

**DINÂMICA VEICULAR  
METRO-FERROVIÁRIA -  
ESTABILIDADE LATERAL**

**Roberto Spinola Barbosa**

São Paulo, 2016

## 1. INTRODUÇÃO

Em sistemas metro-ferroviários, o direcionamento convencional roda/trilho possui instabilidade lateral que é função da velocidade. Em particular nos Trens de Alta Velocidade (TAV) este fenômeno ocorre de maneira expressiva devido ao fato do amortecimento modal decorrente das propriedades de contato ser inversamente proporcional à velocidade. O rodeiro ferroviário tradicional é dotado de rodas cônicas que, além de suportar a carga vertical do veículo, garante a centralidade em vias retas e permite realizar a inscrição em curvas. Esta propriedade entretanto, impõe ao rodeiro um movimento lateral natural próprio com comprimento de onda definido. Em função da velocidade de tráfego do trem, o movimento repetitivo com comprimento de onda natural próprio que oscila o veículo lateralmente é conhecido como *hunting* ou *lacet* (Barbosa, 1999).

A força de contato roda/trilho é função das propriedades de contato do par de rolamento, depende do micro-eskorregamento (*creep*) no contato e é inversamente proporcional à velocidade. Desta forma o termo dissipativo da equação diferencial, associados à primeira derivada que descreve o movimento do rodeiro é inversamente dependente da velocidade. Para velocidades elevadas o fator de amortecimento modal tende a se reduzir, podendo se anular ou ficar negativo, correspondendo a uma situação de instabilidade. Este limite possui frequência e comprimento de onda próprio (Barbosa, 2004 e 2005).

## 2. ABORDAGEM CINEMÁTICA

Considere um rodeiro em movimento cinemático em torno de um ponto fixo a uma distância  $R$ . Da teoria de curvas planas, a curvatura desta trajetória é expressa pela variação de suas coordenadas no plano descrita por:

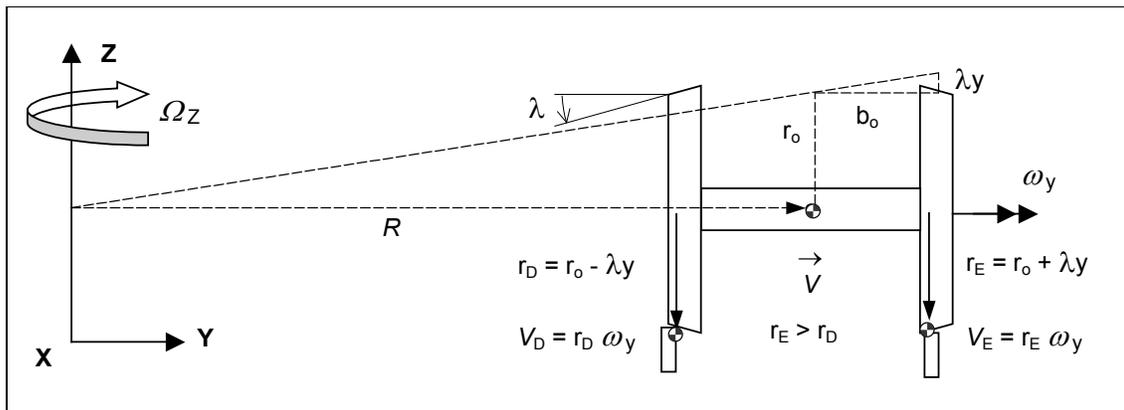
$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Assumindo que a variação é pequena em comparação com a unidade, tem-se aproximadamente que:

$$\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| \cong \kappa = \frac{1}{R} \quad (2)$$

Para um processo de rolamento sem escorregamento, um rodeiro com rodas rígidas, raio nominal  $r_o$ , distância entre rodas  $2b_o$  (bitola) e conicidade de pista de rolamento  $\lambda$ , conforme apresentado na Figura 1, obtêm-se por trigonometria em função do deslocamento lateral  $y$  do rodeiro, uma trajetória circular de raio  $R$ , tal que:

$$\frac{1}{R} = \frac{\lambda y}{b_o r_o} \quad (3)$$



**Figura 1 – Inscrição geométrica do rodeiro na curva**

Substituindo esta relação na expressão da curvatura obtêm-se uma equação cinemática diferencial de segunda ordem em  $x$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\lambda}{b_o r_o} y \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\lambda}{b_o r_o} y = 0 \quad (4)$$

A resolução da equação diferencial de segunda ordem descrita para o movimento lateral é obtida pela hipótese de movimento oscilatório harmônico da forma:

$$y = A \text{sen}(\omega x + \theta) \quad (5)$$

Derivando a expressão duas vezes em relação à posição  $x$ , obtêm-se:

$$\dot{y} = A \omega \cos(\omega x + \theta) \quad (6)$$

$$\ddot{y} = -A \omega^2 \text{sen}(\omega x + \theta) \quad (7)$$

Substituindo na equação diferencial do sistema, obtêm-se:

$$-\omega^2 A \text{sen}(\omega x + \theta) + \frac{\lambda}{b_o r_o} A \text{sen}(\omega x + \theta) = 0 \quad (8)$$

dividindo os termos da expressão anterior por  $A \text{sen}(\omega x + \theta)$ , obtêm-se a frequência natural de movimento do sistema (em radianos por metro):

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{b_o r_o} \quad (9)$$

O comprimento de onda é dado por  $T = 2\pi / \omega$  em metros, resultando na conhecida relação de *Klingel* (1883):

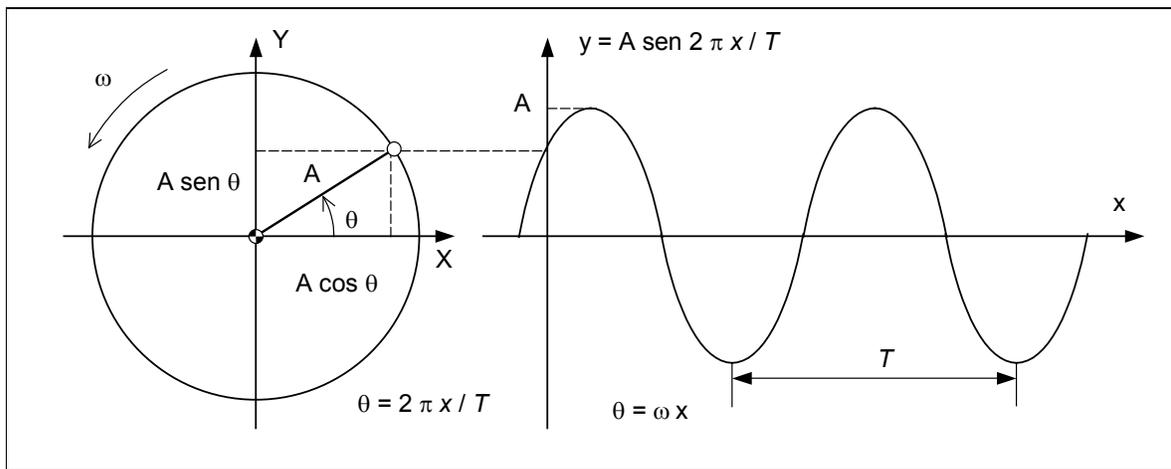
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{b_o r_o}{\lambda}} \quad (10)$$

Como na condição inicial em  $x_0 = 0$  tem-se:

$$y_o = A \text{sen}(\omega x_o + \theta) \quad \text{ou} \quad y_o = A \text{sen} \theta \quad \text{ou} \quad A = y_o / \text{sen} \theta \quad (11)$$

Como a relação entre o comprimento de arco  $\theta$  e o comprimento de onda  $T$  vale  $\theta = 2\pi x / T$ , resulta em

$$y = A \text{sen} \left( 2\pi \frac{x}{T} \right) \quad (12)$$



**Figura 2 – Movimento periódico harmônico**

Para uma velocidade de tráfego  $V$  a frequência circular do movimento é  $F_n = V / T$  (em Hz), obtêm-se portanto:

$$F_n = \frac{V}{T} = \frac{V}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{b_o r_o}} \quad (13)$$

**Exemplo:** Determine o comprimento de onda do movimento de oscilação lateral livre para um rodeiro de raio nominal  $r_o$ , via com bitola  $2b_o$ , com perfil de conicidade da pista de rolamento da roda  $\lambda$ . Determinar a frequência do movimento para velocidade  $V$ .

**Resolução:** da fórmula cinemática de *Klingel* apresentada acima e usando os seguintes valores numéricos:  $r_o = 0,45$  m;  $2b_o = 1,435$  m;  $\lambda = 1/20$ ; resulta em comprimento de onda de  $T = 15,96$  metros. A frequência para velocidade de 80 km/h (22,22 m/s) será de 1,39 Hz.

Para uma conicidade de  $\lambda = 1/40$  resulta  $T = 22,58$  metros e 0,98 Hz.

Para outras bitola típicas tem-se os seguintes resultados:

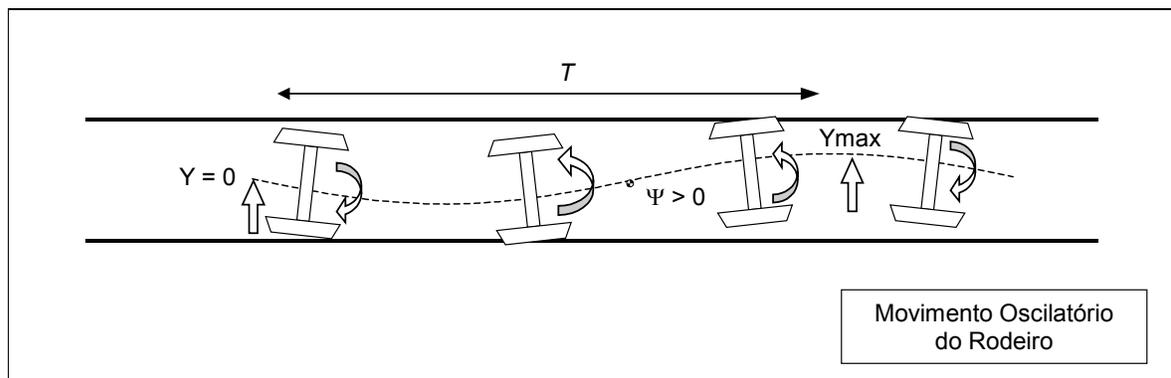
Bitola larga:  $2b_o = 1,6$  m;  $r_o = 0,482$  m;  $\lambda = 1/20 \rightarrow T = 17,45$  metros;

para  $V = 22$  m/s  $\rightarrow F_n = 1,27$  Hz e

Bitola métrica:  $2b_o = 1,0$  m;  $r_o = 0,42$  m;  $\lambda = 1/20 \rightarrow T = 12,87$  metros;

para  $V = 22$  m/s  $\rightarrow F_n = 1,72$  Hz.

Portanto o movimento de oscilação lateral (movimento de *hunting* ou *lacet* segundo *Klingel*, 1883) de rolamento puro é cinemático (depende apenas das dimensões), harmônico, é função da distância ( $x$ ) conforme expressão anterior.



**Figura 3 – Movimento oscilatório do rodeiro (*lacet* ou *hunting*)**

### 3. VELOCIDADE CRÍTICA

Como a roda é cônica, o rodeiro rígido tem a propriedade benéfica de auto-centramento e direcionamento em curvas. Entretanto este aspecto resulta num sistema com oscilação com fator de amortecimento modal que varia com a velocidade (devido ao micro-escorregamento). Desta forma o sistema pode se tornar instável a partir de um valor limítrofe de velocidade (valor crítico). Esta oscilação causa desgastes, desconforto ao passageiro e pode reduzir a segurança. Para a determinação da velocidade crítica é necessário verificar a estabilidade do sistema. Uma das técnicas disponível é analisar o lugar das raízes do polinômio característico do determinante da matriz dinâmica do sistema. Esta técnica é conhecida como método de estabilidade de *Lyapunov* (1857 – 1918).

#### 3.1 Movimento Cinemático do Rodeiro

Quando o rodeiro se desloca lateralmente a conicidade faz com que as velocidades nos pontos de contato de cada roda fiquem diferentes produzindo escorregamento local. As forças são opostas formando um binário que altera atitude angular  $\psi$  do rodeiro (Figura 4).

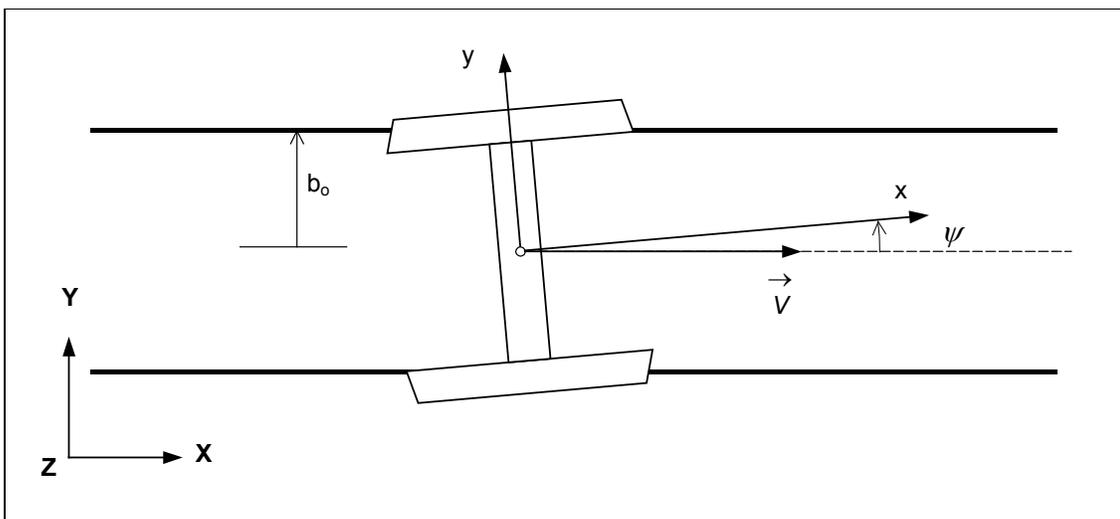
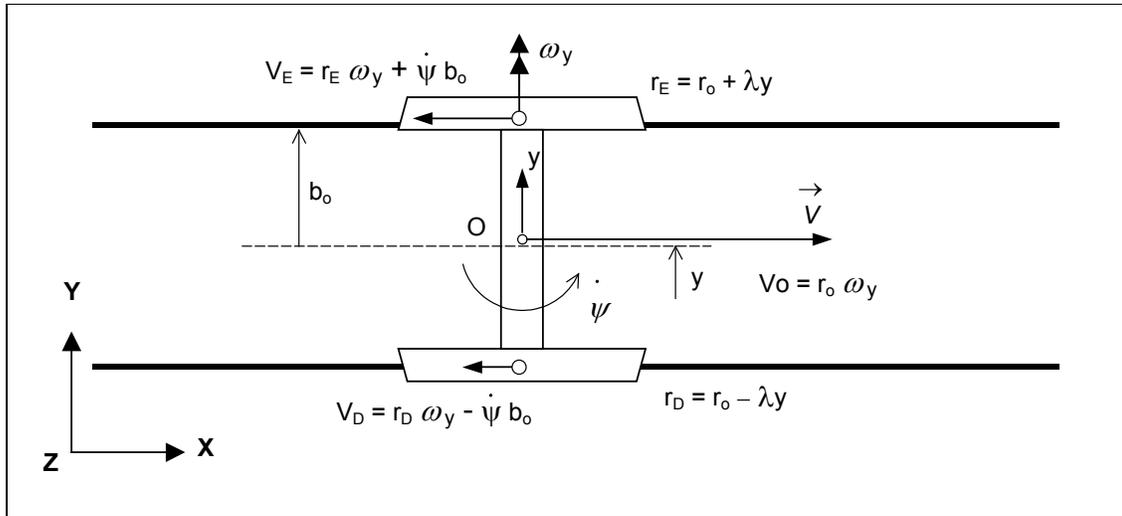


Figura 4 – Atitude do rodeiro

Para rodas de raio nominal  $r_o$  e conicidade  $\lambda$  tem-se para cada roda (esquerda e direita), durante um deslocamento lateral  $y$  do rodeiro, conforme apresentado na Figura 5:

$$r_D = r_o - \lambda y \quad \text{e} \quad r_E = r_o + \lambda y \quad (14)$$



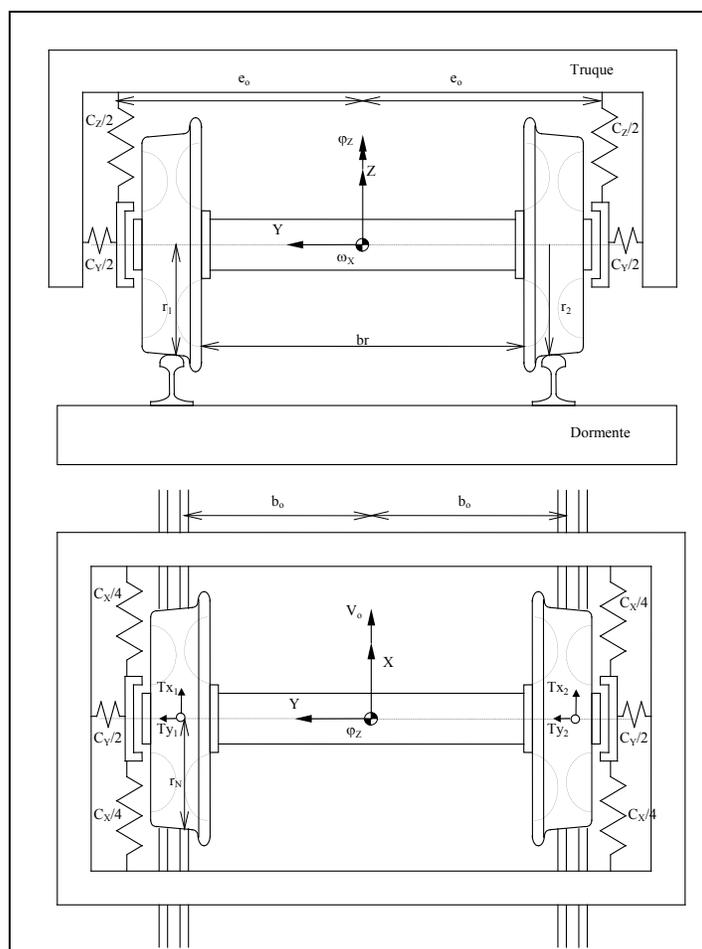
**Figura 5 – Velocidades de translação**

Utilizando a expressão de campo de velocidade pode-se determinar a velocidade em cada ponto de contato na roda (esquerda e direita) em função da velocidade angular de rotação do rodeiro ( $\omega_y$ ) e a variação da sua atitude

### 3.2 Modelo Dinâmico do Rodeiro

Para a determinação dos movimentos relativos tangenciais entre o rodeiro e a via, foi elaborado um modelo matemático do sistema. Uma representação simplificada linear de  $\frac{1}{4}$  do veículo (Barbosa, 1996), pode ser observada na Figura 6. O sistema físico foi descrito com dois graus de liberdade correspondendo ao deslocamento lateral do rodeiro  $u_y$  e posição angular  $\varphi_z$ . O sistema de referência adotado está vinculado à estrutura do veículo (referencial móvel) e

trafega junto a este a uma velocidade constante  $V_o$  alinhado com a via retilínea (portanto o referencial pode ser considerado inercial).



**Figura 6 - Modelo do Truque (2GL)**

Assumindo pequenos deslocamentos angulares e desconsiderando os efeitos inerciais do truque, o conjunto de equações diferenciais de movimento pode ser obtido a partir da aplicação da 2ª lei de *Newton* sobre o rodeiro nas direções dos graus de liberdade utilizando as dimensões ( $e_o$  e  $b_o$ ) e propriedades elásticas ( $c_x$  e  $c_y$ ) mostradas na figura:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & 0 \\ 0 & c_x e_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{y1} + T_{y2} \\ b_o (T_{x1} - T_{x2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ T_\phi \end{Bmatrix} \quad (15)$$

De maneira simplificada e linear, pode-se exprimir as forças no contato nas direções longitudinal  $T_{xi}$  e lateral  $T_{yi}$  como sendo proporcionais às velocidades relativas  $v_x$  e  $v_y$  (micro-escorregamento) entre as superfícies de contato roda/trilho. As constantes de proporcionalidade,  $k_x$  e  $k_y$ , relacionam os escorregamentos entre as superfícies da seguinte forma:

$$T_{x_{1,2}} = k_x \frac{v_{x_{1,2}}}{V_o} \text{ e } T_{y_{1,2}} = k_y \frac{v_{y_{1,2}}}{V_o} \quad (16)$$

O escorregamento linearizado para o caso ferroviário ( $v_x$  e  $v_y$ ), considerando a pista de rolamento da roda com inclinação constante  $\lambda$  e incluindo o escorregamento de pivotamento  $v_{sp}$ , (Barbosa, 2002), podem ser resumidas na forma matricial geral conforme apresentado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_{sp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta_0 / r_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -r_0 \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{V_o} \begin{bmatrix} 0 & -e_0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda r_0 \\ 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon r_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_g \\ \varphi_g \end{Bmatrix} + \frac{1}{V_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\delta_0 r_0 / e_0 & r_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_g \\ \dot{\varphi}_g \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Substituindo na formula anterior

$$T_{x2} = -T_{x1} = k_x \left( \frac{\lambda u_y}{r_0} + \frac{\dot{\varphi}_z b_o}{V_o} \right) \text{ e } T_{y1} = T_{y2} = k_y \left( -\varphi_z + \frac{\dot{u}_y}{V_o} \right) \quad (18)$$

onde  $u_y$  e  $\varphi_z$  são os graus de liberdade do rodeiro,  $v_g$  e  $\varphi_g$  são o alinhamento e inclinação da via e respectivas derivadas,  $\lambda$  a conicidade do rodeiro,  $\delta$  a inclinação do plano de contato da roda. Substituindo as expressões acima nas duas equações diferenciais de segunda ordem que descreve o movimento obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{V_o} \begin{bmatrix} 2k_y & 0 \\ 0 & 2k_x b_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & -2k_y \\ 2k_x \lambda b_o / r_0 & c_x e_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ T_\varphi \end{Bmatrix} \quad (19)$$

que correlaciona os graus de liberdade com os efeitos externos. Observa-se que o termo da primeira derivada é inversamente proporcional a velocidade  $V_o$  do veículo. Assim, o amortecimento modal se reduz em função do aumento da velocidade.

Colocando o sistema na forma de espaço de estados  $x = [u_y \quad \varphi_z \quad \dot{u}_y \quad \dot{\varphi}_z]$  (duas coordenadas e suas respectivas derivadas) obtêm-se dois conjuntos duplos de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{\varphi}_z \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_y/m & -2k_y/m & 2k_y/V_o m & 0 \\ 2k_x \lambda b_o / \Theta r_o & c_x e_o^2 / \Theta & 2k_y / m V_o & 2k_x b_o^2 / \Theta V_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \varphi_z \\ \dot{u}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 1/\Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_y \\ T_\varphi \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ou na forma reduzida de primeira ordem em espaço de estados:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (21)$$

Os auto-valores do sistema, que são números complexos conjugados aos pares e função inversa da velocidade, a luz do teorema de *Lyapunov*, estabelecem que:

- Se todos os autovalores do sistema de primeira ordem tiverem parte real negativa o sistema é dito ESTÁVEL;
- Se pelo menos um dos autovalores do sistema tiver parte real positiva o sistema é dito INSTÁVEL.

A velocidade crítica é aquela para a qual, pelo menos uma das raízes tiver parte real nula (as demais negativas). Ou seja fisicamente para um veículo em velocidade inferior ao valor crítico, uma perturbação que retire o sistema do equilíbrio desenvolverá oscilação de forma decrescente. Para velocidade acima do valor crítico, a oscilação ocorrerá de forma crescente.

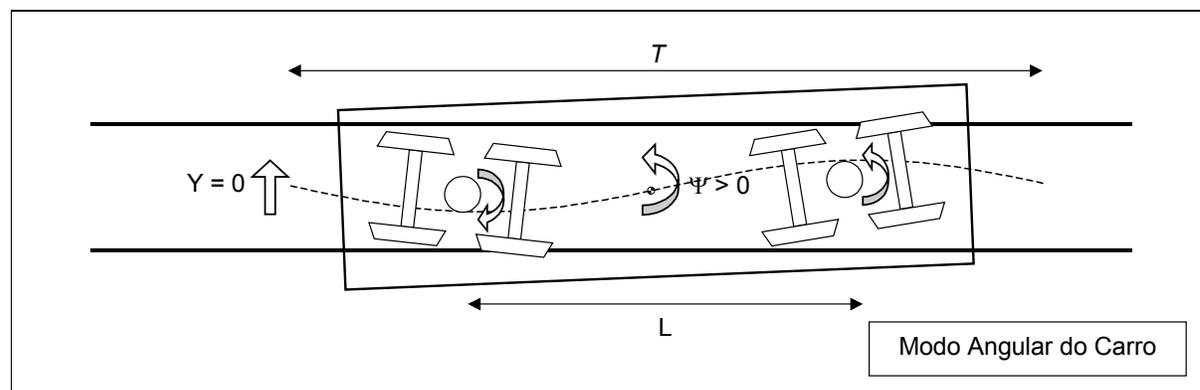
De forma análoga a interpretação da estabilidade pode ser feita pela observação do fator de amortecimento obtido dos auto-valores. Quando o fator de amortecimento, que é função do

inverso da velocidade, fica negativo o sistema torna-se instável como pode ser observado no artigo da Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (*Barbosa e Costa, 1996*). Observando os auto-vetores pode-se apreciar o ângulo de fase entre os graus de liberdade (deslocamento lateral e ângulo de direção) e a variação do comprimento de onda do movimento cinemático do rodeiro sobre os trilhos.

### 3.3 Modos de Movimento do Veículo

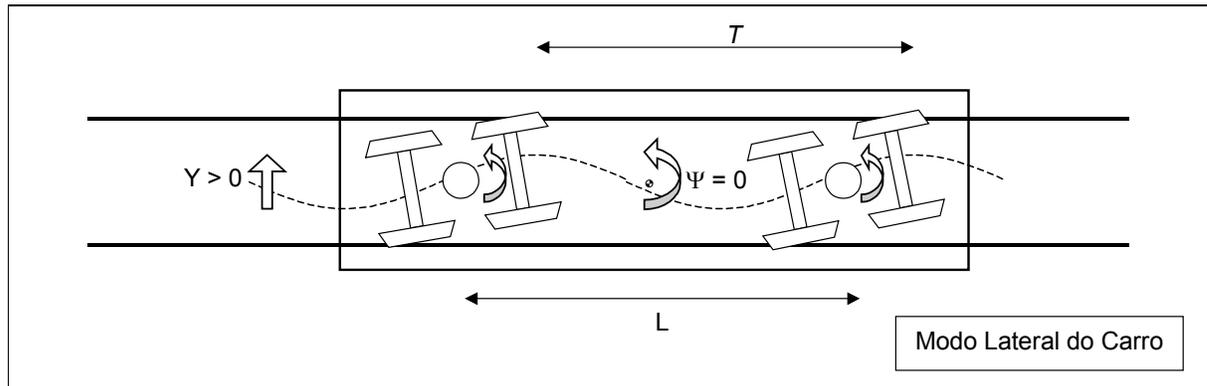
O veículo completo seja ele carro de passageiros, vagão de carga ou locomotiva, é composto de diversas partes interligadas. Cada grau de liberdade tem movimento relacionado aos outros devido aos vínculos de interligação que resulta em modos de movimentos acoplados. Como um veículo é composto em geral de uma caixa e dois truques, estes elementos descrevem os modos principais. Considerando os movimento da caixa, dois modos ficam discriminados:

- Modo angular da caixa (truques em oposição de fase), conforme apresentado na Figura 7
- Modo lateral da caixa (truques em fase), conforme apresentado na Figura 8



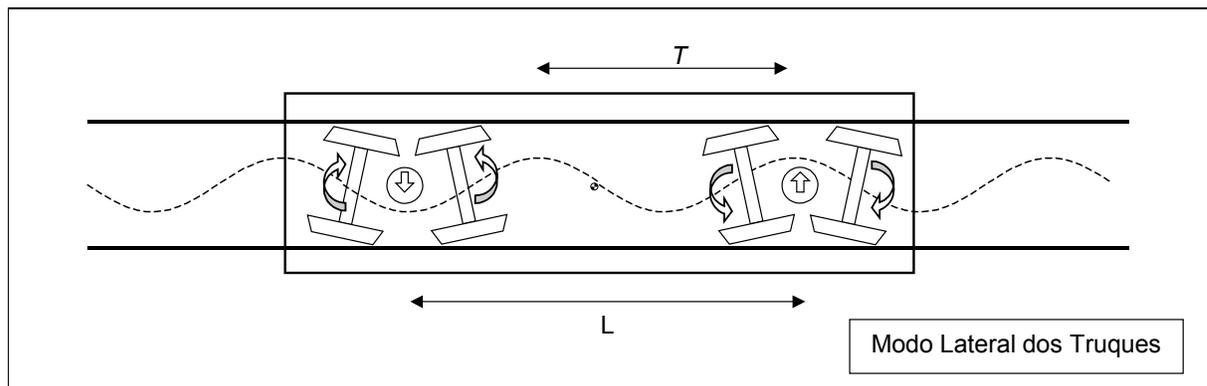
**Figura 7 – Movimento de Angular da Caixa (Truque em oposição de fase)**

Cada modo possui comprimento de onda próprio e intensidade que é função dos amortecimentos modais daquele modo.

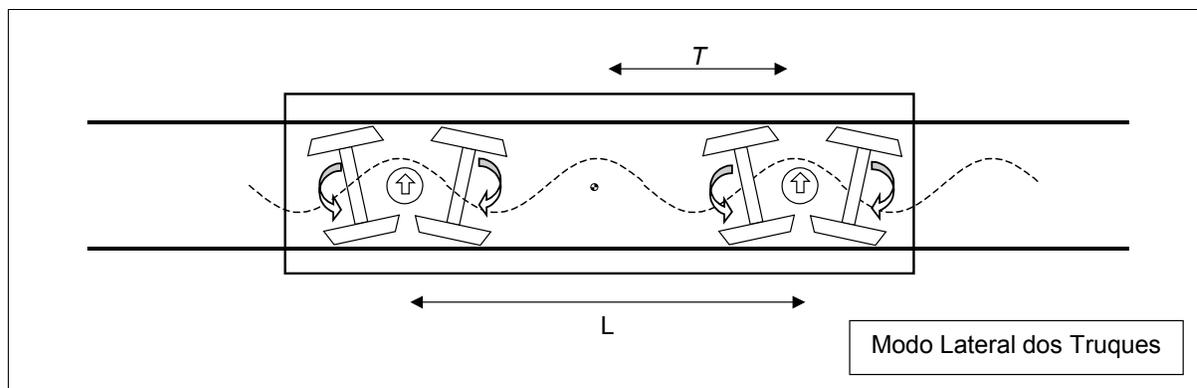


**Figura 8 – Movimento de Lateral da Caixa (truques em fase)**

Considerando adicionalmente os movimentos dos trilhos em relação a caixa, mais dois modos ficam revelados: O primeiro corresponde ao deslocamento lateral dos trilhos em oposição de fase, conforme apresentado na Figura 9. O segundo, correspondente aos movimentos de deslocamento lateral dos trilhos em fase, conforme apresentado na Figura 10



**Figura 9 – Deslocamento lateral dos trilhos em oposição de fase**

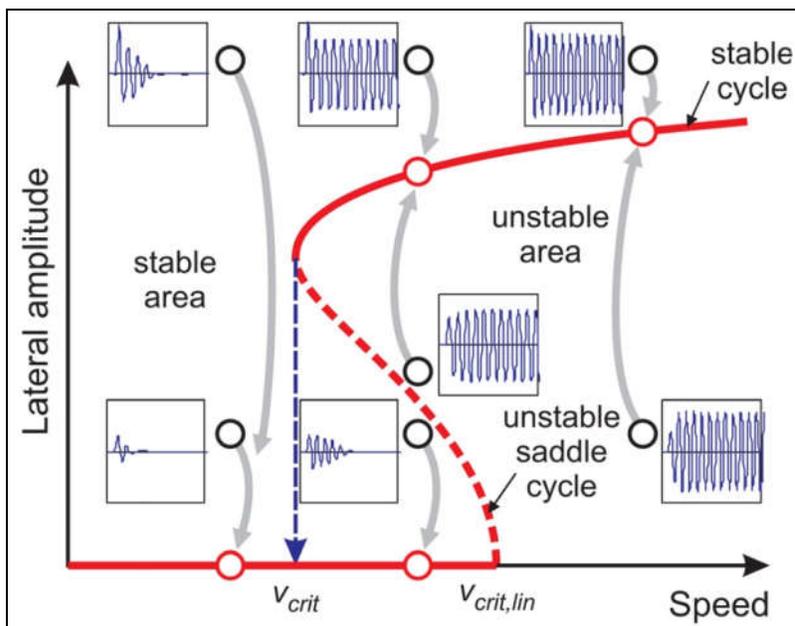


**Figura 10 – Deslocamento lateral dos truque em fase**

Outros modos devido aos movimentos dos truques podem estar presentes, mas apenas os principais foram apresentados.

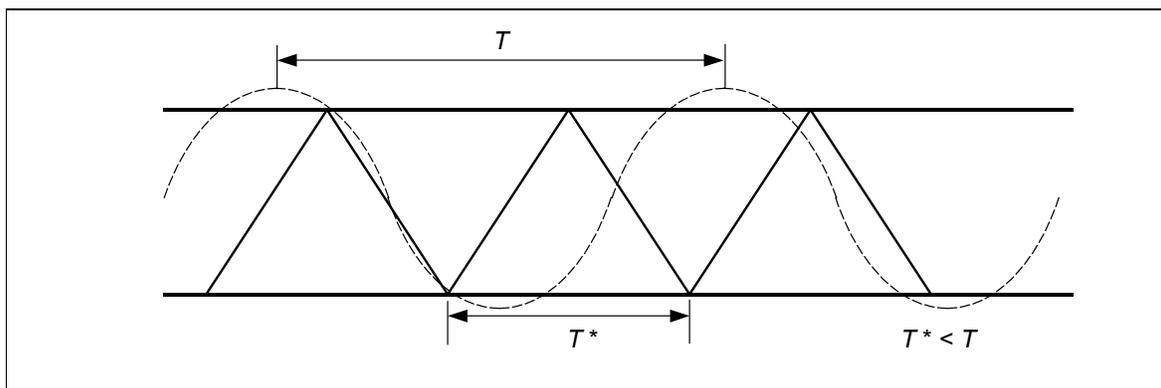
#### **4. SISTEMA NÃO LINEAR**

Como a roda possui pista de rolamento com conicidade variável (devido a flange ou eventual desgaste) o veículo real é de fato não linear. Neste caso o comportamento depende da magnitude da excitação (velocidade) e características do sistema (sub ou super-critico) resultando em movimentos distintos estáveis e instáveis (bifurcações) conforme mostrado na ilustração da Figura 11. Para mais informações consulte o artigo de *Polash* (2012)



**Figura 11 – Ciclo Limite (Polash, 2012)**

Como no caso real a conicidade da roda não é linear e a folga lateral é limitada, o movimento do rodeiro fica contido até o encosto do flange da roda na face lateral do boleto do trilho. Nesta situação o comprimento de onda do movimento fica reduzido ( $T^* < T$ ) transformando o movimento harmônico do abordagem linear em um zig-zag (*hunting, lacet*), conforme mostrado na Figura 12.



**Figura 12 – Movimento lateral não linear**

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barbosa R. S. (2005) Safety Criterion for Railway Vehicle Derailment. Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Heavy Haul Conference, International Heavy Haul Association – IHHA, pp. 477-484, Sponsored by CVRD, Rio de Janeiro, Brasil.
- [2] Barbosa, R. S. (2004) A 3D Contact Force Safety Criterion for Flange Derailment of a Railway Wheel”. Journal of Vehicle System Dynamics, 2004, Vol. 42, n° 5, pp. 289-300.
- [3] Barbosa, R. S. (1999) Aplicação de Sistemas Multicorpos na Dinâmica de Veículos Guiados. Tese de Doutorado na Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, pp. 273.
- [4] Barbosa, R. S., Costa, A., (1996) Dinâmica do Rodeiro Ferroviário, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas - ABCM, Vol.: 18, n° 4, pp. 318-329.
- [5] *Klingel*, (1883) Über den Lauf der Eisenbahnwagen auf gerader Bahn. Organ Fortsch Eisenb-wes 38, pp. 113-123.
- [6] Oldrich Polach, Ingo Kaiser (2012) Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. Vol.: 7, n° 4, 041005 (8 pages) DOI:10.1115/1.4006825.
- [7] Barbosa R. S. (2002) Propriedades de Contato de Rolamento de Sistema Veicular. II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM 2002 João Pessoa, Paraíba pp. 14