

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Trabalho de Conclusão de Curso: Modelagem, análise dinâmica e controle em um veículo articulado visando prevenir o efeito canivete.

Matheus Lucci Sanchez

São Paulo
2017

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Trabalho de Conclusão de Curso: Modelagem, análise dinâmica e controle em um veículo articulado visando prevenir o efeito canivete.

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Matheus Lucci Sanchez
Orientador: Prof. Dr Roberto Spinola Barbosa

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2017

Catlogação-na-publicação

Sanchez, Matheus Lucci

Modelagem, análise dinâmica e controle em um veículo articulado visando prevenir o efeito canivete. / M. L. Sanchez – São Paulo, 2017.
70 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Dinâmica Veicular 2.Controle 3. Análise dinâmica I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Resumo

O presente trabalho é o relatório final da disciplina "PME2600 - Projeto Integrado III", oferecida pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo aos alunos do 10º semestre do curso de engenharia mecânica dessa instituição. A disciplina faz parte de um conjunto de três, onde o aluno desenvolve o Trabalho de Conclusão de Curso.

O autor buscará ao longo dessa monografia trabalhar com um tema de relevante importância nas estradas brasileiras e de outros países: Dinâmica e estabilidade lateral de um veículo articulado. Após uma etapa de pesquisa bibliográfica e de fontes confiáveis na Internet, será abordado um sistema do tipo cavalo-semirreboque, bastante comum nas cidades e estradas brasileiras. Dentro desse sistema, verificou-se um subtema de grande relevância dada a sua periculosidade, que é o efeito canivete, caracterizado por uma instabilidade do sistema, levando a um acotovelamento entre o cavalo e o semirreboque.

O Efeito Canivete é um evento que ocorre quando os dois corpos de um veículo biarticulado se acotovelam e seus efeitos podem ser catastróficos. O presente projeto de formatura busca modelar a dinâmica de um veículo articulado e busca desenvolver um sistema de controle capaz de reduzir a propensão ao acotovelamento do sistema em determinadas condições. Um sistema não linear também é desenvolvido para teste dos sistemas de controles propostos.

Palavras-chaves: Sistema cavalo-semirreboque, Efeito canivete, Modelagem, Simulações computacionais, Controle.

Abstract

This text corresponds to the final report in the course “PME2600-Projeto integrado III” offered to the mechanical engineering students of the Polytechnic school of University of São Paulo.

The thesis worked by the author corresponds to an important topic regarding road safety: The Jackknife effect. This phenomenon is caused by the lack of stability in articulated vehicles during certain maneuvers and more extreme conditions. The jackknife effect occurs when the relative angle between the truck and semitrailer decreases relatively quickly resulting, usually, in dangerous accidents due to the high inertia involved in the event.

The current text treats, firstly, the dynamic modeling and analysis of the articulated vehicle and then a control system is developed in order to obtain a more stable system regarding the jackknife effect. Finally, both systems (with and without control feedback) are tested in a more complete non-linear model and compared.

Key-words: Truck-Semitrailer, Jackknife effect, Modeling, Numerical simulations, Control system.

Lista de Tabelas

1	Parâmetros para simulação e exemplos	26
---	--	----

Lista de Figuras

1	Exemplo típico de um arranjo carreta-cavalo mecânico	7
2	Conjunto carreta-cavalo após jackknifing	8
3	Contato Pneu - Solo	14
4	Força de Contato Pneu - Solo	15
5	Tangente hiperbólica	15
6	Relação do coeficiente de rigidez lateral com a força normal . .	17
7	Diagrama de corpo livre: Cavalo mecânico e Semirreboque . . .	19
8	graus de liberdade referente à dinâmica vertical e de arfagem. .	22
9	Diagrama de corpo livre: Cavalo mecânico e Semirreboque - Forças e dimensões relevantes	22
10	Resultados da simulação numérica	27
11	Resultados da simulação numérica	28
12	Resultados da simulação numérica	29
13	Exemplo de atuador em sistemas de controle ativo da direção. .	30
14	Exemplo de aplicação do atuador em sistemas de controle ativo da direção.	31
15	Exemplo de aplicação do atuador em sistemas de controle ativo no acoplamento de veículos articulados.	32
16	Exemplo de controle ativo de torque em carro de passeio. Nesse sistema o freio é aplicado em apenas duas rodas para evitar perda de controle do veículo..	33
17	Diagrama de corpo livre: Cavalo mecânico e Semirreboque . . .	34
18	Diagrama de zeros e polos do sistema original, variando a velo- cidade longitudinal de 40 a 100 km/h	36
19	Diagrama de zeros e polos do sistema original, variando a massa do semirreboque (m ²) de 1,5 a 32 toneladas	37
20	Diagrama de zeros e polos do sistema original a 70km/h	37
21	Diagrama do lugar das raízes para a função de transferência original	39

22	PIDTuner	40
23	Resposta ao impulso do sistema original vs controlado	40
24	Resposta ao degrau do sistema original vs controlado	41
25	Diagrama de polos e zeros do sistema original vs controlado	41
26	Diagrama de bode do sistema original vs controlado	42
27	Risk criterion prediction (determination of time left before the accident TLBA)	43
28	manobra desvio de obstáculo	44
29	manobra curva fechada com frenagem	45
30	Diagrama base para equações de compatibilidade	59
31	Esquema físico para o caso mais geral de um conjunto cavalo semirreboque	61

Sumário

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
1 Introdução	6
2 Pesquisa bibliográfica	9
3 Modelagem não linear	13
3.1 Modelo não linear dos pneus	13
3.2 Considerações sobre o coeficiente de rigidez lateral e a força normal	16
3.3 Modelagem não linear da dinâmica da carreta	17
3.3.1 Dinâmica de guinada	19
3.3.2 Dinâmica da roda	21
3.3.3 Dinâmica de arfagem	21
3.3.4 Vetor de estados	24
3.4 Exemplo	25
4 Controle	30
4.1 Modelagem Linear (para Controle)	33
4.2 Estabilidade	36
4.3 Metodologias de controle	37
4.3.1 Lugar das raízes (Root Locus)	38
4.3.2 Alocação de polos	39
4.3.3 PID Turner	39
4.4 Respostas dinâmicas	40
5 Sistema não linear com controle	42
6 Conclusões	46

7	Referências	49
8	Apêndice	56
8.1	Dedução do sistema de equações relativo a adoção da hipótese de conjunto pino rei-quinta roda infinitamente rígido	56
8.2	Dedução das forças de acoplamento - dinâmica de arfagem . . .	58
8.3	Dedução do modelo linear para controle	60

1 Introdução

Um tema de grande relevância com relação a transporte terrestre são os veículos de carga, tipicamente os caminhões de maior porte, já que com o desenvolvimento de diversos outros pólos de consumo e de produção através do território brasileiro, cresceu a necessidade de se transportar por uma porção mais vasta do território nacional toda sorte de produtos. O tratamento especial aos veículos de carga se justificaria pela importância que o transporte rodoviário exerce na economia brasileira. De acordo com o anuário da Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT) de 2012 o Brasil contava com uma frota legalizada de 1.823.253 caminhões. Esse número, já bastante expressivo se comparado as frotas de outros países com Produto Interno Bruto maior que o brasileiro, só vem crescendo nos últimos anos devido a carente infraestrutura brasileira em outras áreas de transporte, como a ferroviária, a fluvial e a de cabotagem.

Assim, com ruas e estradas sujeitas a presença cada vez mais intensa desses veículos, é importante que esses sejam seguros, e guiados da mesma forma, já que acidentes envolvendo caminhões podem ser sempre potencialmente desastrosos. Tendo em vista estas questões é que o presente trabalho trata da modelagem, simulação e análise da dinâmica de um caminhão, mais especificamente um do tipo semirreboque, bastante comum nas vias brasileiras, e que pode ser utilizado para o transporte de uma gama diversa de mercadorias, de acordo com o tipo e construção da carreta.

Na figura da abaixo podemos ver uma imagem de um conjunto carreta de três eixos (um dianteiro e dois traseiros) associada a um cavalo mecânico de três eixos:



Figura 1: Exemplo típico de um arranjo carreta-cavalo mecânico

Fonte: www.frenteiraagora.com.br/portal

Um tema de grande relevância quando se trata de veículos articulados é o efeito canivete (*jackknife* do inglês). Este tema já é assunto de diversos estudos, artigos e dissertações que tratam de temas da dinâmica desses veículos. Esse evento/fenômeno se caracteriza por um efeito de "acotovelamento" na configuração do cavalo-carreta, com conseqüente possível choque entre ambas as estruturas, podendo gerar assim conseqüências bastante graves para os veículos que estejam em volta do equipamento. Tal efeito pode ter origem em comportamentos anômalos na direção do caminhão, como freadas bruscas, perdas de tração, curvas fechadas, entre outros.

Estudos estatísticos de acidentes em carretas são feitos por diferentes organizações. Um desses estudos, feito por STARNES (2006), aponta que entre abril de 2001 e dezembro de 2003, 9% dos acidentes envolvendo mais de um veículo nos Estados Unidos foram causados por conseqüência do efeito canivete. Outro estudo feito por MARTINEZ (2005), mostra que 3,1% de todos acidentes envolvendo carretas em 2003 e 7,1% dos acidentes com vítimas fatais também nos Estados Unidos foram causados pelo efeito canivete.

Abaixo segue uma foto de um caminhão que sofreu o processo de *jackknifing*, possivelmente por perda de aderência devido a superfície congelada da pista:



Figura 2: Conjunto carreta-cavalo após jackknifing

Fonte: www.msha.gov

Os objetivos desse trabalho são:

- Desenvolver modelo matemático não linear para a simulação dinâmica de um caminhão do tipo semirreboque.
- Desenvolver modelo matemático linear para o auxiliar o desenvolvimento de um sistema de controle.
- Desenvolver um sistema de controle que visa reduzir o risco do efeito canivete.
- Fazer análises comparativas dos sistemas desenvolvidos em situações críticas.

2 Pesquisa bibliográfica

A pesquisa bibliográfica é uma das etapas mais importantes do trabalho de conclusão de curso uma vez que serve de base para diversas etapas da modelagem e é fonte de parâmetros para simulações. Tendo em vista a importância da bibliografia, uma seção foi dedicada somente a ela nesse relatório. A seguir, são detalhados os principais meios onde foram encontrados trabalhos relacionados ao tema dessa monografia. Na sequência são apresentados e classificados os trabalhos de grande relevância.

- Consulta às Monografias da EPUSP-Mecânica, onde foi possível encontrar razoável quantidade de trabalhos sobre dinâmica veicular e de veículos pesados, inclusive um deveras interessante, que apresentou com riqueza de detalhes os efeitos de instabilidade em veículos articulados, bem como forneceu diversas referências adicionais;
- Trabalhos apresentados no Diname - *International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, por meio dos quais foi possível determinar algumas referências de grande relevância, que forneceram o conhecimento necessário para iniciar a modelagem dos pneus e de seus esforços, bem como de alguns parâmetros a esses relativos;
- Site do IEEE - *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, onde foi possível encontrar grande quantidade de artigos relacionados ao controle de sistemas veiculares, que forneceu preciosas informação sobre a dinâmica desses;
- Sistema *Deep Blue*, da *University of Michigan*, que provê grande quantidade de artigos publicados por essa universidade (e por outras instituições), que é grande referência em dinâmica veicular.
- Alguns trabalhos apresentados no CONEM - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, em especial um do ano de 1999, que foi muito útil na medida em que fornecia extensa bibliografia (citada inclusive em ordem cronológica) sobre dinâmica de veículos pesados.

Enfim, a partir de artigos encontrados diretamente nas fontes acima, e das diversas fontes neles diretamente citadas, bem como de trabalhos obtidos a partir de outras instituições de classe ou de ensino, foi possível construir

uma referência extensa e de grande qualidade sobre o assunto, as quais foram de grande valia no processo de modelagem do sistema, na medida em que ofereceram melhor compreensão sobre a metodologia e procedimentos intrínsecos aos processo, auxiliando na determinação de quais variáveis são as de relevância e quais não o são, como tais variáveis podem ser relacionadas, que sorte de hipótese pode ser feita em diversas situações diferentes, bem como fornecendo parâmetros dos diversos componentes do sistema.

Abaixo estão listados os estudos consultados mais relevantes, agrupados pela relevância que tiveram em uma dada seção do estudo:

Modelagem e dinâmica em geral de veículos:

- LUIJTEN, M. F. J. Lateral dynamic behaviour of articulated commercial vehicles. Eindhoven University of Technology, 2010.
- ALEXANDER *et al.* A Lateral Dynamic Model of a Tractor -Trailer: Experimental Validation. University of Minnesota, 1996.
- RAJESH, Rajamani. Vehicle dynamics and control. Mechanical engineering series. Springer, 2006.
- GILLESPIE, Thomas. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers, 1992.
- SCHWEDER, Ronaldo Klein. Modelagem de Carroceria pelo MEF para Estudo de Dinâmica Veicular. EPUSP, 2007.
- BADI *et al.* Sensitivity and Reliability Analysis of Articulated Heavy Vehicle. EURODDYN, 2011.
- NAYL, Thaker. Modeling, Control and Path Planning for an Articulated Vehicle. Lulea University of Technology, 2013.
- CHEN *et al.* Modeling And Control Of Articulated Vehicles. University of California at Berkeley, 1997.
- CHEN *et al.*. Lateral Control Of Heavy Duty Vehicles For Automated Highway Systems. University of California at Berkeley, 1998.
- KOVANDA *et al.* Determination of Trajectory of Articulated Bus Turning along Curved Line. Czech Technical University in Prague, 2014.

- SANTOS, Vinícius Lopes dos. Estudo da Dinâmica Vertical de um Veículo Através da Teoria de Sistemas Multicorpos. EPUSP, 2007.
- RIZZI, Rafael Gonçalves. Desenvolvimento de um Engate Tipo Quinta Roda - Pino Rei com Amortecimento Ativo para o Uso em Veículos Comerciais. EPUSP, 2008.
- YAMAKADO, Makoto; NAGATSUKA, Keiichiro; TAKAHASHI, Junya. A yaw-moment control method based on a vehicle's lateral jerk information. *Vehicle System Dynamics*, v. 52, n. 10, p. 1233-1253, 2014.
- ESMAILZADEH, E.; GOODARZI, A.; VOSSOUGH, G. R. Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling. *Mechatronics*, v. 13, n. 7, p. 659-675, 2003.
- AZAD, Nasser Lashgarian. Dynamic modelling and stability controller development for articulated steer vehicles. 2006. Tese de Doutorado. University of Waterloo.

Estudo e modelagem do efeito canivete:

- KRAUTER *et al.* Jackknifing of Tractor-Semitrailer Trucks—Detection and Corrective Action. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1974.
- BOUTELDJA *et al.* Prediction and Detection of Jackknifing Problems for Tractor Semi-Trailer. *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*, 2006.
- LIEBERT, Daniel. Modelagem Dinâmica Longitudinal de Veículos Articula-dos. EPUSP, 2009.
- GUETIÉRREZ *et al.* Estudo Comparativo da Estabilidade Direcional de Duas Combinações Veiculares Tipo Cavalos Semi-Reboque. COBEM, 1999.
- GILLESPIE *et al.* The Yaw Stability of Tractor-Semitrailers During Cornering. University of Michigan, 1979.
- BOUTELDJA, Mohamed; CERESO, Véronique. Jackknifing warning for articulated vehicles based on a detection and prediction system. In: 3rd international conference on road safety and simulation. 2011. p. 14-16.

- MAAS, J. W. L. H. Jackknife stability of a tractor semi-trailer combination. Master project DCT, 2009.
- MA, Wen-Hou; PENG, Huei. Worst-case vehicle evaluation methodology—examples on truck rollover/jackknifing and active yaw control systems. *Vehicle System Dynamics*, v. 32, n. 4-5, p. 389-408, 1999.
- ELHEMLY, Mohamed Abd Elazeem; FAYED, Mohamed Abd Elghany; ELMAIHY, Ali Abd Elghany. Tractor–semitrailer jackknifing elimination using semitrailer differential braking technique. *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, v. 20, n. 1, p. 19-34, 2013.
- CHEN, L. K.; HSU, J. Y. Investigation of jack-knife prevention in an articulated scaled vehicle. *Vehicle System Dynamics*, v. 46, n. S1, p. 765-777, 2008.
- KANEKO, Tetsuya; KAGEYAMA, Ichiro; TSUNASHIMA, Hitoshi. Braking stability of articulated vehicles on highway. *Vehicle System Dynamics*, v. 37, n. sup1, p. 1-11, 2002.

Modelagem dos pneus:

- PACEJKA, Hans. *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier, 2006.
- PACEJKA *et al.* *Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies*. SAE Technical Paper Series, 1987.
- WINKLER *et al.* *Effects of Tire Properties on Truck and Bus Handling*. University of Michigan, 1976.
- BOGARD *et al.* *Lateral Performance Measurements of Wide-Base Truck Tires*. University of Michigan, 1991.
- ALEXANDER *et al.* *A Lateral Dynamic Model of a Tractor -Trailer: Experimental Validation*. University of Minnesota, 1996.
- SALVAGNI, Ronaldo B.; ALVES, Marcelo AL; BARBOSA, Roberto S. A Geometrical MODEL FOR TIRES UNDER VERTICAL LOADING. *Blucher Engineering Proceedings*, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2013.
- SALVAGNI, Ronaldo. A model for forces on tire-ground contact region. *Blucher Engineering Proceedings*, v. 3, n. 1, p. 404-415, 2016.

3 Modelagem não linear

A modelagem é uma parte relevante deste trabalho, uma vez que são formuladas as equações e modelos matemáticos a serem analisados. Esta seção terá três partes importantes, sendo uma delas referente à modelagem não linear e mais completa do conjunto cavalo-mecânico e semirreboque que será utilizada para as simulações numéricas, a segunda parte se refere à modelagem linear mais simples e que será utilizada no desenvolvimento do sistema de controle. A terceira e última modelagem se refere ao sistema de identificação do efeito canivete. Serão ainda abordados outros tópicos de importante definição ao modelo, como por exemplo o interação entre o pneu e o solo.

3.1 Modelo não linear dos pneus

A interação entre os pneus e o solo são extremamente importantes na dinâmica veicular, uma vez que as forças de contato, determinadas nesses modelos em função da cinemática e geometria do conjunto, representam a maior parte da força resultante sobre os corpos e conseqüentemente dominam a dinâmica dos veículos. A modelagem dessa interação pode ser simples, com funções linearizadas, como também pode ser complexa adotando-se modelos não lineares e até modelos dinâmicos. Extensa pesquisa é feita nessa área e alguns autores merecem destaque como referência ao tema: PACEJKA (2006), WINKLER and ERVIN (1976), BOGARD and WINKLER (1991), DUGOFF et al. (1970), GUNTUR and SANKAR (1980), BIAN et al. (2014) e SALVAGNI et al. (2013) são exemplos de pesquisas na área de modelagem da interação pneu-solo.

Um modelo não linear de uso relevante em trabalhos de dinâmica veicular é descrito em DUGOFF et al. (1970) e foi posteriormente modificado por BIAN et al. (2014) para adequação à resultados experimentais. O autor modifica o modelo de Dugoff DUGOFF et al. (1970) com um fator e deixa os resultados mais próximos do modelo clássico de Pacejka PACEJKA (2006). As vantagens do modelo modificado de Dugoff se resumem ao fato de as equações serem numericamente menos intensas se comparadas ao modelo de Pacejka e serem dependentes apenas de dois coeficientes de rigidez (Lateral e longitudinal), da força normal, do coeficiente de atrito e dos escorregamentos

laterais e longitudinais. Estes parâmetros são relativamente fáceis de serem estimados ou encontrados na internet (como referência). O modelo de Pacejka utiliza constantes e parâmetros de mais difícil obtenção.

O modelo desenvolvido por BIAN et al. (2014) foi testado pelo autor, mas optou-se pelo desenvolvimento de um modelo próprio, uma vez que simulações do efeito canivete não apresentavam resultados satisfatórios. O desenvolvimento desse novo modelo de pneu foi proposto pelo professor orientador Dr. Roberto Spinola Barbosa e é descrito a seguir.

A figura a seguir ilustra quais são as forças e momentos que aparecem na interação entre pneu e solo. Vale ressaltar que é apresentado o modelo 2D apenas com vista superior onde aparecem as forças longitudinal, lateral e o momento restaurador. No presente trabalho serão considerados apenas as forças, e não o momento restaurador, pois assim como é considerado em outros estudos do efeito canivete, este momento tem menor relevância.

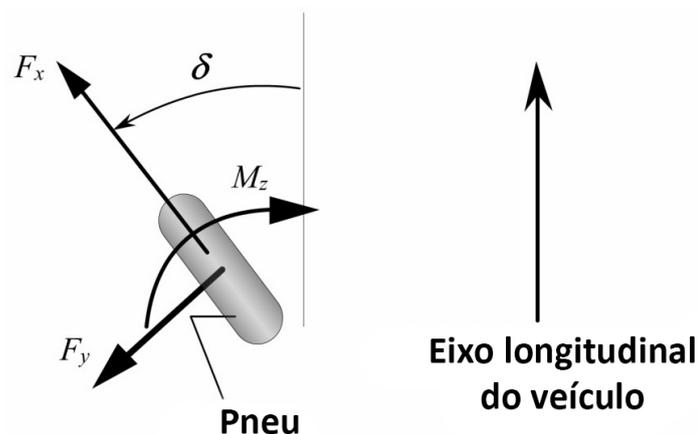


Figura 3: Contato Pneu - Solo

Fonte: RAJESH (2006)

Os seguintes gráficos ilustram as forças de interação pneu-solo em função do escorregamento lateral e longitudinal nos modelos de Pacejka PACEJKA (2006) e DugoffDUGOFF et al. (1970):

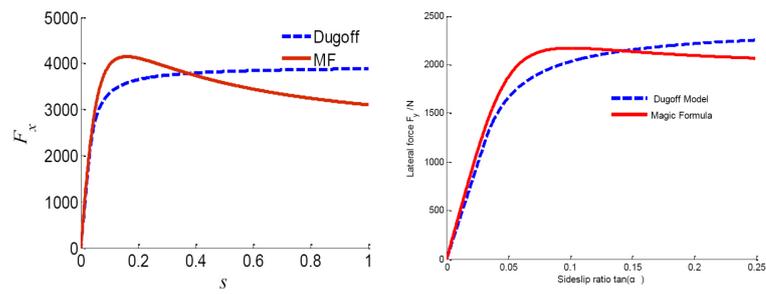


Figura 4: Força de Contato Pneu - Solo

Fonte: BIAN et al. (2014)

O modelo utilizado nesse trabalho aproxima a curva de força (lateral ou longitudinal) por uma função tangente hiperbólica:

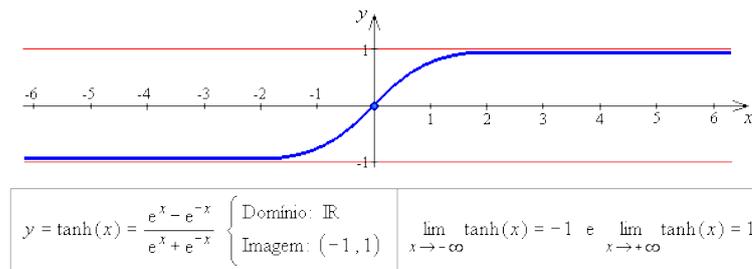


Figura 5: Tangente hiperbólica

Fonte: UFF (2017)

As forças Laterais e longitudinais ficam definidas por:

$$F_x = F \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$F_y = F \sin(\alpha) \quad (2)$$

onde

- $F_{at} = \mu N =$ força de atrito máxima (saturação)
- $\alpha = \arctan(e_y/e_x) =$ ângulo de escorregamento

- $k = \frac{(k_x k_y)}{((k_y \cos(\alpha))^2 + (k_x \sin(\alpha))^2)^{0.5}} =$ rigidez no plano do escorregamento (Considerando uma elipse)
- $e = (e_x * e_x + e_y * e_y)^{0.5} =$ modulo do escorregamento
- $F = F_{at} \tanh(ek/F_{at}) =$ Força na direção do escorregamento (usando tangente hiperbólica com saturação em F_{at})
- $e_x =$ escorregamento longitudinal
- $e_y =$ escorregamento lateral

3.2 Considerações sobre o coeficiente de rigidez lateral e a força normal

Como pode ser visto em estudos de dinâmica de arfagem as forças normais nos eixos 1, 2 e 3, respectivamente N_1 , N_2 e N_3 variam conforme a desaceleração e a proporção das forças de frenagem. Esse fenômeno, também referenciado como transferência de carga (do inglês *Load Transfer*), é comentado em M.PINXTEREN (2010). De acordo com M.PINXTEREN (2010), em uma frenagem em linha reta, a carga no eixo dianteiro pode chegar a 1,698 vezes a carga estática e a carga no eixo traseiro do cavalo mecânico pode chegar a 0,893 da carga estática. Dado que o coeficiente de rigidez lateral em caminhões apresenta uma relação praticamente linear com a força normal em caminhões e carretas LUIJTEN (2010b), espera-se que o fenômeno de transferência de carga influencie consideravelmente no efeito canivete. Com isso, as seguintes relações são propostas:

$$\boxed{C_{\alpha, \text{Diant, cav.}} = f \cdot N_1} \quad (3)$$

$$\boxed{C_{\alpha, \text{Tras, cav.}} = f \cdot N_2} \quad (4)$$

$$\boxed{C_{\alpha, \text{Tras, semirreb.}} = f \cdot N_3} \quad (5)$$

Onde f é o coeficiente de rigidez lateral normalizado e para o exemplo

que posteriormente será demonstrado, é utilizado o valor de referência utilizado em LUIJTEN (2010b). JAZAR (2013) também menciona a dependência das rigidez longitudinal e vertical do pneu em função da força normal. A imagem a seguir é retirada de LUIJTEN (2010b) e mostra a relação do coeficiente de rigidez lateral com a força normal:

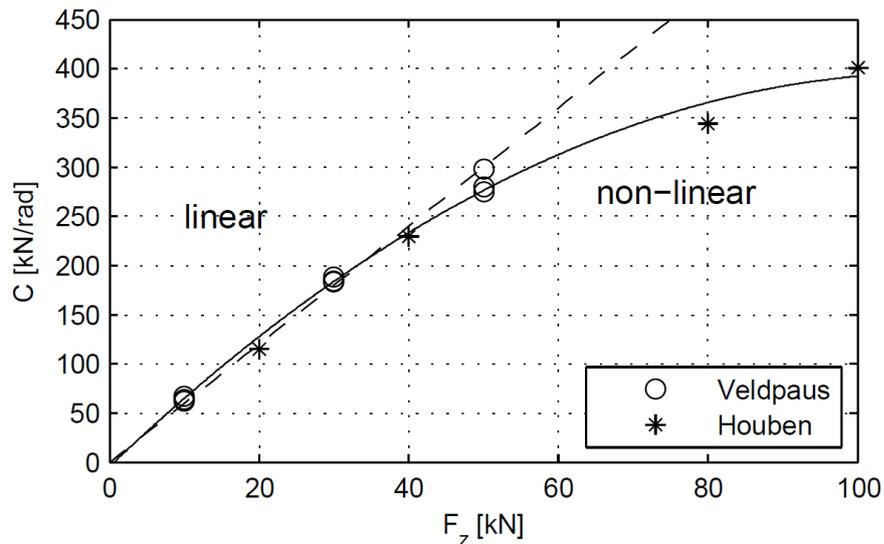


Figura 6: Relação do coeficiente de rigidez lateral com a força normal

3.3 Modelagem não linear da dinâmica da carreta

O modelo para a dinâmica da carreta pode ser extremamente completo e contemplar a dinâmica dos corpos em três dimensões (levando em consideração dinâmica de guinada, arfagem e rolagem além da dinâmica do Centro de massa dos corpos), mas tendo em vista que tal modelo seria computacionalmente pesado e que não traria tantos mais benefícios que um modelo mais simplificado, foi optado por um modelo mais simples. Tendo como exemplo a bibliografia de estudos de dinâmica do efeito canivete, foi optado pela utilização de dois modelos em duas dimensões (vista superior e vista lateral) e pela utilização de 19 graus de liberdade, sendo que três desses graus de liberdade estão na realidade restritos por equações constitutivas do acoplamento entre pino rei e quinta roda. Nessa configuração, as forças normais nos pneus são determinadas pela dinâmica vertical do conjunto. Esta dinâmica vertical é simulada em conjunto com a dinâmica de guinada e contém 7 dos 19 graus de liberdade propostos, sendo um deles restrito devido ao acoplamento entre pino

rei e quinta roda. As 19 variáveis de estado a serem modeladas são, portanto:

- X_1 = Movimento do centro de gravidade (C.G.) do cavalo-mecânico na coordenada X(Absoluta).
- Y_1 = Movimento do centro de gravidade (C.G.) do cavalo-mecânico na coordenada Y(Absoluta).
- φ_1 = Movimento angular do cavalo-mecânico no eixo Z (Absoluto) .
- X_2 = Movimento do centro de gravidade (C.G.) do semirreboque na coordenada X(Absoluta).
- Y_2 = Movimento do centro de gravidade (C.G.) do semirreboque na coordenada Y(Absoluta).
- φ_2 = Movimento angular do semirreboque no eixo Z (Absoluto) .
- ω_{w11L} = Velocidade angular do pneu dianteiro esquerdo do cavalo - mecânico.
- ω_{w11R} = Velocidade angular do pneu dianteiro direito do cavalo - mecânico.
- ω_{w12L} = Velocidade angular do pneu traseiro esquerdo do cavalo - mecânico.
- ω_{w12R} = Velocidade angular do pneu traseiro direito do cavalo - mecânico.
- ω_{w22L} = Velocidade angular do pneu traseiro esquerdo do semirreboque.
- ω_{w22R} = Velocidade angular do pneu traseiro direito do semirreboque.
- Z_1 = Movimento vertical do centro de gravidade (C.G.) do cavalo- mecânico na coordenada z(Absoluta).
- Z_2 = Movimento vertical do centro de gravidade (C.G.) do semirreboque na coordenada z(Absoluta).
- Z_{11} = Movimento vertical do centro de gravidade (C.G.) do eixo dianteiro do cavalo-mecânico na coordenada z(Absoluta).
- Z_{12} = Movimento vertical do centro de gravidade (C.G.) do eixo traseiro do cavalo-mecânico na coordenada z(Absoluta).

- Z_{22} = Movimento vertical do centro de gravidade (C.G.) do eixo traseiro do semirreboque na coordenada z(Absoluta).
- ψ_1 = Movimento angular do cavalo-mecânico no eixo y .
- ψ_2 = Movimento angular do semirreboque no eixo y .

Caso fosse adotado maior rigor matemático, as dinâmicas não poderiam ser desacopladas da maneira que é realizada neste texto (dinâmica em dois planos), mas por questões de simplificação e em razão da menor significância dos efeitos giroscópicos em relação aos demais termos, são assim definidas.

3.3.1 Dinâmica de guinada

A imagem a seguir ilustra o diagrama de corpo livre(DCL) do cavalo-mecânico e do semirreboque no plano horizontal:

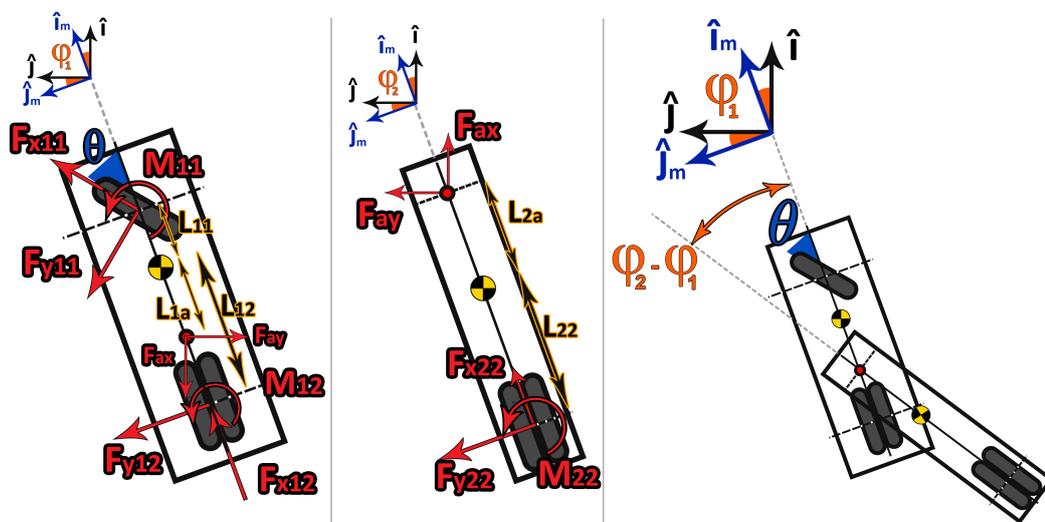


Figura 7: Diagrama de corpo livre: Cavalo mecânico e Semirreboque

No Cavalo-mecânico é possível perceber a presença das Forças F_{x11} , F_{y11} e Momento M_{11} no pneu dianteiro e estas representam a redução do sistema de forças dos pneus direito e esquerdo do eixo. Nesse caso, $F_{x11} = F_{x11L} + F_{x11R}$, $F_{y11} = F_{y11L} + F_{y11R}$ e $M_{11} = (F_{x11R} \cos(\theta) - F_{y11R} \sin(\theta))L_{1R} + (-F_{x11L} \cos(\theta) + F_{y11L} \sin(\theta))L_{1L}$. L_{1L} e L_{1R} representam a distância do plano de simetria do carro ao ponto de aplicação de força no contato do pneu-solo na esquerda e na direita respectivamente.

Em raciocínio análogo, $F_{x12} = F_{x12L} + F_{x12R}$, $F_{y12} = F_{y12L} + F_{y12R}$ e $M_{12} = F_{x12R}L_{1R} - F_{x12L}L_{1L}$.

E também, $F_{x22} = F_{x22L} + F_{x22R}$, $F_{y22} = F_{y22L} + F_{y22R}$ e $M_{22} = F_{x22R}L_{2R} - F_{x22L}L_{2L}$.

As equações da dinâmica dos corpos é deduzida usando-se Método Newton-Euler:

Cavalo-mecânico :

Equações do TMB

Em \hat{I} :

$$-F_{y11}\sin(\theta+\varphi_1) - F_{y12}\sin(\varphi_1) - F_{Ax} + F_{x11}\cos(\theta+\varphi_1) + F_{y12}\cos(\varphi_1) = m_1\ddot{X}_{11} \quad (6)$$

Em \hat{J} :

$$F_{y11}\cos(\theta+\varphi_1) + F_{y12}\cos(\varphi_1) - F_{Ay} + F_{x11}\sin(\theta+\varphi_1) + F_{x12}\sin(\varphi_1) = m_1\ddot{Y}_{11} \quad (7)$$

Equação do TMA

$$F_{y11}l_{11}\cos(\theta) + F_{x11}l_{11}\sin(\theta) - F_{y12}l_{12} + F_{Ay}l_{1a}\cos(\varphi_1) - F_{Ax}l_{1a}\sin(\varphi_1) + M_{11} + M_{12} = J_{z1}\ddot{\varphi}_1 \quad (8)$$

Semirreboque :

Equações do TMB

Em \hat{I} :

$$F_{Ax} + F_{x22}\cos(\varphi_2) - F_{y22}\sin(\varphi_2) = m_2\ddot{X}_2 \quad (9)$$

Em \hat{J} :

$$F_{Ay} + F_{x22}\sin(\varphi_2) + F_{y22}\cos(\varphi_2) = m_2\ddot{Y}_2 \quad (10)$$

Equação do TMA

$$F_{Ay}l_{2a}\cos(\varphi_2) - F_{Ax}l_{2a}\sin(\varphi_2) - F_{y22}l_{22} + M_{22} = J_{z2}\ddot{\varphi}_2 \quad (11)$$

3.3.2 Dinâmica da roda

Seguindo o desenvolvimento de RAJESH (2006), a dinâmica da roda pode ser simplificada pelo seguinte TMA:

$$I_{wij}\dot{\omega}_{wijk} = T_{wijk} - R_{eff,ij}F_{xijk} \quad (12)$$

Onde $i=(1 - Cavalos, 2-Semirreboque)$; $j=(1 - Dianteiro, 2-Traseiro)$; $k=(L - esquerdo, R-Direito)$. I_w é o momento de inércia da respectiva roda, ω_w é a velocidade angular e T_w é o torque aplicado à roda e é a combinação do torque de freio e torque motor.

3.3.3 Dinâmica de arfagem

As imagens a seguir ilustram o diagrama de corpo livre(DCL) do cavalo-mecânico, do semirreboque e dos três eixos no plano vertical:

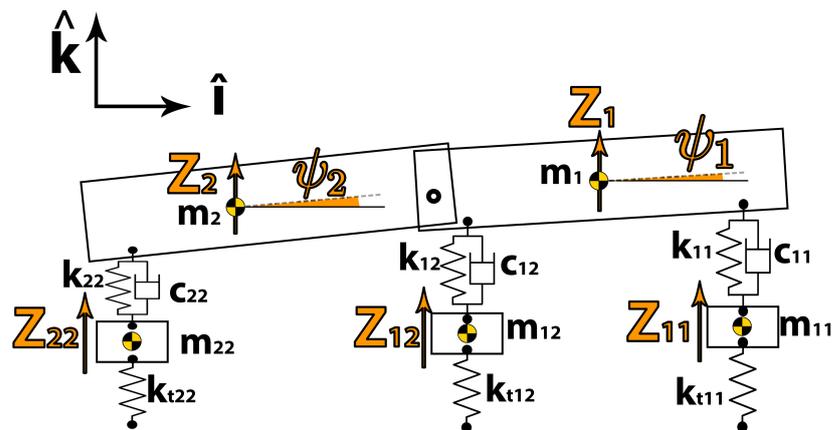


Figura 8: graus de liberdade referente à dinâmica vertical e de arfagem.

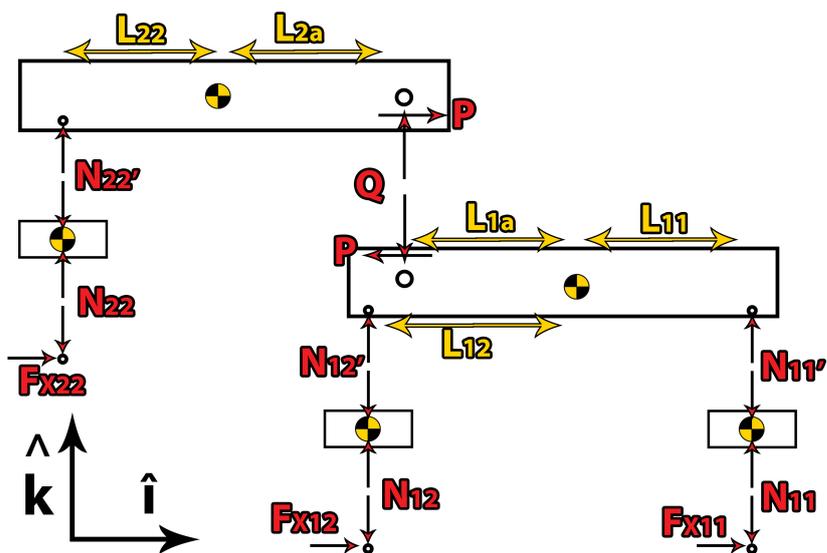


Figura 9: Diagrama de corpo livre: Cavallo mecânico e Semirreboque - Forças e dimensões relevantes

As equações da dinâmica dos corpos é deduzida usando-se Método Newton-Euler:

Cavallo-mecânico :

Equação do TMB em \hat{k} :

$$N'_{11} + N'_{12} - Q - m_1 g = m_1 \ddot{Z}_1 \quad (13)$$

Equação do TMA

$$N'_{12}L_{12} - N'_{11}L_{11} - QL_{1a} - F_{x11}(z_1 + h_{g1}) - F_{x12}(z_1 + h_{g1}) - P(h_{qr} - h_{g1}) = J_{y1}\ddot{\psi}_1 \quad (14)$$

Semirreboque :

Equação do TMB em \hat{k} :

$$N'_{22} + Q - m_2g = m_2\ddot{Z}_2 \quad (15)$$

Equação do TMA

$$N'_{22}L_{22} - QL_{2a} - F_{x22}(z_2 + h_{g2}) - P(h_{g2} - h_{qr}) = J_{y2}\ddot{\psi}_2 \quad (16)$$

Eixos/Rodas/Pneus :

Equação do TMB em \hat{k} :

$$N_{11} - N'_{11} - m_{11}g = m_{11}\ddot{Z}_{11} \quad (17)$$

$$N_{12} - N'_{12} - m_{12}g = m_{12}\ddot{Z}_{12} \quad (18)$$

$$N_{22} - N'_{22} - m_{22}g = m_{22}\ddot{Z}_{22} \quad (19)$$

Descrição das forças :

As forças normais que aparecem nas equações a cima podem ser relacionadas com as coordenadas do sistemas por relações constitutivas de molas e amortecedores. As forças $N_{11}, N_{12}, N_{22}, N'_{11}, N'_{12}, N'_{22}$ são descritas a seguir:

- $N_{11} = k_{t11}(-Z_{11}) + N_{110}$ onde k_{t11} é a rigidez equivalente dos pneus e N_{110} é a força normal de equilíbrio.
- $N_{12} = k_{t12}(-Z_{12}) + N_{120}$ onde k_{t12} é a rigidez equivalente dos pneus e N_{120} é a força normal de equilíbrio.
- $N_{22} = k_{t22}(-Z_{22}) + N_{220}$ onde k_{t22} é a rigidez equivalente dos pneus e N_{220} é a força normal de equilíbrio.
- $N'_{11} = k_{11}(Z_{11} - Z_1 + L_{11}\psi_1) + N_{110} + c_{11}(\dot{Z}_{11} - \dot{Z}_1 + L_{11}\dot{\psi}_1)$ onde k_{11} é a rigidez equivalente da suspensão e c_{11} é o coeficiente de amortecimento equivalente da suspensão.
- $N'_{12} = k_{12}(Z_{12} - Z_1 - L_{12}\psi_1) + N_{120} + c_{12}(\dot{Z}_{12} - \dot{Z}_1 - L_{12}\dot{\psi}_1)$ onde k_{12} é a rigidez equivalente da suspensão e c_{12} é o coeficiente de amortecimento equivalente da suspensão.
- $N'_{22} = k_{22}(Z_{22} - Z_2 - L_{22}\psi_2) + N_{220} + c_{22}(\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_2 - L_{22}\dot{\psi}_2)$ onde k_{22} é a rigidez equivalente da suspensão e c_{22} é o coeficiente de amortecimento equivalente da suspensão.

Além dessas forças normais, estão presentes as forças de acoplamento no conjunto quinta-roda e pino rei. Estas forças são deduzidas no apêndice 8.2.

3.3.4 Vetor de estados

Esse modelo adotado conduz, após a aplicação feita acima dos Teoremas do Momento Angular (TMA) e do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB), ao seguinte conjunto de equações diferenciais, já escritas na forma de

vetor de estados:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{X}_1 = \frac{1}{m_1}[-F_{y11}\sin(\theta + \varphi_1) - F_{y12}\sin(\varphi_1) - F_{Ax} + F_{x11}\cos(\theta + \varphi_1) \\
 \quad + F_{y12}\cos(\varphi_1)] \\
 \ddot{Y}_1 = \frac{1}{m_1}[F_{y11}\cos(\theta + \varphi_1) + F_{y12}\cos(\varphi_1) - F_{Ay} + F_{x11}\sin(\theta + \varphi_1) \\
 \quad + F_{x12}\sin(\varphi_1)] \\
 \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{J_{z1}}[F_{y11}l_{11}\cos(\theta) + F_{x11}l_{11}\sin(\theta) - F_{y12}l_{12} + F_{Ay}l_{1a}\cos(\varphi_1) \\
 \quad - F_{Ax}l_{1a}\sin(\varphi_1) + M_{11} + M_{12}] \\
 \ddot{X}_2 = \frac{1}{m_2}[F_{Ax} + F_{x22}\cos(\varphi_2) - F_{y22}\sin(\varphi_2)] \\
 \ddot{Y}_2 = \frac{1}{m_2}[F_{Ay} + F_{x22}\sin(\varphi_2) + F_{y22}\cos(\varphi_2)] \\
 \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{J_{z2}}[F_{Ay}l_{2a}\cos(\varphi_2) - F_{Ax}l_{2a}\sin(\varphi_2) - F_{y22}l_{22} + M_{22}] \\
 \ddot{\omega}_{w11L} = \frac{1}{I_{w11}}[T_{w11L} - R_{eff,11}F_{x11L}] \\
 \ddot{\omega}_{w11R} = \frac{1}{I_{w11}}[T_{w11R} - R_{eff,11}F_{x11R}] \\
 \ddot{\omega}_{w12L} = \frac{1}{I_{w12}}[T_{w12L} - R_{eff,12}F_{x12L}] \\
 \ddot{\omega}_{w12R} = \frac{1}{I_{w12}}[T_{w12R} - R_{eff,12}F_{x12R}] \\
 \ddot{\omega}_{w22L} = \frac{1}{I_{w22}}[T_{w22L} - R_{eff,22}F_{x22L}] \\
 \ddot{\omega}_{w22R} = \frac{1}{I_{w22}}[T_{w22R} - R_{eff,22}F_{x22R}] \\
 \ddot{Z}_{11} = \frac{1}{m_{11}}(N_{11} - N'_{11} - m_{11}g) \\
 \ddot{Z}_{12} = \frac{1}{m_{12}}(N_{12} - N'_{12} - m_{12}g) \\
 \ddot{Z}_{22} = \frac{1}{m_{22}}(N_{22} - N'_{22} - m_{22}g) \\
 \ddot{Z}_2 = \frac{1}{m_2}(N'_{22} + Q - m_2g) \\
 \ddot{\psi}_2 = \frac{1}{J_{y2}}(N'_{22}L_{22} - QL_{2a} - F_{x22}(z_2 + h_{g2}) - P(h_{g2} - h_{qr})) \\
 \ddot{Z}_1 = \frac{1}{m_1}(N'_{11} + N'_{12} - Q - m_1g) \\
 \ddot{\psi}_1 = \frac{1}{J_{y1}}(N'_{12}L_{12} - N'_{11}L_{11} - QL_{1a} - F_{x11}(z_1 + h_{g1}) - F_{x12}(z_1 + h_{g1}) - \\
 \quad - P(h_{qr} - h_{g1}))
 \end{array} \right. \quad (20)$$

A dedução das forças de acoplamento F_{Ax} e F_{Ay} levam em consideração condições de compatibilidade cinemática e são deduzidas em uma seção no apêndice.

3.4 Exemplo

O exemplo a seguir irá ilustrar os resultados obtidos com as equações previamente deduzidas. Os dados utilizados nas soluções numéricas são os

seguintes:

Tabela 1: Parâmetros para simulação e exemplos

Parâmetros	Valor
Gravidade (g)	9,8 m/s^2
Massa do cavalo mecânico(m1)	7449 kg
Massa do semirreboque(m2)	32551 kg
Coeficiente de rigidez lateral normalizado (f)	5,73 $1/rad$
Coeficiente de rigidez longitudinal normalizado (f_{long})	0,15 $1/rad$
Comprimento L_{11}	1,1 m
Comprimento L_{12}	2,49 m
Comprimento L_{1a}	2,49 m
Comprimento L_{2a}	4,98 m
Comprimento L_{22}	3,15 m
Comprimento L_{1R}	1,20 m
Comprimento L_{1L}	1,20 m
Comprimento L_{2R}	1,20 m
Comprimento L_{2L}	1,20 m
Altura do centro de gravidade do cavalo h_{g1}	1,4 m^*
Altura do centro de gravidade do semirreboque h_{g2}	2,435 m
Altura do acoplamento quinta-roda / pino-rei até o chão h_{g2}	1,4 m^*
Momento de inércia do cavalo-mecânico J_{z1}	26608 $kg \cdot m^2$
Momento de inércia do semirreboque J_{z2}	533917 $kg \cdot m^2$
Momento de inércia das rodas I_w	1,1867 $kg \cdot m^2$

Esses dados foram implementados no software Matlab juntamente com as equações 20. Foram impostos torques de freio e torques motores nulos, assim como um ângulo de esterçamento fixo por um certo período de tempo para que o conjunto fizesse um volta completa e velocidade inicial de 70km/h. Os gráficos que seguem foram obtidos:

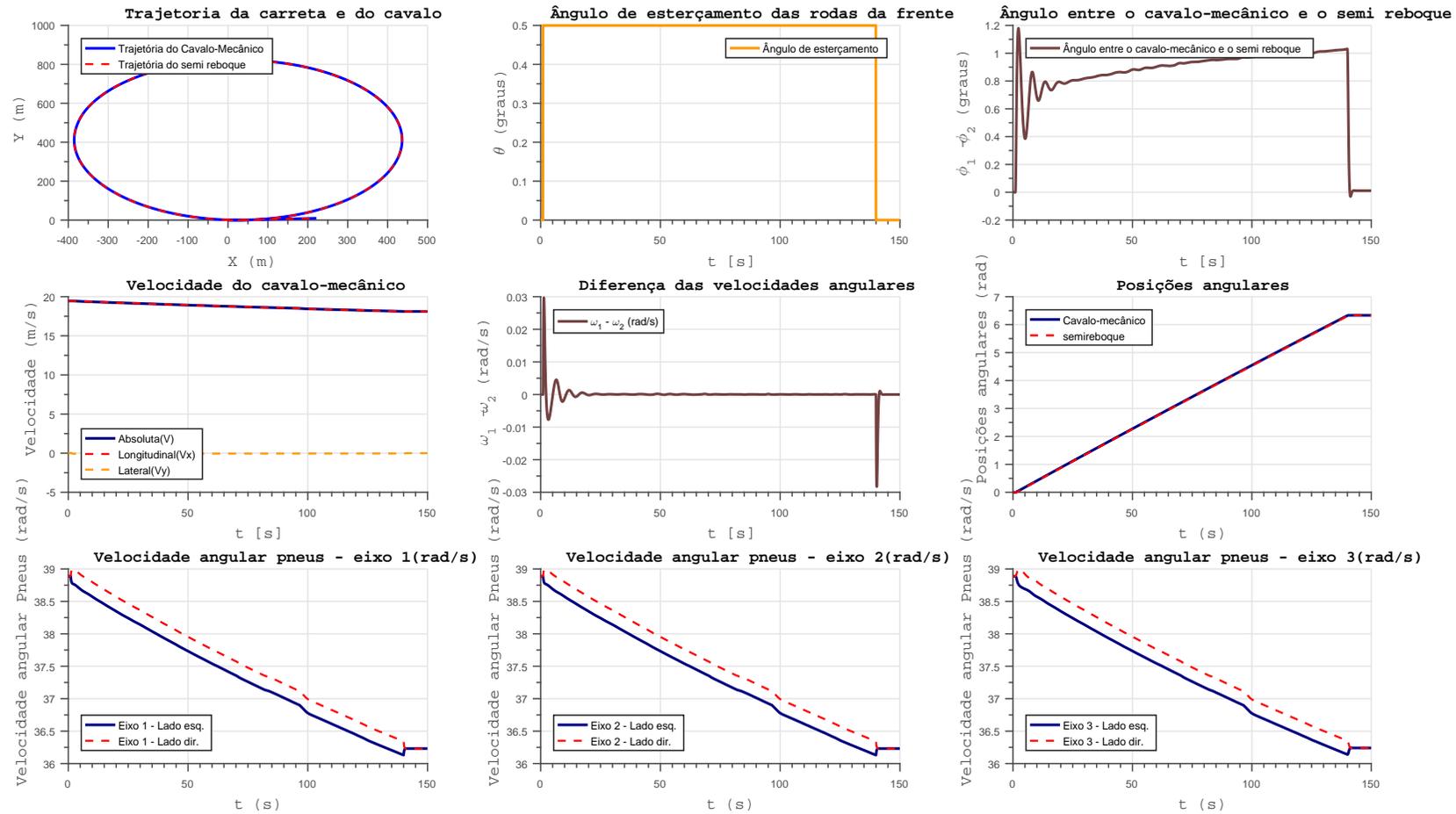


Figura 10: Resultados da simulação numérica

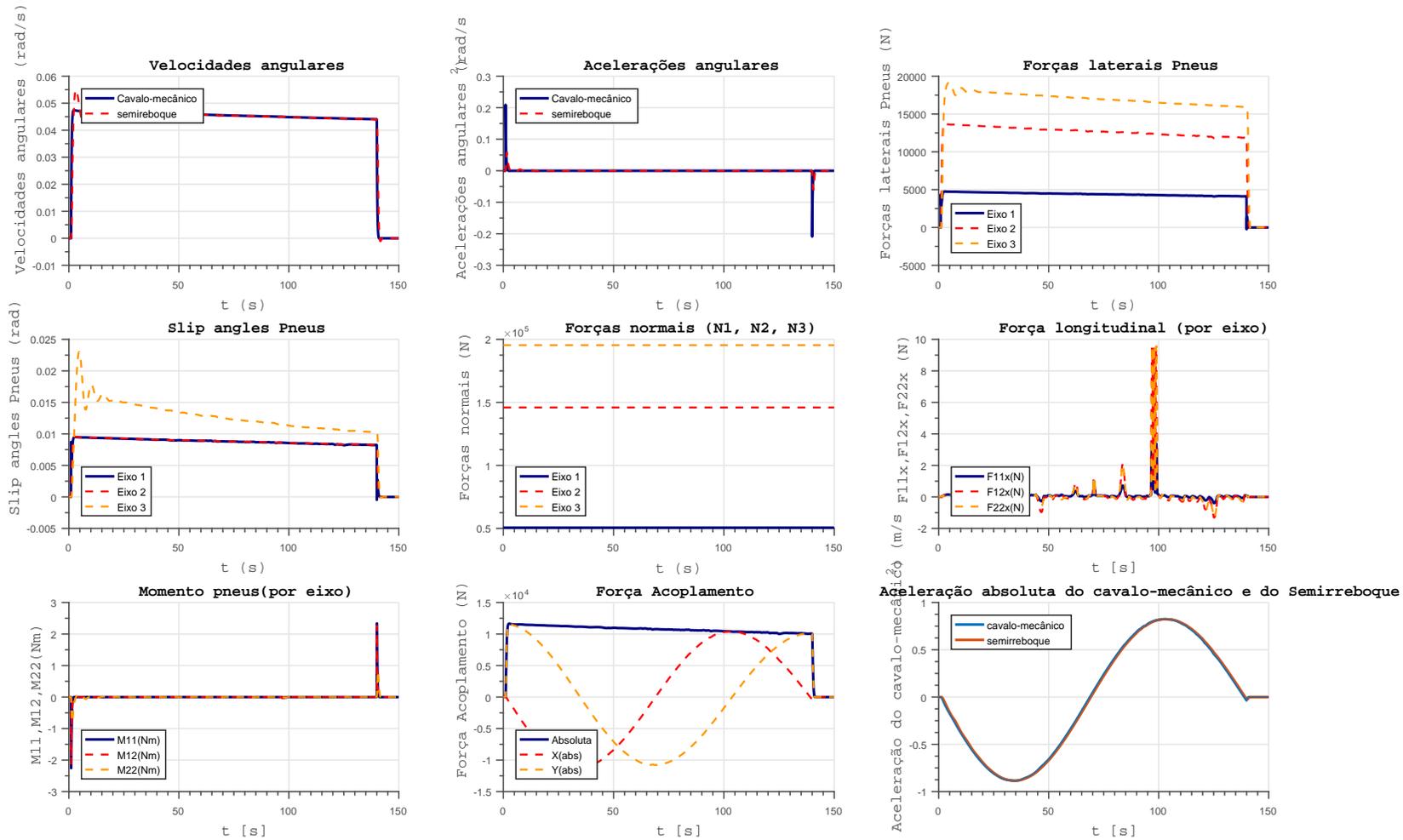


Figura 11: Resultados da simulação numérica

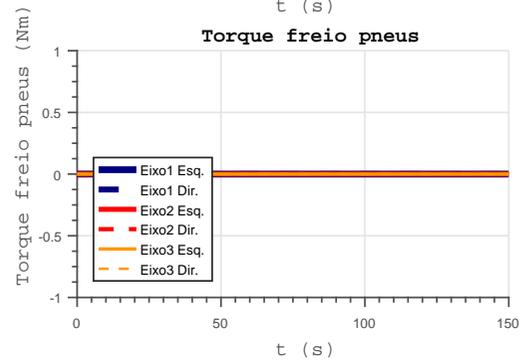
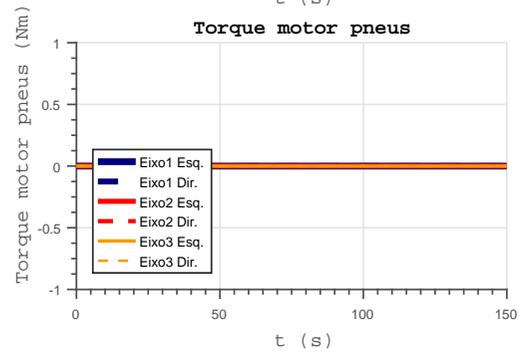
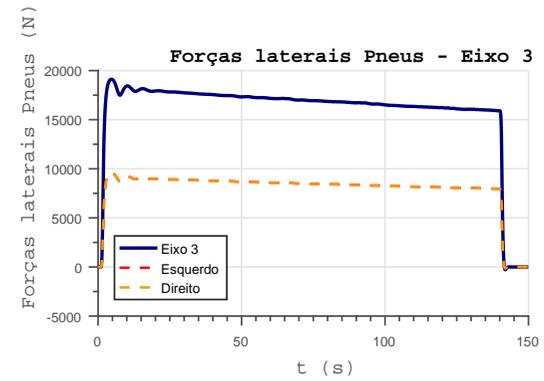
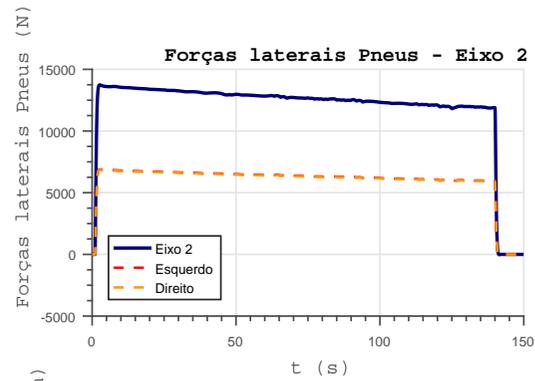
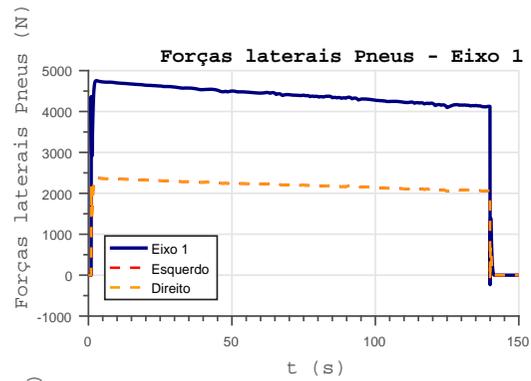


Figura 12: Resultados da simulação numérica

4 Controle

O sistema de controle que visa a redução da propensão do sistema a entrar no efeito canivete constitui um dos principais objetivos desta monografia. Estes sistemas são extensivamente trabalhados em diversas fontes e merecem destaques trabalhos como: MAAS (2009) e CHEN and SHIEH (2011). Outros trabalhos que também podem ser usados como fontes para trabalhos de dinâmica e controle lateral de veículos articulados são: KRAUTER and SUSEMIHL (1974), LIEBERT (2009), GUTIÉRREZ and CANALE (1999), CHEN and SHIEH (2011), HE et al. (2016), MOBINI et al. (2015), TABATABAEI OREH et al. (2014).

Percebe-se uma tendência no desenvolvimento de alguns tipos de sistemas de controle para melhora do desempenho da dinâmica lateral e de guinada de veículos articulados. Seguem algumas das abordagens vistas na bibliografia:

Controle por esterçamento ativo: Neste sistema de controle (em inglês Active steering system), a estabilização provem da correção ativa do esterçamento sob o movimento imposto pelo motorista. Atuadores adicionados à barra de direção mudam o esterçamento das rodas a fim de se otimizar a dinâmica do sistema. (AMITESH KUMAR, 2012) e (KHAC HUAN NGUYEN, 2014) são alguns dos trabalhos sobre o tema.

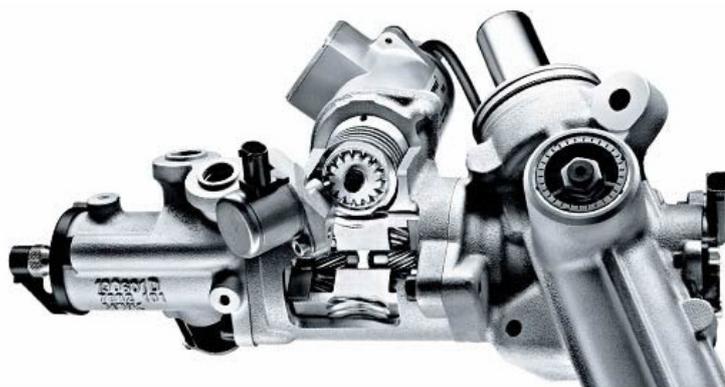


Figura 13: Exemplo de atuador em sistemas de controle ativo da direção.

Fonte: www.bmw.ie/ie/en/insights/mmactivesteering.jpg

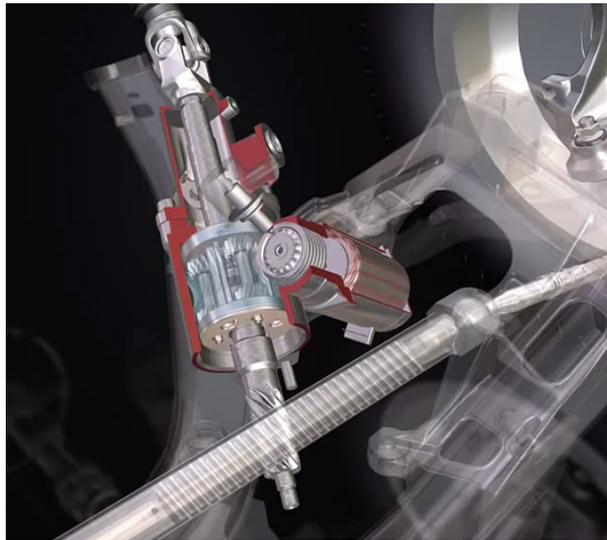


Figura 14: Exemplo de aplicação do atuador em sistemas de controle ativo da direção.

Fonte: www.youtube.com/watch?v=unL8HpMeVTA

Alguns atuadores já são implementados comercialmente. O funcionamento do atuador exemplificado na imagem a cima, na barra de direção, se dá a partir de um conjunto de engrenagens do tipo planetária dupla em conjunto com um motor elétrico que aciona um sistema do tipo sem fim - coroa. O volante está ligado a um eixo cardã que aciona a engrenagem "sol" de entrada na planetária. O sem fim, acionado por um motor elétrico, aciona a engrenagem anel da planetária, modificando a rotação da engrenagem "sol" de saída, que na ausência de movimento do motor elétrico é a mesma da de entrada (aplicada pelo motorista). Em caso de falha de algum componente do sistema de controle um mecanismo eletromagnético trava o anel da engrenagem duplo planetária, e assim o esterçamento é feito exclusivamente pelo motorista.

Nesse tipo de controle, umas das grandes dificuldades enfrentadas se encontra na modelagem e interação do sistema com o usuário (Motorista). Resultados positivos podem ser encontrados, como por exemplo com a redução de acidentes e aumento da segurança TRUCKS (2013), entretanto, se não forem bem abordados podem introduzir uma instabilidade na interface automóvel-motorista MACADAM (2003).

Controle ativo ou passivo no sistema pino rei e quinta roda: Nesse sistema de controle (em inglês articulation angle control), são instalados atuadores

(ativos e/ou passivos) no acoplamento entre o cavalo mecânico e o semirreboque. Diversas patentes podem ser encontradas relacionadas a esse sistema: J (1954), ROBERT et al. (1970), GIES PAUL E (1970), HUNGERINK et al. (1999) e MACKEY (1993).

Trabalhos como o de PALKOVICS and EL-GINDY (1996) e OREH et al. (2012) abordam esse e outros tipos de sistemas de controle para veículos articulados. O inconveniente nesse tipo de sistema de controle é a obrigação da implementação de mecanismos e atuadores que não existem em muitos sistemas atualmente.

Modelos comerciais desse sistema de controle já existem e podem ser vistos em determinados ônibus articulados MERCEDES-BENZ (2014).



Figura 15: Exemplo de aplicação do atuador em sistemas de controle ativo no acoplamento de veículos articulados.

Fonte: MERCEDES-BENZ (2014)

Controle por torque ativo ou Programa eletrônico de estabilidade: Nesse sistema de controle (em inglês active yaw torque ou Electronic Stability Program), o torque transmitido às rodas é controlado para que a dinâmica de guinada seja mais estável. Podem ser utilizados sistemas de freio diferenciais, diferenciais controlados, ou outras técnicas de controle. Sistemas eletrônicos de estabilidade (em inglês: ESC - Electronic Stability Control) apresentam funcionamento semelhante e já são embarcados em diversos veículos comerciais. Alguns trabalhos que abordam esse sistema de controle são ESMAILZADEH et al. (2003), CHEN and TOMIZUKA (1995), ELHEMLY et al. (2013) e MA and PENG (1999). A seguinte imagem exemplifica o uso comercial desse sistema de controle:

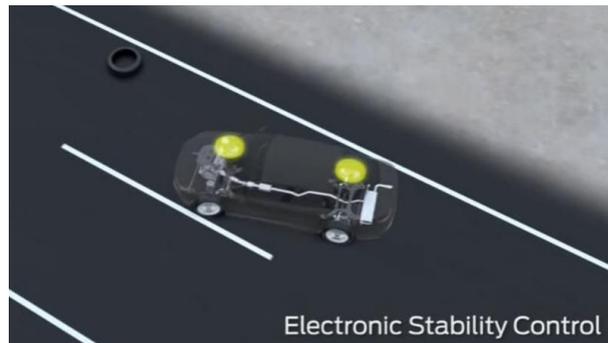


Figura 16: Exemplo de controle ativo de torque em carro de passeio. Nesse sistema o freio é aplicado em apenas duas rodas para evitar perda de controle do veículo..

Fonte: FORD (2012)

Pelo fato desse sistema ser mais facilmente implementado em um sistema cavalo-semirreboque, pois exigiria menos mudanças mecânicas em sistemas já existentes, é o sistema de controle a ser trabalhado nas próximas seções. Em termos de atuador, seria aproveitado o próprio sistema de freio do veículo, só que a dosagem seria distribuída nas rodas do veículos de forma controlada.

4.1 Modelagem Linear (para Controle)

Nesta seção é exposto o modelo linear utilizado para o desenvolvimento das técnicas de controle (próxima parte dessa monografia). A dedução do modelo linear encontra-se no apêndice (ver 8.3) e foi baseado no trabalho desenvolvido em LUIJTEN (2010b). As coordenadas são ligeiramente diferentes, mas podem ser facilmente entendidas a seguir:

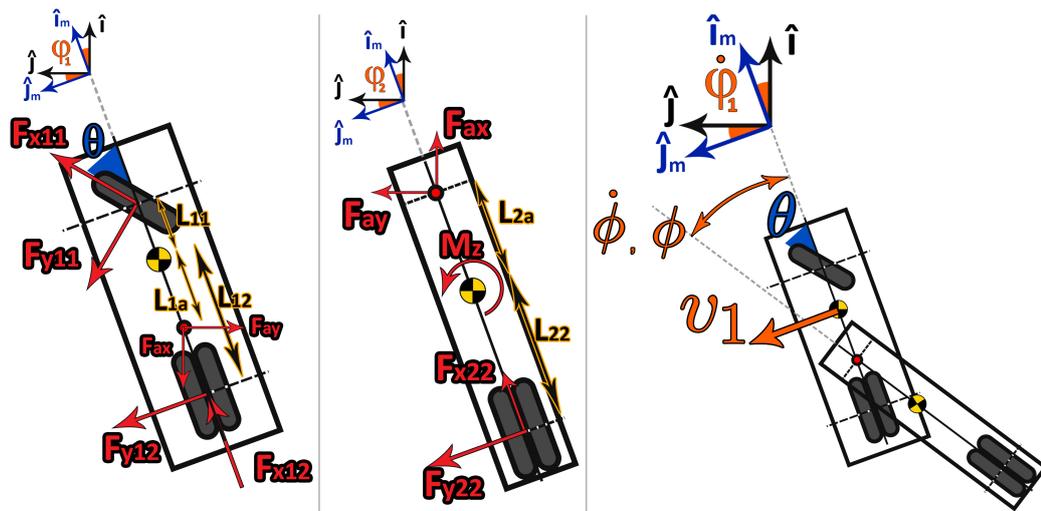


Figura 17: Diagrama de corpo livre: Cavalo mecânico e Semirreboque

O modelo utilizado foi escolhido em razão de sua simplificação e também por essa abordagem ser vista de formas semelhantes em outros trabalhos do tema (ver KOVANDA and DANG (2014) e LUIJTEN (2010b)). Os seguintes graus de liberdade são considerados nesse modelo:

- Velocidade lateral do centro de gravidade do cavalo " v_1 "
- Velocidade de guinada do cavalo " $\dot{\varphi}_1$ "
- Ângulo relativo entre o cavalo e o semirreboque " ϕ "
- Velocidade angular da coordenada relativa entre cavalo e semirreboque " $\dot{\phi}$ "

Como entrada tem-se:

- Ângulo de esterçamento dos pneus " θ "
- Torque referente ao freio diferencial " M_z "

As variáveis foram escolhidas convenientemente para facilitar o processo de sensoriamento e para se adequarem a proposta de estudo e controle determinados. A dedução completa das equações que vêm a seguir pode ser encontrada no Apêndice 8.3. O sistema foi descrito na forma de espaço de estados, pois essa notação é comumente usada para a aplicação das técnicas

de controle. Os valores numéricos para os parâmetros de massa e momento de inércia (m_1, m_2, J_{z1} e J_{z1}) estão dados na tabela 1. Tem-se então:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2(L_{1a} + L_{2a}) & -m_2L_{2a} & 0 \\ -m_2L_{1a} & I_1 + m_2L_{1a}(L_{1a} + L_{2a}) & m_2L_{1a}L_{2a} & 0 \\ -m_2L_{2a} & I_2 + m_2L_{2a}(L_{1a} + L_{2a}) & I_2 + m_2L_{2a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = -\frac{1}{u} \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + C_3 & C_{s1} - C_3(L_{1a} + l_2) + (m_1 + m_2)u^2 & -C_3l_2 & -C_3u \\ C_{s1} - C_3L_{1a} & Cq_1^2 + C_3L_{1a}(L_{1a} + L_{2a} + L_{22}) - m_2L_{1a}l_2 & C_3L_{1a}l_2 & C_3L_{1a}u \\ -C_3L_2 & C_3l_2(L_{1a} + L_{22} + L_{2a}) - m_2L_{2a}u^2 & C_3l_2^2 & C_3l_2u \\ 0 & 0 & -u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi} \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ L_{11}C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} M_z$$

Temos acima que $C_{s1} = L_{11}C_1 - L_{1a}C_2$ e $Cq_1^2 = L_{11}^2C_1 + L_{1a}^2C_2$, onde C_1, C_2 e C_3 representam os coeficientes de rigidez lateral dos três eixos do conjunto (eixo dianteiro do cavalo-mecânico, eixo traseiro do cavalo-mecânico e eixo traseiro do semirreboque respectivamente). Além disso, a entrada do esterçamento não será utilizada sob o ponto de vista de controle e pode ser interpretada, conseqüentemente, como um distúrbio. Para efeitos práticos das próximas etapas de controle será considerada apenas a entrada do momento devido ao freio. Substituindo pelos valores numéricos dos parâmetros do sistema, as matrizes A e B ficam determinadas. Dada a escolha das variáveis a serem sensoriadas, a matriz C fica também definida como $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como não há alimentação direta a matriz D é nula.

Nota-se que a única variável a ser sensoriada é o ângulo entre o cavalo e o semirreboque. Essa escolha foi feita após alguns testes preliminares acerca da observabilidade do sistema. Percebeu-se que a partir da medida dessa única variável de estado o sistema era completamente observável. Isso se mostrou bastante positivo do ponto de vista do sensoriamento do sistema, já que apenas um sensor é necessário, e sensores de coordenada angular são extremamente numerosos, encontrados para as mais diversas aplicações, tamanhos, geometrias e precisões. Além disso o posicionamento do sensor não é de grande dificuldade, bastando instalá-lo no conjunto pino-rei quinta roda. Um outro sensoriamento que poderia ter sido adotado seria o de medir a velocidade de guinada e lateral do cavalo (tal conjunto faria o sistema ser

completamente observável). No entanto, aferir as velocidades diretamente não seria prático, sendo o mais indicado adquirir sensores de aceleração e integrar os seus sinais no tempo para obtenção das velocidades citadas. Só que esse processo traria ainda mais imprecisões intrínsecas ao projeto, e ainda há a dificuldade de que esses fossem instalados no centro de gravidade do cavalo, o que poderia não ser possível ou viável. Portanto, usar o vetor C como descrito foi considerada a melhor opção para o projeto.

4.2 Estabilidade

A análise de estabilidade pode ser feita por algumas metodologias para o modelo descrito na sessão anterior. Para os parâmetros descritos na tabela 1 e para velocidade constante de $u = 70\text{km/h}$, temos um sistema estável, ao passo que para velocidade constante de $u = 90\text{km/h}$, temos um sistema instável. Tal constatação pode ser observada pela existencia de raízes com partes reais positivas na função de transferência que define o sistema linear e pela existencia desses polos positivos no diagrama de zeros e polos plotados a seguir. Para efeito comparativo, foram plotados o diagrama de polos para diferentes velocidades:

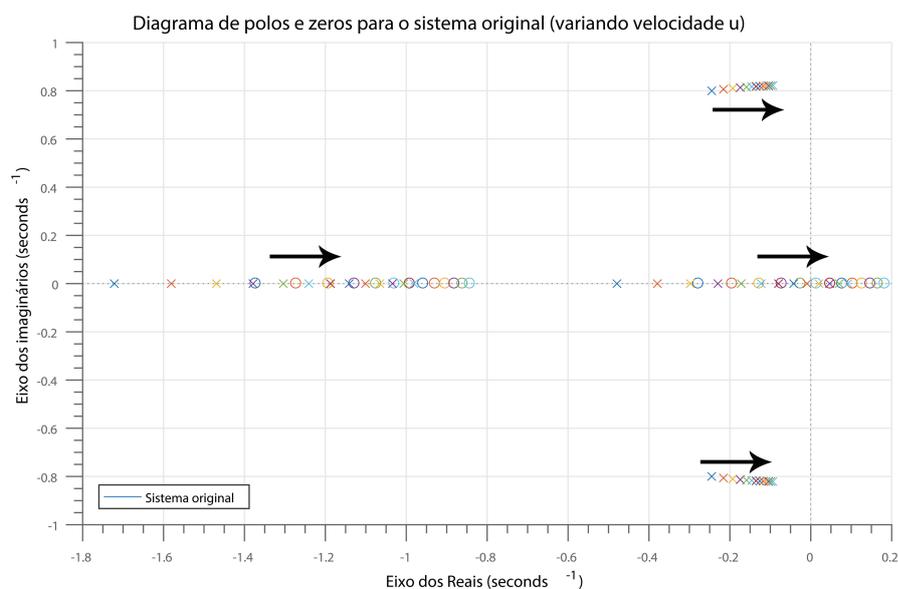


Figura 18: Diagrama de zeros e polos do sistema original, variando a velocidade longitudinal de 40 a 100 km/h

A seguir também podemos ver a influencia da massa do semireboque no diagrama de polos:

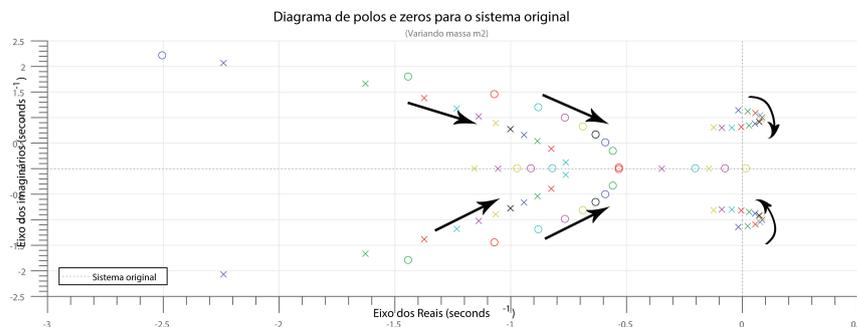


Figura 19: Diagrama de zeros e polos do sistema original, variando a massa do semireboque (m_2) de 1,5 a 32 toneladas

A estabilidade do sistema também pode ser observada na resposta em frequência do sistema, através do Diagrama de Bode a 70km/h:

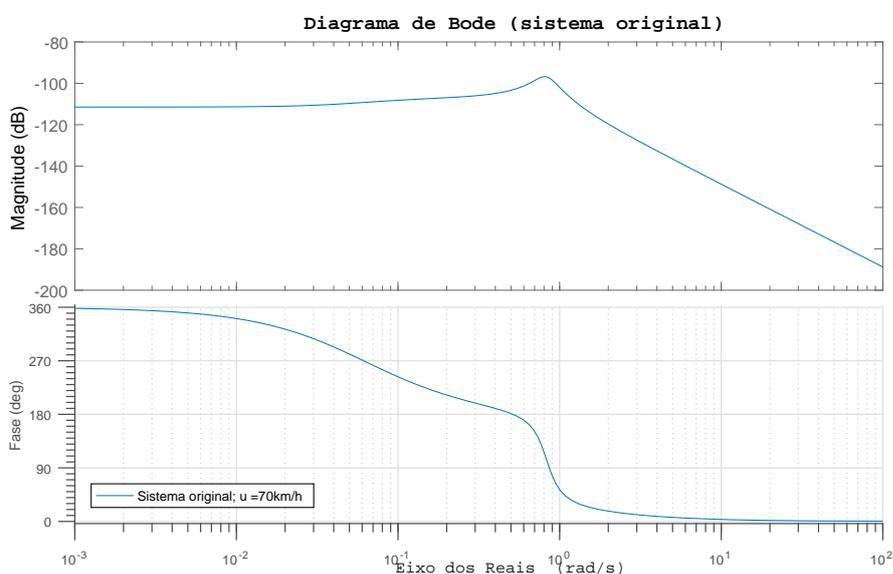


Figura 20: Diagrama de zeros e polos do sistema original a 70km/h

4.3 Metodologias de controle

Nesta seção serão desenvolvidos os diferentes tipos de controladores para que depois possam ser comparados. Serão desenvolvidas algumas

técnicas disponíveis para a sintonia de controladores do tipo Proporcional-Integrativo-Derivativo (PID), como alocação de polos (Pole placement), lugar das raízes (Root Locus) e também os resultados provenientes de uma ferramenta de sintonia automática de PID (MatLab ® "PID Tuner") inclusa no software utilizado.

Nos itens que seguem serão desenvolvidos somente as metodologias de sintonia. Elas serão aplicadas repetitivamente para diferentes velocidades de cruzeiro (o modelo em análise é altamente dependente da velocidade) para que posteriormente o controle no modelo não linear seja realizado pela interpolação desses ganhos estimados.

4.3.1 Lugar das raízes (Root Locus)

Uma metodologia para a sintonia dos ganhos PID se dá pela utilização do diagrama do lugar das raízes. Utiliza-se nesse caso o recurso "Control System Designer" do MatLab ®, ferramenta que automatiza o processo de tunagem e facilita a visualização dos resultados simultaneamente ao processo de sintonia. Matematicamente o programa plota as respostas dinâmicas e os polos do sistema para os possíveis ganhos proporcionais e pode-se, então, a partir das respostas escolher o ganho que melhor se adequou aos critérios de projeto (minimização do tempo de assentamento e do overshoot). A figura que segue mostra o diagrama do lugar das raízes para a função de transferência original e as respectivas respostas do sistema sintonizado.

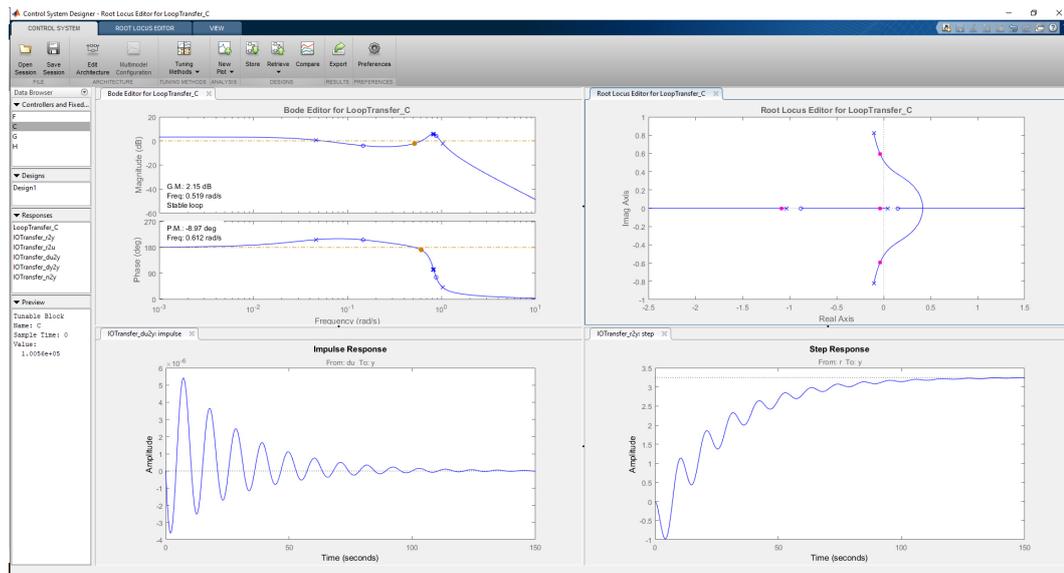


Figura 21: Diagrama do lugar das raízes para a função de transferência original

4.3.2 Alocação de polos

Para esse método de determinação dos ganhos do controlador, é utilizado o comando "place" do Matlab. Nessa metodologia, estipula-se os polos objetivos para a planta, e matematicamente o software usa o método da "Alocação dos polos" para retornar um controlador em que a planta com malha fechada apresenta os ganhos especificados. Como o sistema é controlável, como explicado anteriormente, teoricamente qualquer polo pode ser estipulado (MICHIGAN, 2017), no entanto a grande limitação é a banda do atuador (neste caso é a força de frenagem). Como a planta real apresenta uma limitação na força de frenagem que o pneu consegue desenvolver - saturação do contato - a alocação de polos muito negativos acaba sendo inviabilizada.

4.3.3 PID Turner

Nesse método de sintonia é utilizado uma ferramenta automática do software MatLab®. Nesse software, a sintonia é feita graficamente alterando-se duas barras de ajuste de "tempo de resposta" e "comportamento transiente". Para algumas configurações, a planta (em malha fechada) se mostrou instável, mas para outras a resposta dinâmica apresentou-se estável. A imagem que segue ilustra a tela do software.

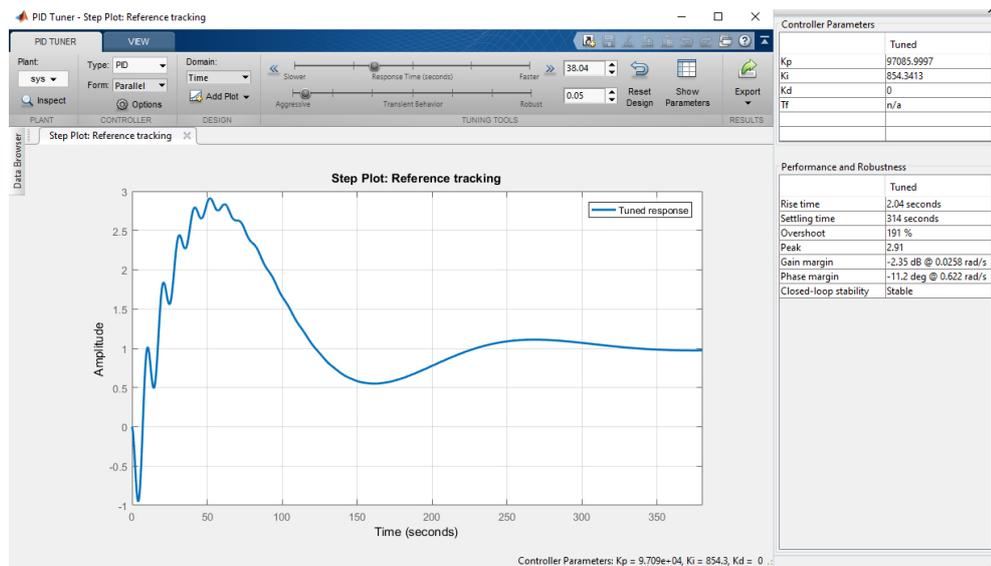


Figura 22: PIDTuner

4.4 Respostas dinâmicas

Nesta seção são expostos as respostas dinâmicas ao degrau e ao impulso do sistema linear em análise além dos diagrama de polos e zeros e do diagrama de bode.

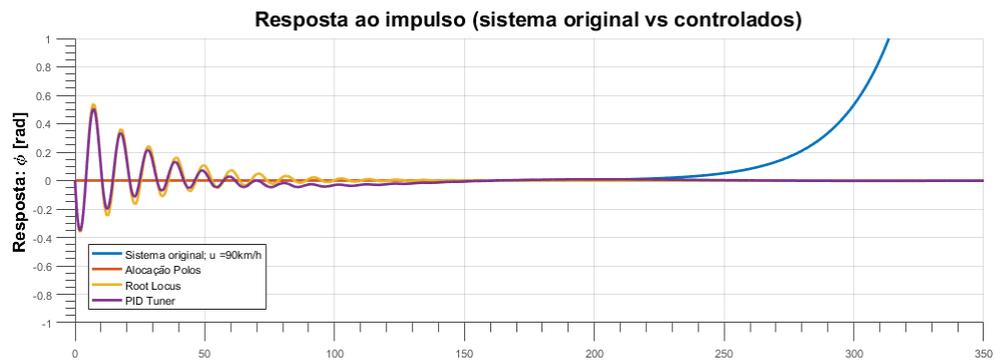


Figura 23: Resposta ao impulso do sistema original vs controlado

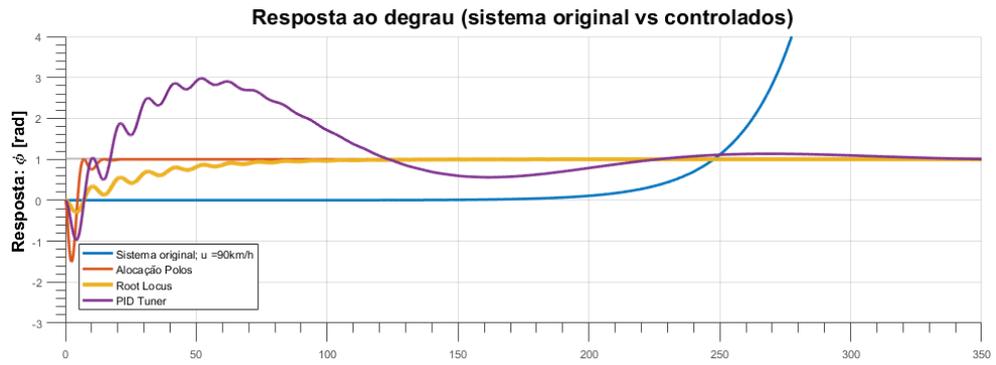


Figura 24: Resposta ao degrau do sistema original vs controlado

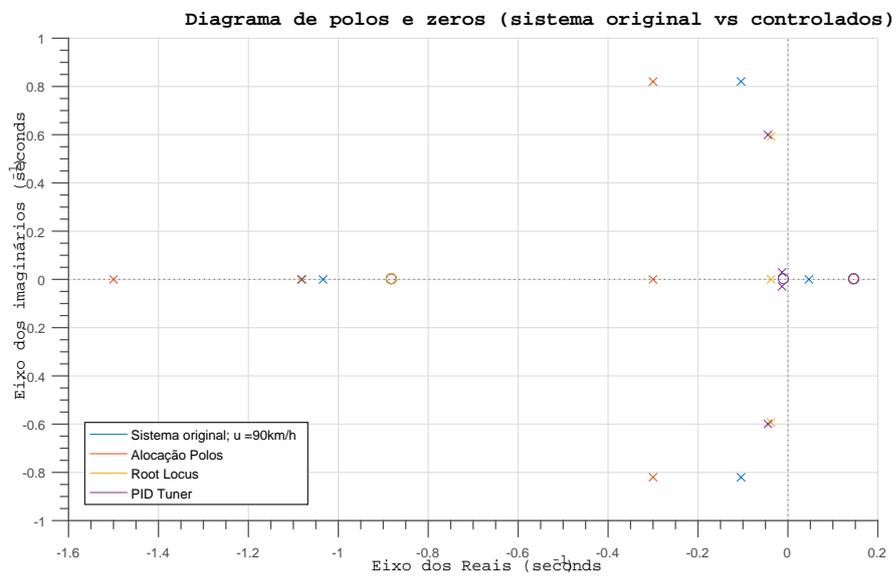


Figura 25: Diagrama de polos e zeros do sistema original vs controlado

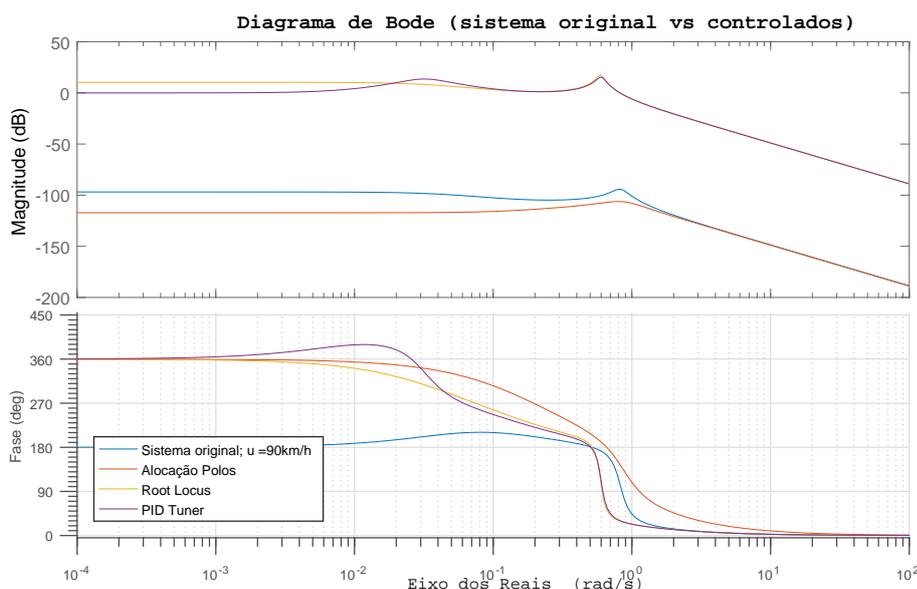


Figura 26: Diagrama de bode do sistema original vs controlado

Pode-se observar pelos gráficos acima, que a metodologia que obteve melhor desempenho foi a alocação dos polos, mas as demais técnicas (root locus e PID Tuner) também apresentaram resultados satisfatórios, uma vez que conseguiram estabilizar um sistema que originalmente era instável.

5 Sistema não linear com controle

A seção anterior mostrou que as três metodologias de sintonização dos ganhos de controle foram satisfatórias e conseguiram estabilizar o sistema (inicialmente instável para a velocidade de cruzeiro selecionada para o veículo). Nesta seção aplica-se o sistema de controle para o modelo não linear e busca-se comparar a resposta dinâmica do sistema com e sem controle. Por simplicidade da aplicação, optou-se pelo método de sintonia de Lugar das raízes (root locus), uma vez que é utilizado apenas um ganho proporcional.

Vale destacar que na implementação do sistema de controle buscou-se um sistema robusto e confiável. Percebeu-se, entretanto, que a aplicação do controle em manobras simples e pouco exigentes na verdade atrapalhava a controlabilidade do veículo, deixando-o mais lento para atingir a estabilização. A fim de se evitar a interferência do sistema de controle em manobras menos agressivas, e conseqüentemente menos sujeitas ao efeito canivete, implementou-se um sistema de "liga e desliga" do controle baseado no trabalho

de BOUTELDJA and CERREZO (2011). Nesse trabalho, o autor desenvolve um estimador da suscetibilidade do sistema ao efeito canivete com base no ângulo entre o cavalo-mecânico e sua derivada. A "suscetibilidade" do sistema ao efeito canivete é estimada pelo TLBA ("Time left before accident"), onde por uma interpolação linear verifica-se o tempo que o sistema levaria a um ângulo crítico (adotado 85°) dado o ângulo de acoplamento entre os corpos e sua derivada. O paper adota um TLBA crítico de 2,24 segundos, mas para essa monografia adota-se um TLBA mais conservador (cerca de 8 segundos). Os 8 segundos foram estimados para a desaceleração de um veículo a 100km/h com um atrito reduzido de cerca de 0.34.

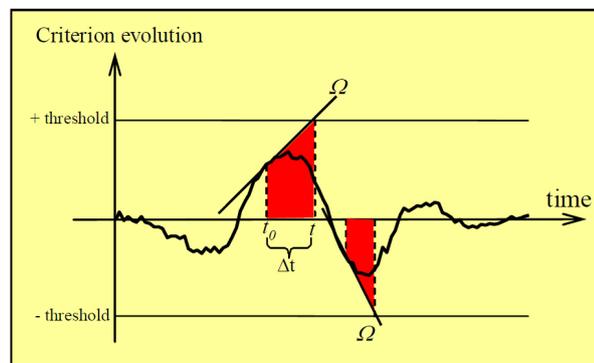


Figura 27: Risk criterion prediction (determination of time left before the accident TLBA) BOUTELDJA and CERREZO (2011)

O modelo não linear foi submetido a testes em diferentes manobras. A imagem a seguir ilustra por exemplo a eficiência do sistema de controle em evitar o efeito canivete em uma manobra de mudança de faixa brusca (esterçamento senoidal) com frenagem próxima de 5g. Essa manobra seria equivalente a tentativa de desvio de um obstáculo na pista.

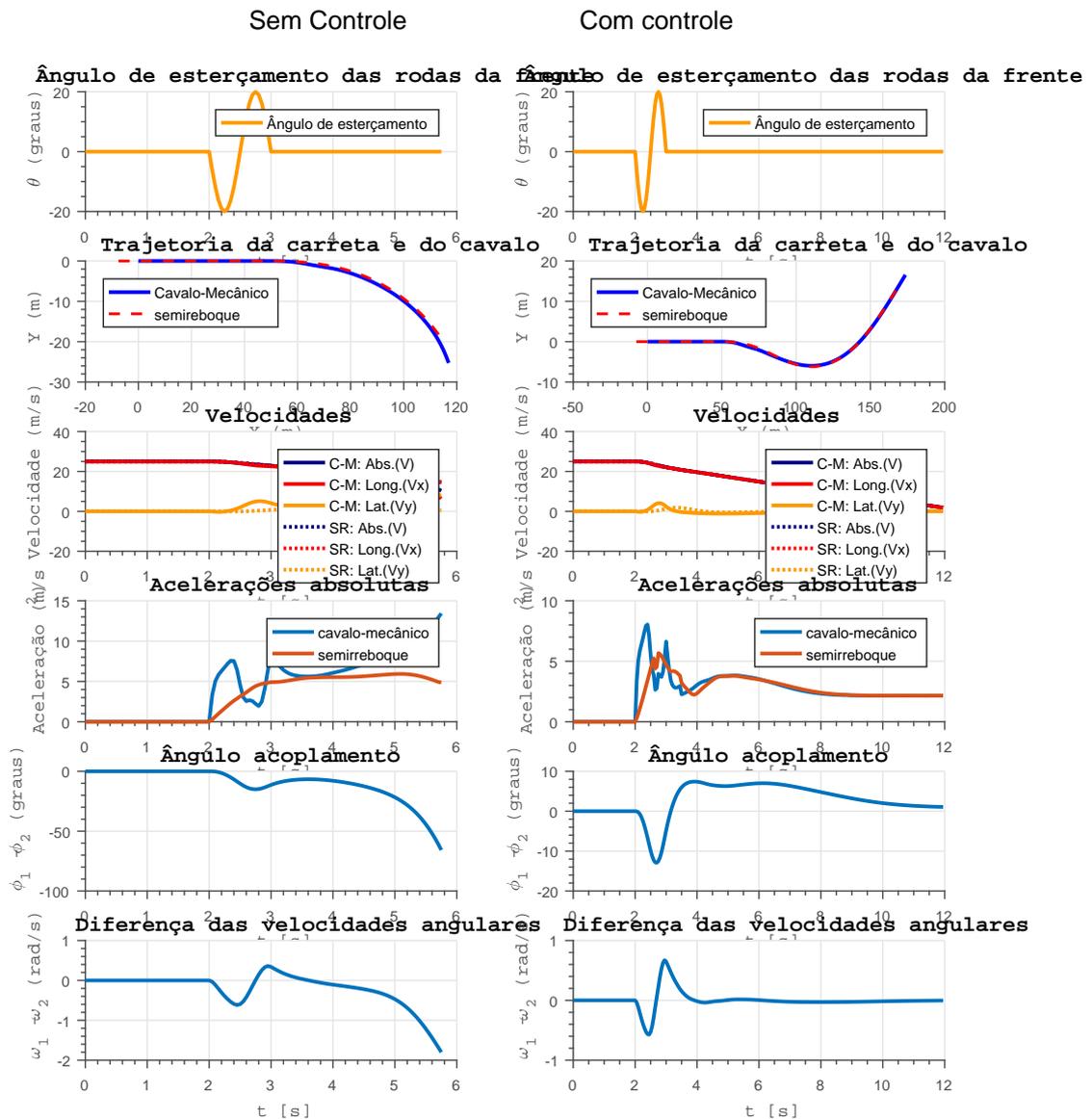


Figura 28: manobra desvio de obstáculo. Os gráficos da esquerda referem-se a simulação sem o sistema de controle. Nos gráficos da direita, o controle está implementado.

A imagem a seguir ilustra a simulação de um caso com esterçamento brusco e com uma frenagem atrasada do motorista. A situação ilustra o caso do motorista entrar com o caminhão em uma curva em alta velocidade, aplicar um ângulo de esterçamento fechado e realizar a frenagem durante a curva. Pode-se perceber que o caminhão sem o sistema de controle apresenta o efeito canivete, enquanto que o sistema controlado consegue se manter relativamente estável (mesmo com o ângulo entre os corpos chegando a cerca de 40°)

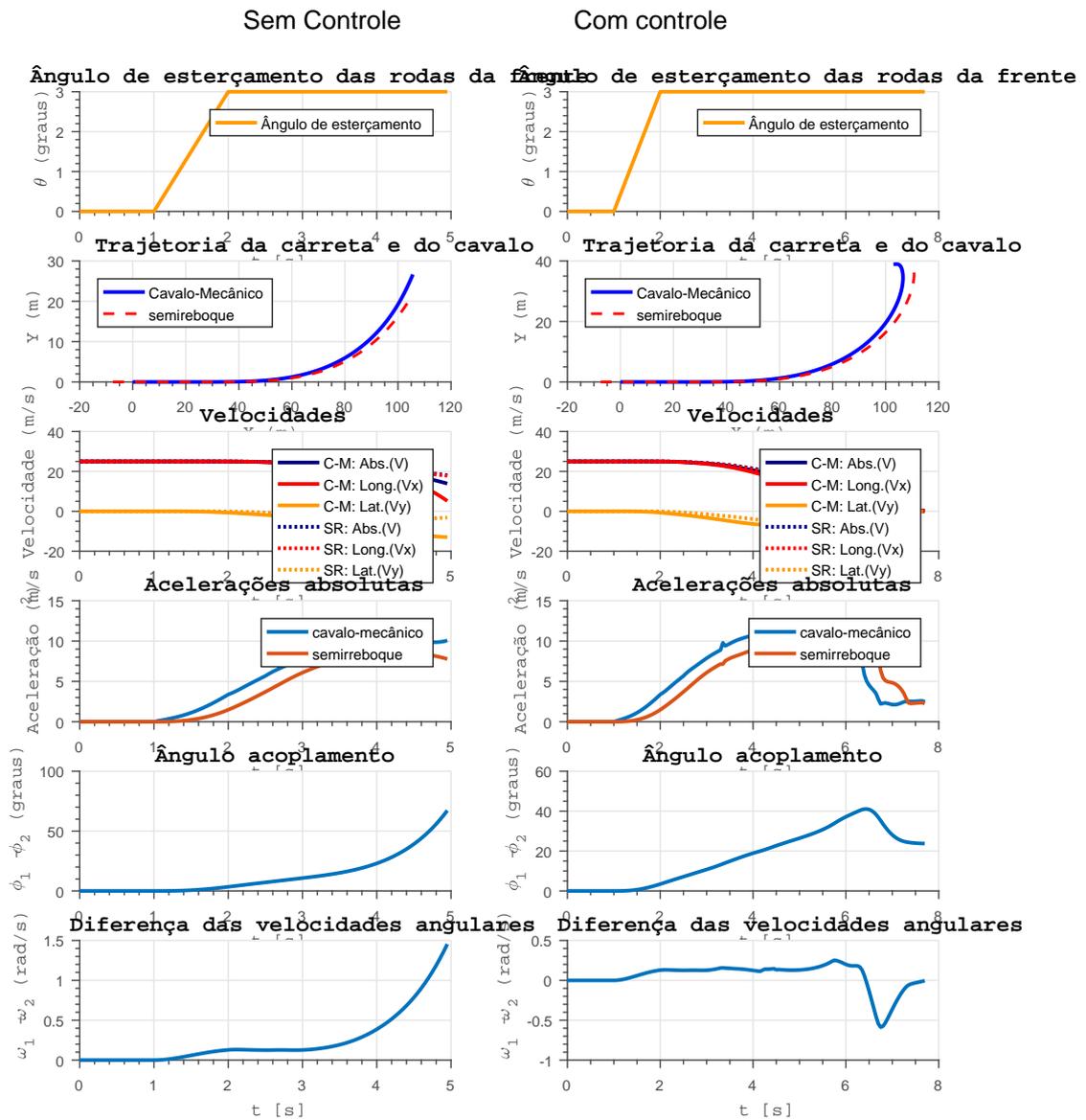


Figura 29: manobra curva fechada com frenagem. Os gráficos da esquerda referem-se a simulação sem o sistema de controle. Nos gráficos da direita, o controle está implementado.

Os resultados apresentados nessa seção ilustram o êxito do sistema de controle implementado. Vale destacar que para algumas outras condições de entradas (entradas mais agressivas / bruscas) a aplicação do sistema de controle se tornou incapaz de evitar o acidente e o veículo articulado presenciou o efeito canivete sob as duas condições (com e sem controle). Ao mesmo tempo, em razão da condição de "on-off" do sistema de controle, explicado também na seção anterior, o sistema apresentou exatamente os mesmos resultados para condições de entrada brandas, uma vez que o sistema de

controle não era ativado.

6 Conclusões

Ao longo desta monografia foi visto que o efeito canivete é um fenômeno relacionado a estabilidade de veículos articulados e está geralmente atrelado a acidentes potencialmente desastrosos, uma vez que as quantidades de movimentos e energias são grandes (carretas com semirreboques carregados podem facilmente ter massas da ordem de 30 toneladas ou mais). O tema abordado é também de grande relevância uma vez que o transporte rodoviário de cargas está presente e continuará a ser um dos principais meios de transportes de mercadorias por meio terrestre. Como mencionado, acidentes com veículos articulados estão muito presentes: a bibliografia mostra que 3,1% de todos acidentes envolvendo carretas em 2003 e 7,1% dos acidentes com vítimas fatais também nos Estados Unidos foram causados pelo efeito canivete.

Dado a periculosidade observada e constatada estatisticamente, o autor optou por abordar o fenômeno do efeito canivete e tratou ao longo da monografia da modelagem, simulação e desenvolvimento de um sistema de controle capaz de melhorar o desempenho de veículos articulados quanto a essa dinâmica (do efeito canivete). Os seguintes passos são desenvolvidos ao longo da monografia:

- Levantamento de extensa bibliografia relacionada com dinâmica veicular, dinâmica de veículos articulados, análises de estabilidade, modelagem de pneus, sistemas de controles e sistema de identificação e predição do efeito canivete.
- Modelagem de um sistema não linear com 19-3 graus de liberdade envolvendo o estudo da dinâmica de guinada, lateral, vertical, arfagem e rotação das rodas.
- Modelagem e simulação do contato Pneu-solo incluindo o fenômeno de transferência de carga, sua contribuição nos parâmetros de rigidez, representação adequada do saturamento e estabilidade numérica.
- Pesquisa e levantamento das principais estratégias de controle encontradas na atualidade para o aprimoramento da dinâmica no que tange o efeito canivete e estabilidade lateral.

- Linearização do modelo desenvolvido visando a aplicação de técnicas de controle clássico juntamente para a estratégia de controle de freios diferenciais.
- Desenvolvimento de tres técnicas diferentes para sintonia do controlador e respectivas análises de estabilidade e desempenho.
- Implantação do sistema de controle no modelo não linear inicialmente desenvolvido, juntamente com sistema de previsão e ativação.
- Análise da contribuição e efetividade do sistema de controle para duas manobras agressivas realizadas no simulador não linear desenvolvido.

Ao longo do trabalho foi possível identificar pontos de importância crítica e que merecem ser destacadas nessa conclusão.

Primeiramente o modelo não linear desenvolvido foi de certa forma inédito, uma vez que a maioria dos trabalhos aplicam equações dinâmicas menos completas e reservam esse tipo de estudo com tantas variáveis de simulação para programas exclusivos e dedicados a esse tipo de análise (Exemplo MSC Adams). Conseqüentemente, o modelamento exigiu grande esforço por parte do autor, uma vez que o número de equações simultâneas a serem simuladas era grande e a estabilidade numérica não foi algo trivial. O uso de integradores apropriados foi necessário, por que o sistema se mostrava "Rígido" em diversos casos simulados. A modelagem dos pneus representou uma etapa fundamental nesse trabalho de conclusão, uma vez que ela estava diretamente relacionada com a estabilidade numérica da simulação e deveria representar de forma adequada a saturação do pneu para os casos de efeito canivete.

Segundo, a implantação da dinâmica vertical e de arfagem se mostrou fundamental para a simulação com êxito do efeito canivete. O fenômeno de transferência de carga decorrente desses graus de liberdade simulados, foi identificado como essencial, pois nos casos simulados sem essa dinâmica, os valores simulados eram fisicamente inaceitáveis (exemplo: Desacelerações irreais).

Terceiro, quanto às estratégias de controle, foram identificadas várias abordagens possíveis e selecionar a mais adequada é uma tarefa complicada. A recomendação é pelo uso simultâneo das diversas técnicas, mas tal estratégia fogia do foco e da extensão do presente trabalho.

Quarto, a implantação simultânea do sistema de detecção do efeito canivete e consequente ativação regulada do sistema de controle se mostrou bastante interessante. De forma inédita o autor usou uma técnica inicialmente de predição e aviso para o critério on-off do sistema de controle. O uso dessa metodologia se mostrou extremamente vantajoso, uma vez que evitou a perda de dirigibilidade do veículo em manobras "brandas" em consequência do sistema de controle principal (freio diferencial).

Quinto, e por último, a simulação do veículo em duas manobras agressivas comprovou o êxito (pelo menos parcial) do sistema de controle desenvolvido.

7 Referências

- ALEXANDER, LEE and DONATH, MAX. *A Lateral Dynamic Model of a Tractor-Trailer: Experimental Validation*. University of Minnesota, 1996.
- AMITESH KUMAR, DINESH N. KAMBLE. *An Overview of Active Front Steering System*. International Journal of Scientific and Engineering Research, 2012.
- AZAD, NASSER LASHGARIAN. *Dynamic modelling and stability controller development for articulated steer vehicles*. PhD thesis, University of Waterloo, 2006.
- BADI, H and BOUTELDJA, M. *Sensitivity and Reliability Analysis of Articulated Heavy Vehicle*. International Conference on Structural Dynamics - EURODDYN, 2011.
- BEER, FERDINAND P, JOHNSTON JR, E RUSSELL, and TENAN, MARIO ALBERTO. *Mecânica vetorial para engenheiros: cinemática e dinâmica*. Makron Books, 1994.
- BIAN, MINGYUAN, CHEN, LONG, LUO, YUGONG, and LI, KEQIANG. A dynamic model for tire/road friction estimation under combined longitudinal/lateral slip situation. Technical report, SAE Technical Paper, 2014.
- BOGARD, S and WINKLER, C B. *Lateral Performance Measurements of Wide-Base Truck Tires*. University of Michigan, 1991.
- BOUTELDJA, M. *Prediction and Detection of Jackknifing Problems for Tractor Semi-Trailer*. IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, 2006.
- BOUTELDJA, MOHAMED and CERZO, VÉRONIQUE. Jackknifing warning for articulated vehicles based on a detection and prediction system. In *3rd international conference on road safety and simulation*, pages 14–16, 2011.
- CHEN, C. *Backstepping Design of Nonlinear Systems and Its Application to Vehicle Lateral Control in Automated Highway Systems*. University of California at Berkeley, 1996.
- CHEN, C and TOMIZUKA, M. *Lateral Control Of Heavy Duty Vehicles For Automated Highway Systems*. University of California at Berkeley, 1998.

- CHEN, CHIEH and TOMIZUKA, MASAYOSHI. Dynamic modeling of articulated vehicles for automated highway systems. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 1, pages 653–657. IEEE, 1995.
- CHEN, CHIEH and TOMIZUKA, MASAYOSHI. Modeling and control of articulated vehicles. *California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH), UC Berkeley*, 1997.
- CHEN, LK and HSU, JY. Investigation of jack-knife prevention in an articulated scaled vehicle. *Vehicle System Dynamics*, 46(S1):765–777, 2008.
- CHEN, LK and SHIEH, YA. Jackknife prevention for articulated vehicles using model reference adaptive control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 225(1):28–42, 2011.
- DE BREYNE SALVAGNI, RONALDO. A model for forces on tire-ground contact region. *Blucher Engineering Proceedings*, 3(1):404–415, 2016.
- DONHA, DECIO CRISOL. Slides sobre o lugar das raizes, 2015. URL sites. poli.usp.br/d/pme2472.
- DUGOFF, HOWARD, FANCHER, PS, and SEGEL, LEONARD. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance. Technical report, SAE Technical Paper, 1970.
- DUNN, ASHLEY L. (AL) and HOOVER, RICHARD L. (DICK). Class 8 truck tractor braking performance improvement study. *Transportation Research Center Inc.*, 2004.
- ELHEMLY, MOHAMED ABD ELAZEEM, FAYED, MOHAMED ABD ELGHANY, and ELMAIHY, ALI ABD ELGHANY. Tractor–semitrailer jackknifing elimination using semitrailer differential braking technique. *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, 20(1):19–34, 2013.
- ESMAILZADEH, E, GOODARZI, A, and VOSSOUGHI, GR. Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling. *Mechatronics*, 13(7):659–675, 2003.
- FORD. Advancetrac electronic stability control (esc). ford how-to video, 2012. URL <https://owner.ford.com/how-tos/vehicle-features/safety/advancetrac-electronic-stability-control.html>.

- GIES PAUL E, KAMMAN GORDON W. Fifth wheel coupler with rotary damping, July 14 1970. US Patent 3,520,557.
- GILLESPIE, THOMAS. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers - SAE, 1992.
- GILLESPIE, THOMAS and ERVIN, R D. *The Yaw Stability of Tractor-Semitrailers During Cornering*. University of Michigan, 1979.
- GUNTUR, R and SANKAR, S. A friction circle concept for dugoff's tyre friction model. *International Journal of Vehicle Design*, 1(4):373–377, 1980.
- GUTIÉRREZ, JUAN C H and CANALE, ANTÔNIO CARLOS. *Estudo Comparativo da Estabilidade Direcional de Duas Combinações Veiculares Tipo Cavalo Semi-Reboque*. Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM, 1999.
- HE, YUPING, ISLAM, MD MANJURUL, ZHU, SHENJIN, and HU, THOMAS. A design synthesis framework for directional performance optimization of multi-trailer articulated heavy vehicles with trailer lateral dynamic control systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, page 0954407016671284, 2016.
- HUNGERINK, GERALD W, HEEB, JOHN P, and INGRAHAM, RONALD D. Fifth wheel hitch coupling control system, January 19 1999. US Patent 5,861,802.
- J, BLACK JAMES. Stabilized coupling mechanism for tractor-trailer vehicles, October 19 1954. US Patent 2,692,146.
- JAZAR, REZA N. *Vehicle dynamics: theory and application*. Springer Science & Business Media, 2013.
- JINDRA, FREDERICK. *Handling Characteristics of Tractor-Trailer Combinations*. Technical Paper 650720 - SAE International, 1965.
- KANEKO, TETSUYA, KAGEYAMA, ICHIRO, and TSUNASHIMA, HITOSHI. Braking stability of articulated vehicles on highway. *Vehicle System Dynamics*, 37(sup1):1–11, 2002.
- KHAC HUAN NGUYEN, ANH TUAN NGUYEN. *A study on active front steering system for automotive*. Ngo Quyen University, 2014.

- KOEHN, P. and ECKRICH, M. Active steering - the bmw approach towards modern steering technology, 2004. URL <http://papers.sae.org/2004-01-1105/>.
- KOVANDA, J and DANG, H A. *Determination of Trajectory of Articulated Bus Turning along Curved Line*. Czech Technical University in Prague, 2014.
- KRAUTER, A and SUSEMIHL, E. *Jackknifing of Tractor-Semitrailer Trucks - Detection and Corrective Action*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1974.
- LIEBERT, DANIEL. *Modelagem Dinâmica Longitudinal de Veículos Articulados*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP, 2009.
- LUIJTEN, MFJ. Lateral dynamic behaviour of articulated commercial vehicles. *Eindhoven University of Technology*, 2010a.
- LUIJTEN, M.F.J. Lateral dynamic behaviour of articulated commercial vehicles. *Master's thesis - Eindhoven University of Technology - Department Mechanical Engineering*, 2010b.
- MA, WEN-HOU and PENG, HUEI. Worst-case vehicle evaluation methodology—examples on truck rollover/jackknifing and active yaw control systems. *Vehicle System Dynamics*, 32(4-5):389–408, 1999.
- MAAS, JWLH. Jackknife stability of a tractor semi-trailer combination. *Master project DCT*, 2009.
- MACADAM, CHARLES C. Understanding and modeling the human driver. *Vehicle System Dynamics*, 40(1-3):101–134, 2003.
- MACKEY, PATRICK J. Apparatus and methods for inhibiting jackknifing of articulated vehicles, November 9 1993. US Patent 5,259,640.
- MARTINEZ, RICARDO. *Traffic Safety Facts (2003): A Compilation of Motor Vehicle Crash Data from the Fatality Analysis Reporting System and the General Estimates System*. DIANE Publishing, 2005.
- MATHWORKS. Matlab r2013a, 2013. URL <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
- MERCEDES-BENZ. Articulated turntable controller (atc), 2014. URL http://www.mercedes-benz.co.uk/content/unitedkingdom/mpc/mpc_unitedkingdom_website/en/home_mpc/bus/home/buses_world/update/news2015/winter_testing/ATC.html.

- MICHIGAN, UNIVERSITY OF. Controls for matlab and simulink - introduction: State-space methods for controller design, 2013. URL <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=ControlStateSpace#35>.
- MICHIGAN, UNIVERSITY OF. Introduction: State-space methods for controller design. <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=ControlStateSpace>, 2017. Accessed: 2017-09-30.
- MIT. Feedback control systems lectures, 2010. URL <http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-30-feedback-control-systems-fall-2010/>.
- MOBINI, FARZAD, GHAFFARI, ALI, and ALIREZAEI, MOHSEN. Non-linear optimal control of articulated-vehicle planar motion based on braking utilizing the state-dependent riccati equation method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 229(13): 1774–1787, 2015.
- M.PINXTEREN. Brake and roll-over performance of longer heavier vehicle combinations. *Master's thesis - Eindhoven University of Technology - Department Mechanical Engineering*, 2010.
- NAYL, THAKER. *Modeling, Control and Path Planning for an Articulated Vehicle*. Lulea University of Technology, 2013.
- NHTSA. 2014 traffic safety factsheet: Large trucks. Technical report, NHTSA-National Highway Traffic Safety Administration, 2016.
- OREH, SH TABATABAEI, KAZEMI, R, and AZADI, S. A new desired articulation angle for directional control of articulated vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of multi-body dynamics*, 226(4):298–314, 2012.
- PACEJKA, HANS. *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier, 2006.
- PACEJKA, HANS B. *Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies*. SAE Technical Paper Series, 1987.
- PALKOVICS, L and EL-GINDY, M. Examination of different control strategies of heavy-vehicle performance. *Transactions of the ASME-G-Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 118(3):489–498, 1996.

- RAJESH, RAJAMANI. Vehicle dynamics and control. *Mechanical engineering series*. Springer, 2006.
- RIZZI, RAFAEL GONÇALVEZ. *Desenvolvimento de um Engate Tipo Quinta Roda - Pino Rei com Amortecimento Ativo para o Uso em Veículos Comerciais*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP, 2008.
- ROBERT, HUGHSON, DOUGLAS, RUMSEY ROLLIN, and OTHERS. Fifth wheel viscous damper construction, June 30 1970. US Patent 3,517,946.
- SALVAGNI, RONALDO B, ALVES, MARCELO AL, and BARBOSA, ROBERTO S. Geometrical model for tires under vertical loading. *Blucher Engineering Proceedings*, 1(1):1–15, 2013.
- SANTOS, VINÍCIUS LOPES DOS. *Estudo da Dinâmica Vertical de um Veículo Através da Teoria de Sistemas Multicorpos*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP, 2007.
- SCHWEDER, RONALDO KLEIN. *Modelagem de Carroceria pelo MEF para Estudo de Dinâmica Veicular*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP, 2007.
- SPINOLA, ALEXANDRE DE LIMA. Modelagem e controle não linear da direção de um veículo terrestre. *Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO - Engenharia elétrica*, 2004.
- STARNES, MARC. Large-truck crash causation study: An initial overview. Technical report, NHTSA-National Highway Traffic Safety Administration, 2006.
- TABATABAEI OREH, S HAMED, KAZEMI, REZA, and AZADI, SHAHRAM. A sliding-mode controller for directional control of articulated heavy vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 228(3):245–262, 2014.
- TRUCKS, VOLVO. How it works: Volvo dynamic steering, 2013. URL <http://mag.volvotrucks.com/global/global/article/?art=3747&ref=1>.
- UFF. Cap.xxv. funções hiperbólicas, 2017. URL http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap25_Calc1.html.
- WINKLER, C B and ERVIN, R D. *Effects of Tire Properties on Truck and Bus Handling*. University of Michigan, 1976.

YAMAKADO, MAKOTO, NAGATSUKA, KEIICHIRO, and TAKAHASHI, JUNYA.
A yaw-moment control method based on a vehicle's lateral jerk information.
Vehicle System Dynamics, 52(10):1233–1253, 2014.

8 Apêndice

8.1 Dedução do sistema de equações relativo a adoção da hipótese de conjunto pino rei-quinta roda infinitamente rígido

Com essa hipótese foi necessário então escrever as condições de compatibilidade geométrica e dinâmica a serem satisfeitas na união entre cavalo e semirreboque. O sistema linear resultante ao final dessa dedução é implementado junto ao vetor de estados que rege a dinâmica do sistema, e é resolvido a cada passo de integração para a determinação dos esforços devidos a articulação que ocorrem no cavalo e no semirreboque. Vale salientar que as variáveis aqui presentes nessa etapa são as mesmas já apresentadas em etapas anteriores.

As condições de compatibilidade de deslocamentos são:

Em x :

$$X_2 + l_{2a}\cos(\varphi_2) = X_1 - l_{1a}\cos(\varphi_1)$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{X}_2 - l_{2a}[\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2) + \ddot{\varphi}_2\sin(\varphi_2)] = \ddot{X}_1 + l_{1a}[\dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi_1) + \ddot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)]$$

Em y :

$$Y_2 + l_{2a}\sin(\varphi_2) = Y_1 - l_{1a}\sin(\varphi_1)$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{Y}_2 + l_{2a}[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2) - \dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2)] = \ddot{Y}_1 + l_{1a}[\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1) - \ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1)]$$

Seja:

$$a = -F_{y11}\sin(\theta + \varphi_1) - F_{y12}\sin(\varphi_1) + F_{x11}\cos(\theta + \varphi_1) + F_{y12}\cos(\varphi_1)$$

$$b = F_{y11}\cos(\theta + \varphi_1) + F_{y12}\cos(\varphi_1) + F_{x11}\sin(\theta + \varphi_1) + F_{x12}\sin(\varphi_1)$$

$$c = F_{y11}l_{11}\cos(\theta) + F_{x11}l_{11}\sin(\theta) - F_{y12}l_{12} + M_{11} + M_{12}$$

$$d = F_{x22}\cos(\varphi_2) - F_{y22}\sin(\varphi_2)$$

$$e = F_{x22}\sin(\varphi_2) + F_{y22}\cos(\varphi_2)$$

$$f = F_{y22}l_{22} - M_{22}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{m_2} + \frac{F_{Ax}}{m_2} - l_{2a}\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2) - F_{Ay}\frac{l_{2a}^2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} + F_{Ax}\frac{l_{2a}^2\sin^2(\varphi_2)}{J_{z2}} + \\ + f\frac{l_{2a}\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} = \frac{a}{m_1} - \frac{F_{Ax}}{m_1} + l_{1a}\dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi_1) + \\ + c\frac{l_{1a}\sin(\varphi_1)}{J_{z1}} + F_{Ay}\frac{l_{1a}^2\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1)}{J_{z1}} - F_{Ax}\frac{l_{1a}^2\sin^2(\varphi_1)}{J_{z1}} \end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned} \frac{F_{Ay}}{m_2} + \frac{e}{m_2} + F_{Ay}\frac{l_{2a}^2\cos^2(\varphi_2)}{J_{z2}} - F_{Ax}\frac{l_{2a}^2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} - \\ - f\frac{l_{2a}\cos(\varphi_2)}{J_{z2}} - l_{2a}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2) = \frac{b}{m_1} - \frac{F_{Ay}}{m_1} + l_{1a}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1) - \\ - c\frac{l_{1a}\cos(\varphi_1)}{J_{z1}} - F_{Ay}\frac{l_{1a}^2\cos^2(\varphi_1)}{J_{z1}} + F_{Ax}\frac{l_{1a}^2\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_1)}{J_{z1}} \end{aligned}$$

Reorganizando os termos temos:

$$\begin{aligned} F_{Ax}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{l_{2a}^2\sin^2(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{1}{m_1} + \frac{l_{1a}^2\sin^2(\varphi_1)}{J_{z1}}\right) + \\ + F_{Ay}\left(\frac{-l_{2a}^2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} - \frac{l_{1a}^2\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1)}{J_{z1}}\right) = -\frac{d}{m_2} + l_{2a}\dot{\varphi}_2^2\cos(\varphi_2) - \\ - f\frac{l_{2a}\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{a}{m_1} + l_{1a}\dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi_1) + c\frac{l_{1a}\sin(\varphi_1)}{J_{z1}} \\ F_{Ax}\left(\frac{-l_{2a}^2\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)}{J_{z2}} - \frac{l_{1a}^2\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1)}{J_{z1}}\right) + \\ + F_{Ay}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{l_{2a}^2\cos^2(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{1}{m_1} + \frac{l_{1a}^2\cos^2(\varphi_1)}{J_{z1}}\right) = \\ = -\frac{e}{m_2} + l_{2a}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2) + f\frac{l_{2a}\cos(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{b}{m_1} + l_{1a}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1) - c\frac{l_{1a}\cos(\varphi_1)}{J_{z1}} \end{aligned}$$

Agrupando alguns termos e os denotando por:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{m_2} + \frac{l_{2a}^2 \sin^2(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{1}{m_1} + \frac{l_{1a}^2 \sin^2(\varphi_1)}{J_{z1}} \\
 h &= \frac{-l_{2a}^2 \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_2)}{J_{z2}} - \frac{l_{1a}^2 \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1)}{J_{z1}} \\
 \alpha &= -\frac{d}{m_2} + l_{2a} \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2) - f \frac{l_{2a} \sin(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{a}{m_1} + l_{1a} \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1) + c \frac{l_{1a} \sin(\varphi_1)}{J_{z1}} \\
 m &= \frac{-l_{2a}^2 \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_2)}{J_{z2}} - \frac{l_{1a}^2 \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1)}{J_{z1}} \\
 q &= \frac{1}{m_2} + \frac{l_{2a}^2 \cos^2(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{1}{m_1} + \frac{l_{1a}^2 \cos^2(\varphi_1)}{J_{z1}} \\
 \beta &= -\frac{e}{m_2} + l_{2a} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) + f \frac{l_{2a} \cos(\varphi_2)}{J_{z2}} + \frac{b}{m_1} + l_{1a} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) - c \frac{l_{1a} \cos(\varphi_1)}{J_{z1}}
 \end{aligned}$$

Chegamos, finalmente, ao seguinte sistema, cuja descrição já foi feita anteriormente no começo dessa seção:

$$\begin{cases} F_{Ax} \cdot g + F_{Ay} \cdot h = \alpha \\ F_{Ax} \cdot m + F_{Ay} \cdot q = \beta \end{cases}$$

Por fim, temos que:

$$\boxed{F_{Ay} = \frac{m\alpha - g\beta}{mh - qg}} \quad (21)$$

$$\boxed{F_{Ax} = \frac{q\alpha - h\beta}{qg - mh}} \quad (22)$$

8.2 Dedução das forças de acoplamento - dinâmica de arfagem

As forças de acoplamento do conjunto pino-rei quinta-roda podem ser determinadas por equações de compatibilidade de deslocamentos, uma vez que por hipótese, o conjunto é interpretado por um vínculo tipo rótula. Nesse vínculo, os deslocamento e conseqüentemente as velocidades e acelerações

são impostos iguais para os pontos de contato entre os corpos.

Adotando a hipótese que os deslocamentos verticais e os ângulos de arfagem são pequenos, temos que:

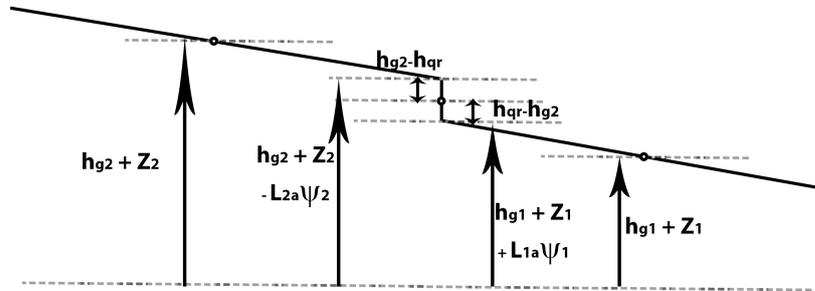


Figura 30: Diagrama base para equações de compatibilidade

$$h_{g2} + Z_2 = h_{g1} + Z_1 + L_{1a}\psi_1 + h_{qr} - h_{g1} + h_{g2} - h_{qr} + L_{2a}\psi_2 \quad (23)$$

$$Z_2 = Z_1 + L_{1a}\psi_1 + L_{2a}\psi_2 \quad (24)$$

Derivando duas vezes no tempo:

$$\ddot{Z}_2 - \ddot{Z}_1 = L_{1a}\ddot{\psi}_1 + L_{2a}\ddot{\psi}_2 \quad (25)$$

Substituindo as equações de dinâmica vertical (ver 20), temos que:

Equação do TMA

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_2}(N'_{22} + Q - m_2g) - \frac{1}{m_1}(N'_{11} + N'_{12} - Q - m_1g) = \\ & = L_{1a}\left(\frac{1}{J_{y1}}(N'_{12}L_{12} - N'_{11}L_{11} - QL_{1a} - F_{x11}(z_1 + h_{g1}) - F_{x12}(z_1 + h_{g1}) - P(h_{qr} - h_{g1}))\right) + \\ & + L_{2a}\left(\frac{1}{J_{y2}}(N'_{22}L_{22} - QL_{2a} - F_{x22}(z_2 + h_{g2}) - P(h_{g2} - h_{qr}))\right) \end{aligned}$$

Isolando temos que:

$$\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)Q + \alpha = \left(\frac{-L_{1a}^2}{J_{y1}} - \frac{L_{2a}^2}{J_{y2}}\right)Q + \beta \quad (26)$$

onde:

$$\alpha = \frac{1}{m_2}(N'_{22} - m_2g) - \frac{1}{m_1}(N'_{11} + N'_{12} - m_1g) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \beta = & L_{1a} \left(\frac{1}{J_{y1}} (N'_{12}L_{12} - N'_{11}L_{11} - F_{x11}(z_1 + h_{g1}) - F_{x12}(z_1 + h_{g1}) - P(h_{qr} - h_{g1})) \right) \\ & + L_{2a} \left(\frac{1}{J_{y2}} (N'_{22}L_{22} - F_{x22}(z_2 + h_{g2}) - P(h_{g2} - h_{qr})) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Isolando Q:

$$Q = (\beta - \alpha) \cdot \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{L_{1a}^2}{J_{y1}} + \frac{L_{2a}^2}{J_{y2}} \right)^{-1} \quad (29)$$

$$Q = \frac{(\beta - \alpha)m_1m_2J_{y1}J_{y2}}{(m_1 + m_2)J_{y1}J_{y2} + m_1m_2(J_{y2}L_{1a}^2 + J_{y1}L_{2a}^2)} \quad (30)$$

8.3 Dedução do modelo linear para controle

Como já comentado no corpo do texto, o modelo linear utilizado é feito pela abordagem da mecânica analítica e baseou-se na monografia produzida por M.F.J. Luijten na Universidade de Eindhoven (Holanda) em parceria com a fabricante de caminhões DAF (ver LUIJTEN (2010b)).

A dedução que foi feita por Luijten é para um caso mais geral, com mais de uma articulação. No presente trabalho, todavia, não foi necessária a utilização do caso geral, mas somente do caso particular para um conjunto com somente uma articulação (cavalo + 1 semirreboque). A seguir, na Figura 31, tem-se um esquema do sistema físico com as suas coordenadas de interesse, e em seguida o processo de dedução das equações de movimento a partir desse modelo.

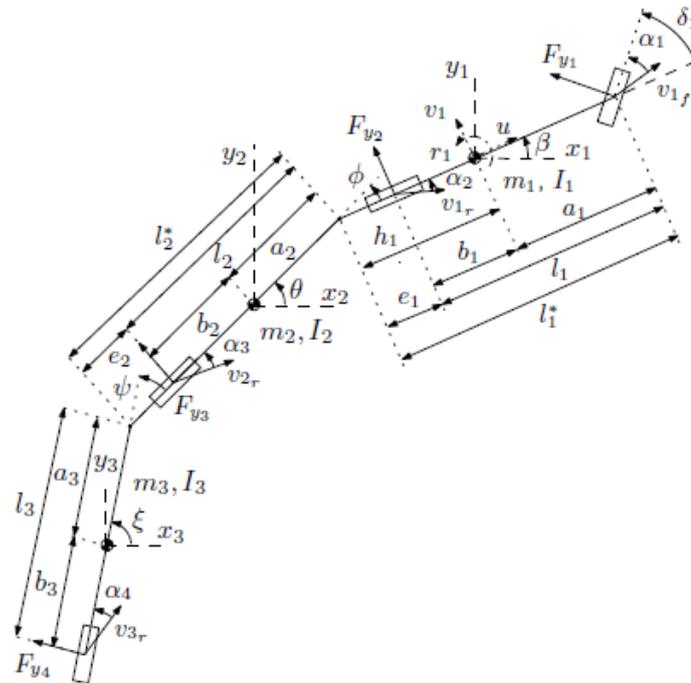


Figura 31: Esquema físico para o caso mais geral de um conjunto cavalo semirreboque

Equação de Lagrange da mecânica analítica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$$i = 1 \dots n$$

$$x = x_1 = x_2 = x_3$$

$$y_2 = y_1 - h_1 \beta - a_2 \theta$$

$$y_3 = y_1 = h_1 \beta - l_2^* \theta - a_3 \xi$$

As coordenadas generalizadas são dadas por:

$$q = \left[x \quad y \quad \beta \quad \theta \quad \xi \right]^T$$

A energia cinética pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\xi}^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)(\dot{x} + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)(h_1^2\dot{\beta}^2 - 2h_1\dot{y}_1\dot{\beta}) \\
&+ \frac{1}{2}m_2(a_2^2\dot{\theta}^2 - 2y_1a_2\dot{\theta} + 2h_1\dot{\beta}a_2\dot{\theta}) + \frac{1}{2}m_3(l_2^*\dot{\theta}^2 + a_3^2\dot{\xi}^2 - 2y_1l_2^*\dot{\theta} - 2y_1a_3\dot{\xi} \\
&+ 2h_1\dot{\beta}l_2^*\dot{\theta} + 2h_1\dot{\beta}a_3\dot{\xi} + 2l_2^*\dot{\theta}a_3\dot{\xi}) + \frac{1}{2}I_1\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\xi}^2
\end{aligned}$$

Aplicando na equação de Lagrange tem-se:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 - (m_2 + m_3)h_1\ddot{\beta} - m_2a_2\ddot{\theta} - m_3(l_2^*\ddot{\theta} + a_3\ddot{\xi})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = (m_2 + m_3)h_1(h_1\ddot{\beta} + \ddot{y}_1) + m_2h_1a_2\ddot{\theta} + m_3h_1(l_2^*\ddot{\theta} + a_3\ddot{\xi}) + I_1\ddot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m_2a_2(a_2\ddot{\theta} - \ddot{y}_1 + h_1\ddot{\beta}) + m_3l_2^*(l_2^*\ddot{\theta} - \ddot{y}_1 + h_1\ddot{\beta} + a_3\ddot{\xi}) + I_2\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m_3a_3(a_3\ddot{\xi} - \ddot{y}_1 + h_1\ddot{\beta} + l_2^*\ddot{\theta}) + I_3\ddot{\xi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

As forças generalizadas podem ser derivadas utilizando-se o princípio to trabalho virtual:

$$\begin{aligned}
\Delta W &= (-F_{y1}\delta_1 - F_{y3}\phi - F_{y4}\psi)\Delta x + (F_{y1})\Delta(y_1 + a_1\beta) \\
&+ (F_{y2})\Delta(y_1 - b_1\beta) + (F_{y3})\Delta(y_1 - h_1\beta - l_2\theta) + (F_{y4})\Delta(y_1 - h_1\beta - l_2^*\theta - l_3\xi)
\end{aligned}$$

Isto dá para as forças generalizadas de cada estado:

$$Q_x = -F_{y1}\delta_1 - F_{y3}\phi - F_{y4}\psi$$

$$Q_{y1} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4}$$

$$Q_\beta = a_1 F_{y1} - b_1 F_{y2} - h_1 F_{y3} - h_1 F_{y4}$$

$$Q_{theta} = -l_2 F_{y3} - l_2^* F_{y4}$$

$$Q_\xi = -l_3 F_{y4}$$

As coordenadas globais usadas são expressas de acordo com a velocidade no veículo e das coordenadas locais. As relações utilizadas são:

$$\dot{x} = u - v_1 \beta$$

$$\dot{y}_1 = v_1 - u \beta$$

$$\dot{\beta} = r_1$$

$$\theta = \beta + \phi$$

$$\xi = \theta + \psi = \beta + \phi + \psi$$

As forças nos pneus são expressas em coordenadas locais:

$$F_{y1} = -\frac{1}{u} C_1 (v_1 + a_1 r_1) + C_1 \delta_1$$

$$F_{y2} = -\frac{1}{u} C_2 (v_1 - b_1 r_1)$$

$$F_{y3} = -\frac{1}{u} C_3 (v_2 - b_2 r_2)$$

$$F_{y4} = -\frac{1}{u} C_4 (v_1 - h_1 r_1 - l_2^* \dot{\theta} - l_3 \dot{\xi} + C_4 (\phi - \psi))$$

Vetor de estados:

$$x = \left[v_1 \quad r_1 \quad \dot{\phi} \quad \dot{\psi} \quad \phi \quad \psi \right]^T$$

Simplificações que serão utilizadas:

$$C = C_1 + C_2$$

$$C_t = C_4 + C_4$$

$$C_{s1} = a_1 C_1 - b_1 C_2$$

$$C_{q1}^2 = a_1^2 C_1 + b_1^2 C_2$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
& \{m_1 + m_2 + m_3\}(\dot{v}_1 + \dot{u}r_1) - \{m_2(h_1 + a_2) + m_3(h_1 + l_2^* + a_3)\}\dot{r}_1 \\
& \quad \{m_2a_2 + m_3(l_2^* + a_3)\}\ddot{\phi} - m_3a_3\ddot{\psi} = \\
& -\frac{1}{u}\{[C + C_t]v_1 + [C_{s1} - C_3(h_1 + l_2) - C_4(h_1 + l_2^* + l_3)]r_1 \\
& \quad - [C_3l_2 + C_4(L_2^* + l_3)]\dot{\phi} - C_4l_3\dot{\psi} - C_tu\phi - C_4u\psi\} + C_1\delta_1 \\
& -h\{m_2 + m_3\}(\dot{v}_1 + \dot{u}r_1) + \{I_1m_2h_1(h_1 + a_2) + m_3h_1(h_1 + l_2^* + a_3)\}\dot{r}_1 \\
& \quad + \{m_2h_1a_2 + m_3h_1(l_2^* + a_3)\}\ddot{\phi} + m_3h_1a_3\ddot{\psi} = \\
& -\frac{1}{u}\{[C_{s1} - C_t]v_1 + [Cq_1^2 + C_3h_1(h_1 + l_2) + C_4h_1(h_1 + l_2^* + l_3)]r_1 \\
& \quad + [C_3h_1l_2 + C_4h_1(l_2^* + l_3)]\dot{\phi} + C_4h_1l_3\dot{\psi} + C_t h_1 u \phi + C_4 h_1 u \psi\} + C_1 a_1 \delta_1 \\
& + \{m_2a_2 + m_3l_2^*\}(\dot{v}_1 + \dot{u}r_1) + \{I_2 + m_2a_2(h_1 + a_2) + m_3l_2^*(h_1 + l_2^* + a_3)\}\dot{r}_1 \\
& \quad + \{I_2 + m_2a_2^2 + m_3l_2^*(l_2^* + a_3)\}\ddot{\phi} + m_3a_3l_2^*\ddot{\psi} = \\
& -\frac{1}{u}\{[-C_3l_2 + C_4l_2^*]v_1 + [C_3l_2(h_1 + l_2) + C_4l_2^*(h_1 + l_2^* + l_3)]r_1 \\
& \quad + [C_3l_2^2 + C_4l_2^*(l_2^* + l_3)]\dot{\psi} + C_4l_3l_2^*\dot{\psi} + [C_3l_2 + C_4l_2^*]u\psi + C_4l_2^*u\psi\} \\
& -m_3a_3(\dot{v}_1 + \dot{u}r_1) + \{I_3 + m_3a_3(h_1 + l_2^* + a_3)\}\dot{r}_1 + \{I_3 + m_3a_3(l_2^* + a_3)\}\ddot{\phi} \\
& \quad + \{I_3 + m_3a_3^2\}\ddot{\psi} = -\frac{1}{u}\{[-C_4l_3]v_1 + C_4l_3\{h_1 + l_2^* + l_3\}\dot{\phi} \\
& \quad C_4l_3\{l_2^* + l_3\}\dot{\phi} + C_4l_3^2\dot{\psi} + C_4l_3u\phi + C_4l_3u\psi\}
\end{aligned}$$

Para veículos com uma única articulação tem-se que $C_4 = 0$, $m_3 = 0$, $I_3 = 0$ e o vetor de estados é então:

$$\begin{bmatrix} v_1 & r_1 & \dot{\phi} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$$

A equivalência entre as coordenadas geométricas do modelo da Figura 17 e as utilizadas na dedução acima, para o caso de apenas uma articulação, é a seguinte:

- $h_1 = L_{1a}$;
- $a_1 = L_{11}$;
- $b_1 = L_{12}$;

- $l_1^* = L_{11} + L_{12}$;
- $a_2 = L_{2a}$;
- $b_2 = L_{22}$;
- $l_2 = L_{2a} + L_{22}$;
- $I_1 = J_{z1}$;
- $I_2 = J_{z2}$;

Por último, o modelo acima teve o incremento da força de freio diferencial. Nesse caso, a força de freio é dosada de forma controlada e diferenciada nos dois lados do veículo e pelo princípio de transposição da força para o Centro de massa do corpo pode ser reinterpretada como uma força longitudinal e um momento torsor (O eixo desse torque é na vertical). Essa força e esse momento (M_z) podem ser integrados facilmente ao sistema devido a linearidade das equações. Como nem todos graus de liberdade estão sendo analisados, o termo adicionado é: $I_1 \ddot{\phi}_1 = M_z$