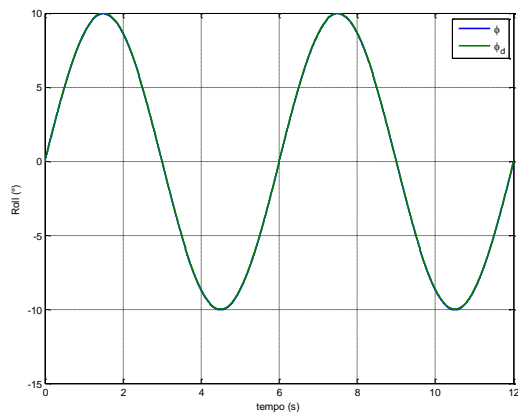


Figura 45 - Ângulo de Roll

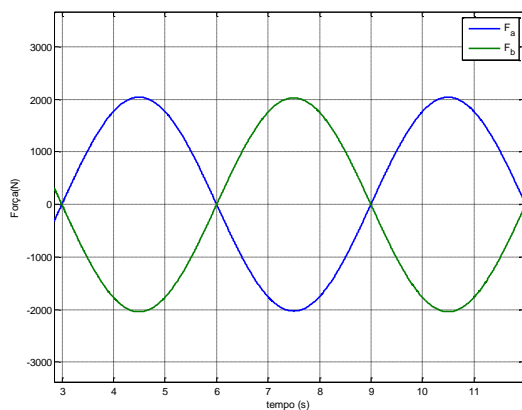


Figura 46 - Forças em Roll

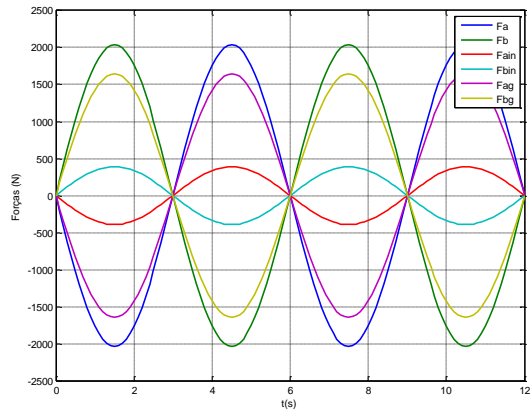


Figura 47 - Forças em Roll - Dinâmica direta

10. Conclusões

Neste trabalho foi realizada a modelagem dinâmica de um sistema de simulação de movimentos de Roll e Pitch. O sistema foi modelado através da metodologia proposta por Gibbs-Appel, utilizando energias de acelerações. Também foram descritas diversas relações cinemáticas que possibilitaram a determinação de velocidades e deslocamentos requeridos para os atuadores.

Apesar da complexidade do mecanismo, foi possível chegar a um modelo relativamente simples, utilizando-se de simplificações adequadas. Com base no modelo foi possível dimensionar sistemas necessários para o correto funcionamento da cabine, como potências e forças requeridas nos atuadores, além de energia regenerada para os circuitos de frenagem.

Com base no modelo também foi possível derivar dois métodos de controle distintos. O primeiro, com base apenas na cinemática do sistema, possibilita enviar comandos de deslocamento para os servo-atuadores, impondo a posição à cabine através das posições dos atuadores. Para o funcionamento deste sistema, basta-se utilizar as equações algébricas dos deslocamentos dos atuadores em função dos ângulos requeridos.

No segundo método, discutido no capítulo 8, utiliza-se uma malha de controle multivariável que impõe a força requerida nos atuadores para que sejam atingidas as posições angulares. Este segundo método apresenta maiores dificuldades de aplicação, mas possibilitaria maior controle sobre a dinâmica de resposta do sistema, uma vez que o mesmo não depende da dinâmica imposta pelos servo-drives.

Os resultados obtidos neste trabalho serão aplicados no início de 2016 quando será executada a montagem do sistema de simulação.

11. Bibliografia

[1] Flight Simulator. Artigo da Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Flight_simulator.

Acessado em 14/12/2015

[2] Homepage do Tanque de Provas Numérico. <http://tpn.usp.br/>. Acessado em 14/12/2015

[3] Stewart Platform. Artigo da Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Stewart_platform

Acessado em 14/12/2015

[4] BARUH, H , Analytical Dynamics. WCB Mcgraw Hill, 1999, 718p.

[5] SLOTINE, J.J.E. AND LI W., Applied nonlinear control. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991, 461p.

12. Anexo A – Códigos Matlab

SCRIPT simLastro

```
clc;
close all;
clear all;

% Limites: Roll: 14.4°, Pitch: 10°, Simultâneo:5.5, 90 graus de fase: 8.3
% Amplitudes de movimento em graus
Aroll = 0;
Apitch = 10;

% Parâmetros
g = 9.8; % Gravidade
time = 0:0.1:12; %Tempo

% Parâmetros de movimento de roll
TR = 6; % Período de oscilação
aR = Aroll*pi/180; % Amplitude em Radianos
omegaR = 2*pi/TR; % Frequencia
phR = pi/2; % Fase

% Parâmetros de movimento de pitch
TP = 6; % Período de oscilação
aP = Apitch*pi/180; % Amplitude em Radianos
omegaP = 2*pi/TP; % Frequencia
phP = 0; % Fase

% Parâmetros dimensionais
h = 0.6;
L = 3.5;
d = 1.85;
B = 2.6;
H = 2.5;
t = 0.35;

% Parametros de inércia
M = 2000;
m = 300;
Jxx = (M*H^2)/4 + M*(H^2 + B^2)/12 + (m*B^2)/4;
Jyy = (M*H^2)/4 + M*(H^2 + L^2)/12 + (m*L^2)/4;

% Dimensões do bloco
verts = 0.5*[ L, B, 0;
             -L, B, 0;
             -L,-B, 0;
             L,-B, 0;
             L, B, 2*H;
             -L, B, 2*H;
             -L,-B, 2*H;
             L,-B, 2*H;
             ];

% Posição das juntas no sistema O2
joints = [ d, 0.5*B, h;
          d,-0.5*B, h;
```

```

];
tam = size (joints);
Njoints = tam(1);
% Instanciação do desenho
newJoints = joints;
newVerts = verts;
faces = [1 2 3 4;
        1 5 6 2;
        2 3 7 6;
        3 4 8 7;
        4 1 5 8;
        5 6 7 8;
        ];
f1 = figure();
hold on;
% Desenha Cabine
cabin = patch('Faces',faces,'Vertices',verts,'FaceColor','g');
axis equal
grid;
set(gca,'Xlim',[-4, 4]);
set(gca,'Ylim',[-4, 4]);
set(gca,'Zlim',[-0.5, 4]);

% Desenha piso
floor = patch('Faces',[1 2 3 4],'Vertices',...
            0.5*[L B 0; -L B 0; -L,-B,0;L, -B,0],'FaceColor','r');

% Desenha Pivô (ponto de giro da cabine)
pivo = plot3([0,0],[0,0],[0, t],'Linewidth',3,'color','k','Marker','o');

% atuadores
act(1) = quiver3(d,B/2,0, 0,0,t,'visible','on');
act(2) = quiver3(d,-B/2,0, 0,0,t,'visible','on');
set(act,'Linewidth',3,'color','b');

% Desenha Frames dos atuadores
frameak = quiver3(d,B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');
frameaj = quiver3(d,B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');
frameai = quiver3(d,B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');
framebk = quiver3(d,-B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');
framebj = quiver3(d,-B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');
framebi = quiver3(d,-B/2,0,0,0,0.5,'Linewidth',3,'color','k');

% Altera a Vista
if(aR ~= 0&&aP~=0)
    view(150,30)
else
    if(aR == 0)
        view(180,0)
    elseif(aP == 0)
        view(90,0)
    end;
end;
% Prepara video
name = ['displacements_Roll', num2str(Aroll),'-
',num2str(phR*180/pi),'_Pitch',num2str(Apitch),'-',num2str(phP*180/pi)];
videowriterObj = videowriter([name,'.avi'],'Motion JPEG AVI');
open(videowriterObj);

```



```

for k = 1:length(time)
    % Aplica os deslocamentos
    roll(k) = aR*sin(omegaR*time(k)+phR);
    rollp(k) = aR*omegaR*cos(omegaR*time(k)+phR);
    rollpp(k) = -aR*omegaR*omegaR*sin(omegaR*time(k)+phR);
    pitch(k) = aP*sin(omegaP*time(k)+phP);
    pitchp(k) = aP*omegaP*cos(omegaP*time(k)+phP);
    pitchpp(k) = -aP*omegaP*omegaP*sin(omegaP*time(k)+phP);

    % Calcula os senos e cossenos dos ângulos de Roll e Pitch
    trigRoll = trigData(roll(k));
    trigPitch = trigData(pitch(k));
    trigYaw = trigData(0);
    % Calcula os variáveis r, p e q e derivadas
    r(k) = trigPitch(2) * rollp(k);
    p(k) = trigRoll(2)*pitchp(k) + trigRoll(1)*trigPitch(1) * rollp(k);
    q(k) = trigRoll(2)*trigPitch(1)*rollp(k) - trigRoll(1)*pitchp(k);
    rp(k) = trigPitch(2)*rollpp(k) - trigPitch(1)*rollp(k)*pitchp(k);
    pp(k) = trigRoll(1)*trigPitch(1)*rollpp(k) + ...
        trigRoll(2)*trigPitch(1)*rollp(k)^2 + ...
        (trigPitch(2)-1)*trigRoll(1)*rollp(k)*pitchp(k) + ...
        trigRoll(2)*pitchpp(k);
% Atualiza desenho da cabine
for j = 1:length(verts)
    % Aplica a transformação homogênea em cada ponto
    outVec = cTransf(verts(j,:),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
    % Aloca a posição vertical
    newVerts(j,:) = outVec'+[0,0,t];
end;
set(cabin,'Vertices',newVerts);
% Atualiza posição das juntas
for j = 1:Njoints
    jointVec = cTransf(joints(j,:),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
    newJoints(j,:) = jointVec'+[0,0,t];
end;

% Pontos fixos no piso
pivotpoints = [d , d ;
                B/2,-B/2;
                0 , 0 ;
                ];
% Calcula posição dos atuadores
for i = 1:Njoints
    outpos{i}(:,k) = pivotpoints(:,i);
    actvector(:,i) = [newJoints(i,1)-outpos{i}(1,k);
                    newJoints(i,2)-outpos{i}(2,k);
                    newJoints(i,3)-outpos{i}(3,k)];

% Calculo vetorial do deslocamento Delta
delta(k,i) = sqrt((actvector(1,i))^2 + (actvector(2,i))^2 +
(actvector(3,i))^2);

% ka e kb no sistema 1: ka: i = 1, kb: i = 4;
actversor(:,i) = actvector(:,i)*1/delta(k,i); % (ka, kb)
set(act(i), 'Udata', [actvector(1,i)]);
set(act(i), 'Vdata', [actvector(2,i)]);
set(act(i), 'Wdata', [actvector(3,i)]);
end;

```

```

% Calculo algebrico de Delta
algDelta(k,1) = sqrt(2*(d^2)*(1-trigPitch(2)) + (t^2) + (h^2) +...
    (0.5*B^2)*(1-trigRoll(2)) + ...
    ([B 2*h]*trigRoll')*([-d t]*trigPitch') +...
    B*h*trigRoll(1) - 2*d*t*trigPitch(1));
algDelta(k,2) = sqrt(2*(d^2)*(1-trigPitch(2)) + (t^2) + (h^2) +...
    (0.5*B^2)*(1-trigRoll(2)) + ...
    ([-B 2*h]*trigRoll')*([-d t]*trigPitch') +...
    -B*h*trigRoll(1) - 2*d*t*trigPitch(1));

% Calculo algebrico da velocidade do atuador
arg1 = [d -t]*trigPitch';
arg2 = [t d]*trigPitch';
arg3 = [B/2 h]*trigRoll';
arg4 = [h -B/2]*trigRoll';
arg5 = [-B/2 h]*trigRoll';
arg6 = [B/2 -h]*trigRoll';
arg7 = [h B/2]*trigRoll';

vel(k,1) = (1/algDelta(k,1)) * ...
    (pitchp(k)*(d*arg1 - arg3*arg2) +...
    rollp(k)*(0.5*B*arg3 + arg1*arg4));
vel(k,2) = (1/algDelta(k,2)) * ...
    (pitchp(k)*(d*arg1 - arg5*arg2) +...
    rollp(k)*(0.5*B*arg6 + arg1*arg7));

% Calculo de versores nas coordenadas dos atuadores

ja(:,k) = cross(actVersor(:,1),[1 0 0]');
jb(:,k) = cross(actVersor(:,2),[1 0 0]');
ia(:,k) = cross(ja(:,k),actVersor(:,1));
ib(:,k) = cross(jb(:,k),actVersor(:,2));

% Projeções no sistema 2
jaa(k,:) = cTransfInv(ja(:,k),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
jbb(k,:) = cTransfInv(jb(:,k),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
iaa(k,:) = cTransfInv(ia(:,k),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
ibb(k,:) = cTransfInv(ib(:,k),trigRoll,trigPitch,trigYaw);

set(frameak, 'Udata', [actVersor(1,1)'*0.5]);
set(frameak, 'vdata', [actVersor(2,1)*0.5]);
set(frameak, 'wdata', [actVersor(3,1)*0.5]);
set(frameaj, 'Udata', [ja(1,k)*0.5]);
set(frameaj, 'vdata', [ja(2,k)*0.5]);
set(frameaj, 'wdata', [ja(3,k)*0.5]);
set(frameai, 'Udata', [ia(1,k)*0.5]);
set(frameai, 'vdata', [ia(2,k)*0.5]);
set(frameai, 'wdata', [ia(3,k)*0.5]);
set(framebk, 'Udata', [actVersor(1,2)'*0.5]);
set(framebk, 'vdata', [actVersor(2,2)*0.5]);
set(framebk, 'wdata', [actVersor(3,2)*0.5]);
set(framebj, 'Udata', [jb(1,k)*0.5]);
set(framebj, 'vdata', [jb(2,k)*0.5]);
set(framebj, 'wdata', [jb(3,k)*0.5]);
set(framebi, 'Udata', [ib(1,k)*0.5]);
set(framebi, 'vdata', [ib(2,k)*0.5]);
set(framebi, 'wdata', [ib(3,k)*0.5]);

```

```

% ka e kb já descritos no sistema (2)
ka(k,:) = cTransfInv(actVersor(:,1),trigRoll,trigPitch,trigYaw);
kb(k,:) = cTransfInv(actVersor(:,2),trigRoll,trigPitch,trigYaw);

% velocidade algebrica calculada pelo segundo método
vel2(k,1) = ka(k,1) * h * p(k) - ...
    ka(k,2) * h * r(k) + ka(k,3) * (0.5*B*r(k) -d*p(k));

vel2(k,2) = ka(k,1) * h * p(k) - ...
    ka(k,2) * h * r(k) + ka(k,3) * (-0.5*B*r(k) -d*p(k));

% Matriz de controle
Bu = [0.5*B*ka(k,3)-h*ka(k,2), -0.5*B*kb(k,3)-h*kb(k,2);
    -d*ka(k,3)+h*ka(k,1) , -d*kb(k,3)+h*kb(k,1) ];
Ax = [Jxx 0; 0 Jyy];
Fin(k,:) = (Bu^-1) * (Ax*[rp(k);pp(k)] - 0.25*M*H^2*q(k)*[0 1; 1 0]*[r(k);p(k)] );
Fg(k,:) = (Bu^-1) * (-
0.5*g*[trigPitch(2)*(M*H*trigRoll(1)+m*B*trigRoll(2));M*H*trigPitch(1)+m*L*trigRoll(2)*t
rigPitch(2)]);
F(k,:) = Fin(k,:) + Fg(k,:);
Pot(k,1) = F(k,1)*vel(k,1);
Pot(k,2) = F(k,2)*vel(k,2);
pause(0.05);
mov = getframe(gcf);
writevideo(videowriterObj,mov)
if (pitch(k) == aP && aP ~= 0 )|| (roll(k) == aR && aR ~=0)
    print(f1,name,'-djpeg');
end;
end;
close(videowriterObj);
plotData;
publish('plotData.m','format','doc','showCode',false,'figureSnapMethod','print','imageFo
rmat','meta');

```

SCRIPT PLOT DATA

```

figure;
plot(time,180*roll/pi, time, 180*rollp/pi,
time,180*pitch/pi,time,180*pitchp/pi,'linewidth',2)
grid;
xlabel('t(s)');
ylabel('Saídas (m, m/s)');
legend({'Roll','Rollp','Pitch','Pitchp'});

figure;
subplot(2,1,1)
plot(time,delta(:,1),time,algDelta(:,1),'linewidth',2);
grid;
title(['Atuador A']);
xlabel('t(s)');
ylabel('\delta(m)');
legend({'Delta Vetorial','Delta Algebrico'});
subplot(2,1,2)
plot(time,delta(:,2),time,algDelta(:,2),'linewidth',2);
grid;
title(['Atuador B']);
xlabel('t(s)');

```

```

ylabel('\delta(m)');
legend({'Delta Vetorial', 'Delta Algébrico'});

figure;
subplot(2,1,1)
plot(time,vel(:,1),t,vel2(:,1), 'linewidth',2);
grid;
title(['Atuador A']);
xlabel('t(s)');
ylabel('vel(m/s)');
subplot(2,1,2)
plot(time,vel(:,2),time,vel2(:,2), 'linewidth',2);
legend({'Velocidade algebrica 1', 'Velocidade algebrica 2'});
grid;
title(['Atuador B']);
xlabel('t(s)');
ylabel('vel(m/s)');
legend({'Velocidade algebrica 1', 'Velocidade algebrica 2'});

figure;
plot(time,F,time,Fin,time,Fg, 'linewidth',2)
grid;
xlabel('t(s)');
ylabel('Forças (N)');
legend({'Fa', 'Fb', 'Fain', 'Fbin', 'Fag', 'Fbg'});

figure;
plot(time,Pot, 'linewidth',2)
grid;
xlabel('t(s)');
ylabel('Potência (w)');
legend({'PotA', 'PotB'});

for k = 1:length(Pot)
    if Pot(k,1) < 0
        PotReg1(k) = Pot(k,1);
    else
        PotReg1(k) = 0;
    end;
    if Pot(k,2) < 0
        PotReg2(k) = Pot(k,2);
    else
        PotReg2(k) = 0;
    end;
end;

figure;
plot(time,PotReg1,time,PotReg2,time,PotReg1+PotReg2, 'linewidth',2)
grid;
xlabel('t(s)');
ylabel('Potência Regenerada (w)');
legend({'PotA', 'PotB', 'Pot A+B'});

% Ângulos e fase
disp(['Amplitude de Roll: ',num2str(Aroll),' °']);
disp(['Fase de Roll: ',num2str(phR*180/pi),' °']);
disp(['Amplitude de Pitch: ',num2str(Apitch),' °']);
disp(['Fase de Pitch: ',num2str(phP*180/pi),' °']);

```

```

% Valores máximos:
% Deslocamento
MaxDelta1 = max(delta(:,1))-min(delta(:,1));
MaxDelta2 = max(delta(:,2))-min(delta(:,2));
disp(['Deslocamento Máximo A: ',num2str(MaxDelta1), ' m']);
disp(['Deslocamento Máximo B: ',num2str(MaxDelta2), ' m']);

% Velocidade
MaxVel1 = max(abs(vel(:,1)));
MaxVel2 = max(abs(vel(:,2)));
disp(['Velocidade Máxima A: ',num2str(MaxVel1), ' m/s']);
disp(['Velocidade Máxima B: ',num2str(MaxVel2), ' m/s']);

% Máxima Força
MaxF1 = max(abs(F(:,1)));
MaxF2 = max(abs(F(:,2)));
disp(['Força Máxima A: ',num2str(MaxF1), ' N']);
disp(['Força Máxima B: ',num2str(MaxF2), ' N']);

% Máxima Potência
[MaxP1, indice1] = max(abs(Pot(:,1)));
[MaxP2, indice2] = max(abs(Pot(:,2)));
disp(['Potência Máxima A: ',num2str(MaxP1), ' W']);
disp(['Potência Máxima B: ',num2str(MaxP2), ' W']);

% Força na máxima Potência
MaxF1P1 = F(indice1,1);
MaxF2P2 = F(indice2,2);
disp(['Força na máx. Potência A: ',num2str(MaxF1P1), ' N']);
disp(['Força na máx. Potência B: ',num2str(MaxF2P2), ' N']);

% Velocidade na máxima Potência
MaxV1P1 = vel(indice1,1);
MaxV2P2 = vel(indice2,2);
disp(['Velocidade na máx. Potência A: ',num2str(MaxV1P1), ' m/s']);
disp(['Velocidade na máx. Potência B: ',num2str(MaxV2P2), ' m/s']);

% Potência RMS
P1rms = rms(Pot(:,1));
P2rms = rms(Pot(:,2));
disp(['Potência útil requerida RMS A: ',num2str(P1rms), ' W']);
disp(['Potência útil requerida RMS B: ',num2str(P2rms), ' W']);

% Potência RMS com rendimento
rendimento = 0.8;
P1rms2 = rms(Pot(:,1))/rendimento;
P2rms2 = rms(Pot(:,2))/rendimento;
disp(['Potência total RMS A: ',num2str(P1rms2), ' W']);
disp(['Potência total RMS B: ',num2str(P2rms2), ' W']);

% Potência de regeneração:
rendimentoN = 0.8;
PotReg1rms = rms(PotReg1)*rendimentoN;
PotReg2rms = rms(PotReg2)*rendimentoN;
PotRegTotrms = rms(PotReg1 + PotReg2)*rendimentoN;
disp(['Potência Regenerada RMS A: ',num2str(PotReg1rms), ' W']);

```

```

disp(['Potência Regenerada RMS B: ',num2str(PotReg2rms), ' W']);
disp(['Potência Regenerada RMS Total: ',num2str(PotRegTotrms),' W']);

% Passo para um motor de 2000 RPM
n = 2000;
passoMin1 = MaxVel1/(n/60); %m/rot;
passoMin2 = MaxVel2/(n/60); %m/rot;
disp(['Passo 2000RPM A: ',num2str(passoMin1),' m/rev']);
disp(['Passo 2000RPM B: ',num2str(passoMin2),' m/rev']);

% Passo para um motor de 3000 RPM
n = 3000;
passoMin31 = MaxVel1/(n/60); %m/rot;
passoMin32 = MaxVel2/(n/60); %m/rot;
disp(['Passo 3000RPM A: ',num2str(passoMin31),' m/rev']);
disp(['Passo 3000RPM B: ',num2str(passoMin32),' m/rev']);

```

Funções trigonométricas e transformações homogêneas

```

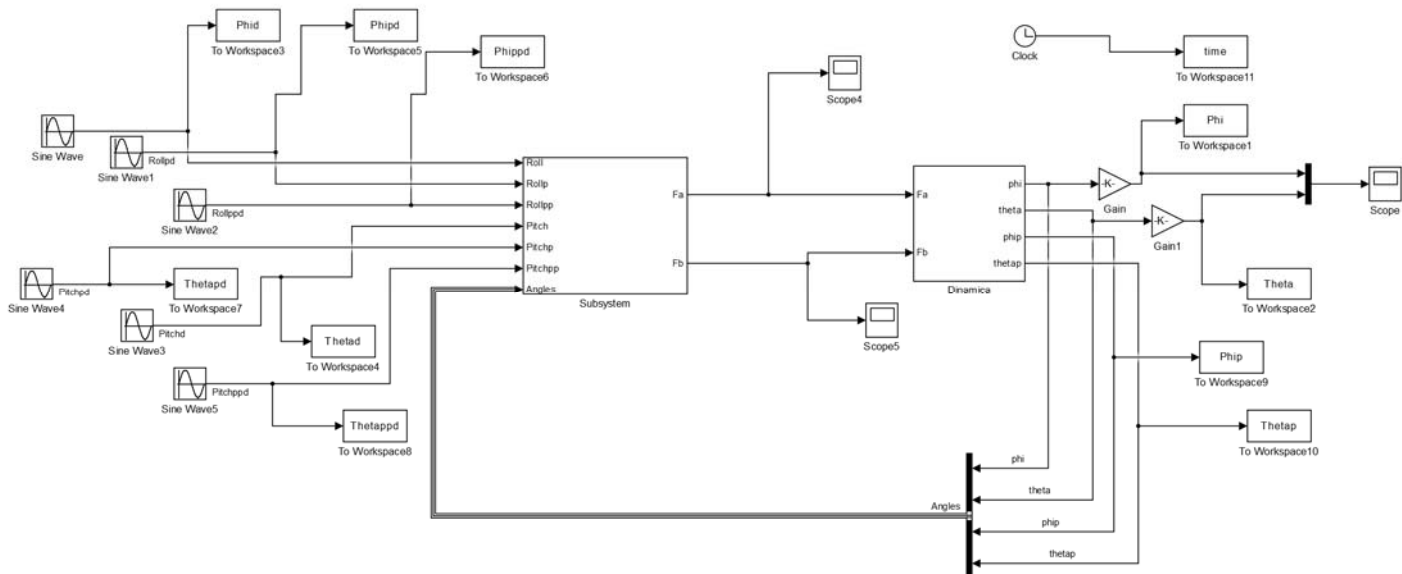
function sinCos = trigData(angle)
sinCos(1) = sin(angle);
sinCos(2) = cos(angle);
end

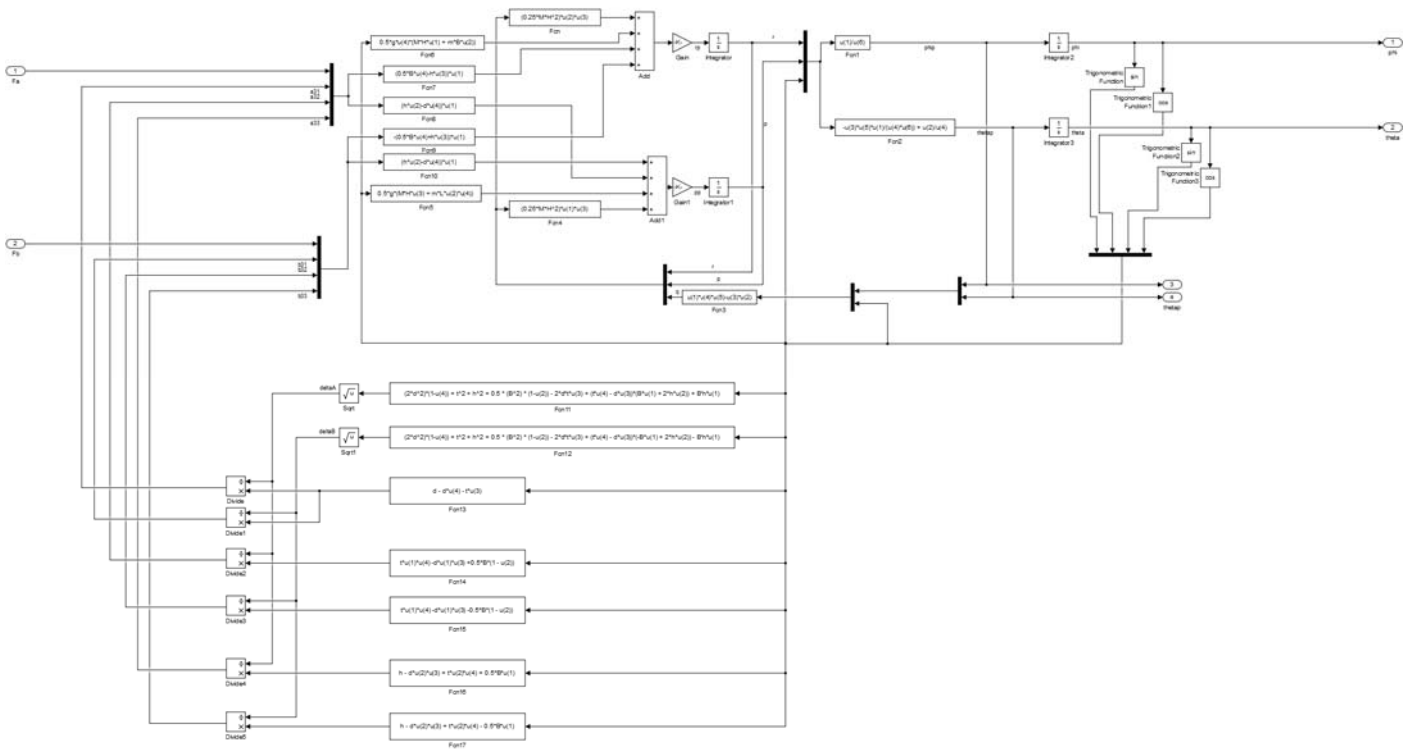
function outVec = cTransfInv(inVec, trigRoll, trigPitch, trigYaw)
sph = trigRoll(1);
cph = trigRoll(2);
sth = trigPitch(1);
cth = trigPitch(2);
sps = trigYaw(1);
cps = trigYaw(2);
M = [cth, sth*sph, sth*cph;
      0, cph, -sph;
      -sth, cth*sph, cth*cph;
      1];
outVec = (M^-1)*inVec;
end

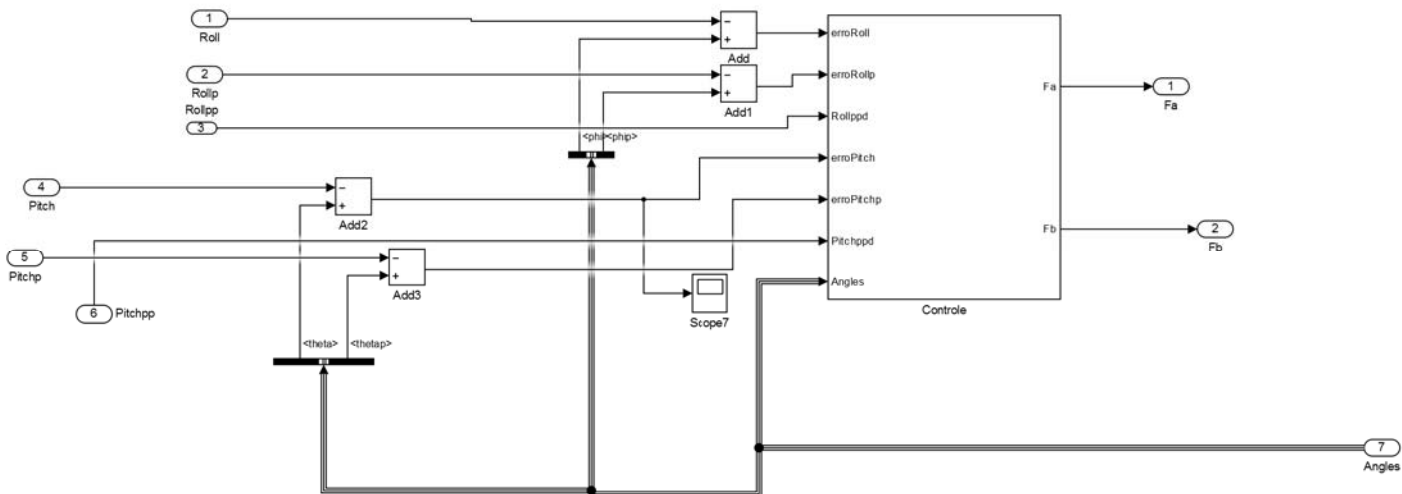
function outVec = cTransf(inVec, trigRoll, trigPitch, trigYaw)
sph = trigRoll(1);
cph = trigRoll(2);
sth = trigPitch(1);
cth = trigPitch(2);
sps = trigYaw(1);
cps = trigYaw(2);
M = [cth, sth*sph, sth*cph;
      0, cph, -sph;
      -sth, cth*sph, cth*cph;
      1];
outVec = M*inVec;
end

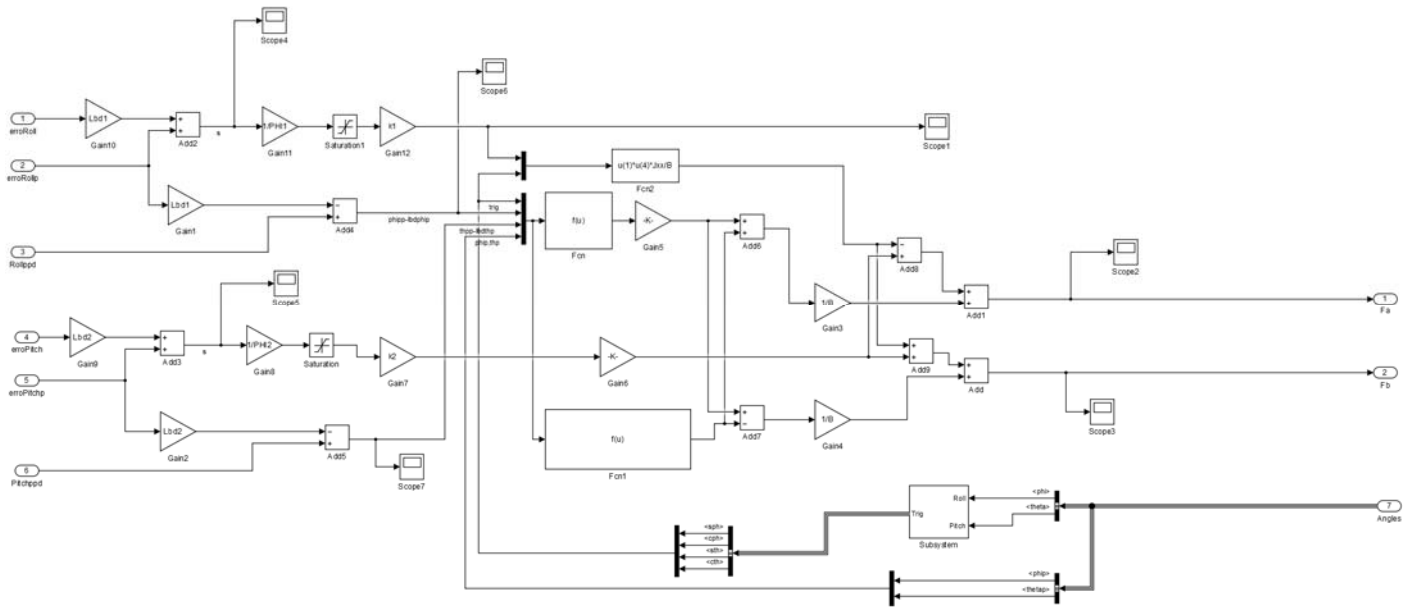
```

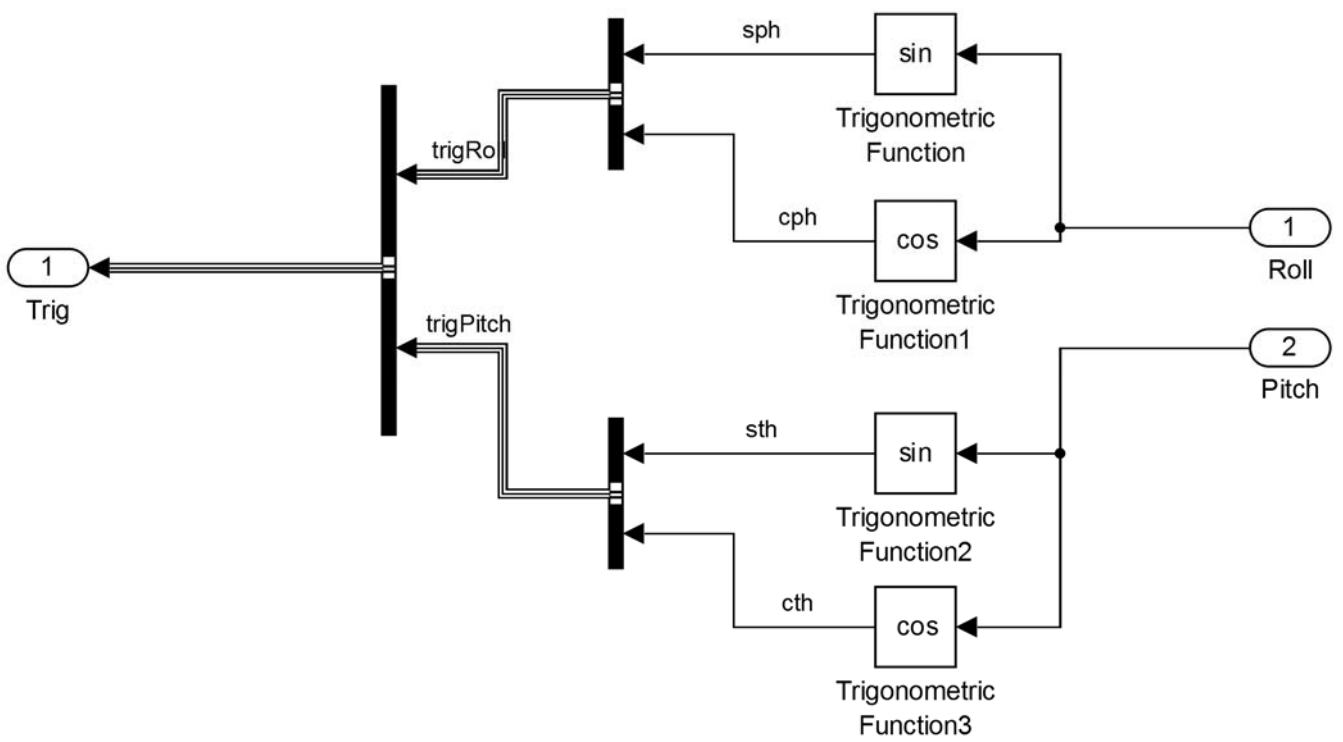
13. Anexo B – Modelo Simulink











Sample Times for 'Dinamica'

Description	Value
Continuous	0
Discrete 1	0.01
Hybrid	Not Applicable