

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**PME3200 - Mecânica II**

João Pedro Ribeiro - 11213165

Lucas Carvalho - 11850649

Sofia Yoshimura - 12545654

Professor: Dr. Roberto Spinola Barbosa

**RESUMO TEÓRICO DO SEMINÁRIO**

Apresentação do Efeito Dzhanibekov



São Paulo (SP), Junho de 2023

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>4</b>
2.1	Matriz de Inércia . . . . .	4
2.2	Teorema do Momento Angular . . . . .	4
2.3	Ângulos e Equações de Euler . . . . .	5
<b>3</b>	<b>O Efeito Dzhanibekov</b>	<b>6</b>
3.1	História . . . . .	6
3.2	Descrição Dinâmica do Efeito . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Modelando o problema e o sistema</b>	<b>6</b>
4.1	Equações de Estado de Movimento . . . . .	7
4.2	Descrição da Modelagem . . . . .	8
4.3	Condições de Simulação . . . . .	9
4.4	Resultados Obtidos Numericamente . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Aplicações e Curiosidades</b>	<b>10</b>
5.1	Teorema da Raquete de Tênis . . . . .	10
5.2	Estabilidade de Satélites . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Conclusões e Comentários Finais</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Referências</b>	<b>11</b>

## Resumo

O presente relatório tem como objetivo apresentar o levantamento dos conteúdos desenvolvidos para a apresentação teórica do Efeito Dzhanibekov, que consiste na rotação caótica de um objeto em três dimensões. Para a análise deste fenômeno, foi necessário estudar a Matriz de Inércia e suas diversas propriedades, como o momento de inércia e o produto de inércia. Além disso, foi realizada a aplicação dos ângulos de Euler, que permitem a descrição da orientação e rotação de um corpo rígido em três dimensões, para o estudo da dinâmica dos corpos que correspondem aos pressupostos previstos para validar as condições do efeito. Assim, a partir da compreensão desses conceitos teóricos, torna-se possível entender as condições necessárias para a ocorrência do Efeito Dzhanibekov e explicar as características observadas em experimentos realizados em condições de microgravidade.

**Palavras-chave:** Matriz, Ângulos, Dinâmica, Movimento, Rotação

## 1 Objetivos

O estudo realizado, em conjunto com as conclusões do presente relatório objetivam:

1. Conhecer e aplicar o Efeito Dzhani­bekov sob os conceitos elementares de dinâmica dos corpos rígidos, explorando a aplicação de conceitos desenvolvidos na teoria.
2. Traçar paralelos entre o fenômeno estudado e algumas aplicações práticas na ciência e engenharia, que possibilitem ter uma noção prática do seu funcionamento.

## 2 Fundamentos Teóricos

### 2.1 Matriz de Inércia

A matriz de inércia é uma ferramenta matemática importante na dinâmica dos corpos rígidos que descreve a distribuição de massa de um objeto rígido em relação a seus eixos de rotação. Ela é uma matriz simétrica 3x3 que representa a inércia do objeto em torno de seus eixos principais.

A matriz de inércia pode ser calculada a partir das propriedades geométricas e de massa do objeto, e permite calcular o momento angular e a energia cinética do objeto em rotação em relação a qualquer eixo.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & -\lambda_{xy} & -\lambda_{xz} \\ -\lambda_{yx} & \lambda_{yy} & -\lambda_{yz} \\ -\lambda_{zx} & -\lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, os elementos diagonais ( $\lambda_{xx}$ ,  $\lambda_{yy}$  e  $\lambda_{zz}$ ) representam os momentos de inércia principais do objeto em relação a seus eixos principais de rotação. Os elementos fora da diagonal ( $\lambda_{xy}$ ,  $\lambda_{xz}$  e  $\lambda_{yz}$ ) representam a distribuição de massa do objeto em relação aos eixos principais. A matriz é simétrica, o que significa que  $\lambda_{xy} = \lambda_{yz}$ ,  $\lambda_{xz} = \lambda_{zx}$  e  $\lambda_y = \lambda_{zy}$ .

Algumas propriedades gerais:

1. Simetria: A matriz de inércia é simétrica, o que significa que seus elementos em relação à diagonal principal são iguais. Isso ocorre porque a distribuição de massa do objeto é simétrica em relação aos seus eixos principais de rotação.
2. Momentos de inércia principais: Os elementos diagonais da matriz de inércia representam os momentos de inércia principais do objeto em relação a cada um dos eixos principais de rotação. Esses momentos de inércia são medidas da resistência do objeto em relação à aceleração angular ao redor desses eixos.
3. Produto de inércia: Os elementos fora da diagonal principal da matriz de inércia são chamados de produtos de inércia. Eles representam a influência da distribuição assimétrica de massa do objeto nos momentos de inércia principais. Os produtos de inércia são importantes para descrever a resposta do objeto a rotações em torno de diferentes combinações de eixos.
4. Propriedades de rotação: Com base nos momentos de inércia principais, é possível determinar as propriedades de rotação do objeto, como o eixo de rotação principal e os valores dos momentos de inércia ao redor desse eixo. Essas informações são cruciais para entender a dinâmica de rotação do objeto.
5. Transformações de coordenadas: A matriz de inércia pode ser afetada por transformações de coordenadas, como rotações ou translações do sistema de referência. Nesses casos, é necessário usar técnicas de transformação adequadas para calcular a matriz de inércia na nova configuração.

### 2.2 Teorema do Momento Angular

O momento angular é uma grandeza física que descreve a quantidade de rotação de um objeto em torno de um eixo de rotação. É definido como o produto vetorial do vetor posição de uma partícula em relação ao eixo de rotação pelo seu momento linear, resultando em uma grandeza vetorial com magnitude e direção.

Na ausência de torque externo, o momento angular é uma quantidade conservada, o que significa que a magnitude e direção do momento angular total de um sistema fechado permanecem constantes.

A expressão matemática para o momento angular de um sistema de partículas é dada por:

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (1)$$

Onde  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  é o vetor posição da  $i$ -ésima partícula em relação ao ponto O, e  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  é o momento linear da  $i$ -ésima partícula. O símbolo  $\times$  representa o produto vetorial entre os vetores  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  e  $\tilde{\mathbf{p}}_i$ .

No caso de um corpo rígido, utiliza-se a matriz de inércia do corpo em relação ao seu centro de massa para descrever o momento angular. Nesse caso, a expressão é simplificada para:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{J}_O \cdot \tilde{\omega} \quad (2)$$

Onde  $\mathbf{J}_O$  é a matriz de inércia do corpo em relação ao ponto O, e  $\tilde{\omega}$  é a velocidade angular do corpo.

O teorema do momento angular descreve a relação entre a variação do momento angular e o torque resultante que atua em um sistema de partículas. A partir da derivada da equação anterior, supondo o polo O como sendo o próprio centro de massa, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \mathbf{M}_O \quad (3)$$

Onde  $\frac{d}{dt}$  representa a derivada em relação ao tempo,  $\mathbf{H}_O$  é o momento angular total em relação ao ponto O, e  $\mathbf{M}_O$  é o torque resultante aplicado ao sistema. Esse teorema estabelece que a taxa de variação do momento angular em relação ao ponto O é igual ao torque resultante aplicado ao sistema.

### 2.3 Ângulos e Equações de Euler

Os ângulos de Euler são um conjunto de três ângulos que descrevem a orientação de um corpo rígido em relação a um sistema de referência fixo. Os três ângulos são: rotação em torno do eixo z (ângulo de guinada ou yaw), rotação em torno do eixo y (ângulo de inclinação ou pitch) e rotação em torno do eixo x (ângulo de rolamento ou roll).

$$R = R_x(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\gamma) \quad (4)$$

O efeito giroscópico é um fenômeno físico que ocorre quando um objeto em rotação é submetido a uma mudança em sua orientação. O efeito é causado pela conservação do momento angular, que faz com que o objeto resista a qualquer tentativa de mudar sua direção de rotação.

Quando um objeto gira em torno de um eixo, ele tende a permanecer girando nessa mesma direção, mesmo quando uma força externa é aplicada a ele. Esse efeito pode ser observado em diversos sistemas, como giroscópios utilizados em navegação e estabilização de veículos, ou em brinquedos que giram em torno de um eixo.

Os ângulos de Euler podem ser utilizados para descrever a rotação de um objeto em relação a um sistema de referência fixo, o que permite prever e entender o efeito giroscópico que ocorre quando o objeto é submetido a forças externas. A conservação do momento angular é uma das principais causas desse efeito, e é fundamental para entender a física por trás do movimento de objetos em rotação.

O efeito giroscópico pode ser descrito equacionalmente em relação aos ângulos de Euler utilizando as equações de movimento de um corpo rígido em rotação. Essas equações relacionam a taxa de variação do momento angular do corpo com as forças e torques que atuam sobre ele.

Os ângulos de Euler podem ser usados para descrever a orientação do corpo rígido em relação a um sistema de referência fixo. A rotação do corpo pode ser descrita por meio de uma sequência de rotações elementares em torno dos três eixos de coordenadas. As equações de movimento do corpo rígido são escritas em termos dos ângulos de Euler que descrevem a rotação.

Assim, a equação de movimento completa para um corpo rígido em rotação pode ser escrita em termos dos ângulos de Euler como:

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \lambda_x \dot{\omega}_x + (\lambda_z - \lambda_y) \omega_y \omega_z \\ \dot{H}_y &= \lambda_y \dot{\omega}_y + (\lambda_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ \dot{H}_z &= \lambda_z \dot{\omega}_z + (\lambda_y - I_x) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  são as componentes do momento angular em relação aos eixos x, y e z, respectivamente,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  e  $\lambda_z$  são os momentos de inércia do corpo em torno dos mesmos eixos,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são

as taxas angulares de rotação em torno dos mesmos eixos e  $\dot{\omega}_x$ ,  $\dot{\omega}_y$  e  $\dot{\omega}_z$  são as taxas de variação dessas taxas angulares. .

A esse conjunto de equações dá-se o nome de Equações de Euler, as quais facilitam a descrição dos movimentos tridimensionais de um corpo rígido.

As equações acima mostram que as taxas de variação do momento angular estão relacionadas com as taxas angulares de rotação e com os momentos de inércia do corpo. Isso significa que, para um dado corpo rígido, a conservação do momento angular faz com que ele resista a qualquer tentativa de mudar sua direção de rotação, resultando no efeito giroscópico.

### 3 O Efeito Dzhanibekov

O efeito Dzhanibekov, também conhecido como o "efeito da raquete de tênis", é um fenômeno físico que ocorre quando um objeto rígido, como um satélite ou um bastão, gira em torno de um de seus eixos principais.

O efeito ocorre quando um objeto é lançado em rotação em torno de um de seus eixos principais, mas com uma rotação diferente em torno de outro eixo principal. Durante a rotação, o objeto começa a oscilar em torno de seu eixo intermediário e, em seguida, inverte sua rotação em torno do eixo principal original. Isso pode resultar em mudanças imprevisíveis em sua trajetória.

#### 3.1 História

O efeito Dzhanibekov foi descoberto pelo cosmonauta soviético Vladimir Dzhanibekov durante a missão Soyuz T-13 em 1985. Durante a missão, Dzhanibekov realizou uma manobra para girar um dos painéis solares da nave espacial, usando um bastão como alavanca.

No entanto, quando Dzhanibekov girou o bastão, ele observou que o painel solar começou a girar em torno de um eixo diferente do que ele esperava. O painel solar então oscilou em torno de seu eixo intermediário e inverteu sua rotação em torno do eixo principal original, surpreendendo o cosmonauta.

O fenômeno foi um grande mistério na época, pois parecia desafiar as leis da física. No entanto, os cientistas logo descobriram que o efeito era uma consequência da dinâmica dos corpos rígidos, que descreve o comportamento de objetos sólidos em rotação.

Dzhanibekov relatou o fenômeno aos cientistas da Terra, que mais tarde o investigaram e o nomearam como o "efeito Dzhanibekov". Desde então, o efeito foi estudado e replicado em laboratórios, e é considerado um exemplo interessante da física dos corpos rígidos e da dinâmica não linear.

#### 3.2 Descrição Dinâmica do Efeito

O teorema da quantidade de movimento angular afirma que a quantidade de movimento angular  $\mathbf{H}$  de um sistema fechado é sempre conservada, a menos que um torque externo  $\mathbf{M}$  seja aplicado sobre ele. Quando um objeto em queda livre começa a girar em torno do seu eixo menor, sua quantidade de movimento angular aumenta devido à rotação, o que leva a uma alteração em sua posição e orientação.

Os ângulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  são um conjunto de três ângulos que descrevem a orientação de um objeto em relação a um sistema de coordenadas fixo. Eles podem ser usados para descrever a rotação de um objeto em torno de seus três eixos principais: rotação em torno do eixo  $x$ , rotação em torno do eixo  $y$  e rotação em torno do eixo  $z$ . Quando um objeto em queda livre começa a girar em torno do seu eixo menor, sua orientação pode ser descrita pelos ângulos de Euler.

A matriz de inércia  $\mathbf{J}_O$  descreve a distribuição de massa de um objeto em torno de seus três eixos principais. Quando um objeto em queda livre começa a girar em torno do seu eixo menor, sua matriz de inércia muda devido à alteração da orientação. Isso, por sua vez, afeta sua dinâmica rotacional e pode levar a uma mudança na trajetória de queda.

### 4 Modelando o problema e o sistema

Devido à complexidade de uma raquete, de uma porca borboleta e mesmo de um satélite, vamos optar por modelar um exemplo semelhante ao do seguinte vídeo: <https://youtu.be/1n-HMSCDYtM>, o qual explora ao chamado de "t-handle".

#### 4.1 Equações de Estado de Movimento

Suponha que parametrizamos a rotação da alça em forma de T por um conjunto de ângulos de Euler 3-1-3:  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . Conforme ilustrado na Figura, essa sequência de rotações relaciona a base fixa no espaço  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  com a base móvel  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  associada aos eixos principais da alça em T, com o eixo intermediário alinhado ao eixo longitudinal do objeto.

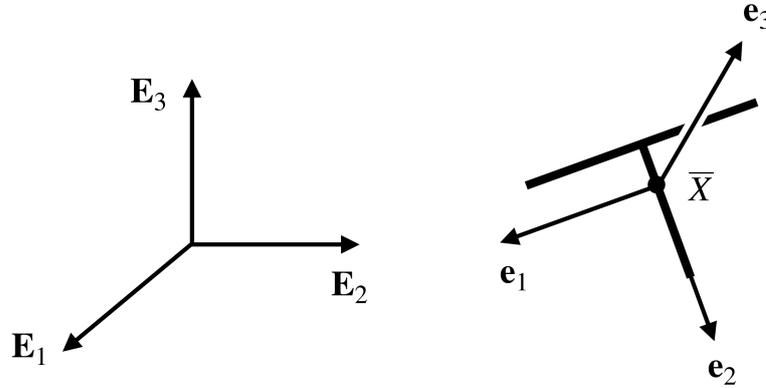


Figura 2: Esquema de uma alça em forma de T ilustrando o alinhamento da base corotacional  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

O momento angular da alça em forma de T em relação ao seu centro de massa  $\bar{X}$  é calculado somando-se os produtos das componentes da velocidade angular  $\omega_i$  com os momentos de inércia principais  $\lambda_i$ . Esses momentos de inércia representam a distribuição de massa do objeto ao redor de seus eixos principais, que podem ser diferentes para um corpo assimétrico. Ao considerar que o campo de força central durante a órbita ao redor da Terra resulta em um momento resultante pequeno na alça, o equilíbrio do momento angular em relação ao centro de massa implica que a taxa de variação do momento angular é nula, ou seja,  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ . Essa condição de equilíbrio do momento angular leva às equações de movimento do sistema.

Considerando as equações de Euler, temos:

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 = -(\lambda_3 - \lambda_2) \omega_2 \omega_3,$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 = -(\lambda_1 - \lambda_3) \omega_1 \omega_3,$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 = -(\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2.$$

Derivando temporalmente os ângulos de euler:

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi),$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi),$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi}.$$

Os conjuntos (1) e (2) constituem um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que resolvem a orientação da alça em T ao longo do tempo. Essas equações podem ser convenientemente expressas na forma  $\mathbf{M}(t, \mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  para integração numérica no MATLAB, onde consideramos o vetor de estado  $\mathbf{y} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \psi, \theta, \phi]^T$ :

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -(\lambda_3 - \lambda_2) \omega_2 \omega_3 \\ -(\lambda_1 - \lambda_3) \omega_1 \omega_3 \\ -(\lambda_2 - \lambda_1) \omega_1 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Descrição da Modelagem

Para desenvolver o projeto, foi utilizada a biblioteca `syms` do MatLab, que permite realizar manipulação simbólica com as equações apresentadas.

As funções de estado dessa forma podem ser simplificadas da forma como expostas anteriormente, sem necessidade do uso de muitas notações, deixando o código mais legível, bem como os termos mais visíveis e fáceis de compreender.

Primeiramente, no trecho abaixo, são definidas as variáveis simbólicas  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , que são funções do tempo  $t$ . Essas variáveis são usadas para representar quantidades dinâmicas que podem variar com o tempo em uma modelagem ou simulação.

```
syms omega1(t) omega2(t) omega3(t) psi(t) theta(t) phi(t)
syms lambda1 lambda2 lambda3
assume((lambda1>0)&(lambda2>0)&(lambda3>0))
```

Além disso, percebe-se que são definidos os momentos de inércia  $\lambda$  do problema, conforme as restrições do efeito, garantindo a existência de um eixo intermediário.

Para definirmos o momento angular e sua primeira derivada temporal, está sendo realizado o cálculo de um produto matricial. A matriz `diag([lambda1, lambda2, lambda3])` cria uma matriz diagonal com os valores `[lambda1, lambda2, lambda3]` nas posições diagonais. O vetor `[omega1; omega2; omega3]` é um vetor coluna que contém as variáveis `omega1`, `omega2` e `omega3`. O produto matricial `diag([lambda1, lambda2, lambda3])*[omega1; omega2; omega3]` realiza a multiplicação da matriz diagonal pelos elementos do vetor coluna, resultando em um novo vetor `H`.

```
H=diag([lambda1, lambda2, lambda3])*[omega1; omega2; omega3];
omegaRF=[omega1; omega2; omega3];
```

```
DH=diff(H)+cross(omegaRF, H);
```

Como ficou exposto anteriormente, é preciso realizar uma mudança de base da fixa genérica  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  para a base móvel  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ .

A matriz `R1` representa uma rotação em torno do eixo  $z$  (terceira coluna) por um ângulo `psi`. Os elementos `cos(psi)` e `sin(psi)` correspondem às coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, do vetor unitário que define a direção do eixo de rotação. O elemento 1 na posição (3, 3) indica que não há mudança na coordenada  $z$  durante a rotação.

A matriz `R2` representa uma rotação em torno do eixo  $x$  (primeira coluna) por um ângulo `theta`. O elemento 1 na posição (1, 1) indica que não há mudança na coordenada  $x$  durante a rotação. Os elementos `cos(theta)` e `sin(theta)` correspondem às coordenadas  $y$  e  $z$ , respectivamente, do vetor unitário que define a direção do eixo de rotação.

A matriz `R3` representa uma rotação em torno do eixo  $z$  (terceira coluna) por um ângulo `phi`. Assim como em `R1`, os elementos `cos(phi)` e `sin(phi)` correspondem às coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, do vetor unitário que define a direção do eixo de rotação. O elemento 1 na posição (3, 3) indica que não há mudança na coordenada  $z$  durante a rotação.

Essas matrizes de rotação podem ser usadas para transformar um vetor ou um sistema de coordenadas em um novo sistema de coordenadas após a rotação. Cada matriz representa uma transformação específica em relação ao ângulo e ao eixo de rotação correspondentes.

```
R1=[cos(psi), sin(psi), 0;
    -sin(psi), cos(psi), 0;
    0, 0, 1];
```

```
R2=[1, 0, 0;
    0, cos(theta), sin(theta);
    0, -sin(theta), cos(theta)];
```

```
R3=[cos(phi), sin(phi), 0;
    -sin(phi), cos(phi), 0;
    0, 0, 1];
```

Abaixo segue uma sequência geral do MatLab que permite obter as equações diferenciais expostas anteriormente e gerar as matrizes de estado apresentadas, que, simbolicamente, podem ser utilizadas para permitir rodar uma simulação completa do processo.

```

ODEs1=DH==sumM;
ODEs2=[omega1;omega2;omega3]==omega;

StateEqns=simplify([ODEs1;ODEs2]);

StateVars=[omega1;omega2;omega3;psi;theta;phi];

[Msym,Fsym]=massMatrixForm(StateEqns,StateVars);

Msym=simplify(Msym);
Fsym=simplify(Fsym);

M=odeFunction(Msym,StateVars,lamba1,lamba2,lamba3);
F=odeFunction(Fsym,StateVars,lamba1,lamba2,lamba3);

```

### 4.3 Condições de Simulação

Para demonstrar a instabilidade da rotação em torno do eixo principal intermediário, suponha que a alça em forma de "T" esteja girando inicialmente em torno desse eixo com uma taxa  $\Omega$ , com pequenas perturbações  $\varepsilon \ll \Omega$  na velocidade angular inicial em relação aos outros dois eixos principais:  $\omega(t_0) = \varepsilon \mathbf{e}_1 + \Omega \mathbf{e}_2 + \varepsilon \mathbf{e}_3$ . Para conveniência, vamos definir a orientação inicial da alça em "T" como  $\psi(t_0) = 0$ ,  $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$  rad (para evitar a singularidade no conjunto de ângulos de Euler 3-1-3) e  $\phi(t_0) = 0$ .

O movimento resultante da alça em "T", que é muito semelhante ao comportamento observado no vídeo, é animado na figura de simulação para uma escolha específica de parâmetros físicos e de simulação. Também pode ser mostrado que o movimento simulado conserva tanto a energia quanto o momento angular: a energia  $E = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega_i^2$  é constante, e  $|\mathbf{H}|$  é constante, onde  $\mathbf{H}$  é o momento angular.

### 4.4 Resultados Obtidos Numericamente

A simulação que rodou no Matlab resultou teve como resultado a geração de dois gráficos importantes, o do comportamento da Energia Mecânica e o do momento angular em função do tempo. Nesse sentido, foi possível extrair uma interpretação profunda do fenômeno graficamente.

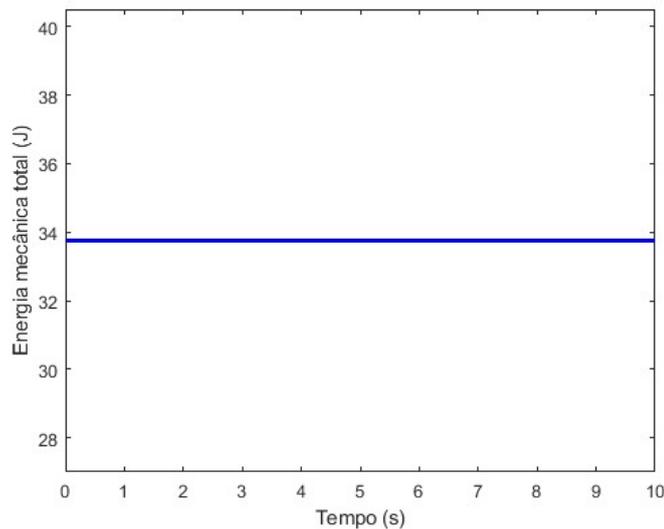


Figura 3: Conservação da Energia

Pela Figura 3, pode-se observar que a Energia mecânica do sistema se conserva. Com efeito, no modelo considerado, o corpo se move livremente no espaço, nesse sentido, a abstinência de forças externas implica a não variação da energia cinética, a qual é a única forma de energia possível, uma vez que o corpo apenas gira livremente.

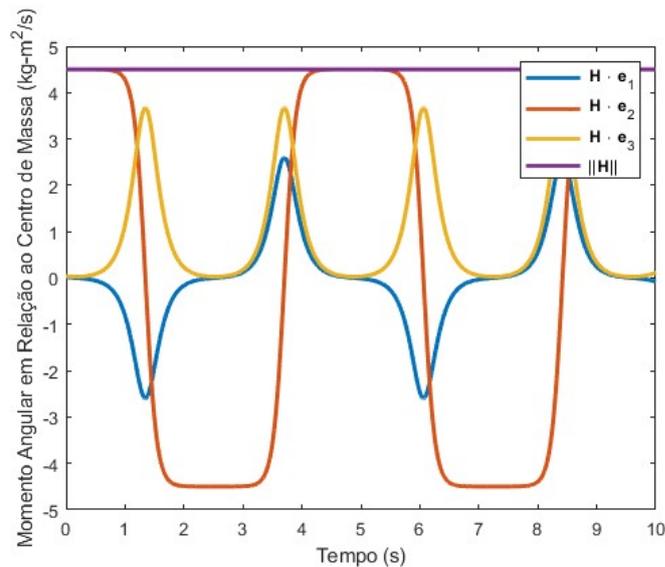


Figura 4: Variação do Momento Angular no Tempo

Já na Figura 4, pode-se perceber que o momento angular total do sistema não se modifica. Isso porque o momento externo é nulo (novamente, uma rotação livre no espaço, ausente de interferências).

Não obstante, observando em relação a cada um dos eixos móveis definidos, pode-se verificar uma variação associada, essencialmente, à direção. Isso justifica precisamente a mudança do eixo de rotação do corpo rígido.

## 5 Aplicações e Curiosidades

### 5.1 Teorema da Raquete de Tênis

A raquete de tênis possui três momentos de inércia diferentes, alinhados aos três possíveis eixos de rotação. Essa característica resulta em maior estabilidade quando comparada aos momentos de inércia maior e menor.

Quando a raquete é girada em torno do eixo intermediário, a forte estabilidade do sistema faz com que ela tenda a retornar à rotação em torno de um dos outros dois eixos principais. Esse fenômeno é conhecido como efeito de torção no ar, semelhante ao comportamento de um objeto em forma de T

A estabilidade da raquete de tênis em relação aos seus momentos de inércia desempenha um papel crucial no desempenho e manuseio durante o jogo. Os momentos de inércia são determinados pela distribuição de massa ao longo dos eixos de rotação da raquete. Quando a raquete é forçada a girar em torno do eixo intermediário, ocorre um fenômeno interessante.

Devido à sua configuração de momentos de inércia distintos, a raquete tende a resistir a mudanças em sua rotação inicial. Essa resistência resulta em uma maior estabilidade, permitindo que a raquete mantenha sua orientação em relação a um dos outros eixos principais. Em outras palavras, se a raquete é inicialmente girada em torno do eixo intermediário, ela tenderá a se realinhar com um dos outros eixos de rotação principais.

Esse efeito de torção no ar pode ser comparado a um objeto em forma de T modelado. Quando um objeto em forma de T é lançado no ar com uma rotação em torno de seu eixo vertical, ele tende a girar e se alinhar com um de seus outros eixos principais, resultando em uma trajetória estável e previsível. Da mesma forma, a raquete de tênis exibe um comportamento semelhante ao ser girada em torno do eixo intermediário.

Essa característica da raquete, juntamente com a habilidade do jogador em controlar e aproveitar o efeito de torção no ar, desempenha um papel importante nas estratégias e técnicas utilizadas durante o jogo de tênis. A compreensão dessa propriedade de estabilidade e seu aproveitamento podem influenciar o desempenho do jogador, permitindo golpes mais precisos e potentes.

Em resumo, a interação entre os momentos de inércia da raquete de tênis e a força aplicada ao girar em torno do eixo intermediário resulta no efeito de torção no ar, onde a raquete tende a se realinhar com

um dos outros eixos principais. Esse fenômeno contribui para a estabilidade e controle durante o jogo, tornando a raquete uma ferramenta essencial para os jogadores de tênis explorarem e dominarem.

## 5.2 Estabilidade de Satélites

Quando o efeito Dzhanibekov ocorre em um satélite, a mudança repentina na orientação pode afetar a sua estabilidade e até mesmo causar a sua perda. Por exemplo, se um satélite está em uma órbita polar e sofre uma perturbação que altera a sua orientação, ele pode entrar em uma órbita de inclinação elevada que o levará a colidir com outros objetos em órbita.

Para evitar o efeito Dzhanibekov e garantir a estabilidade dos satélites em órbita, os engenheiros utilizam uma variedade de técnicas e estratégias, incluindo:

1. Sistemas de controle de atitude: Os satélites são equipados com sistemas de controle de atitude que permitem que os engenheiros controlem a orientação do satélite em relação aos seus eixos de rotação. Esses sistemas incluem dispositivos como giroscópios, magnetômetros, sensores solares e estelares, que fornecem informações sobre a posição do satélite em relação às estrelas, ao sol e à Terra.
2. Rodas de reação: As rodas de reação são dispositivos que podem alterar a rotação do satélite em resposta a perturbações externas. Essas rodas podem ser usadas para alterar o momento angular do satélite e manter sua estabilidade.
3. Simulações e cálculos precisos: Os engenheiros fazem simulações e cálculos precisos para prever o comportamento do satélite em diferentes condições e ajustar os parâmetros do sistema de controle de atitude para garantir a sua estabilidade.
4. Monitoramento constante: Os satélites são monitorados continuamente a partir de estações de controle em terra para detectar quaisquer anomalias na sua orientação e tomar as medidas necessárias para corrigi-las.

Em resumo, para evitar o efeito Dzhanibekov e garantir a estabilidade dos satélites em órbita, os engenheiros utilizam uma combinação de técnicas de controle de atitude, dispositivos de correção de rotação e cálculos precisos e simulações para prever o comportamento do satélite em diferentes condições.

## 6 Conclusões e Comentários Finais

Em resumo, este relatório apresentou uma descrição detalhada do Efeito Dzhanibekov, um fenômeno complexo que desafia a compreensão intuitiva. Para compreender o fenômeno, foram abordados conceitos avançados de dinâmica, como os efeitos de rotação e as propriedades da matriz de inércia. Ao estudar esses conceitos, foi possível consolidar e aplicar a teoria aprendida em sala de aula em um contexto prático e desafiador.

Nesse sentido, possível verificar os diferentes estados que a matriz de inércia do corpo pode assumir quando sob efeito desse fenômeno, bem como a orientação da sua coordenada solidária auxilia na compreensão dos ângulos de Euler.

## 7 Referências

[1] Ashbaugh, M.S., Chicone, C.C. e Cushman, R.H. The twisting tennis racket. *J Dyn Diff Equat* 3, 67–85 (1991). <https://doi.org/10.1007/BF01049489>

[2] Beer, F. P. Jonhston, E. R. Clausen, W. E., *Mecânica Vetorial para Engenheiros - Dinâmica*, 7ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo, 2006, 1355 p.

[3] Kleppner, D. Kolenkow, R. *An Introduction to Mechanics*, 2ª Edição, Cambridge, Massachusetts, 2018.