

ENGENHARIA AUTOMOTIVA I (PME-3540)
NOTAS DE AULA

CONTATO DE ROLAMENTO

ROBERTO SPINOLA BARBOSA

São Paulo

1. MOTIVAÇÃO

A roda é um dos dispositivos mecânicos mais antigos e mais utilizados ao longo dos tempos. Os veículos terrestres utilizam a roda para se movimentar no plano ao longo das ruas e estradas. A roda constitui-se em um vínculo de apoio vertical e movimento longitudinal para o veículo restringindo seu deslocamento vertical, lateral e de pivotamento. Estas restrições de movimentos são produzidas pelas forças de contato. No dispositivo veicular a roda pode ainda, se movimentar angularmente na direção ortogonal ao plano, permitindo o direcionamento do veículo.



Figura 1 – Deformação Lateral do Pneu (internet)

Para a inclusão das forças de contato no modelo de um veículo é necessário a identificação dos efeitos no contato da roda com a superfície para a determinação das forças de contato.

2. Movimento de Rolamento

Para a simulação dinâmica de veículos sob rodas, o elemento-modelo “pneu/estrada” ou “roda/trilho” são de especial importância. Para uma modelagem adequada, a resolução do modelo completo do veículo deve ter uma relação equilibrada com a complexidade do modelo de pneu utilizado. Atualmente, dois grupos de modelos podem ser identificados: modelos de manobrabilidade e modelos estruturais ou de alta frequência [Rill, 2020], mais complexos voltados para estudos estruturais e de ruído.

Modelos simplificados de pneus são adequados para simulações de dinâmica de veículos rodoviários, onde os elementos da estrutura podem ser consideradas como rígidos. Do lado do pneu, prevalecem os modelos de pneus “semifísicos”, onde a descrição das forças e torques se baseia nas características de deslizamento no contato medidas e observadas. Essa classe de complexidade do modelo de pneus é caracterizada de um lado pelo compromisso entre a simplicidade da representação e facilidade de uso, e de outro, pela eficiência no tempo de computação e precisão dos resultados.

2.1. Geometria de Contato

Grosso modo, o pneu pode ser descrito por uma banda de rolamento (*belt model*) e dois discos laterais (flanco ou flange lateral), conforme ilustrado na Figura 2. Na elaboração dos modelos de pneus, a área onde o pneu está em contato com a estrada é aproximada por um plano de superfície local efetiva que é definido pela área normal em um ponto específico P chamado ponto de contato, ilustrado à direita na Figura 2. O ponto de contato geométrico é definido pelo ponto na linha de interseção entre o plano central do aro e o plano da estrada local efetiva que possui a menor distância ao centro do aro. Tecnicamente, seu cálculo é simples. Mas, o plano de estrada local efetivo muda sua orientação à cada local em estradas irregulares e, portanto, não é conhecido antecipadamente.

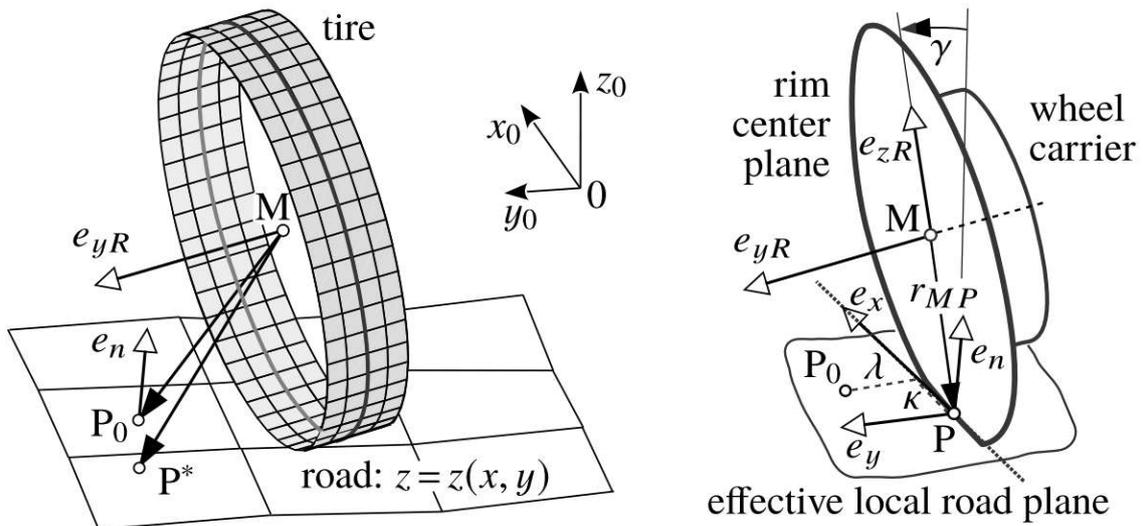


Figura 2 – Contato do Pneu com Pavimento Irregular (Rill, 2020)

Uma técnica de descrição representativa apropriada pode superar esse problema é o modelo de pneu *TMeasy* (Rill, 2020) que se utiliza de apenas quatro pontos de estrada representativos para esse fim. É claro que quaisquer três pontos que por acaso não coincidam ou formem uma linha reta já definirão um plano. Mas, quatro pontos de amostragem fornecerão uma melhor e mais robusta aproximação da inclinação local da estrada nas direções longitudinal e lateral.

2.2. Comprimento do Contato de Rolamento

Em situações de contato normal, a diferença entre o raio efetivo do pneu sem carga e o raio estático elástico, fornece a deformação do pneu $\Delta z = r_0 - r_s$. No entanto, esta deformação geral consiste em duas partes $\Delta z = \Delta z_F + \Delta z_B$ onde Δz_F e Δz_B denotam o flanco lateral médio e a deformação da banda de rolagem do pneu, conforme ilustrado na Figura 3. Aproximar a deflexão da banda de rolagem Δz_B truncando um círculo com o raio do pneu sem carga r_0 resulta em:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (r_0 - \Delta z_B)^2 = r_0^2 \quad (1)$$

Sob condições normais de operação, as deflexões da banda de rolagem serão comparativamente pequenas. Considerando $\Delta z_B \ll r_0$ como certo, a equação anterior se simplifica para:

$$\frac{L^2}{4} = 2r_0 \Delta z_B \Rightarrow L = \sqrt{8r_0 \Delta z_B} \quad (2)$$

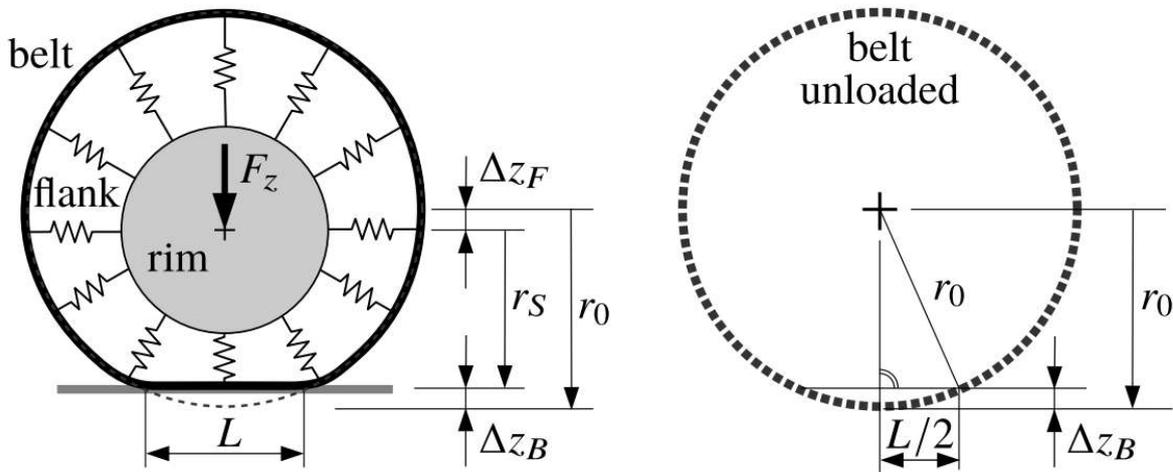


Figura 3 – Flanco Lateral e Banda de Rolagem do Pneu (Rill, 2020)

Modelos estruturais complexos de pneus podem calcular essas deflexões explicitamente. Considerando um modelo de pneu de manobra, é necessária uma aproximação prática. Assumindo simplesmente que a deformação da banda de rolagem seja aproximadamente igual à deformação do flanco, portanto $\Delta z_F \approx \Delta z_B \approx 1/2 \Delta z$ se manterá de acordo com $\Delta z = \Delta z_F + \Delta z_B$. Nessa situação obêm-se aproximadamente o comprimento de contato em função do raio do pneu sem carga r_0 e da deflexão do pneu Δz :

$$L = \sqrt{8r_0 \Delta z_B} \Rightarrow L = \sqrt{8r_0 \Delta z / 2} \Rightarrow L = 2\sqrt{r_0 \Delta z} \quad (3)$$

A inspeção prática da impressão (pegada ou *foot-print*) do pneu de um carro de passeio sobre o solo resulta a um comprimento de contato de aproximadamente: $L \approx 140$ mm. Para esse pneu, a carga, a rigidez vertical e o raio sem carga são especificados com $F_z = 4.700$ N, $k_z = 265.000$

N/m e $r_0 = 317$ mm. A deflexão total do pneu pode ser estimada por $\Delta z = F_z / k_z = 4700 \text{ N} / 265000 \text{ N/m} = 0,0177$ m neste caso particular. Então, utilizando a equação anterior obtêm-se $L \approx 150$ mm um comprimento de contato que corresponde muito bem com o comprimento típico da impressão do pneu observado na prática.

2.3. Raio Efetivo de Rolamento

Se um disco rígido de raio r_D realiza um movimento de rolagem em uma superfície plana sem escorregar, então a equação de restrição vincular de movimento $V = r_D \cdot \Omega$; também conhecido como condição de movimento de rolamento, irá acoplar a velocidade V do centro do disco à velocidade angular Ω do disco. Em uma roda rolante, a deflexão do pneu elástico deve ser levada em consideração de alguma forma. Para tanto, o movimento de rolagem de uma roda com raio descarregado r_0 e raio carregado ou estático definido como r_S , será comparado a um disco de rolagem de raio de rolamento fictício ou dinâmico r_D , conforme ilustrado na Figura 4b. A velocidade translacional do centro do disco e angular são dados por:

$$V = \frac{d}{dt}x \quad \text{e} \quad \Omega = \frac{d}{dt}\varphi \quad (4)$$

o que resulta para o arco $\Delta\varphi$ que: $\frac{dx}{dt} = r_D \frac{d\varphi}{dt}$ ou $dx = r_D \cdot d\varphi$ ou $\Delta x = r_D \cdot \Delta\varphi$ (5)

onde Δx denota a distância de deslocamento se o disco de rolamento de raio r_D girar com um ângulo específico $\Delta\varphi$. Supondo que o ângulo de rotação $\Delta\varphi$ faça com que a roda de raio sem carga r_0 execute um movimento de rolamento onde uma partícula do piso é transportada do início da área de contato até o centro da área de contato, conforme ilustrado na Figura 4a, então a distância de deslocamento da roda será dado por:

$$\Delta x = r_0 \cdot \text{sen } \Delta\varphi \quad (6)$$

A comparação com um disco rolante com base na mesma distância de percurso, fornece o valor do raio dinâmico:

$$r_D \cdot \Delta \varphi = r_0 \cdot \text{sen } \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad r_D = r_0 \frac{\text{sen } \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \quad (7)$$

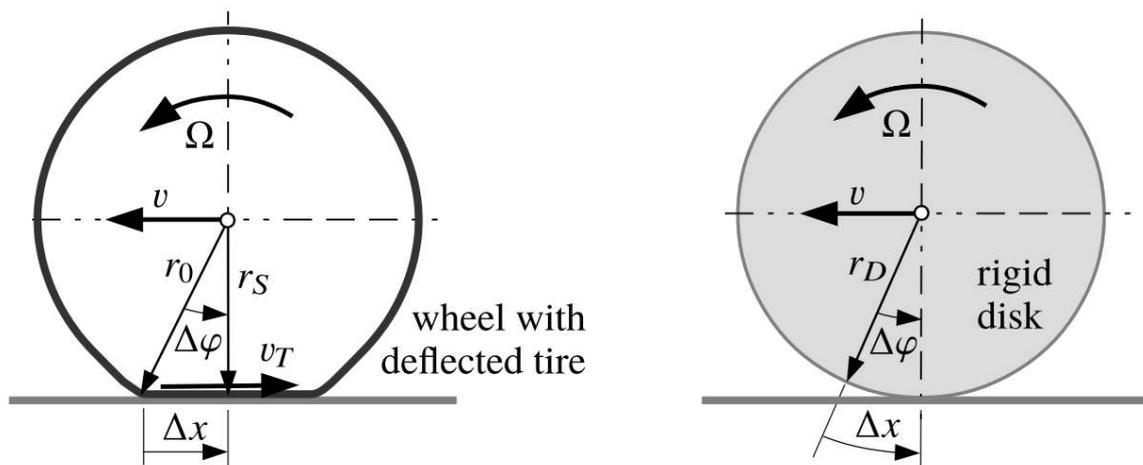


Figura 4 – Raio Efetivo de Rolamento (Rill, 2020)

Para rotações angulares pequenas, mas finitas, a função seno pode ser aproximada pelos primeiros termos de sua expansão de série de *Taylor* resultando em:

$$r_D = r_0 \frac{\Delta \varphi - \frac{1}{6} \Delta \varphi^3}{\Delta \varphi} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \Delta \varphi^2 \right) \quad (8)$$

Utilizando a relação $\cos \Delta \varphi = r_S / r_0$ obtida da inspeção da na Figura 4a e expandindo em série obtêm-se:

$$\cos \Delta \varphi = 1 - \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = 2 \cdot (1 - \cos \Delta \varphi) = 2 \cdot \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) \quad (9)$$

E obêm-se finalmente o raio de rolamento dinâmico como um valor médio ponderado do raio descarregado e carregado ou estático de um pneu:

$$r_D = r_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)\right] = \frac{2}{3} r_0 + \frac{1}{3} r_s \quad (10)$$

Note que para um pneu próximo à descolamento do solo, $r_s = r_0$ será válido. Então, a Equação (8) fornece um raio de rolamento dinâmico de $r_D = r_0$ que corresponde à solução trivial da Equação (7) quando a função seno é simplesmente aproximada por seu argumento.

3. MODELO DE CONTATO DE ROLAMENTO

A roda de veículo é constituída de um aro metálico rígido (roda ferroviária) eventualmente envolvido por uma banda elástica constituindo um pneu (roda automotiva). A hipótese de corpo perfeitamente rígido, mesmo para rodas metálicas ferroviárias, limita a descrição do desenvolvimento das forças de contato decorrentes de deformações elásticas.

3.1. Modelo de Corpo Rígido

A roda pode ser considerada como um disco rígido com apenas um ponto de contato com a superfície quando a deformação vertical fruto da elasticidade do pneu for desconsiderada. Quando o rolamento é sem escorregamento (rolamento puro) a relação $\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (C - G)$ para $(C - G) = r_D$ se verifica, conforme ilustrado na Figura 5.

O ponto de contato de uma roda tem posição variável durante o movimento mas permanece, a cada instante, em contato com o pavimento devido a axi-simetria da roda. Para o rolamento de

um disco sem descolamento o ponto C da roda deve estar, a cada instante, em contato com o ponto C' do solo, naquela posição. O eixo do veículo constitui um vínculo de articulação para com a roda que impõe um arrastamento de translação longitudinal solidária ao veículo, associado com movimento relativo de rotação em torno do eixo da roda. Portanto o eixo e o centro G da roda tem a mesma velocidade de translação $\vec{V}_{arr} = \vec{V}_G$ do veículo (movimento de arrastamento). A periferia da roda tem movimento tangencial relativo \vec{V}_{rel} , devido a rotação própria da roda, conforme mostrado na Figura 5. A velocidade absoluta do ponto C (ponto de contato com o solo) pode ser obtida por composição de movimento conforme:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \quad \text{onde} \quad \vec{V}_{rel} = \vec{\Omega} \wedge (C - G) \quad \text{e} \quad \vec{V}_{arr} = \vec{V}_{veiculo} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (C - G) \quad (11)$$

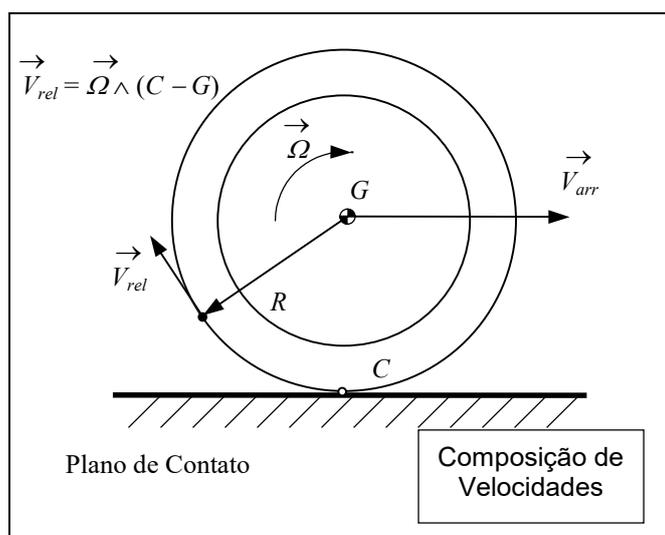


Figura 5 – Rolamento em Contato

Portanto quando a velocidade circunferência (relativa) é maior que a tangencial (arrastamento) $\vec{V}_C < \vec{0}$ ocorre escorregamento no ponto de contato para “trás” ou seja a força de atrito na roda ocorre para “frente” na tangente do plano de contato entre os corpos.

Desta forma, para o rolamento puro da roda rígida (ou seja rolar sem escorregamento no ponto de contato) o movimento deve respeitar a condição de vínculo com o solo (ponto C') que tem velocidade nula:

$$\vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (C - G) = \vec{0} \quad (12)$$

Ou seja no rolamento sem escorregamento, a velocidade circunferencial (relativa) deve ter magnitude e direção contrária à velocidade de arrastamento da ponta do eixo da roda (ou seja a do veículo). Note ainda que a velocidade circunferencial tem direção do plano da roda $\vec{V}_{rel} = \vec{\Omega} \wedge (C - G)$ que tem rotação $\vec{\Omega}$ que varia com o ângulo de esterçamento do volante de direção.

3.2. Modelo de Corpo Flexível

Verifica-se que o pneu possui deformação elástica o que torna a mecânica de contato bastante complexa. Assumindo que o pneu seja elástico, a cinemática de movimento na região do contato pode ser modelada explicitando as velocidades relativas no plano de contato.

Quando a velocidade rotacional da roda (relativa) é maior que a velocidade translacional do centro (arrastamento) a velocidade absoluta do ponto C (ponto de contato com o solo) pode ser obtida por:

$$\vec{V}_{rel} > \vec{V}_{arr} \quad \text{onde} \quad \vec{V}_{rel} = \vec{\Omega} \wedge (C - G) \quad \text{e} \quad \vec{V}_{arr} = \vec{V}_{veiculo} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (C - G) < 0 \quad (13)$$

desta forma o *Centro Instantâneo de Rotação* se localiza **acima** do plano de contato, conforme ilustrado na Figura 6b.

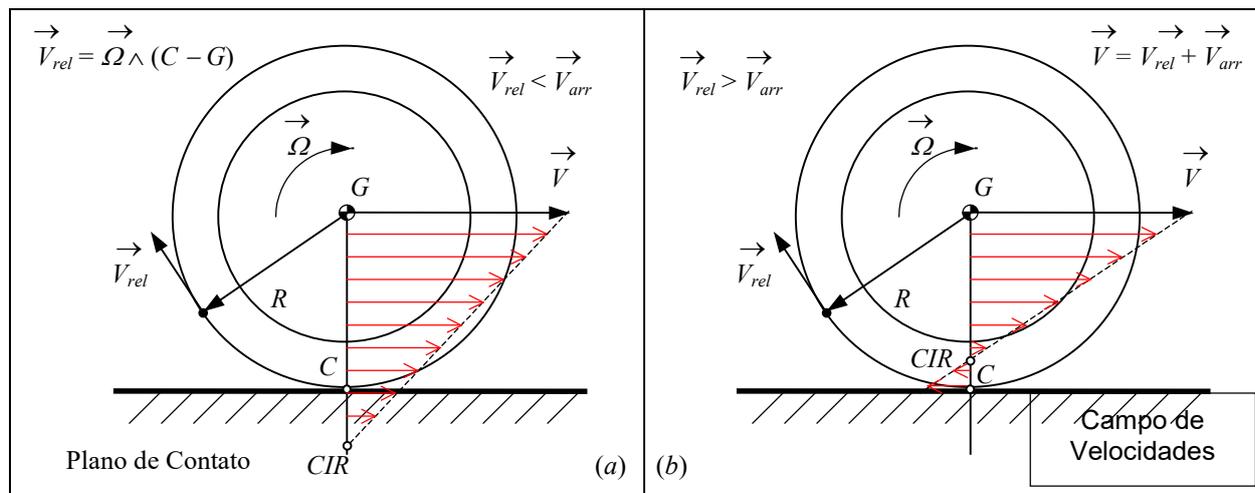


Figura 6 – Campo de Velocidades e Centro Instantâneo de Rotação

Quando a velocidade rotacional da roda é **menor** que a velocidade translacional do centro a velocidade absoluta do ponto C (ponto de contato com o solo) pode ser obtida por:

$$\vec{V}_{rel} < \vec{V}_{arr} \quad \text{onde} \quad \vec{V}_{rel} = \vec{\Omega} \wedge (C - G) \quad \text{e} \quad \vec{V}_{arr} = \vec{V}_{veiculo} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (C - G) > 0 \quad (14)$$

desta forma o **CIR** se localiza **a baixo** do plano de contato, conforme ilustrado na Figura 6a.

Neste texto a cinemática de corpo rígido será utilizada para a determinação das velocidades relativas no plano de contato. Um modelo elástico simplificado permite calcular a velocidade relativa entre o corpo e o solo (fixo) portanto determina as deformações locais no plano de contato para o cálculo das forças de contato (modelo de escova – *brush model*, Pacejka 2002). O conceito de escorregamento modular (ou micro-escorregamento - *creep*) é introduzido e permite associar as forças de contato com a rigidez do contato da roda.

4. Modelo Longitudinal de Contato de Rolamento

A roda é o elemento de vínculo entre o veículo e a pista que permite o deslocamento longitudinal do veículo, limitando entretanto os movimentos vertical e lateral. Este elemento tem movimento de translação horizontal paralelo ao seu plano e rotação em um eixo ortogonal a ele (x e Ω_y). Quando houver velocidade relativa no contato ou seja deformação ou micro-eskorregamento, seja na direção longitudinal ou lateral, haverá produção de esforço reativo devido às deformações locais do corpo elástico.

O conceito de skorregamento é fundamental para a compreensão do fenômeno de transmissão das forças tangenciais no plano de contato de rolamento. Considere como exemplo o caso de skorregamento intenso de um disco rígido, onde a diferença entre a velocidade circunferencial e a de translação seja muito grande, $\Omega R \gg Vt$. Nesta situação, desenvolve-se grande intensidade de skorregamento (v) no plano de contato e a força longitudinal produzida no contato (Força de atrito) pode ser determinada pela relação de *Coulomb* expressa por $|Fat| \leq \mu N$, conforme apresentado na Figura 7, onde o limite máximo é μN . Quando a velocidade circunferencial é maior que a tangencial, o skorregamento é menor que zero e a força longitudinal positiva. Quando as velocidades de translação e de rolamento são próximas, pequena deformação local será desenvolvida.

Como a roda dos veículos possui uma cobertura elástica de borracha (pneu), as forças vinculares em geral produzem deformação (corpo elástico). A força de contato entre dois corpos em rolamento é relacionada portanto com deformação local produzida pela diferença entre a velocidade de translação e velocidade tangencial de rolamento (deformação do material no ponto de contato). Para o caso de uma roda ferroviária, inteiramente de aço, vale o mesmo princípio embora as deformações sejam muito menores.

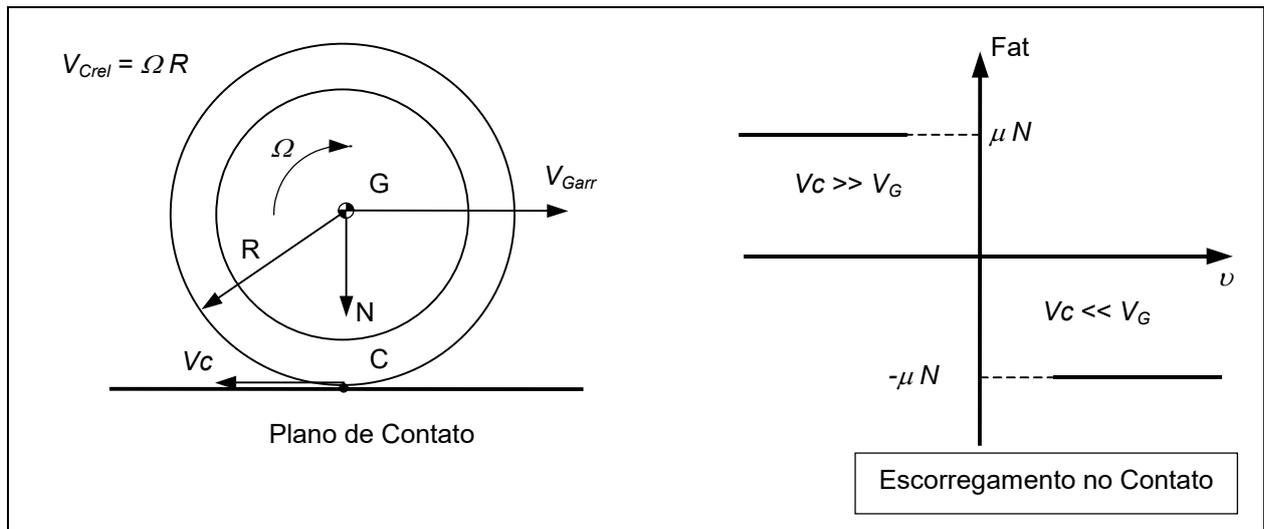


Figura 7 – Força longitudinal para grande escorregamento

Considerando agora a roda **ELÁSTICA** submetida à força vertical, devido ao peso próprio do veículo, o comprimento “ a ” da região deformada (ver Figura 8) é exponencialmente proporcional ao peso do veículo (N) e a elasticidade do material (teoria de *Hertz*). Para uma roda com velocidade tangencial V_G , conforme mostrado na Figura 8, o tempo T para um ponto da roda percorrer a distância “ a ” entre os instantes $t_0 \rightarrow t_f$ da região deformada de contato é de:

$$T = t_f - t_0 = \frac{a}{|V|} \quad (15)$$

Para que haja desenvolvimento de força longitudinal de tração, a velocidade periférica deve ser maior que a velocidade de translação da roda ($\Omega R > V$). Considerando o modelo de escova (*brush model*, *Pacejka*, 2002) e discretizando um **SETOR** do disco de abertura $d\theta$, conforme mostrado na Figura 9, e desprezando a variação do raio R na região de contato, obtêm-se um elemento de contato comprimento $du = d\theta R_D$.

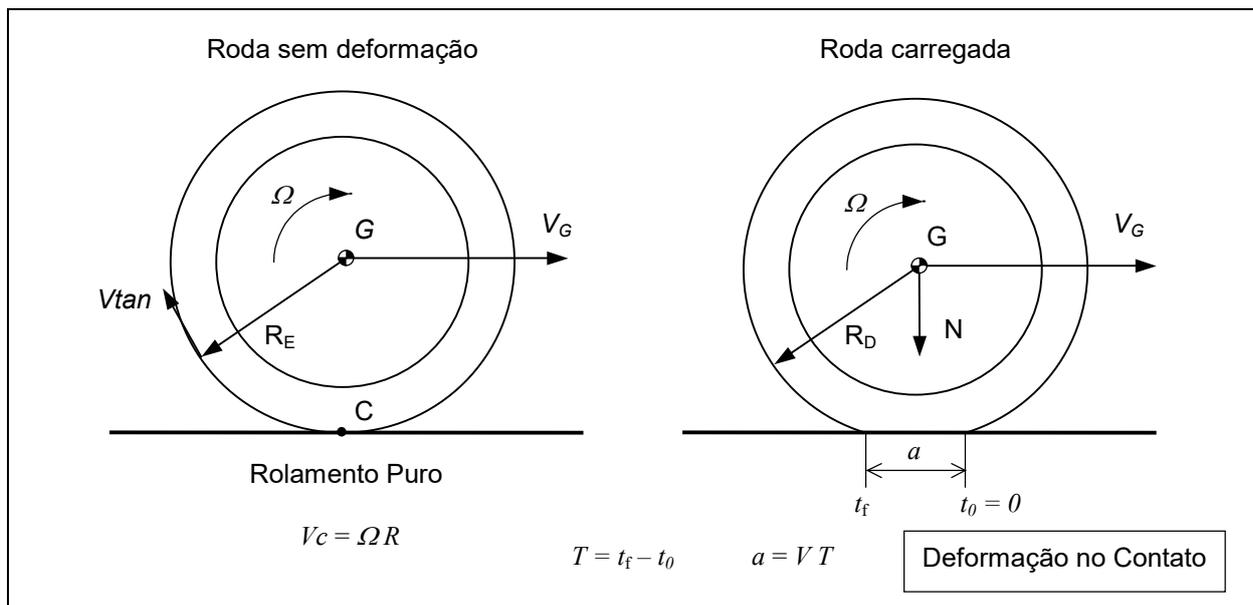


Figura 8 - Deformação da Roda Elástica e comprimento de contato

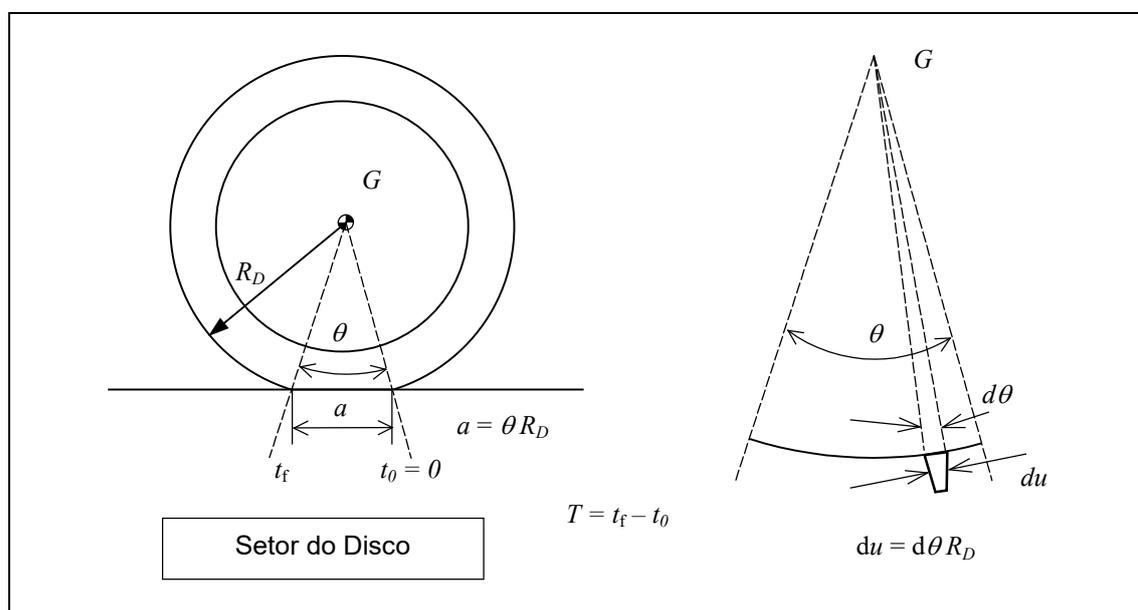


Figura 9 – Setor do disco

Observando o comportamento do elemento discreto do disco com tamanho reduzido du em contato com o pavimento durante a passagem pelo comprimento de contato a , conforme mostrado na Figura 10, e considerando que este elemento discreto toca a pista de rolamento no

instante inicial $t_0 = 0$, a deformação longitudinal do elemento é produzida pela diferença entre a velocidade periférica do disco V_c e a velocidade de translação V_G do centro do disco. A deformação radial do elemento não é considerada neste modelo (*LuGre tire model, De Wit 1995*)

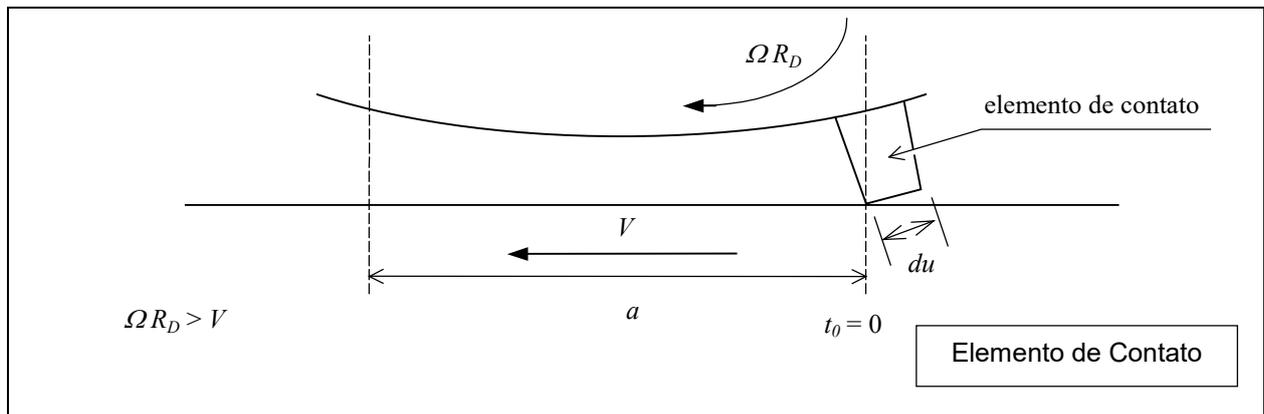


Figura 10 - Detalhe do Elemento de Contato da Roda

4.1. Escorregamento Plano

Enquanto um setor da roda e a pista permanecerem em contato, ou seja, no intervalo de tempo $0 < t < T$, conforme mostrado na Figura 11, quando o elemento de contato (setor) está na posição u no instante t , a deformação é proporcional a diferença entre as velocidades (modelo longitudinal puro linear) e expressa por:

$$v(u) = (\Omega R_D - V)t \quad (16)$$

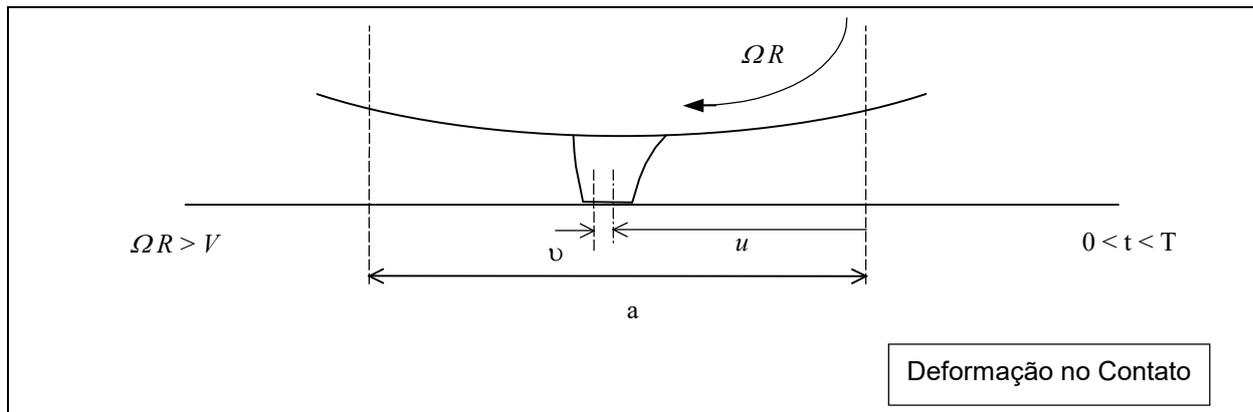


Figura 11 - Deformação do Elemento de Contato

No instante de tempo final T quando o elemento está na iminência de abandonar a região de contato (ver Figura 12) a deformação que aumentou progressivamente atinge seu valor máximo sendo expresso por:

$$v_{\max} = (\Omega R_D - V)T \quad \text{ou} \quad v_{\max} = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} a \quad (17)$$

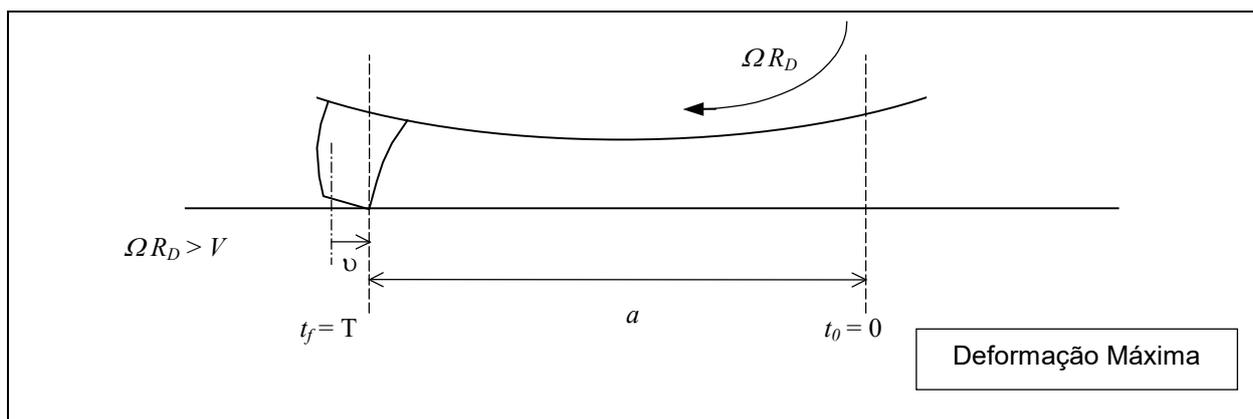


Figura 12 - Deformação Máxima do Elemento de Contato

Para um instante de tempo genérico t tem-se que $t = u / V$, obtendo-se a expressão para o escorregamento longitudinal na posição u , o escorregamento médio v_M e o escorregamento modular v :

$$v(u) = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} u \quad v_M = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \frac{a}{2} \quad v = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \quad (18)$$

Considerando que a força longitudinal em cada elemento du de largura b seja proporcional à deformação longitudinal na posição u , conforme mostrado na Figura 13, resulta em:

$$dF = b k v(u) \quad (19)$$

onde k é uma constante elástica linear de proporcionalidade do material.

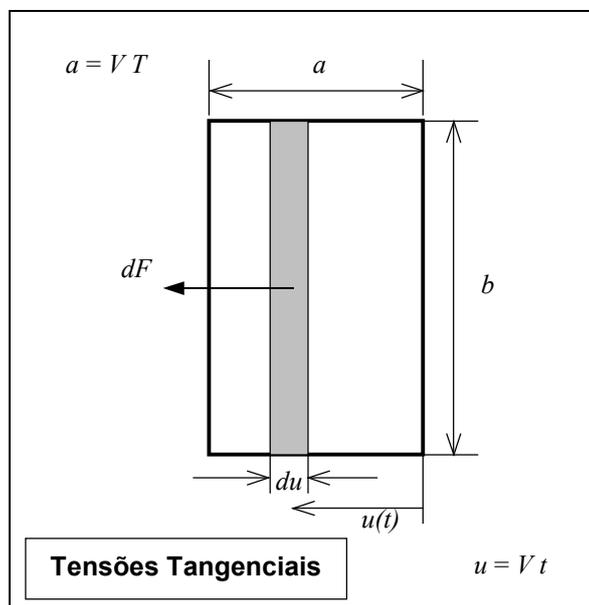


Figura 13 – Distribuição das tensões tangenciais na superfície de contato

Desprezando a interação entre cada elemento, a força total de contato é a integral da força em cada elemento du ao longo de todo o comprimento de contato a :

$$F \cong bk \int_0^a \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} u \, du \quad \rightarrow \quad F \cong bk \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \int_0^a u \, du \quad \rightarrow \quad F \cong bk \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \frac{1}{2} a^2 \quad (20)$$

$$F \cong \frac{a}{2} k ab \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \quad \rightarrow \quad F \cong k_{eq} ab \nu \quad (21)$$

ou seja a força longitudinal é proporcional a área de contato ($A = ab$) vezes o escorregamento modular ν . A constante de proporcionalidade é $k_{eq} = k a/2$.

Considerando a lei de *Hooke* para cisalhamento tem-se que as tensões de cisalhamento τ são proporcionais as distorções γ do elemento dado por:

$$\tau = G \gamma \quad (22)$$

A constante de proporcionalidade é o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material (G).

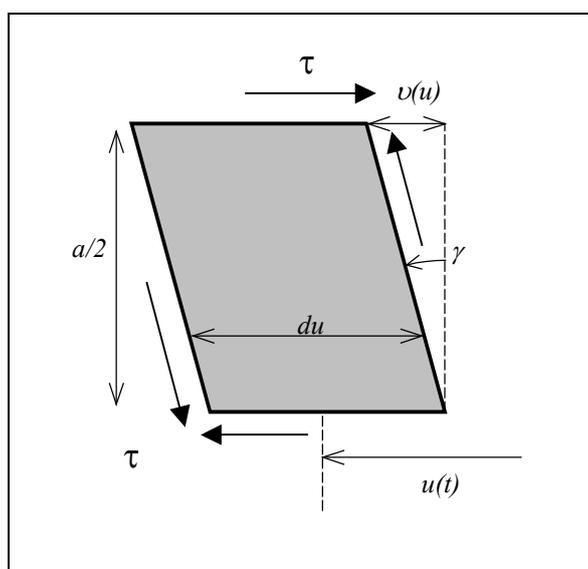


Figura 14 – Distorção do Elemento de Contato

Considerando um elemento de altura $a/2$, a distorção média resulta em $\gamma_M = \nu$ pois:

$$\gamma = 2\nu(u)/a \quad \text{e} \quad \nu_M = \frac{(\Omega R_D - V) a}{|V|} \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \gamma_M = 2\nu_M / a = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \quad (23)$$

A força longitudinal desenvolvida para cada elemento de contato de área $A = ab$, é proporcional a distorção média:

$$F_\tau = \tau_M \cdot A = \tau_M \cdot ab \quad \text{e} \quad \tau = G \gamma \quad \rightarrow \quad F_\tau = G ab \gamma_M \quad (24)$$

$$F_x = G ab \nu \quad (25)$$

Assim a força longitudinal F_x é proporcional ao escorregamento modular ν_x naquela direção. Estes valores podem ser aproximados por k_x (rigidez longitudinal de contato) e ν_x : (micro escorregamento - *creep*), conforme mostrado na Figura 15:

$$F_x \cong k_x \nu_x \quad \text{e} \quad \nu_x = \frac{(\Omega R_D - V)}{|V|} \quad (26)$$

Para o caso da área de contato ser elíptica (caso de contato roda trilho) a expressão fica alterada pelo coeficiente C_{11} proposto por *Kalker*.

$$F_x \cong G \cdot ab \cdot C_{11} \cdot \nu_x \quad (27)$$

O Módulo de Cisalhamento $G = E / 2(1 + \nu)$ onde $\nu = 0.3$ é o coeficiente de *Poisson* e $E = 210$ *GPa* é o módulo de elasticidade do material, resultando em $G = 80$ *GPa*.

A força longitudinal de contato $F_x \cong k_x \nu_x$ é aproximadamente linear e proporcional até que o limite de adesão no contato seja superado. Neste caso o escorregamento se inicia até a força longitudinal atingir seu limite máximo (coeficiente de atrito estático) a partir do qual, observa-se experimentalmente, ligeiro decréscimo (coeficiente de atrito cinemático), conforme mostrado na Figura 15.

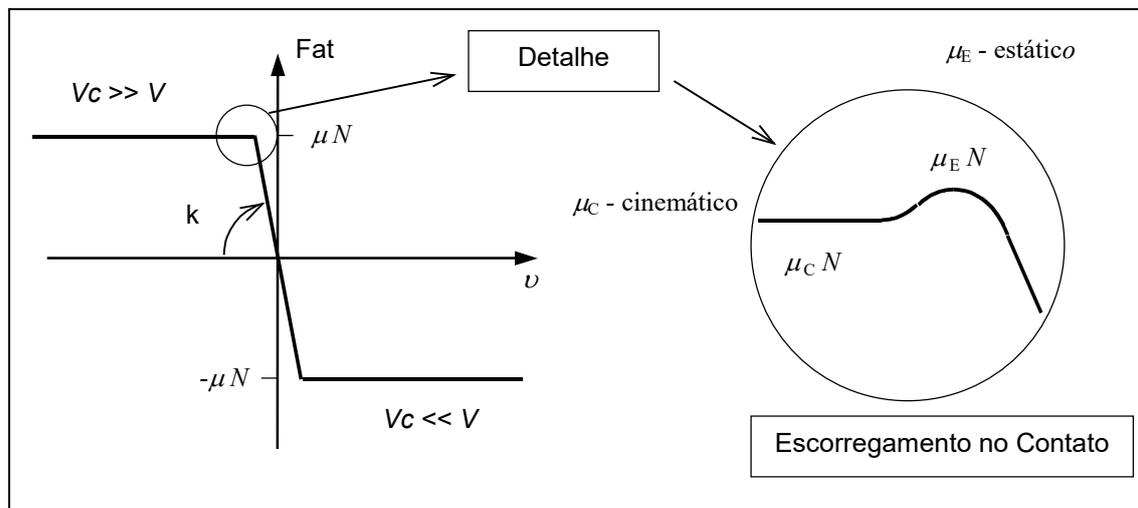


Figura 15 – Curva não linear de força longitudinal para grande escorregamento

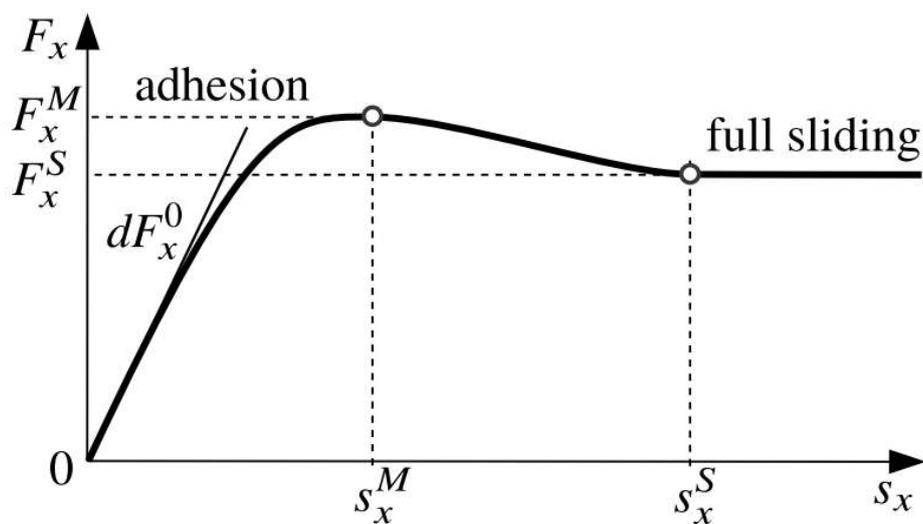


Figura 16 – Curva de Aderência (Rill, 2020)

Para um escorregamento intenso, a relação com a força longitudinal de contato torna-se não linear devido a contaminação da superfície que funciona como um substrato viscoso alterando a aderência entre as superfícies, conforme ilustrado na Figura 16.

5. Modelo Lateral de Contato de Rolamento

Para o estudo do comportamento do veículo é de fundamental importância o conhecimento detalhado do componente de vínculo com a pista que é o pneu. Este tipo de vínculo de contato tem características especiais que precisam ser adequadamente modeladas para descrever de maneira representativa a contribuição das forças de acionamento que influenciam no comportamento dinâmico do veículo. As deformações impostas à carcaça do pneu são oriundas dos movimentos relativos entre o eixo e o solo. Quando há deformação do pneu na direção lateral será desenvolvida força lateral naquela direção. As deformações laterais são produzidas quando a roda tem ângulo de rolamento diferente do ângulo de direção do veículo, produzindo escorregamento lateral, conforme mostrado na Figura 17. Conhecidas as velocidades relativas (dinâmica do veículo e movimento de rolamento do pneu) as deformações podem ser determinadas e por decorrência as forças que as provocam.

5.1. Modelo Lateral do Pneu

Considere um veículo em movimento no plano OXY na direção ψ , com velocidade \vec{V}_G e velocidade angular de direcionamento $\dot{\psi} = \dot{\psi} \vec{k}$, com a roda que rola a uma velocidade angular $\bar{\omega}$ e esterçada de um ângulo δ , conforme mostrado na Figura 17. A velocidade do centro de massa G é expressa no referencial fixo OXY como:

$$\vec{V}_G = V_X \vec{I} + V_Y \vec{J} \quad \text{onde} \quad V_X = |\vec{V}_G| \cdot \cos \psi \quad \text{e} \quad V_Y = |\vec{V}_G| \cdot \sin \psi \quad (28)$$

Pode-se expressar a velocidade no referencial móvel solidário ao veículo Gxy através de uma transformação angular. O ponto A de contato da roda dianteira esquerda (que tem velocidade angular $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{\omega}$) em relação ao solo (fixo) tem velocidade determinada por:

$$\vec{V}_G = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (A-G) \quad (29)$$

Portanto a velocidade de escorregamento lateral do ponto A em relação ao solo, considerando a roda esterçada do ângulo δ , é a projeção na direção \vec{w} (direção lateral do referencial solidário à roda $A\vec{u}\vec{w}$).

$$V_{Aw} = [\vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (A-G)] \cdot \vec{w} \quad \rightarrow \quad V_{Aw} = [V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + \omega \vec{k} \wedge (A-G)] \cdot \vec{w} \quad (30)$$

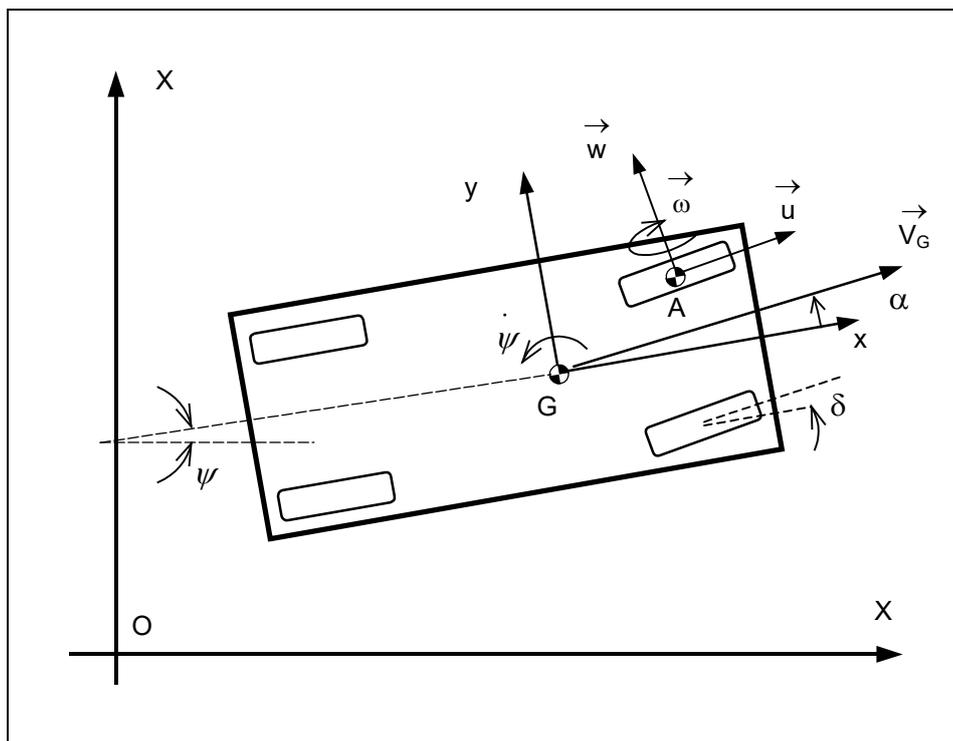


Figura 17 – Ângulo de Escorregamento da Roda

Para velocidade angular $\vec{\omega}_1$ nula e ângulo de esterçamento $\delta = 0$ obtêm-se:

$$V_{Ay} = |\vec{V}_G| \sin \alpha \quad (31)$$

$$V_{Ax} = |\vec{V}_G| \cos \alpha \quad ; \quad V_{Ay} = |\vec{V}_G| \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \tan \alpha = \frac{V_{Ay}}{V_{Ax}} \quad (32)$$

Para ângulos pequenos $\cos \alpha = 1$ e $\sin \alpha = \alpha$ resultando em:

$$V_{Ay} = \alpha |\vec{V}_G| \quad (33)$$

Considere a vista em planta do pneu, mostrada na Figura 18. Para uma velocidade de translação do veículo V , cuja direção forma um ângulo α com a linha de movimento longitudinal, haverá uma componente V_y na direção ortogonal ao plano que contém a roda. A região do pneu que entra em contato com o solo tem comprimento $2a$. Assim cada elemento da carcaça que entre em contato com o solo, será gradualmente deformado lateralmente durante a sua passagem pela região de contato.

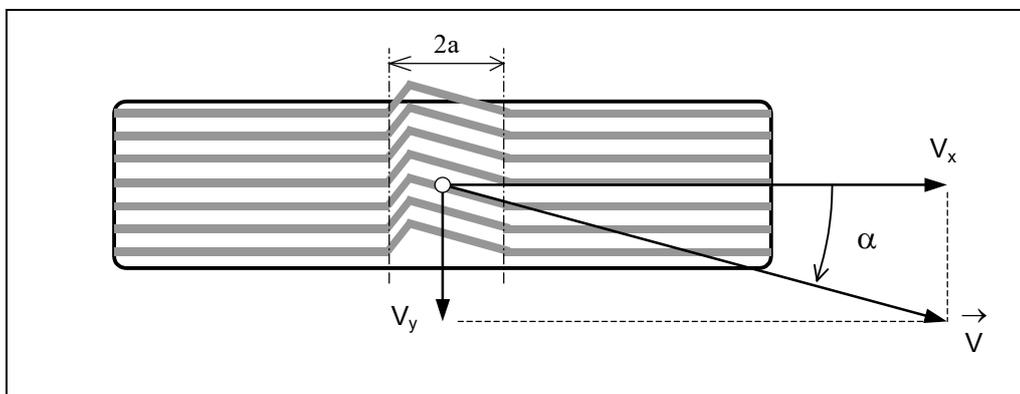


Figura 18 – Escorregamento Lateral da Área de Contato do Pneu

Um elemento do pneu percorre a região de contato de comprimento $2a$ num certo intervalo de tempo T , conforme:

$$2a = V_x T \quad \rightarrow \quad 2a = V \cos \alpha T \quad \rightarrow \quad T = \frac{2a}{V} \quad (34)$$

para $\alpha \ll 1$ e tem sua posição u definida ao longo do eixo longitudinal e deslocamento lateral w no instante t , conforme mostrado na Figura 19 por:

$$t = \frac{u}{V} \rightarrow w = f(u) \quad (35)$$

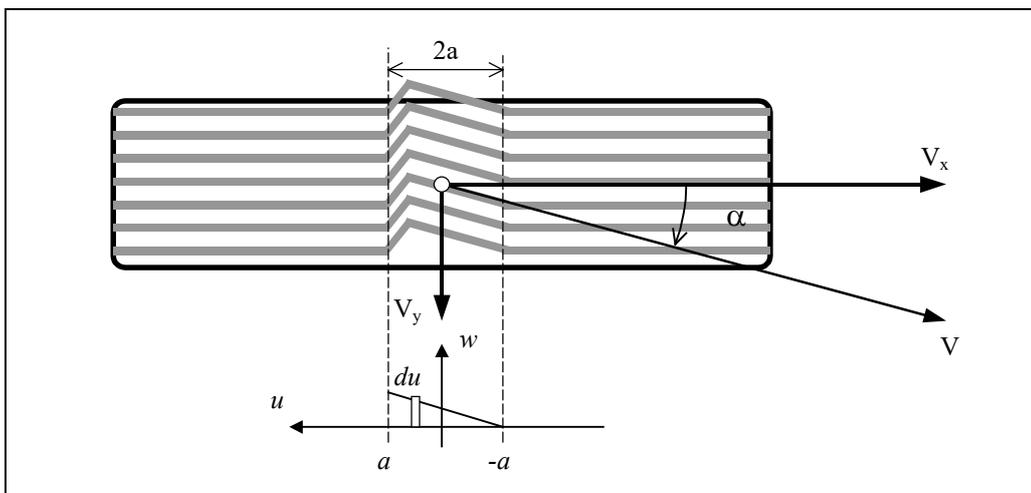


Figura 19 – Deflexão do elemento em contato

O deslocamento lateral w de um elemento de contato no instante t e seu deslocamento lateral máximo w_{\max} no instante T são dados respectivamente por:

$$w = V_y t \rightarrow w = \alpha V t \rightarrow w = \alpha(u - a) \rightarrow w_{(\max)} = 2a\alpha \quad (36)$$

Considerando a força lateral desenvolvida em cada elemento de contato du proporcional à deformação lateral (k rigidez lateral), tem-se:

$$dF_y = k w \quad (37)$$

Integrando ao longo de todo o comprimento de contato, resulta que a força lateral é proporcional ao ângulo de deriva:

$$F_{Ty} = \int dF_y = k \int_{-a}^a w du \quad \rightarrow \quad F_{Ty} = \alpha k \int_{-a}^a u du \quad \rightarrow \quad F_{Ty} = \alpha k \frac{1}{2} u^2 \Big|_{-a}^{+a} \quad (38)$$

$$\boxed{F_{Ty} = (k a^2) \alpha} \quad (39)$$

Assumindo que a força lateral tenha uma variação linear ao longo da linha de contato, o ponto de aplicação da força total resultante F_{Ty} corresponderá a $2/3$ de $(2a)$ (ou $4a/3$), conforme mostrado na Figura 20. Desta forma o momento restituidor, em torno do pólo localizado no centro da área de contato, será:

$$M_z = \frac{1}{3} a F_{Ty} \quad \rightarrow \quad \boxed{M_z = \left(\frac{k a^3}{3} \right) \alpha} \quad (40)$$

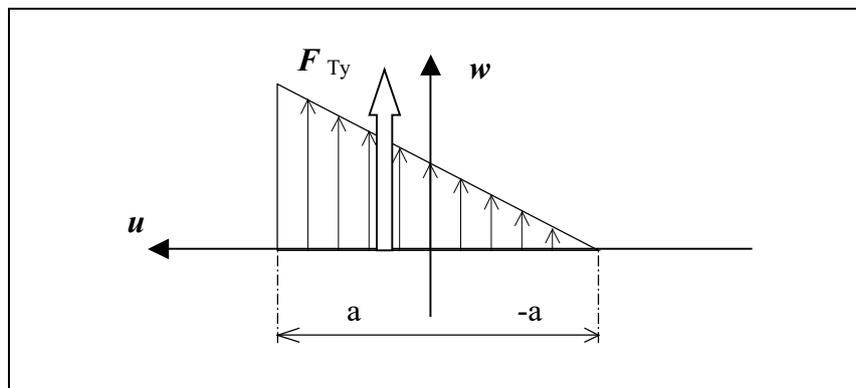


Figura 20 – Ponto de aplicação da força resultante

5.2. Intensidade do Escorregamento

A força lateral F_{Ty} se sustentará apenas enquanto todas as partículas da área de contato se mantiverem solidárias com a pista (Rill, 2020). Para valores de deslizamento s_x moderados, as partículas no final do comprimento de contato começam a deslizar por terem ultrapassado o limite de aderência (Relação de *Coulomb*). Para altos valores de escorregamento, apenas os elementos no início da área de contato ainda irão aderir à pista, conforme a evolução da intensidade de escorregamento ilustrado na Figura 21.

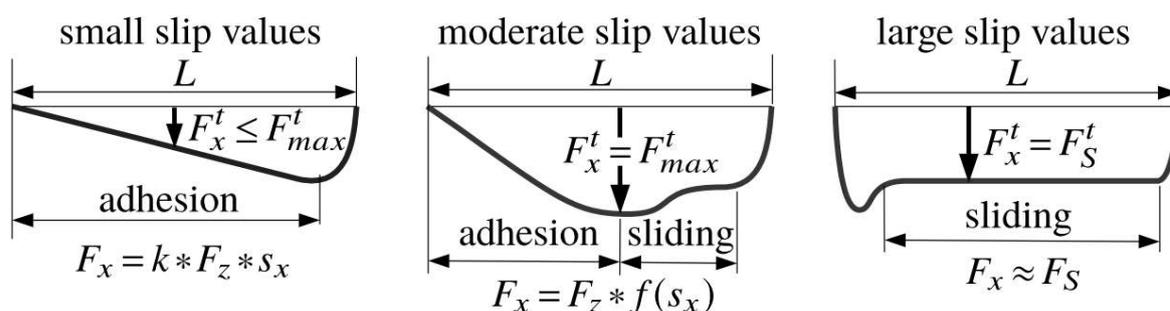


Figura 21 - Intensidade de Escorregamento (Rill, 2020)

5.3. Escorregamento Bidimensional

A força de aderência horizontal é função do deslizamento na região do contato. A velocidade do veículo \vec{V} e portanto do centro da roda O , tem direção que pode não coincidir com o plano da roda, conforme o ângulo α ilustrado na Figura 22. Adicionalmente a roda pode estar esterçada com ângulo δ . Desta forma tem-se no plano da roda, para esterçamento nulo:

$$\vec{V} = V_{xw} \vec{i}_w + V_{yw} \vec{j}_w = |\vec{V}| \cdot (\cos \alpha \vec{i}_w + \sin \alpha \vec{j}_w) \quad (41)$$

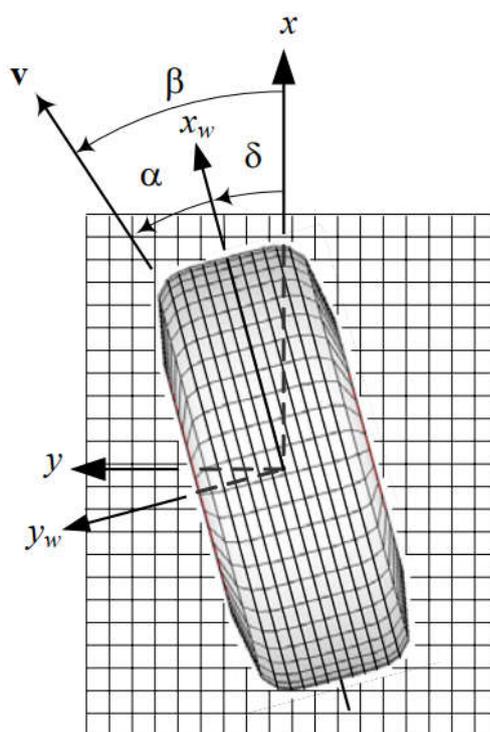


Figura 22 – Velocidade e Ângulos da Roda (Fonte: Jazar, 2008)

Portanto o escorregamento bidimensional no plano de contato será:

$$\vec{v} = \frac{(\vec{\Omega} \wedge (R_D - O) - \vec{V})}{|\vec{V}|} \Rightarrow v_{xw} \vec{i}_w + v_{yw} \vec{j}_w = \frac{[(\Omega \vec{j}_w \wedge R_D \vec{k}_w) - |\vec{V}| \cdot (\cos \alpha \vec{i}_w + \text{sen } \alpha \vec{j}_w)]}{|\vec{V}|} \quad (42)$$

Neste caso as componentes do escorregamento horizontal terá projeção no plano da roda como:

$$\begin{cases} v_{xw} = \frac{(\Omega R_D - |\vec{V}| \cdot \cos \alpha)}{|\vec{V}|} \\ v_{yw} = \text{sen } \alpha \end{cases} \quad (43)$$

A força de aderência horizontal pode ser expressa como uma função do deslizamento longitudinal $F_x = F_x(s_x)$ e do deslizamento lateral $F_y = F_y(s_y)$ (Rill, 2020). A inclinação da curva na origem dF_x^0 , dF_y^0 (correspondente à rigidez de contato), o escorregamento s_x^M , s_x^S (em cada direção do plano da roda) e magnitude do máximo F_x^M , F_y^M , bem como o limite de deslizamento s_x^S , s_y^S e a força de deslizamento F_x^S , F_y^S , estão apresentados na Figura 23.

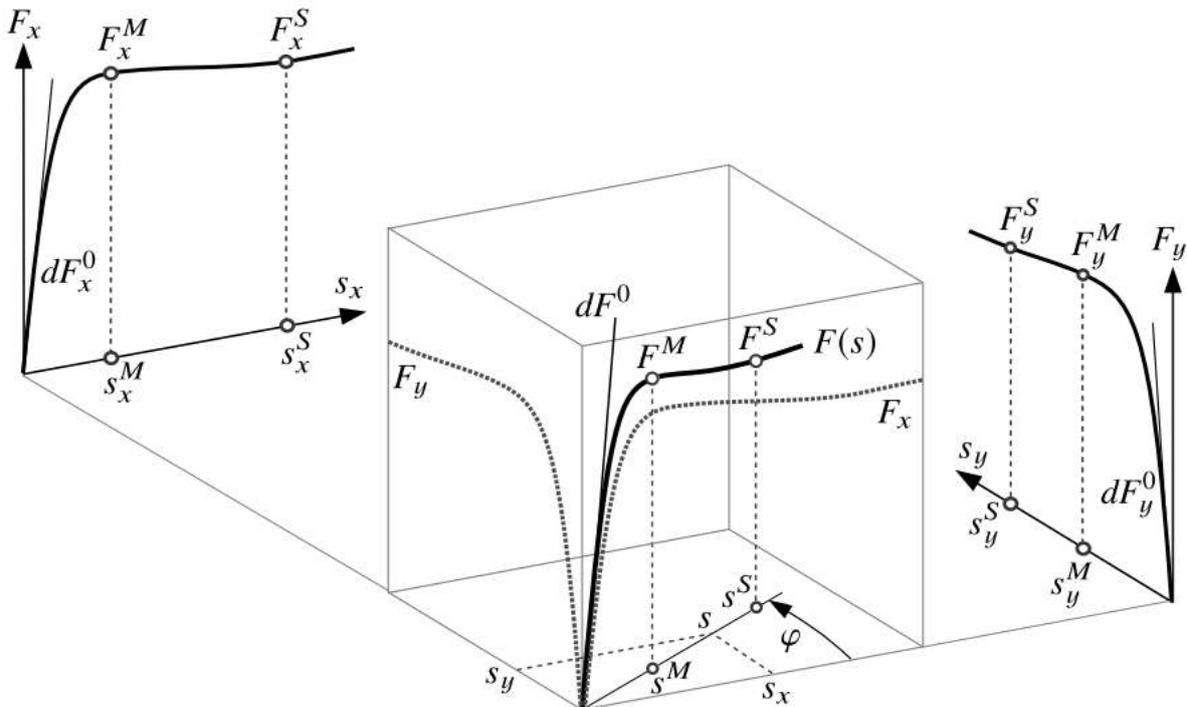


Figura 23 – Escorregamento Bidimensional Horizontal (Rill, 2020)

Em situações gerais de condução, com aceleração ou desaceleração longitudinal e considerando inscrição em curvas (ângulo de pivotamento ϕ desprezado), o deslizamento s_x longitudinal e o deslizamento lateral s_y aparecem simultaneamente. A combinação das forças longitudinais e laterais do pneu distintas requer um processo de normalização. O deslizamento longitudinal s_x e o deslizamento lateral s_y podem ser adicionados vetorialmente formando o deslizamento combinado $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j}$.

Da relação de *Coulomb* sabe-se que: $|F_{at}| \leq \mu \cdot N$ que no limite, quando houver escorregamento intenso, terá valor $|F_{at}| = \mu \cdot N$ na direção do escorregamento total $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ onde $\varphi = \tan(s_y / s_x)$. Portanto a rigidez total de contato na origem, no plano de escorregamento é obtida por:

$$dF^0 = \frac{dF_x^0 \cdot dF_y^0}{\sqrt{(dF_x^0 \cdot \cos \varphi)^2 + (dF_y^0 \cdot \sin \varphi)^2}}$$

que é uma elipse em função das rigidezes em cada direção. Finalmente a força de contato é função do limite máximo de atrito e do escorregamento total:

$$F = -F_{at} \cdot \tanh(s \cdot dF^0 / F_{at}) \rightarrow F_x = F \cdot \cos \varphi \text{ e } F_y = F \cdot \sin \varphi \quad (44)$$

conforme ilustrado na Figura 24.

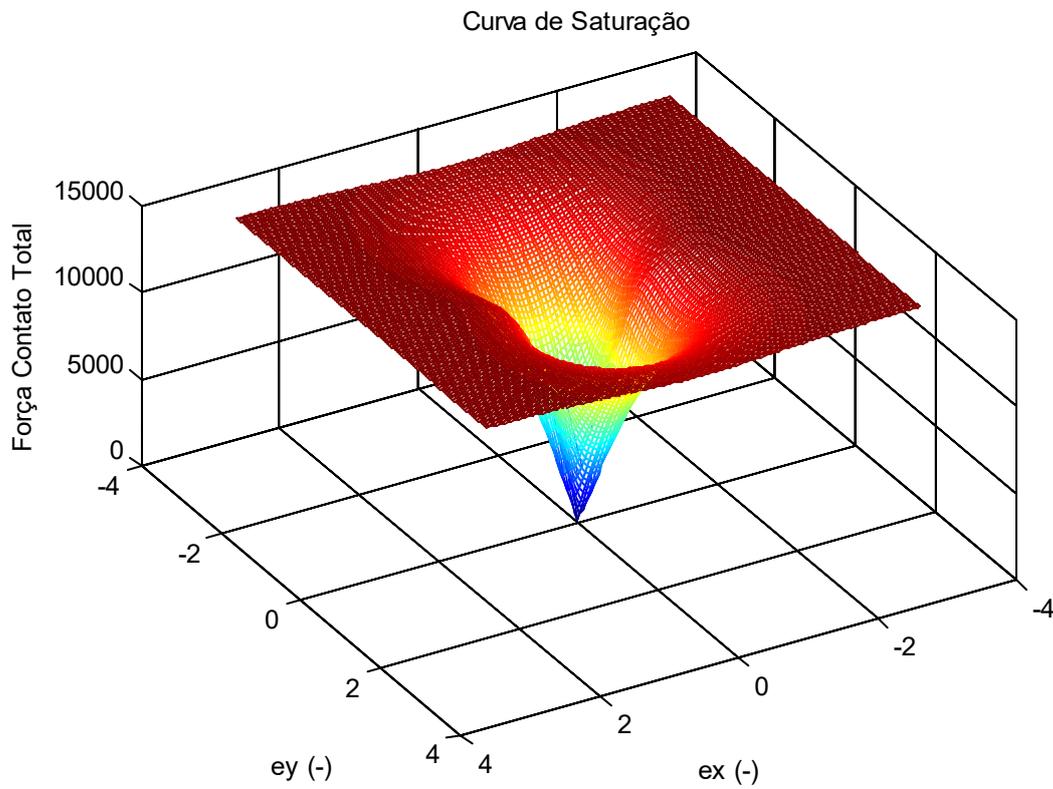


Figura 24 – Curva de Saturação Escorregamento Bidirecional (ex ey)

Para a avaliação das forças horizontais a partir das componentes do escorregamento horizontal foi elaborado um algoritmo de calculo que está disponibilizado no ANEXO A – Algoritmo de Contato.

5.4. Contato Horizontal com Pivotamento

Finalmente pode-se avançar com a representação dos escorregamento no contato incluindo o momento de pivotamento (*bore torque* – T_B) que chamado de modelo generalizado. Neste caso os torques de pivotamento do pneu, típicos de operação de estacionamento (grande giro do volante em baixíssima velocidade).

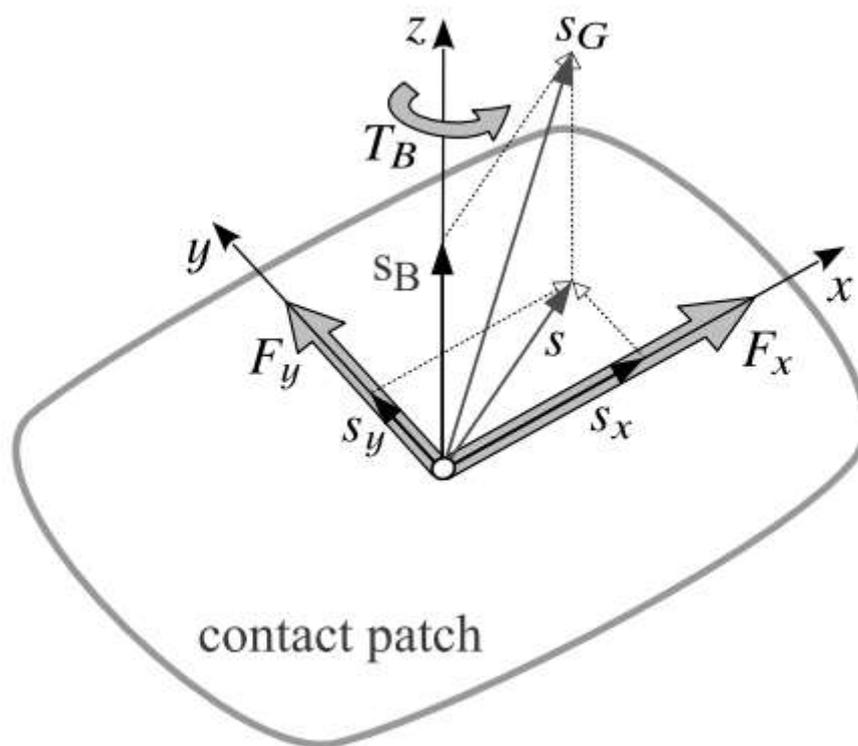


Figura 25 – Contato Horizontal com Pivotamento

Para mais informações sobre este modelo consulte o livro de *George Rill* (Rill, 2020).

5.5. Modelo de Rolamento em Superfície Cônica

A roda dos veículos ferroviários tem superfície de rolamento cônica. Este formato permite manter o rodeiro centrado na via férrea e obter a habilidade do auto-direcionamento em curvas.

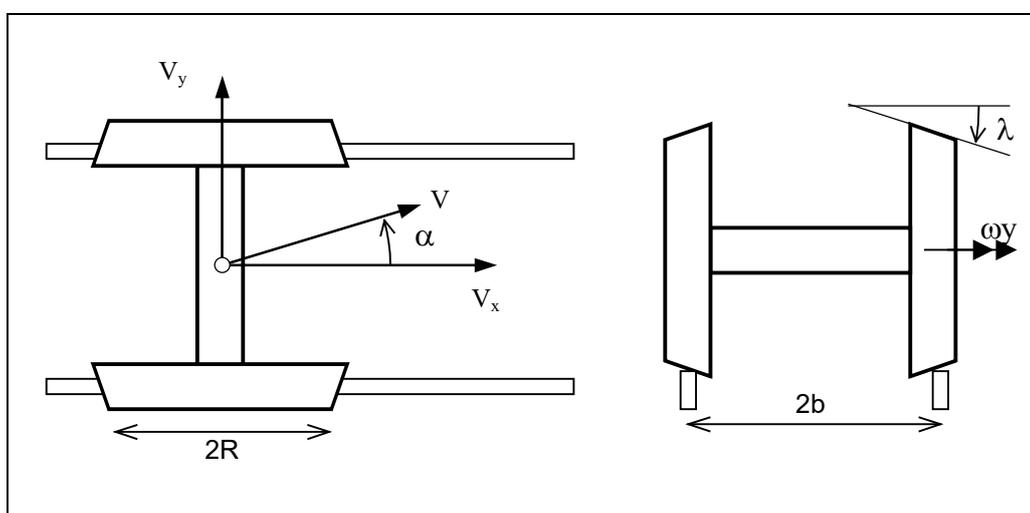


Figura 26 – Rodeiro com Rodas Cônicas

De maneira geral, dentro do regime linear, as forças desenvolvidas no contato são função dos escorregamentos (*creep*) em cada direção. O escorregamento lateral é dado por

$$\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x} \rightarrow \tan \alpha = \frac{V_y}{V \cos \alpha} \quad \text{que para } \alpha \text{ pequeno} \quad \alpha = \frac{V_y}{V} \quad (45)$$

$$v_y = \frac{(\Omega R - V)}{|V|} \quad \text{onde} \quad F_y \cong k_y v_y \quad \text{e similarmente} \quad F_x \cong k_x v_x \quad (46)$$

Para rodas cônicas a superfície de contato não é paralela ao vetor rotação, conforme mostrado na Figura 27. Então pode-se decompor o vetor de rotação do rodeiro em duas componentes: uma na direção normal ao plano de contato (γ) é outra tangencial ao plano de rolamento (ω_R) conforme:

$$\vec{\omega}_y = \vec{\omega}_R \vec{\tau} + \gamma \vec{n} \quad (47)$$

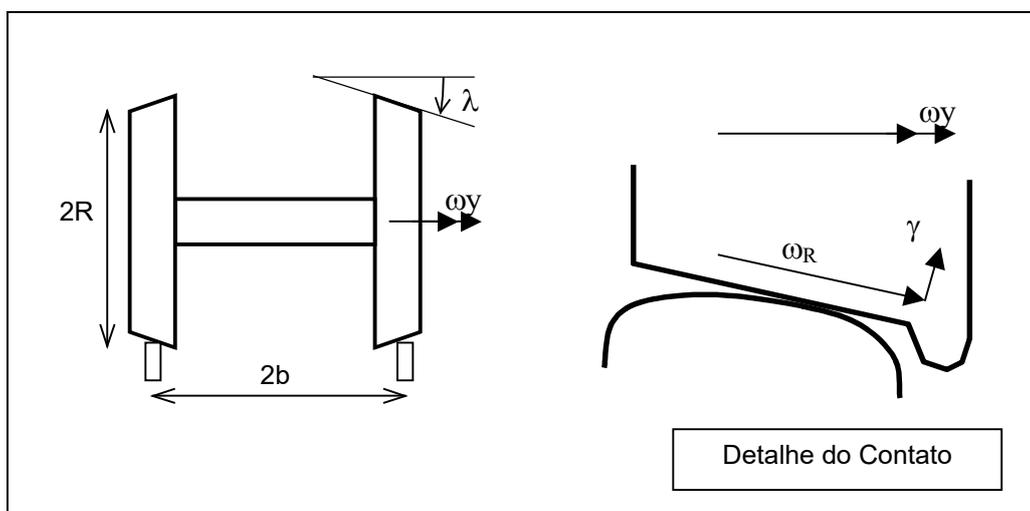


Figura 27 – Rodas Cônicas

A contribuição do efeito de pivotamento devido a conicidade da pista de rolamento (inclinação λ) induz a formação de momento de força no plano de contato e uma componente adicional de força na direção lateral (efeito enceradeira). As forças de contato podem ser expressas analiticamente, incluindo o efeito de pivotamento γ , por (Kalker, 1991):

$$\begin{aligned} F_x &= C_{11} v_x \\ F_y &= C_{22} v_y + C_{23} \gamma \\ M_z &= -C_{23} v_y + C_{33} \gamma \end{aligned} \quad (48)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = -Gab \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & \sqrt{ab}C_{23} \\ 0 & -\sqrt{ab}C_{23} & abC_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (49)$$

Os coeficientes C_x , C_y , C_γ , C_M e $C_{M\gamma}$, foram medidos experimentalmente e tem seus valores tabelados por *Kalker*.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baruh, H.* (1999) *Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, pp. 718.
- Pacejka, H. B.* (2002) *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE International, 2nd Edition, pp. 642.
- Rill, G. Castro, A. A.* (2020) *Road Vehicle Dynamics Fundamentals and Modeling with MATLAB®* Second Edition. CRC Press, p. 377.
- Jazar, R. N.* (2008) *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. Springer, p. 1022.
- Genta, G.* (1997) *Motor Vehicle Dynamics – Modelong and Simulation*. Word Scientific, pp. 524.
- Rill, G.* (2006) First order tire dynamics. III European conference on computational mechanics solids, structures and coupled problems in engineering. DOI: 10.1007/1-4020-5370-3_776.
- Johson, K. L.* (1985) *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, pp. 452.
- Hertz, H. R.* (1896) On the contact of rigid elastic solid. *J. reine und angewandte Mathematik* 92, Jones and Schott, Editors, pp. 156.
- Hertz, H. R.* (1895) On Contact Between Elastic Bodies, *Gesammelte Werke (Collected Works)*, Vol. 1, Leipzig, Germany.
- Kalker, J. J.* (1991) Wheel-rail rolling contact theory. *Wear*, Vol. 144, pp. 243-261.
- Shabana, A. A. et al.* (2008) *Railroad Vehicle Dynamics – A Computational Approach*, CCR Press, p. 343.
- De Wit, C. C., Olsson, H., Astrom, K. J., Lischinsky, P.* (1995) A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.: 40, n° 3, pp. 419–425.
- Hackl, A. Hirschberg, W. Lex, C. Magele, C.* (2017) Parametrisation of a Maxwell model for transient tyre forces by means of an extended firefly algorithm. *Advances in Mechanical Engineering* Vol. 9, n° 1, pp. 1–11, DOI: 10.1177/1687814016681235