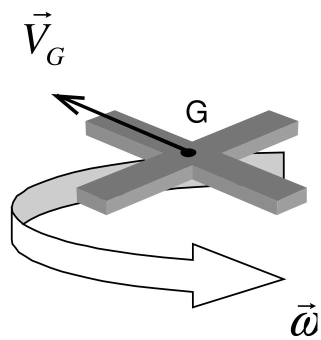
MOVIMENTO DE UM CORPO LIVRE EM ROTAÇÃO

BOOMERANG

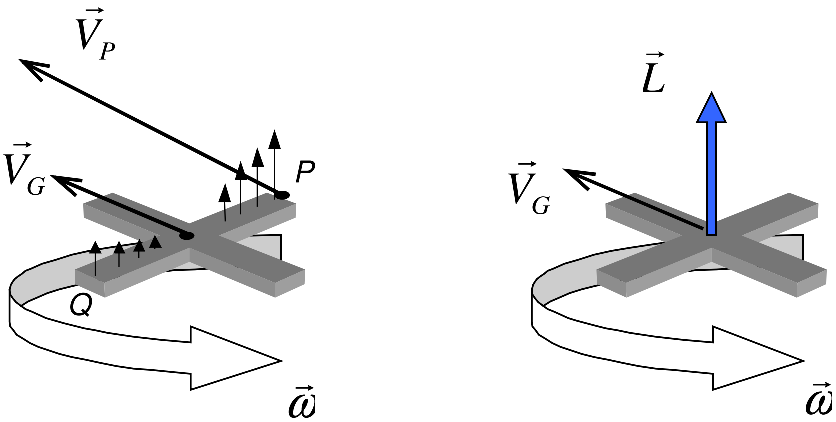
Considere um *boomerang* de quatro pás lançado com movimento de rotação em torno de seu eixo vertical com translação do centro de massa numa determinada direção, conforme mostrado na figura abaixo.



Forças Externas:

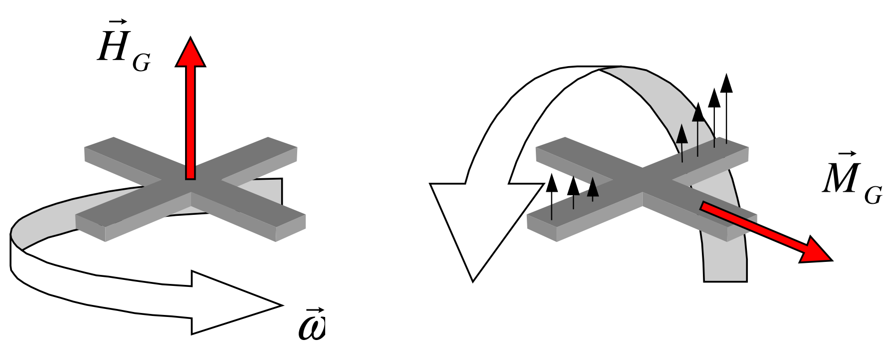
Quando o *boomerang* gira com velocidade angular $\vec{\omega}$, é produzida uma sustentação aerodinâmica devido ao formato da seção transversal das pás. A força de sustentação é distribuída ao longo da pá em função da velocidade tangencial $\vec{V}_P = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (P - G)$. A integral das pressões distribuídas ao longo da área das pás corresponderá a força resultante $\vec{L}$ que direciona o movimento segundo $m\vec{a}_G = \vec{R}$ e dá sustentação para o vôo se opondo a ação do campo gravitacional.

Note que a pá que avança (pá do lado direito superior na figura à esquerda) tem mais velocidade (ponto *P*) e, portanto, mais sustentação que a pá que tem componente rotacional na direção oposta a velocidade de translação (ponto *Q*). As demais pás, quando alinhadas com a velocidade de translação, tem campo de velocidades idênticos.



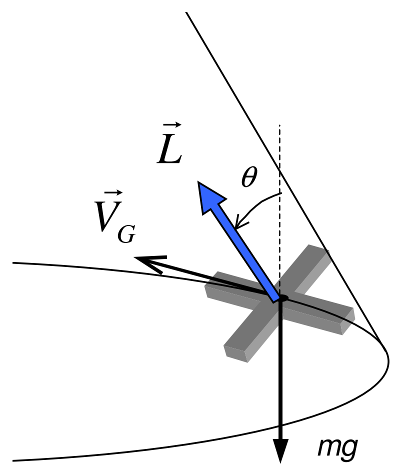
Momento Próprio e Externo:

Adicionalmente o *boomerang* girando desenvolve uma quantidade de momento angular $\vec{H}_G$ perpendicular uma plano do bólido. A diferença de sustentação entre as pás produz um binário de forças que causa o momento externo $\vec{M}_G$ medido no pólo coincidente com o centro de massa G, que é ortogonal a $\vec{H}_G$. A atitude do corpo a cada instante é descrita por $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$.



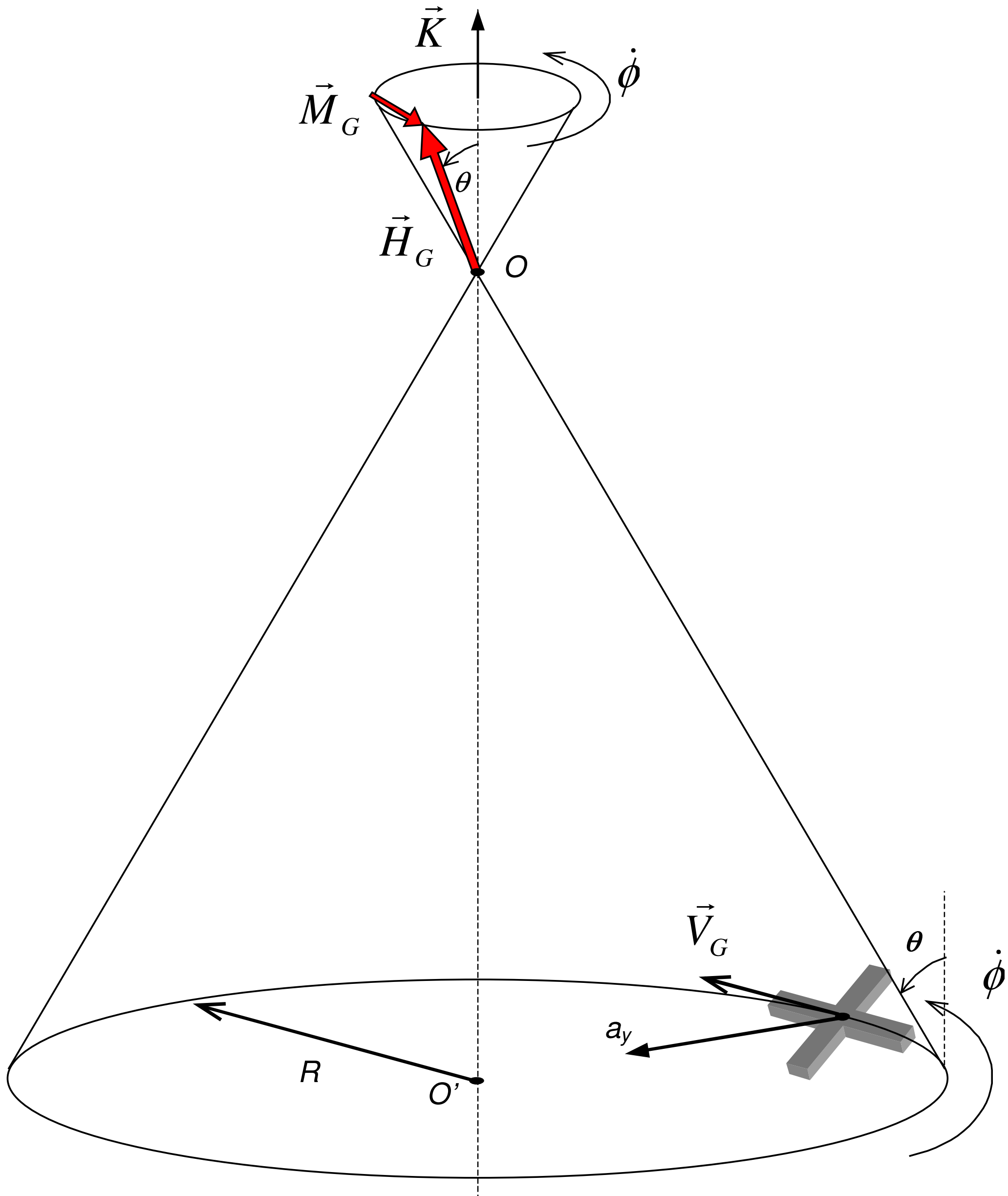
Lançamento Conveniente:

O *boomerang* é lançado numa determinada velocidade e inclinação (ângulo de nutação θ) com velocidade angular $\vec{\omega}$ (condições iniciais). O diagrama de forças sobre o corpo livre permite concluir que a projeção vertical da força de sustentação é $L \cos\theta$ e que a componente horizontal da força de sustentação (L sen θ) vai produzir uma aceleração contida no plano $\vec{H}_G \, \vec{K}$.



Geometria da trajetória:

Para uma situação de movimento na mesma altura ($L \cos\theta = mg$) devido à outra componente da força de sustentação, haverá uma aceleração centrípeta a_y cuja direção é sempre perpendicular à direção da velocidade o que corresponderá neste instante a uma trajetória circular. Durante a trajetória o momento externo $\vec{M}_G$ devido a sustentação não uniforme das pás, vai muda a direção do momento angular $\vec{H}_G$ do corpo com velocidade angular $\dot{\phi}$ mantendo entretanto o ângulo de inclinação θ constante (pois são ortogonais) modificando a atitude do corpo a cada instante.



A atitude instantânea do corpo é descrita pelos ângulos de precessão ϕ, nutação θ e rotação própria ψ, conhecidos como ângulos de *Euler*. O movimento natural será de precessão livre com velocidade angular de precessão $\dot{\phi}$ para ângulo de nutação θ e velocidade de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$. A trajetória será circular em torno do ponto *O*' no centro da base de um cone de abertura 2θ.

Desta forma o *boomerang* quando lançado com ângulo de nutação θ, velocidade de translação $\vec{V}_G$ e velocidade angular $\dot{\psi} = \omega$, vai buscar uma trajetória circular de raio *R*, conforme mostrado na figura anterior, tendendo a voltar para a mão do lançador.

Devido à resistência aerodinâmica do ar, a velocidade angular assim como a velocidade de translação vão se reduzindo após o lançamento. Portanto a situação de equilíbrio quase-estático instantânea vai se modificando, alterando a geometria da trajetória. A solução completa não linear exata pode ser obtida por um processo de integração numérica que permite calcular a trajetória do *boomerang* ao longo do tempo a partir de condições iniciais (condições de lançamento $\vec{V}_G$; $\vec{\omega}$ e θ).