

## SISTEMA MECÂNICO NÃO LINEAR COM MOVIMENTO CAÓTICO EM TORNO DE ATRADORES

Por: Manoel Rodrigues Trigueiro

Orientador: Professor Doutor Roberto Spinola Barbosa

Sistemas mecânicos muito simples podem ter sua movimentação descrita por equações diferenciais não lineares que acarretam movimento caótico em torno de pontos de energia mínima chamados de atratores. O sistema composto por uma partícula interligada a duas molas conforme mostrado na Figura 1, capaz de se movimentar sobre o plano, possui esta característica. As molas têm rigidez  $k$  e comprimento natural  $l$ .

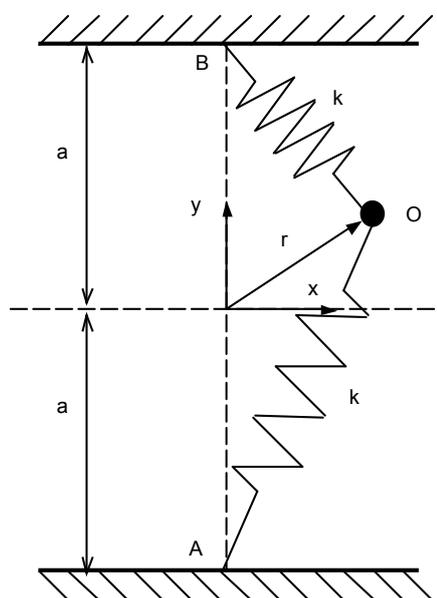


Figura 1

Este problema foi adaptado de uma prova da disciplina de Mecânica B (PME 3200).

Para obter as equações diferenciais de movimento, utilizou-se a formulação de Lagrange, considerando-se as coordenadas generalizadas  $x$  e  $y$ . Logo, é preciso obter as energias cinética e potencial, além das forças generalizadas, exclusivamente dissipativas.

Para a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Enquanto que para o potencial, função apenas das molas:

$$V = \frac{1}{2}K \left\{ \left[ \sqrt{x^2 + (y-a)^2} - l \right]^2 + \left[ \sqrt{x^2 + (y+a)^2} - l \right]^2 \right\}$$

Foram consideradas forças generalizadas com caráter dissipativo. Na sua forma mais geral as forças dissipativas podem ter termos proporcionais ao movimento (atrito seco), à velocidade (atrito viscoso) e ao quadrado da velocidade (atrito fluido dinâmico) :

$$F_x = -\mu N \frac{\dot{x}}{v} - c\dot{x} - kv\dot{x}$$

$$F_y = -\mu N \frac{\dot{y}}{v} - c\dot{y} - kv\dot{y}$$

Em que  $N = mg$  é a força normal,  $v$  é a velocidade absoluta dada por  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  e  $\mu, c$  e  $k$  são constantes dissipativas.

Por fim, obtém-se as acelerações nas coordenadas em análise:

$$\ddot{x} = \frac{-K}{m} x \left[ 2 - l \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right) \right] - \mu g \frac{\dot{x}}{v}$$

$$\ddot{y} = \frac{-K}{m} \left[ (y-a) \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} \right) + (y+a) \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right) \right] - \mu g \frac{\dot{y}}{v}$$

Com o intuito de simplificar o estudo, os termos que concernem ao atrito viscoso e ao atrito fluido dinâmico foram anulados.

A partir da solução analítica, foi implementado um código no *software* Mat Lab para estudo do movimento da partícula e observação de sua trajetória ao longo do tempo. Duas situações são analisadas: molas tensionadas e molas comprimidas. Os valores atribuídos às constantes podem ser verificados no anexo.

### Molas tensionadas

Para esta configuração, em que  $l < a$ , foi simulado o movimento da partícula a partir das condições iniciais  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, -10 \text{ m/s}, 0, 0)$  cujos resultados estão apresentados na Figura 2.

Observa-se que existe apenas um ponto de equilíbrio: a própria origem. Dada a simetria do sistema, a força resultante sobre a partícula atuará de modo a impor a posição de equilíbrio a todo instante, ou seja, tem-se uma força restauradora.

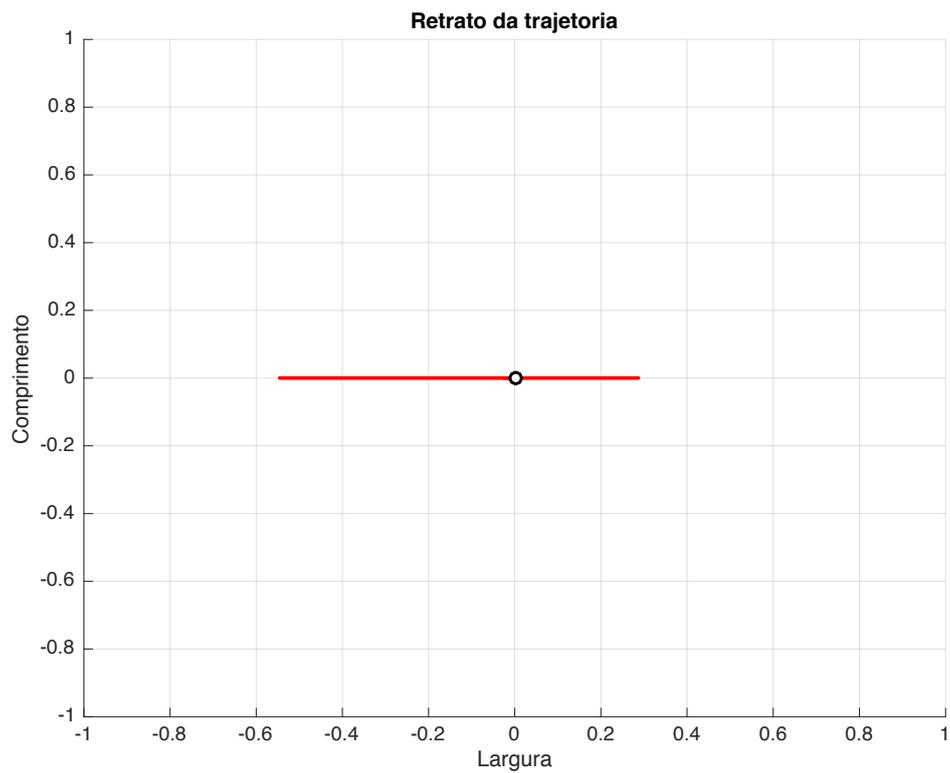


Figura 2

Para as molas tensionadas, espera-se uma superfície parabólica para a energia potencial, em que a estabilidade corresponde a  $x = y = 0$ . A Figura 3 evidencia isso.

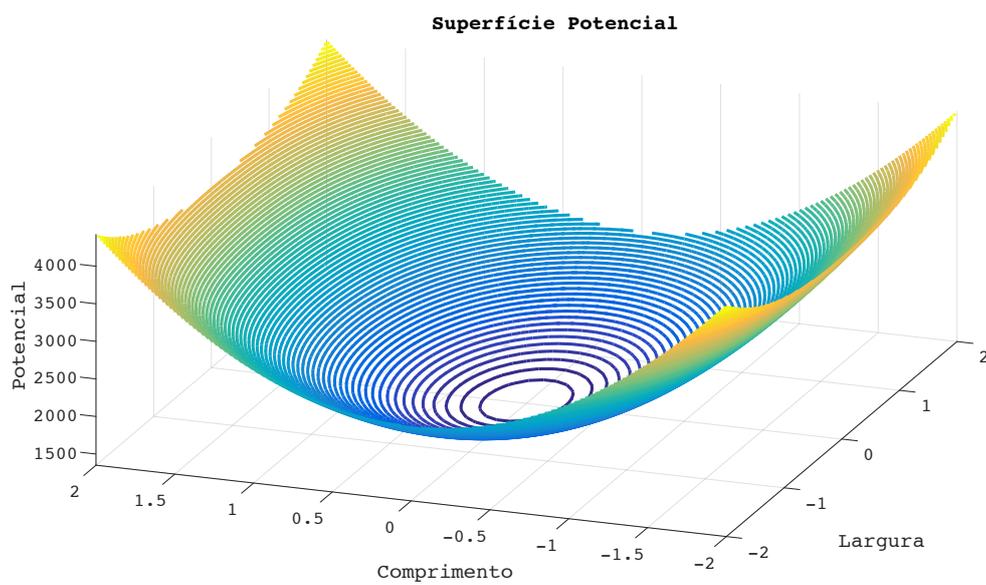
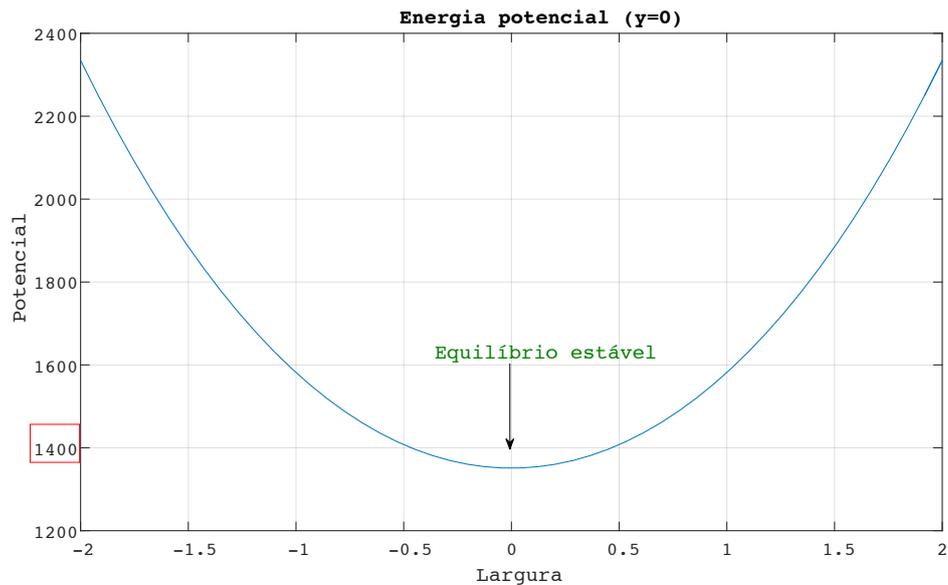
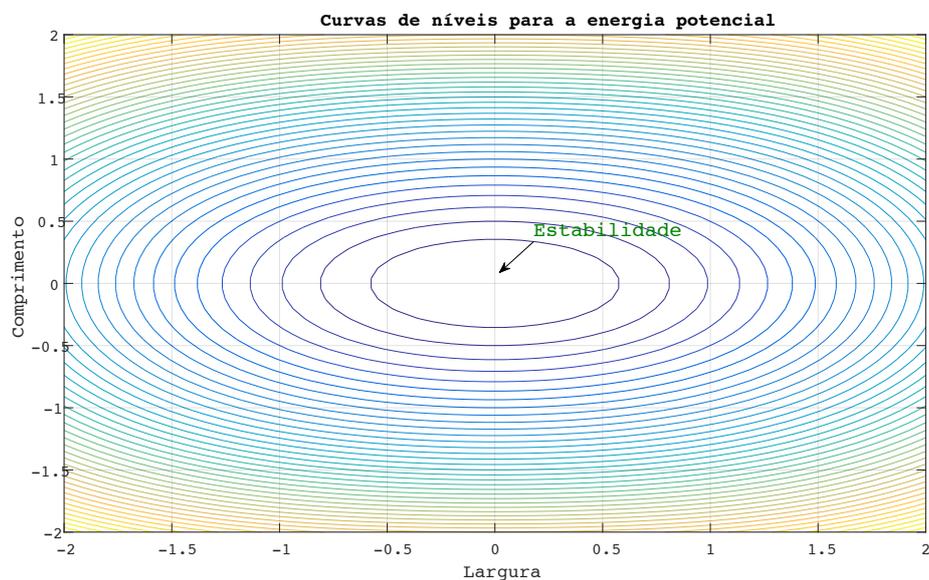


Figura 3

**Figura 4**

É possível obter as curvas de níveis para a energia potencial das molas. Note, como exposto na Figura 5, a variação da energia potencial sobre o plano horizontal. De fato, uma vez que a partícula está sobre a mesa, seu potencial se deve exclusivamente às molas (não há ação gravitacional).

O ponto de energia potencial mínima corresponde a um ponto de equilíbrio estável chamado de atrator, indicado pela seta que aponta o local de estabilidade.

**Figura 5**

O movimento da partícula foi simulado para diferentes condições iniciais. As figuras 6 e 7 retratam sua trajetória para  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (1.5 \text{ m}, 0, 0, -15 \text{ m/s})$  e  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, -8 \text{ m/s}, -1.5 \text{ m}, 3 \text{ m/s})$ , respectivamente.

Para efeito ilustrativo, as curvas de níveis da função de energia potencial foram

determinadas e desenhadas junto com a trajetória temporal (em vermelho).

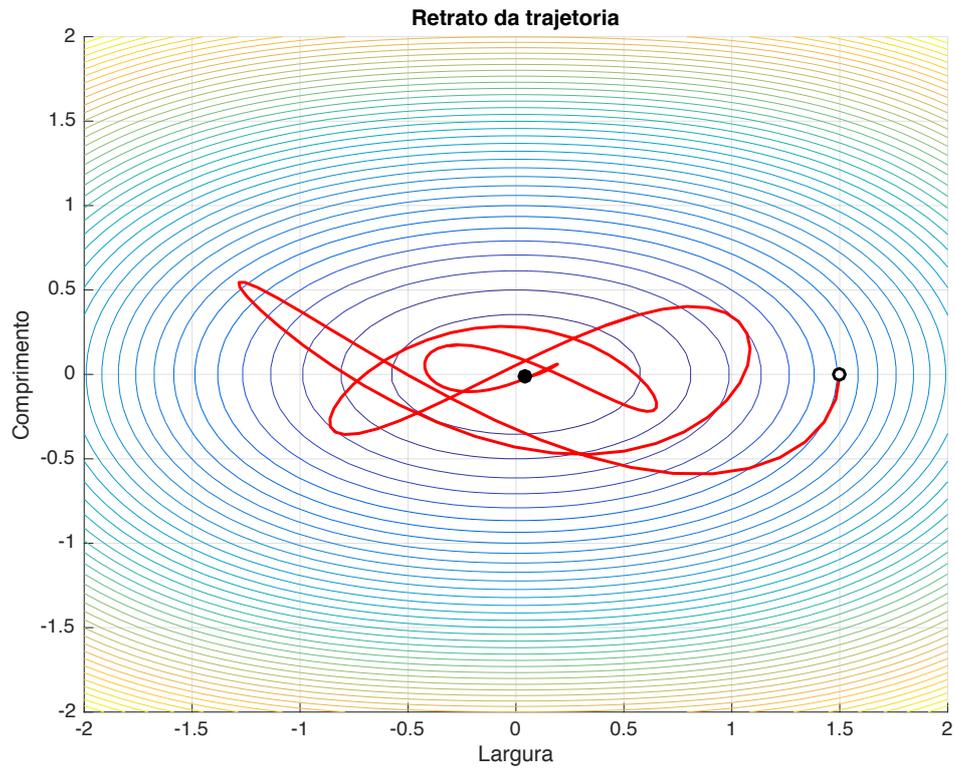


Figura 6

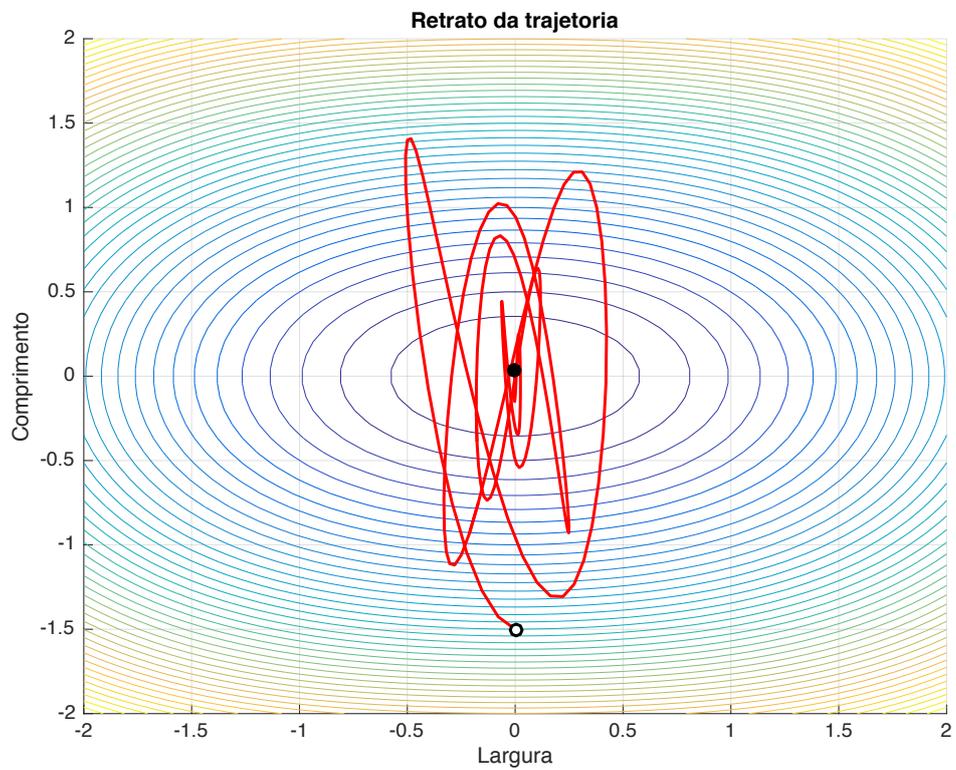


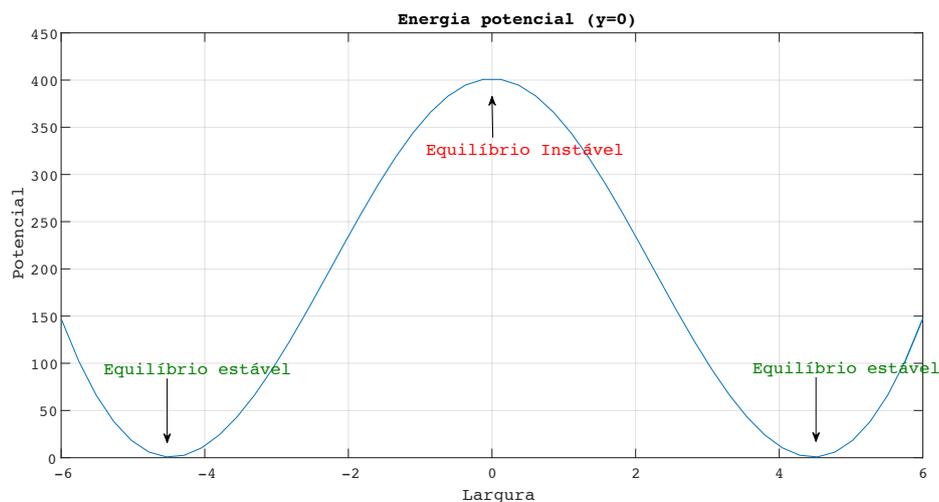
Figura 7

O percurso é iniciado fora do ponto de equilíbrio. A esfera percorre algumas oscilações caóticas (rastros vermelho), até encerrar seu movimento devido ao atrito. É importante ressaltar que na ausência da dissipação advinda do contato entre a partícula e o plano, as oscilações não teriam fim, mas ocorreriam em torno do atrator.

Por fim, o retrato de ambas trajetórias explicita o movimento caótico da partícula no entorno do ponto de menor energia.

### Molas comprimidas

Com as molas comprimidas, ou seja, com  $l > a$ , haverá dois pontos de equilíbrio estável e um instável. De fato, existem dois locais para os quais as molas atingem seus comprimentos naturais: à esquerda e à direita da origem, dada a simetria do sistema. Ocorrem portanto dois pontos de equilíbrio estável (dois atratores). Ademais, a origem deixa de figurar como local de energia mínima, tornando-se ponto de equilíbrio instável. Naturalmente, por se tratar de um ponto de instabilidade é representativo de um ponto de sela como pode ser visto na Figura 8, um corte da superfície potencial (Figura 9).



**Figura 8**

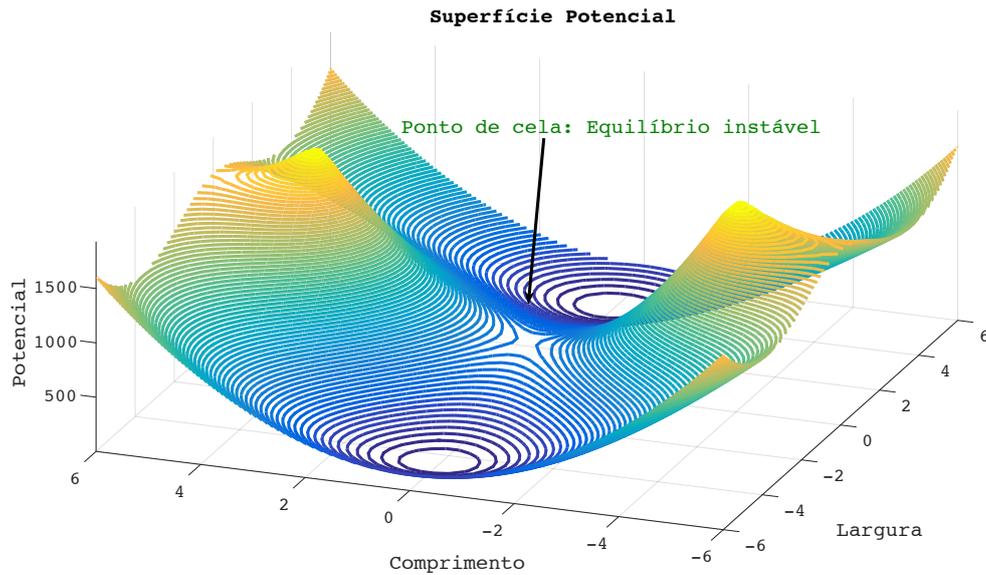


Figura 9

A seguir, são apresentados dois retratos. No primeiro (Figura 10), a partícula não é capaz de ultrapassar a barreira energética. Já no segundo (Figura 11), tem maior energia e desenvolve sua trajetória mais amplamente.

Para a Figura 10, tem-se  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (3 \text{ m}, -10 \text{ m/s}, 3 \text{ m}, 10 \text{ m/s})$ , enquanto que para a Figura 11,  $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (2 \text{ m}, -35 \text{ m/s}, 0.5 \text{ m}, 20 \text{ m/s})$ .

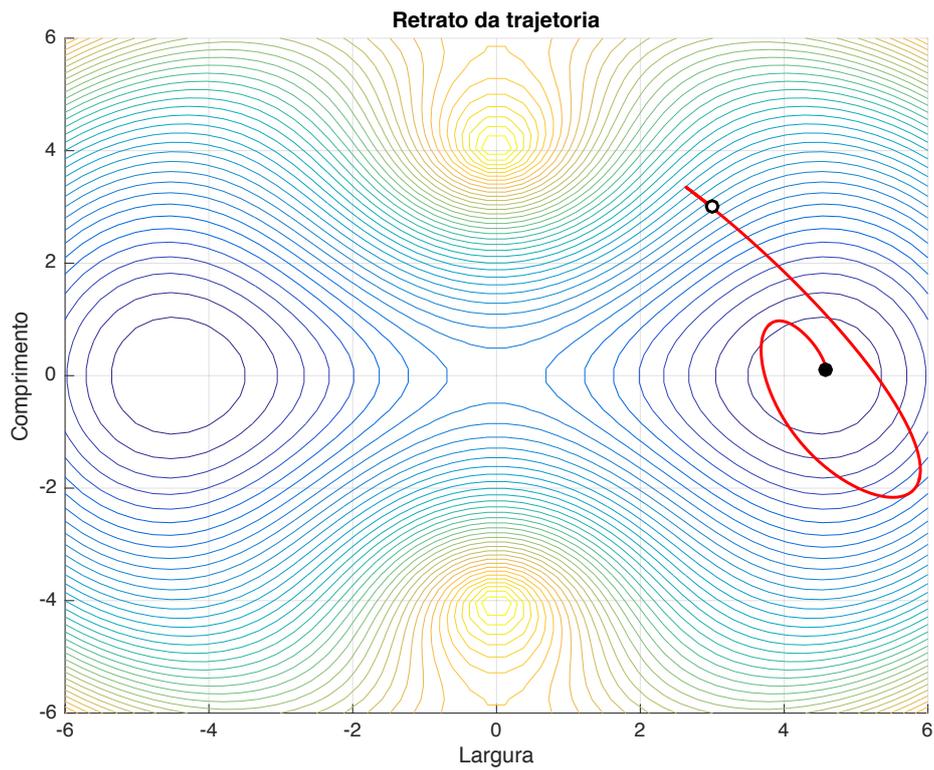


Figura 10

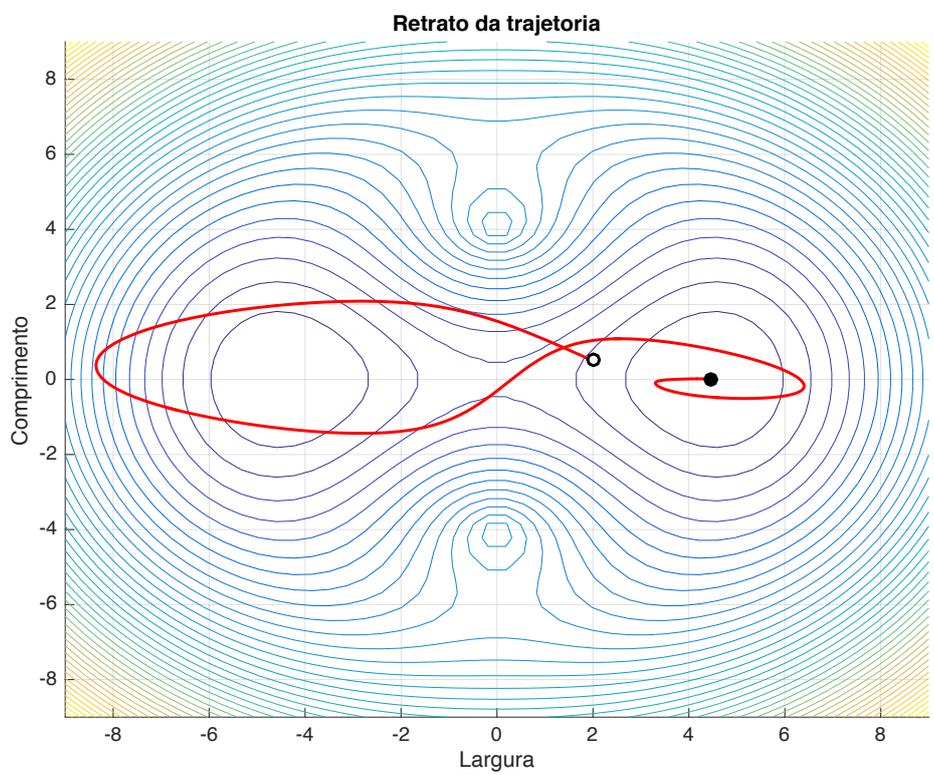


Figura 11

Como esperado, as trajetórias se desenvolvem no entorno dos atratores, regiões que polarizam o movimento. No primeiro caso, a baixa velocidade da partícula potencializou a atração à região de menor energia à direita do plano. No segundo caso, no entanto, a partícula foi capaz de tangenciar o atrator esquerdo e apenas encerrar seu movimento após passar pelo ponto de sela, onde o equilíbrio é instável.

A Figura 12, representativa das curvas de níveis ao longo do plano, esclarece os pontos de equilíbrio estável e instável.

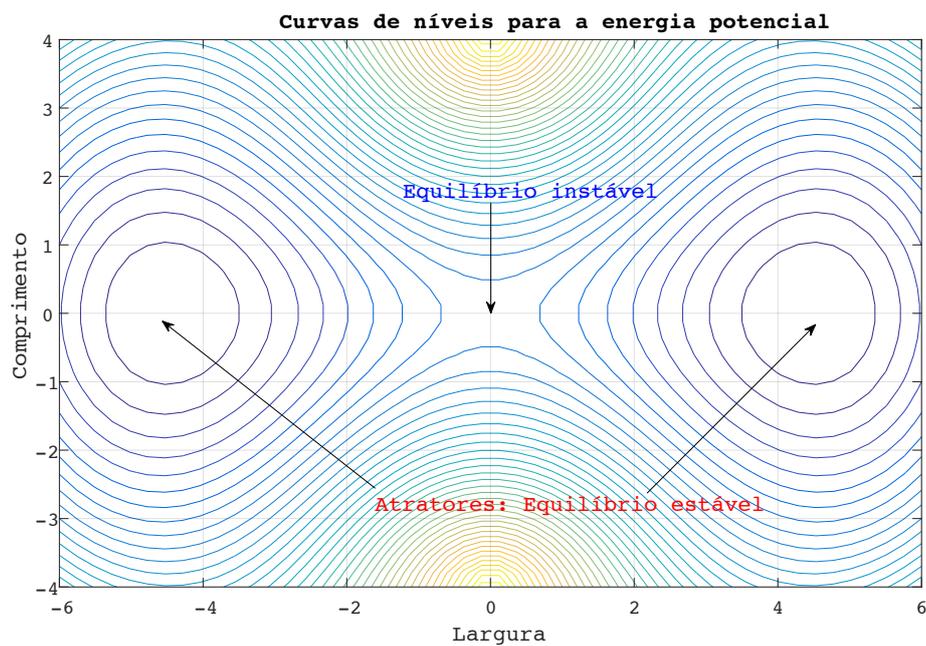


Figura 12

Anexo

Para a configuração tensionada do sistema, as constantes adotadas foram:

$$\begin{aligned}K &= 600 \text{ N/m}; \\l &= 2.5 \text{ m}; \\a &= 4 \text{ m}; \\m &= 2 \text{ kg}; \\g &= 9.79 \text{ m/s}^2; \\\mu &= 2.\end{aligned}$$

Para a comprimida, alterou-se a constante elástica e o comprimento natural das molas:

$$\begin{aligned}K &= 600 \text{ N/m}; \\l &= 2.5 \text{ m}.\end{aligned}$$