

---

# DINÂMICA DO RODEIRO FERROVIÁRIO

## RAILWAY WHEELSET DYNAMICS

### Roberto Spinola Barbosa

Instituto de Pesquisas Tecnológicas - IPT  
Divisão de Tecnologia de Transportes  
Cx. Postal 0141, CEP. 01064-970, São Paulo, S.P., Brasil.  
E. Mail: spinola@ipt.br

### Álvaro Costa Neto

Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP  
Departamento de Engenharia Mecânica - DEM  
Cx. Postal 359, CEP. 13560-970, São Carlos, S.P., Brasil.  
E. Mail: costa@sc.usp.br

Artigo publicado na Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (RBCM) da ABCM, Vol. XVIII, nº 4, pp. 318-329, São Paulo, Brasil, 1996. Trabalho apresentado no DINAME-97 - 7<sup>th</sup> International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM), pp. 229, Angra dos Reis, Rio de Janeiro, 1997.

### Resumo

Foi elaborado um modelo linear do rodeiro ferroviário parametrizado em função da velocidade para análise de propriedades e avaliação do comportamento dinâmico. O primeiro modo de vibrar corresponde ao movimento de passeio lateral do rodeiro em relação a via. Observa-se nas auto-propriedades que este modo possui comprimento de onda de movimento no espaço aproximadamente constante e fortemente dependente da conicidade da pista de rolamento da roda. O amortecimento modal é inversamente proporcional à velocidade e fica negativo para velocidades elevadas tornando o sistema instável. O segundo modo de vibrar, sobreamortecido, possui, a baixas velocidades, raízes reais distintas inversamente proporcionais à velocidade e fortemente acoplado com a rigidez das forças de contato. A simulação deste modelo permite visualizar o comportamento dinâmico do rodeiro em sua interação com a via férrea para um percurso com trajetória variável.

### Abstract

A velocity parametrized railway wheelset model was produced for dynamic behaviour analysis. Lateral wheelset excursion related to the track is the first vibration mode. It is observed in the eigen properties that the wave length of this movement is approximately constant and dependent on the wheel conicity. Modal damping of the first mode is inversely proportional to velocity and becomes negative for high speed resulting on system instability. At low speed, real, distinct and overdamped second mode eigen-values are inversely proportional to velocity and strongly coupled with contact stiffness. Dynamic wheelset behaviour trough a variable track trajectory may be observed during model simulation.

## 1. Introdução

A inscrição de um rodeiro ferroviário em curvas se faz com o auxílio de um inteligente sistema dinâmico estabelecido pela conicidade da pista de rolamento das rodas que produzem diferentes raios de rolamento para cada roda em função do deslocamento lateral do rodeiro.

Um observador trafegando junto ao rodeiro em uma trajetória retilínea percebe que a via férrea se desloca lateralmente quando passa sobre uma trajetória curva. Este deslocamento lateral relativo faz com que o raio de rolamento da roda externa, devido à conicidade, seja maior do que o raio da roda interna à curva. Desta forma, como a rotação angular do rodeiro é idêntica para as duas rodas (rodeiro considerado rígido não havendo portanto movimento rotacional diferencial entre as rodas) haverá produção de forças longitudinais diferenciadas entre os pontos de contato de cada roda. Estas forças tenderão a produzir um ângulo de ataque do rodeiro em relação à direção da via férrea buscando a inscrição do rodeiro na curva.

Este efeito restituidor garante a centralização do rodeiro quando trafegar em trajetória retilínea pelas irregularidades da via férrea. Induz também a contribuição individual de cada roda na geração das forças laterais (centrípetas) necessárias para inscrição de trajetória curvilínea (melhorando inclusive a segurança contra o descarrilamento) garantindo a guiagem automática do rodeiro em curvas. Esta propriedade entretanto resulta num sistema dinâmico com frequência natural definida, amortecimento modal inversamente proporcional à velocidade e podendo apresentar velocidade crítica acima da qual o sistema torna-se instável.

## 2. Equacionamento

O rodeiro ferroviário pode ser representado pelo sistema mecânico mostrado na Figura 1. O sistema de referência utilizado está vinculado à estrutura do truque e trafega junto a este a uma velocidade constante  $V_0$ . O rodeiro foi modelado com dois graus ( $n=2$ ) de liberdade: deslocamento lateral do rodeiro em relação à via  $u_y$  e rotação angular  $\phi_z$  na direção  $z$  conhecido como ângulo de yaw.

A obtenção das equações de movimento deste sistema pode ser feita de várias maneiras. Para modelos simples com poucos graus de liberdade, as equações podem ser escritas manualmente sem muita dificuldade. Entretanto, para modelos mais complexos e extensos, esta atividade torna-se desgastante e passível de erros. Programas computacionais para Sistemas Multicorpos (*Multi Body Systems* - MBS) permitem a geração automática das equações de movimento para sistemas complexos e não lineares com facilidade, rapidez e segurança.

Neste caso as equações são obtidas manualmente, assumindo pequenos deslocamentos e desconsiderando os efeitos inerciais do truque, a partir da aplicação da 2ª lei de *Newton* sobre o rodeiro nas direções dos graus de liberdade, como pode ser observado na equação (1).

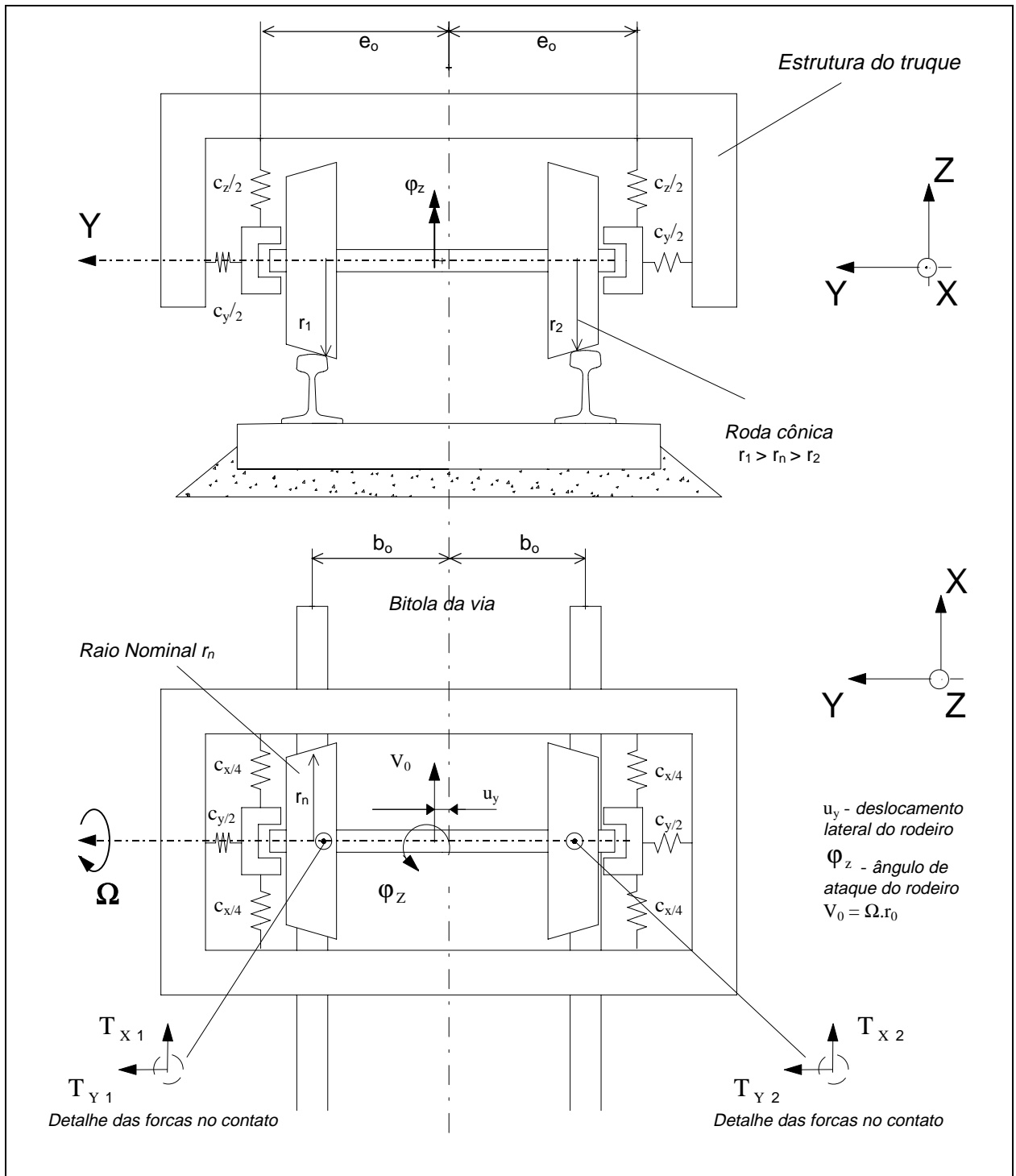


Figura 1 - Elementos do Rodeiro Ferroviário

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & 0 \\ 0 & c_x e_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{y1} + T_{y2} \\ b_o (T_{x1} - T_{x2}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ T_\phi \end{Bmatrix} \quad (1)$$

As forças desenvolvidas no contato  $\mathbf{T}_{xi}$  e  $\mathbf{T}_{yi}$  entram do lado direito da equação como forçamento externo. Entretanto, devido a mecânica de contato, estas forças são proporcionais à velocidade relativa entre as superfícies de contato, dependente dos graus de liberdade e suas derivadas podendo, portanto, tornarem-se parte integrante do sistema passando para o lado esquerdo da equação geral.

De maneira simplificada conforme a teoria de mecânico de contato, pode-se exprimir as forças nas direções longitudinal  $T_{xi}$  e lateral  $T_{yi}$  como sendo proporcionais às velocidades relativas  $\vartheta_{xi}$  e  $\vartheta_{yi}$  entre as superfícies de contato roda/trilho. As constantes de proporcionalidade,  $k_x$  e  $k_y$ , que relacionam os micro-escorregamentos entre as superfícies (conhecidos como creep) e as forças são expressas da seguinte forma:

$$T_{x1} = k_x \frac{\vartheta_{x1}}{V_o} \quad e \quad T_{x2} = k_x \frac{\vartheta_{x2}}{V_o} \quad (2)$$

$$T_{y1} = k_y \frac{\vartheta_{y1}}{V_o} \quad e \quad T_{y2} = k_y \frac{\vartheta_{y2}}{V_o} \quad (3)$$

Os valores de micro-escorregamento resultantes das velocidades relativas no contato são função das coordenadas do sistema e suas derivadas, da conicidade da pista de rolamento  $\lambda$ , raio nominal de rolamento  $r_o$ , semi-distância dos pontos de contato  $b_o$ . Como  $r_1 = r_o + \lambda u_y$  e  $r_2 = r_o - \lambda u_y$  as forças são obtidas pelas expressões a seguir:

$$T_{x1} = -k_x \left( \frac{\lambda u_y}{r_o} + \frac{\dot{\phi}_z b_o}{V_o} \right) \quad e \quad T_{x2} = +k_x \left( \frac{\lambda u_y}{r_o} + \frac{\dot{\phi}_z b_o}{V_o} \right) \quad (4)$$

$$T_{y1} = T_{y2} = k_y \left( -\phi_z + \frac{\dot{u}_y}{V_o} \right) \quad (5)$$

Substituindo estes valores na equação (1) e rearranjando os termos de forma matricial, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{V_o} \begin{bmatrix} 2k_y & 0 \\ 0 & 2k_x b_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & -2k_y \\ 2k_x \lambda b_o / r_o & c_x e_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ T_\phi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Observa-se que após a inclusão das forças de contato aparece o termo de primeira derivada do vetor de coordenadas, revelando que o sistema possui amortecimento relacionado com as propriedades de contato e inversamente proporcional à velocidade.

A equação 6 é válida apenas para trajetórias retilíneas e pequenos deslocamentos (angular e lateral). Durante a inscrição de uma curva, a trajetória do rodeiro se altera em função da sollicitação externa imposta pela variação da posição da via no plano, combinado com as características de resposta do próprio sistema. Considerando a situação de regime da inscrição

em uma curva, a força centrípeta aplicada sobre o rodeiro e o torque proveniente da rotação deste em relação ao centro da curva, correspondente as força externas  $F_y$  e  $T_\phi$ , e aparecem do lado direito da equação.

Na situação de regime, durante a inscrição de uma curva de raio  $R$ , a solicitação externa sobre o rodeiro é composta de duas parcelas: aceleração centrípeta expressa por  $V^2/R$  e o torque produzido pela velocidade angular de regime do rodeiro  $\Psi = V_o / R$ , conforme figura 2.

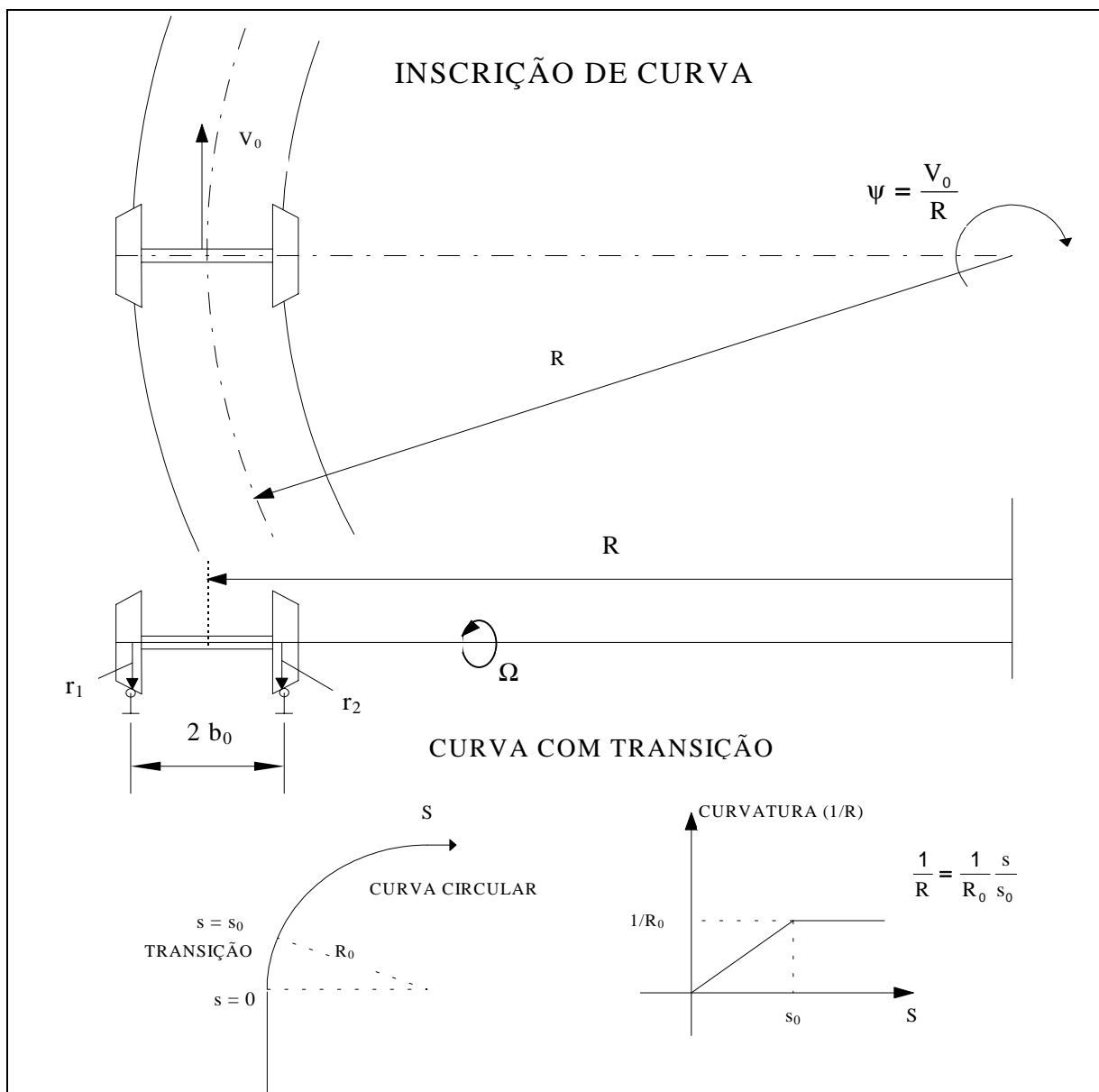


Figura 2 - Descrição de Curva Circular e de Transição

Como o rodeiro é considerado rígido, o acréscimo de velocidade relativa para cada roda devido à velocidade angular na curva, é dado por:  $\vartheta_{x1} = V_o b_o / R$  e  $\vartheta_{x2} = -V_o b_o / R$  (pois  $\vartheta_x = \Psi b_o$ ). A força centrípeta e o torque decorrente do contato, normalizadas por  $V_o$ , são introduzidas do lado direito da equação 6 resultando na equação de movimento do sistema mecânico em curvas:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{V_o} \begin{bmatrix} 2k_y & 0 \\ 0 & 2k_x b_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & -2k_y \\ 2k_x \lambda b_o / r_o & c_x e_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ T_\phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} mV_o^2 / R \\ 2k_x b_o^2 / R \end{Bmatrix} \quad (7)$$

adotando  $r^t = \{u_y \ \phi_z\}^t$ ,  $f^t = \{(F_y + mV_o^2 / R) \ (T_\phi + 2k_x b_o^2 / R)\}^t$  e resumindo a expressão matricial, obtém-se:

$$[M] \{\ddot{r}\} + \frac{1}{V_o} [C] \{\dot{r}\} + [K] \{r\} = \{f\} \quad (8)$$

### 3. Solução do Sistema de Equações

A solução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem é feita com a redução do grau do sistema passando para a representação de estado de espaço com  $x^t = \{\dot{u}_y \ \dot{\phi}_z \ u_y \ \phi_z\}^t$ , sua respectiva derivada  $\dot{x}^t = \{\ddot{u}_y \ \ddot{\phi}_z \ \dot{u}_y \ \dot{\phi}_z\}^t$  e  $u^t = \{f \ 0\}^t$ , resultando num sistema contínuo de ordem  $2n$  do tipo  $\dot{x} = A x + B u$ . Neste caso obtém-se:

$$\{\dot{x}\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{V_o} [M]^{-1} [C] & -[M]^{-1} [K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \{x\} + \begin{bmatrix} [M]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix} \{u\} \quad (9)$$

Para sistemas dinâmicos homogêneos com coeficientes constantes a solução temporal contínua direta (Gash, 1987), que leva o vetor de estado  $\{x\}_{t_o}$  de condições iniciais no tempo  $t_o$ , para o tempo  $t$  qualquer, é dada por:

$$\{x\}_t = [\Phi]_{(t-t_o)} \{x\}_{t_o} \quad (10)$$

A forma construtiva da matriz Fundamental  $[\Phi]$  para sistemas amortecidos é expressa por seus autovalores arranjados de forma matricial multiplicados pela matriz modal:

$$[\Phi]_{(t-t_o)} = [R] [\Lambda]_{(t-t_o)} [R]^{-1} \quad (11)$$

onde a matriz diagonal  $[\Lambda]$  é constituída da exponencial dos autovalores  $\lambda$  como segue:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & : & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & e^{\lambda_{2n}(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

e a matriz modal  $[\mathbf{R}]$  constituída dos  $2n$  autovetores  $\{v\}$  da seguinte forma:

$$[\mathbf{R}] = [\{r_1\} \quad \{r_2\} \quad \dots \quad \{r_n\}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_{2n} v_{2n} \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

A solução completa do sistema de equações diferenciais ordinárias não homogêneas pode ser obtida de forma contínua no tempo com auxílio da integral de convolução para uma excitação externa  $\{u\}$  qualquer a partir das condições iniciais  $\{x\}_{(t_0)}$  do sistema por:

$$\{x\}_{(t-t_0)} = [\Phi]_{(t-t_0)} \{x\}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t [\Phi]_{(t-\tau)} [\mathbf{B}] \{u\}_{(\tau)} d\tau \quad (14)$$

A representação em tempo discreto da equação 14, assumindo o interesse apenas nos instantes de tempo  $T_k = k T$  de período  $T = t - t_0$  igualmente espaçado com excitação constante, terá a forma:

$$\{x\}_{(t_{k+1})} = [\Phi]_{(T)} \{x\}_{(t_k)} + [\mathbf{H}]_{(T)} \{u\}_{(t_k)} \quad (15)$$

para  $t_0 = 0$  tem-se :  $[\Phi]_{(T)} = e^{[A]T}$  e  $[\mathbf{H}]_{(T)} = \int_0^T e^{[A]\tau} d\tau [\mathbf{B}] = [A]^{-1} ([\Phi]_{(T)} - [I]) [\mathbf{B}]$

resultando na expressão final completa na forma matricial utilizada para o cálculo do vetor de estado no instante  $t_{k+1}$  a partir do estado do instante  $t_k$  com a matriz dinâmica do sistema  $[A]$ , matriz de transição  $[\Phi]$  e matriz  $[\mathbf{B}]$  de combinação de aplicação do forçamento externo  $\{u\}$  (conforme proposto em Ogata, 1993):

$$\{x\}_{(t_{k+1})} = [\Phi]_{(T)} \{x\}_{(t_k)} + [A]^{-1} ([\Phi]_{(T)} - [I]) [\mathbf{B}] \{u\}_{(t_k)} \quad (16)$$

#### 4. Análise das Propriedades do Sistema

O cálculo das auto-propriedades da matriz dinâmica  $[A]$  do sistema, de ordem  $2n$ , permite obter as características naturais e modos de vibrar do sistema parametrizado em função da velocidade  $V_0$ . Observa-se na figura 4a os autovalores do primeiro modo, pares complexos conjugados, apresentados no plano complexo para diferentes valores de velocidade. Este modo corresponde ao movimento de passeio lateral do rodeiro conhecido como *Lacet* ou *Hunting* (ver desenho da figura 3a).

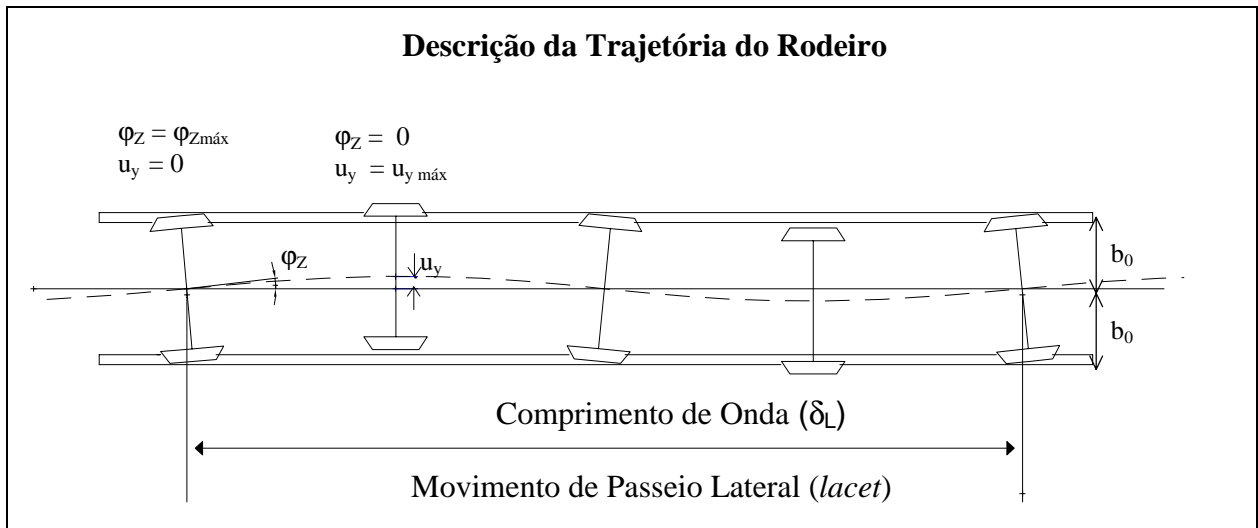


Figura 3a - Modo de Movimento Lateral (*Lacet*)

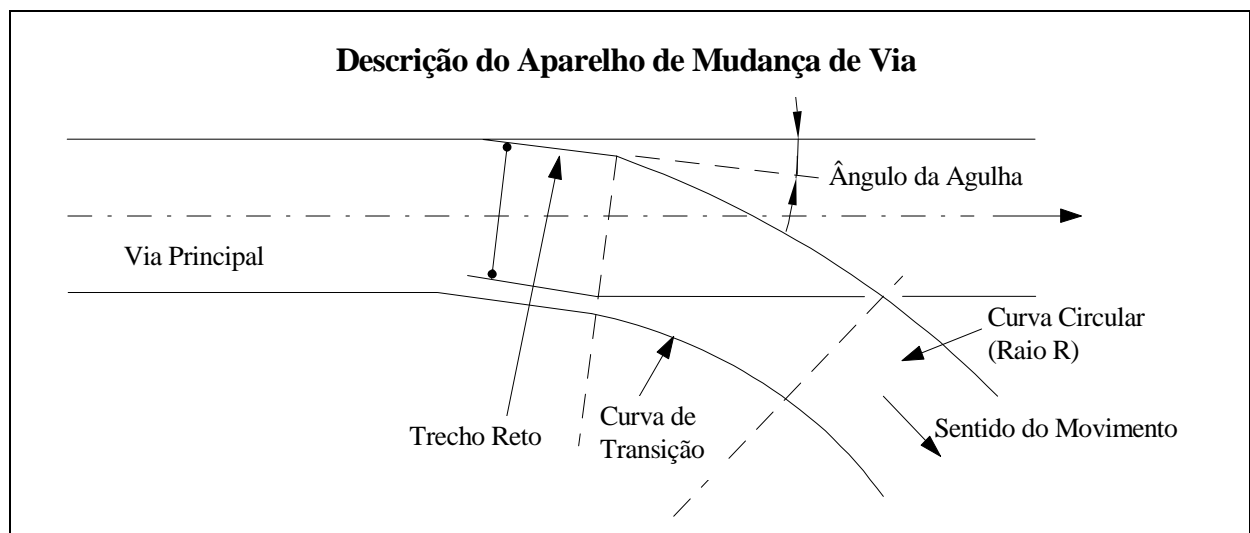


Figura 3b - Descrição Geométrica do Aparelho de Mudança de Via

A frequência natural deste modo é linearmente proporcional à velocidade conforme apresentado na figura 5a, o que corresponde a um comprimento de onda de movimento lateral  $\delta_L$  aproximadamente constante (figura 6b - 11,5 metros para este caso). O fator de amortecimento  $\zeta$  possui valores em torno de 0,24 atenuando-se com o aumento da velocidade. A 60 m/s o autovalor apresenta parte real positiva (fator de amortecimento menor que zero) caracterizando a velocidade crítica acima da qual o sistema torna-se instável, conforme apresentado nas Figuras 4a e 5b.

Inspecionando os autovetores deste modo, observa-se que possuem valores complexos, o que representa movimentos relativos com ângulo de fase. O atraso do ângulo de *yaw* ( $\varphi_z$ ) em relação ao movimento lateral na direção lateral  $y$  ( $u_y$ ) é de aproximadamente  $\pi/2$  (Tabela 1 - 104,19° e



Figura 6a ). Portanto quando o movimento lateral é máximo, o ângulo de *yaw* é próximo de zero (ver na figura 3a).

Coordenadas	Autovetor 1º Modo	Autovetor 2º Modo
Deslocamento Lateral ( $u_y$ )	- 0,0174 + i 0,0353	- 0,0045 + i 0,0002
Ângulo de yaw ( $\varphi_z$ )	+ 0,0212 + i 0,0045	- 0,0003 + i 0,0027
Ângulo de Fase	104,19°	93,42°

Tabela 1 - Autovetores dos Modos para Velocidade de 40 m/s

O segundo modo possui um par de autovalores reais distintos (sistema sobreamortecido) até 20 m/s conforme apresentado na Figura 4b. A partir desta velocidade os autovalores passam a ter parte imaginária diferente de zero, formando um par complexo conjugado sub-amortecido (Figura 4b). Em baixas velocidades, o módulo dos autovalores reais (correspondente a constantes de tempo) são inversamente proporcionais à velocidade (Figura 7a). A partir de 20 m/s a frequência natural amortecida cresce rapidamente para valores idênticos ao primeiro modo (Figura 7b). O fator de amortecimento deste modo é elevado chegando a 0,97 para velocidade de 60 m/s (Figura 8a). O ângulo de fase observado na Figura 8b, cresce rapidamente com a velocidade, sendo 93,42° para velocidade de 40 m/s (Tabela 1).

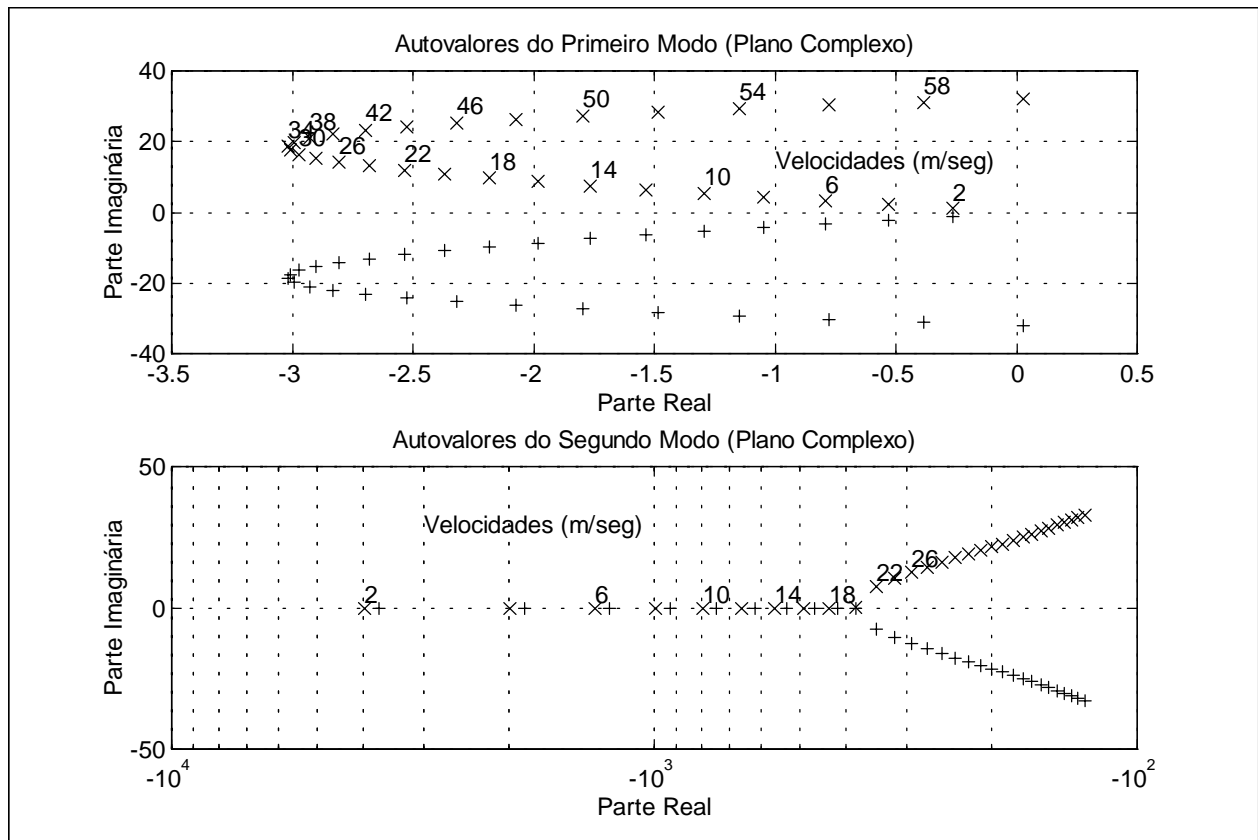


Figura 4 - a) Autovalores do Primeiro Modo (x,+)  
b) Autovalores do Segundo Modo (x, +)

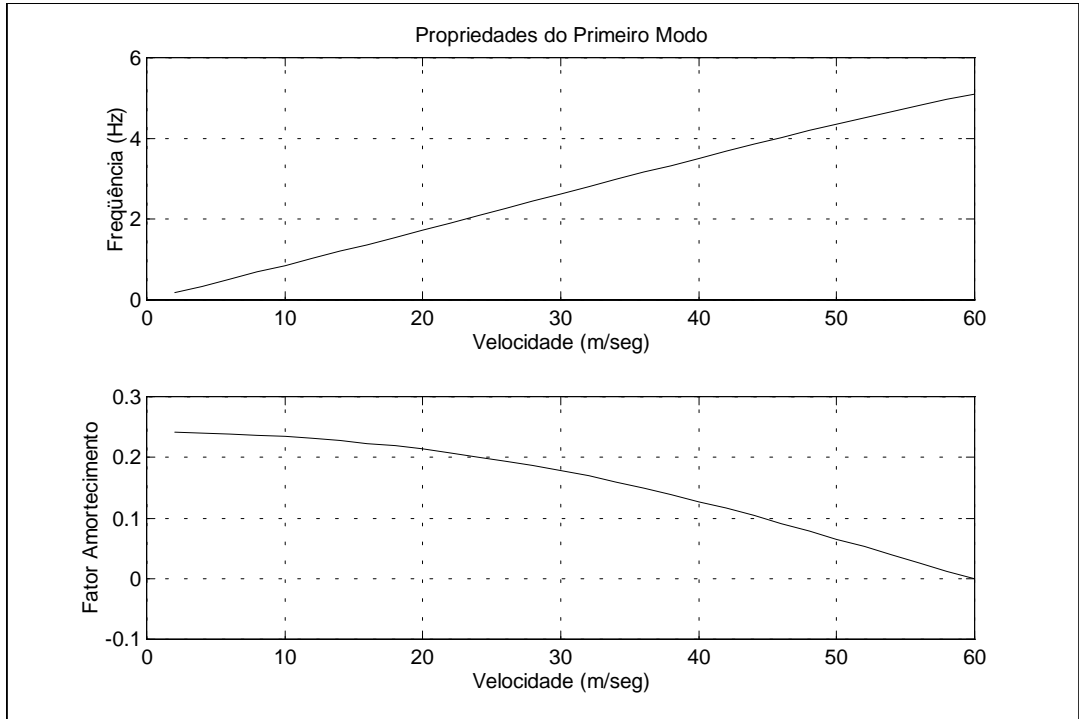


Figura 5 - a) Frequência Natural do Primeiro Modo  
b) Fator de Amortecimento do Primeiro Modo

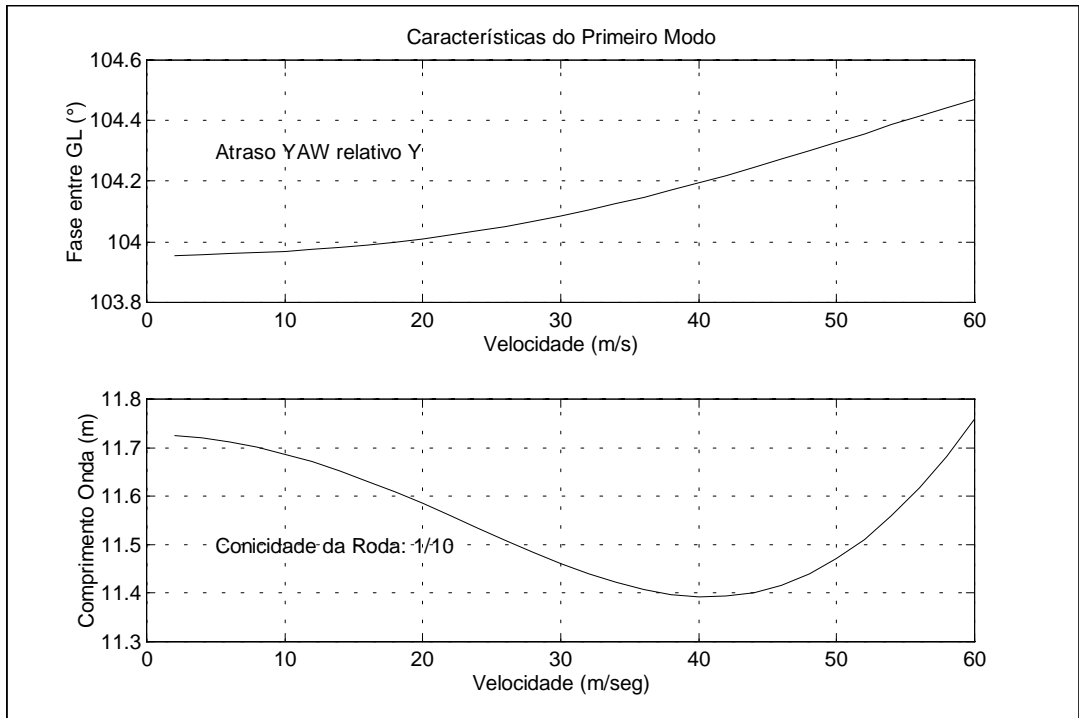


Figura 6 - a) Ângulo de Fase do Primeiro Modo  
b) Comprimento de Onda do Movimento Lateral

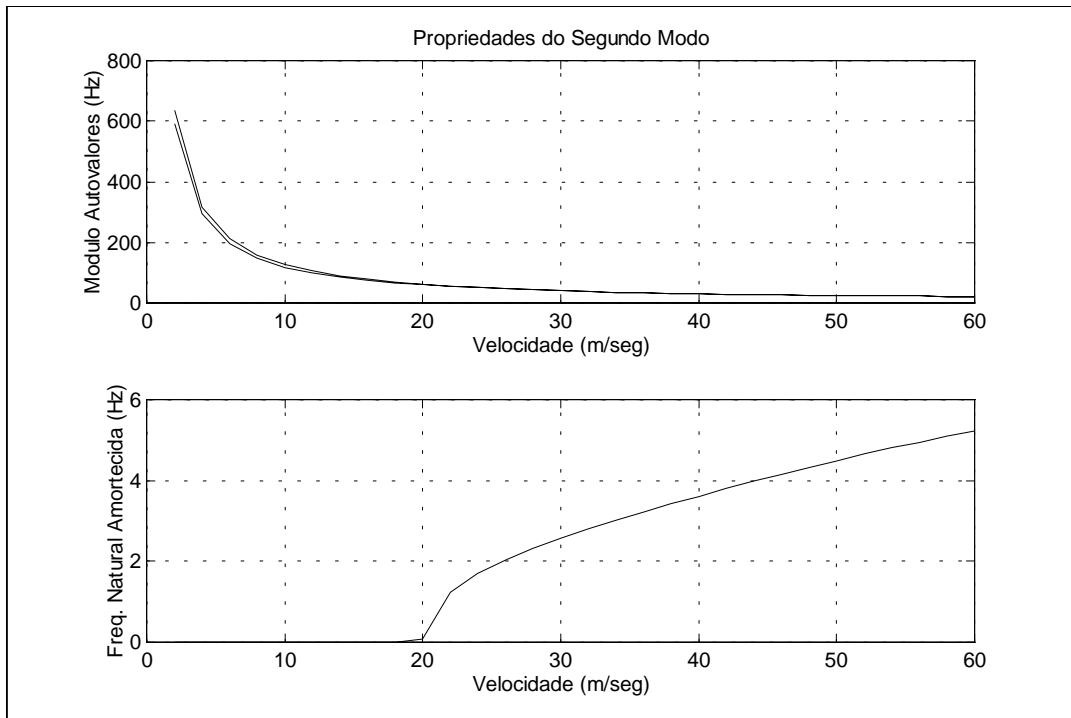


Figura 7 - a) Módulo dos Autovalores do Segundo Modo  
b) Freqüência Natural Amortecida do Segundo Modo

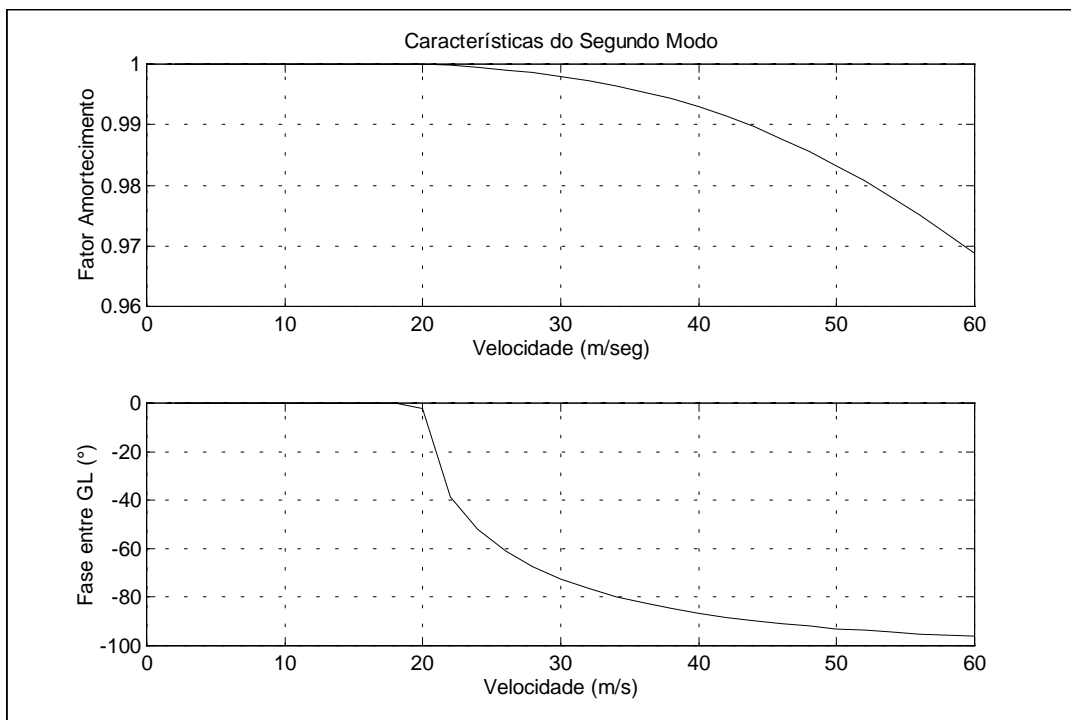


Figura 8 - a) Fator de Amortecimento do Segundo Modo  
b) Ângulo de Fase entre os Graus de Liberdade

## 5. Avaliação da Sensibilidade

A equação 7 foi parametrizada em  $V_0$  onde foram analisadas as auto-propriedades. Entretanto outros parâmetros possuem variações, inclusive não lineares, do sistema mecânico real. Observando o perfil da roda constata-se que a conicidade varia bastante próximo da região do friso. Adicionalmente a rigidez das forças de contato roda/trilho é influenciada, entre outros fatores, pelas proporções da elipse de contato ( $a/b$ ). Torna-se conveniente o conhecimento das tendências das auto-propriedades devido a variação destes valores.

Para um determinada velocidade constata-se, por inspeção da matriz dinâmica do sistema  $[A]$ , que para o primeiro modo, devido ao aumento da conicidade da roda  $\lambda$  ou aumento da rigidez do contato ( $k_x$  e  $k_y$ ):

- Frequência natural deste modo aumenta
- Velocidade crítica diminui
- Fator de amortecimento diminui
- Comprimento de onda diminui

O comprimento de onda não se altera com a variação da rigidez. Entretanto, o módulo da raiz do segundo modo aumentou bastante especialmente em baixas velocidades (diminuiu a constante de tempo). A conicidade afeta pouco as características do segundo modo.

## 6. Simulação

A partir do modelo construído é possível simular, utilizando algoritmo apropriado (Barbosa, 1993), o comportamento do rodeiro na inscrição de uma curva ou em um aparelho de mudanças de via (AMV) com variação da trajetória da via. Esta é a situação onde se encontra maior adversidade para inscrição do rodeiro e local de elevada incidência de acidentes.

Um AMV é constituído basicamente por três elementos primários de geometria: trechos de reta, curva de transição e curva circular. Ao inscrever o AMV o rodeiro se depara inicialmente com uma mudança angular repentina da direção da via (ângulo de *kick*). Este trecho corresponde à agulha, que nos modelos mais simples de AMV é um segmento reto de trilho que desloca a direção da via lateralmente iniciando o desvio. Após este trecho inicia-se a curva de transição com variação linear de curvatura (clotoide - ver Fig 2), variando de zero a  $1/R$  e, finalmente, o trecho em curva circular de raio  $R$ . A Figura 3b apresenta de forma esquemática os elementos do AMV.

Uma aproximação simplificada da entrada da agulha do AMV (trecho reto com ângulo  $\alpha$  de *kick*) pode ser feita por um pequeno trecho de grande curvatura, resultando num pulso de curvatura de valor  $R = V_0 \Delta t / \alpha$  (onde  $\Delta t$  = intervalo de cálculo).

O resultado da simulação do comportamento do rodeiro entrando em um AMV pode ser visualizado na Figura 9. São apresentados o deslocamento lateral do rodeiro em relação ao centro da via ( $Y$ ) e o ângulo de ataque do rodeiro em relação à direção da via (ângulo de *yaw*).

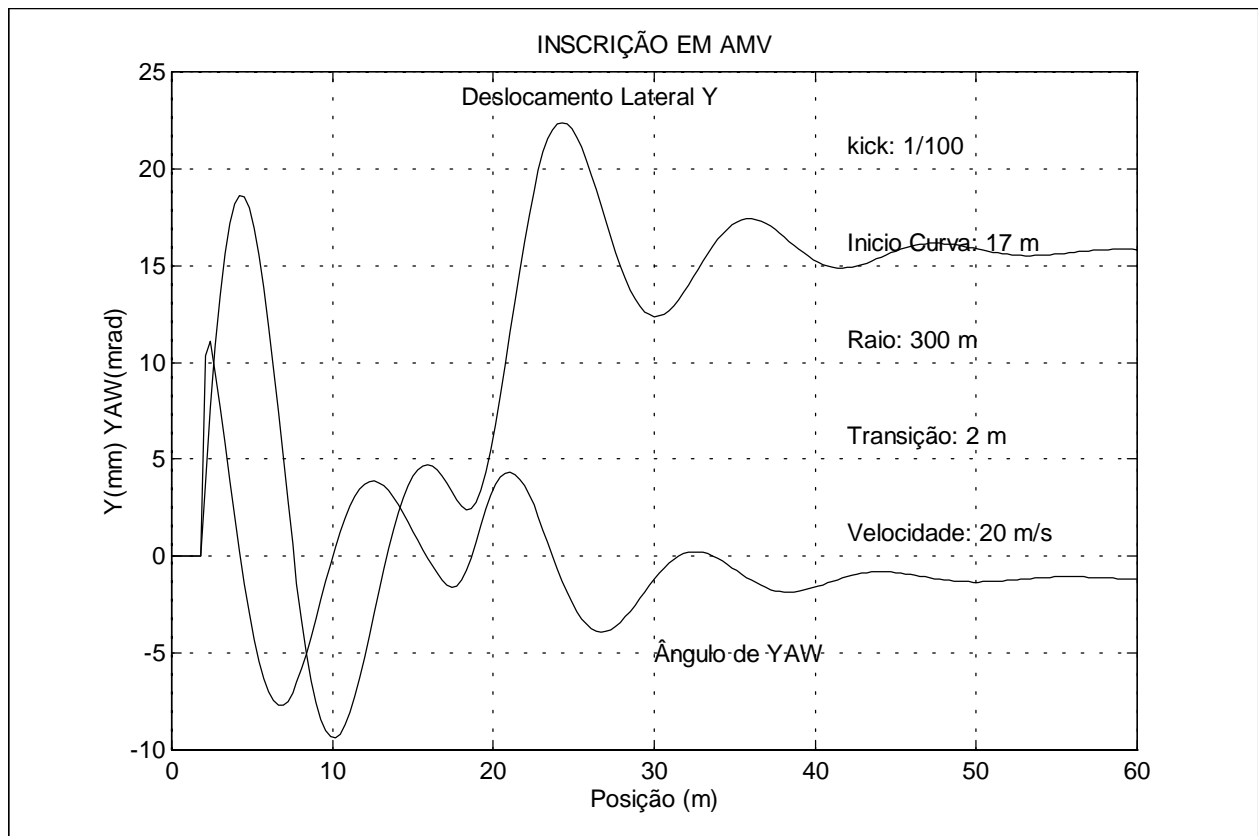


Figura 9 - Resultado da Simulação da Dinâmica do Rodeiro

Observa-se durante o início da inscrição do AMV (localizado à 2 metros da posição inicial) a mudança repentina do ângulo de ataque devido a agulha e do deslocamento lateral. Em seguida o rodeiro reverte o deslocamento lateral buscando a centralização, atingindo deslocamento lateral de 14,8 mm no trecho reto da agulha a 4,5 metros do início da simulação.

A partir de 17 metros inicia-se a curva de transição de 2 metros em seguida a curva circular. O valor máximo de 15,5 mm de deslocamento lateral ocorre na posição de 24,7 metros, estabilizando posteriormente a oscilação em torno do valor de equilíbrio de 10,95 mm de deslocamento lateral na curva circular de 300 metros de raio.

## 7. Conclusões

Foram apresentados os elementos mecânicos para elaboração do modelo linear do rodeiro ferroviário. As forças no contato roda/trilho, fundamentais para a representatividade do sistema, foram modeladas e incluídas nas equações. As auto-propriedades do sistema parametrizado em função da velocidade  $V_0$  foram calculadas e analisadas.

O primeiro modo de movimento com frequência baixa corresponde ao passeio lateral do rodeiro em relação à via. Este modo possui comprimento de onda de movimento no espaço aproximadamente constante para a faixa de velocidades investigada, sendo fortemente influenciado pela conicidade  $\lambda$  da pista de rolamento da roda. O amortecimento modal apresenta valores decrescentes em função da velocidade, tornando-se menor que zero para velocidades acima de 60 m/s, o que corresponde a um sistema instável, definindo-se uma velocidade crítica.

O segundo modo, sobreamortecido, apresenta raízes reais distintas com módulo inversamente proporcional à velocidade e fortemente dependente da rigidez  $k_x$  e  $k_y$  do contato. A partir de 20 m/s as raízes tornam-se complexas conjugadas (sub-amortecido) e com valor de frequência natural amortecida que se aproxima do primeiro modo em alta velocidade (Figuras 5a e 7b).

A simulação da inscrição do rodeiro em via com trajetória variável, permite observar o comportamento dinâmico do rodeiro. O cálculo dos movimentos permite identificar os locais de maior deslocamento lateral e ângulos máximos. Apesar de simplificado, este modelo permite visualizar o comportamento do rodeiro na sua interação com a via para percurso com trajetórias variáveis como é o caso de AMV's. Desta forma é possível investigar o comportamento dinâmico do rodeiro em vias curvas gerando subsídio para análise, concepção e projeto de AMV's.

A análise do sistema linear permite identificar o substrato das características do sistema dinâmico como preparação para implementação do modelo tridimensional completo não linear utilizando a técnica e programas de Sistemas Multicorpos (MBS), previsto como atividade futura dos autores.

## Referências

- BARBOSA, Roberto Spinola **Estudo da Dinâmica Longitudinal do Trem** Dissertação de Mestrado, Orientador Prof. Dr. Hans Ingo Weber, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, São Paulo, Brasil, Setembro 1993.
- COSTA, A. **Application of Multibody Systems (MBS) Techniques to Vehicle Modelling** PhD. Thesis. University of Warwick, England, 1992.
- COSTA, A., JONES, R. P. **Automotive Vehicle Chassis Simulation for Motion Control Studies Using Multibody Systems (MBS) Modelling Techniques**. S.A.E. Technical Papers Series nº 921443E, 14 p., São Paulo, Brasil, 1992.
- COSTA, A., Barbosa R. S., Weber, H. I., Pascal J. P. **Um Programa Modular de Sistemas Multicorpos (MBS) para a Simulação de Veículos e Composições Ferroviárias** Seminário Franco Brasileiro de Transportes Públicos, São Paulo, Junho 1994.
- GASCH, R. Knothe, K. **Strukturdynamik Diskrete Systeme**. Springer-Verlag, Vol. 1, 1987.
- OGATA, K. **Discrete-Time Systems** Prentice-Hall 2ª Edição, 1993.

## Dados do sistema:

Conicidade da Roda	$\lambda = 0,10;$
Raio Nominal da Roda (36")	$r_o = 0,4572 \text{ m};$
Semi Larg. Rodeiro (bitola via)	$b_o = 0,7175 \text{ m};$
Semi-distância da Susp. Primária	$e_o = 0,61 \text{ m};$
Massa do Rodeiro	$m = 1751 \text{ kg};$
Momento de Inércia do Rodeiro	$\Theta = 800 \text{ kg m}^2;$
Rigidez Long. Susp. Pri	$c_x = 4,5687 \times 10^6 \text{ N/m};$
Rigidez Lat. Susp. Prim.	$c_y = 1,00 \times 10^2 \text{ N/m};$
Rigidez Long. Contato	$k_x = 6,20 \times 10^6 \text{ N};$
Rigidez Lat. Contato	$k_y = 6,50 \times 10^6 \text{ N};$
Rigidez Torc. Susp Prim.	$k_{zz} = 1,70 \times 10^6 \text{ N m/rad}.$

## Nomenclatura

$n$	ordem do sistema;
$u_y$	coordenada de deslocamento lateral;
$\varphi_z$	coordenada angular;
$m$	massa do rodeiro;
$\Theta$	momento de inércia;
$T_{xi}$	Força de Contato;
$\dot{\vartheta}_{xi}$	Velocidades relativas;
$\lambda$	conicidade da pista de rolamento da roda;
$r$	vetor de coordenadas;
$V_o$	velocidade de translação;
$[M]$	matriz de massa;
$[C]$	matriz de amortecimento;
$[K]$	matriz de rigidez;

$f$	forçamento externo;
$\{x\}$	representação vetorial de estado de espaço;
$\{x\}^t$	vetor de estado transposto;
$\{\dot{x}\}$	1ª derivada do vetor de estado;
$\{f\}$	vetor de força externa;
$\{v\}$	autovetor do sistema $2n$ ;
$[R]$	matriz Modal;
$\lambda_i$	$i$ -éssimo autovalor;
$[A]$	matriz dinâmica do sistema;
$[I]$	matriz identidade;
$[\Lambda]$	matriz diagonal da exponencial dos autovalores;
$[\Phi]$	matriz Fundamental;
$t$	tempo;
$\Delta t$	intervalo de cálculo;
$\alpha$	ângulo de kick;
$T$	intervalo de tempo;
$t_k$	tempo no $k$ -éssimo intervalo de tempo $T$ ;
$[u]$	vetor de forçamento externo;
$\zeta$	fator de amortecimento;
$\delta_L$	comprimento de onda;
$\int e^{a x} dx = a^{-1} e^{a x}$	resultado de integral envolvendo exponencial