

Engenharia Automotiva I – PME-3540

Notas de Aula – Parte 2

**DINÂMICA VEÍCULAR
DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

1. INTRODUÇÃO

O número de graus de liberdade de um sistema mecânico multicorpos é obtido pelo produto do número de corpos rígidos envolvidos na análise e o número de coordenadas independentes suficientes para descrever integralmente seu movimento no espaço, menos o número de vínculos existentes. Um modelo mais detalhado de um veículo permite descrever com melhor fidelidade sistemas mecânicos reais, que em geral possuem vários graus de liberdade. Desta forma a descrição de um sistema mecânico físico real resultará em vários graus de liberdade que requer o conhecimento da técnica de resolução de sistemas com dois ou mais graus de liberdade.

1.1. MODO DE MOVIMENTO

Um veículo considerado como um corpo rígido, possui seis graus de liberdade para se movimentar (três translações e três rotações). Os movimentos de um corpo rígido são assim descritos:

- Avanço – Movimento de translação na direção longitudinal do veículo (*surge X*);
- Deriva – Movimento de translação na direção lateral do veículo (*sway Y*);
- Galope – Movimento de translação na direção vertical do veículo (*bounce Z*);
- Inclinação - Ângulo de rotação na direção longitudinal do veículo (*roll - ϕ*);
- Elevação - Ângulo de rotação na direção lateral do veículo (*pitch - θ*);
- Direção - Ângulo de rotação na direção vertical do veículo (*yaw - ψ*).

A variação temporal de cada grau de liberdade (translacional ou angular) identificado na Figura 1 é identificada como:

- Velocidade de Avanço – Velocidade de translação na direção longitudinal do veículo (\dot{x});

DINÂMICA VEÍCULAR

- Velocidade de Deriva – Velocidade de translação na direção lateral do veículo (\dot{y});
- Velocidade de Galope – Velocidade de translação na direção vertical do veículo (\dot{z});
- Velocidade de Rolagem - Velocidade de rotação na direção longitudinal do veículo (*roll* - $\dot{\phi}$);
- Velocidade de Arfagem - Velocidade de rotação na direção lateral do veículo (*pitch* - $\dot{\theta}$);
- Velocidade de Guinada - Velocidade de rotação da direção do veículo (*yaw* - $\dot{\psi}$).

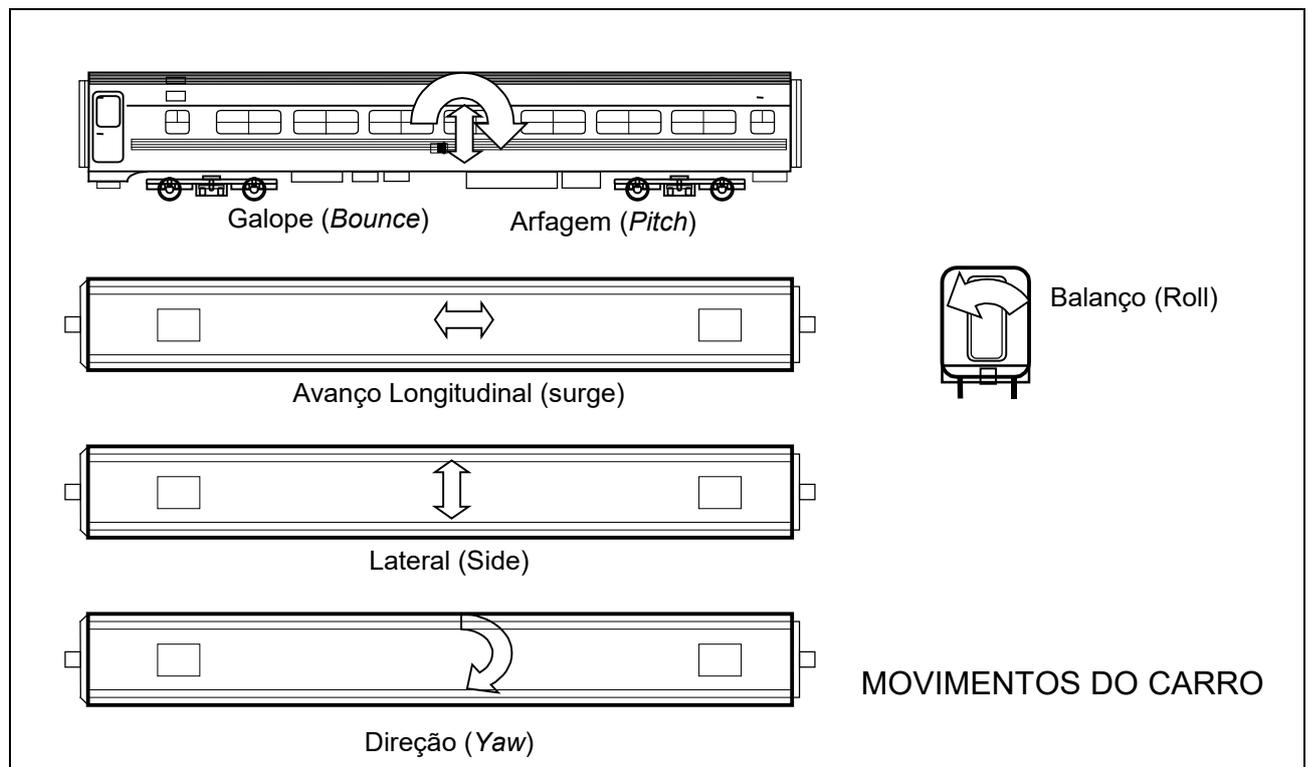


Figura 1 – Movimentos do Veículo (Barbosa, 2011)

Devido à forma de distribuição de massa e os tipos de vínculos formados pelos componentes da suspensão do veículo, podem ocorrer movimentos dependentes. Disto resulta em modos acoplados com movimentos sincronizados (ex. movimento lateral e angular longitudinal: *sway* ou movimento vertical e angular lateral acoplado) (movimento vertical e angular de arfagem acoplada: *front-end-bounce*). Para veículos simétricos há possibilidade dos modos serem desacoplados.

DINÂMICA VEÍCULAR

As oscilações que os passageiros de um veículo estão submetidos dependem da resposta dinâmica do veículo (características da suspensão e massa do corpo) e do conteúdo em comprimento de onda (frequência de excitação) da irregularidade da via, por onde o veículo trafega. Esta frequência de excitação depende do comprimento das irregularidades do pavimento e da velocidade de tráfego do veículo. A expressão que correlaciona estes efeitos é dada por:

$$V = \lambda f \quad (1)$$

onde V a velocidade longitudinal de tráfego do veículo, λ é o comprimento de onda da irregularidade do pavimento (excitação) e f é a frequência natural do veículo. Pode-se iniciar os estudos de dinâmica veicular com um modelo simples de um grau de liberdade vertical com excitação pela base. Desta forma no domínio da frequência é possível identificar as acelerações do veículo devido ao comprimento de onda das irregularidades e quantificar o conforto (ex. norma ISO-2631). Pode-se ainda estender a descrição do sistema físico utilizando modelos com mais de um grau de liberdade que é o foco deste texto.

1.2. MODOS DE MOVIMENTO ACOPLADO

Para um veículo caracterizado por um único corpo, pode ocorrer que os movimentos de cada grau de liberdade de movimento se manifestem de forma inter-dependente ou seja, podem ocorrer dois movimentos simultâneos com proporções próprias, chamados de movimentos acoplados. Para sistemas com dois ou mais corpos vinculados entre si também pode ocorrer que os movimentos de cada grau de liberdade de cada corpo se manifestem de forma inter-dependente. Cada conjunto de movimento inter-dependentes é caracterizado por um modo de movimento, com forma de vibrar com proporções próprias. Caso o movimento do corpo seja um deslocamento acoplado com movimento angular ocorreram pólo de giro à frente/trás ou inferior/superior, conforme ilustrado na Figura 2. Os modos de movimento acoplados de um corpo rígido são assim descritos:

- Galope Frontal / Galope Traseiro (*front/rear end bounce: $Z \pm \theta$*);

DINÂMICA VEÍCULAR

- Balanço Lateral Inferior / Balanço Lateral Superior (*lower/upper sway: $Y \pm \phi$*)
- Guinada Frontal / Guinada Traseiro (*front/rear end yaw: $Y \pm \psi$*);

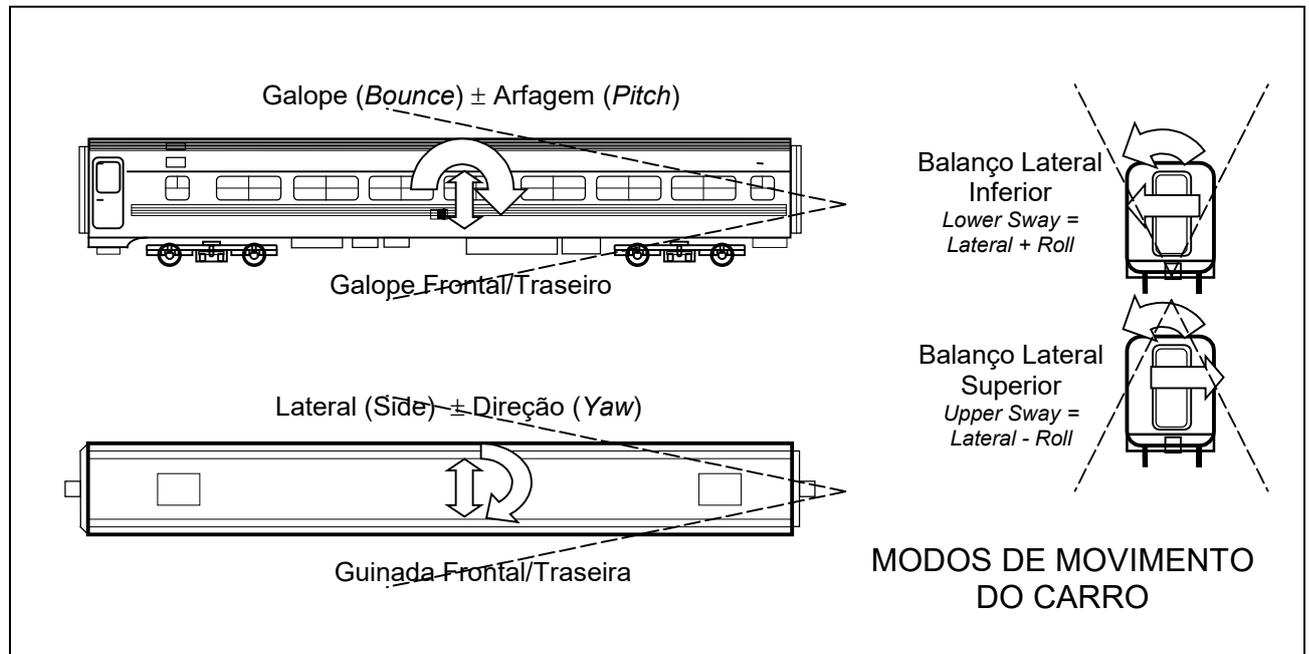


Figura 2 – Modos de Movimento do Veículo (*Barbosa, 2011*)

1.3. MODELOS PLANOS

Os modelos físicos do sistema veicular real podem ser obtidos de projeções planares de seus movimentos. Assim o plano frontal, plano lateral ou sagital e plano horizontal, conforme mostrado na Figura 3 mostram as projeções dos graus de liberdade típicos dos corpos rígidos. No caso de projeção no plano duas translações e uma rotação compõem os movimentos possíveis. Para o modelo frontal os movimento lateral, vertical e de rolagem (y , z e θ) são os graus de liberdade contemplados.

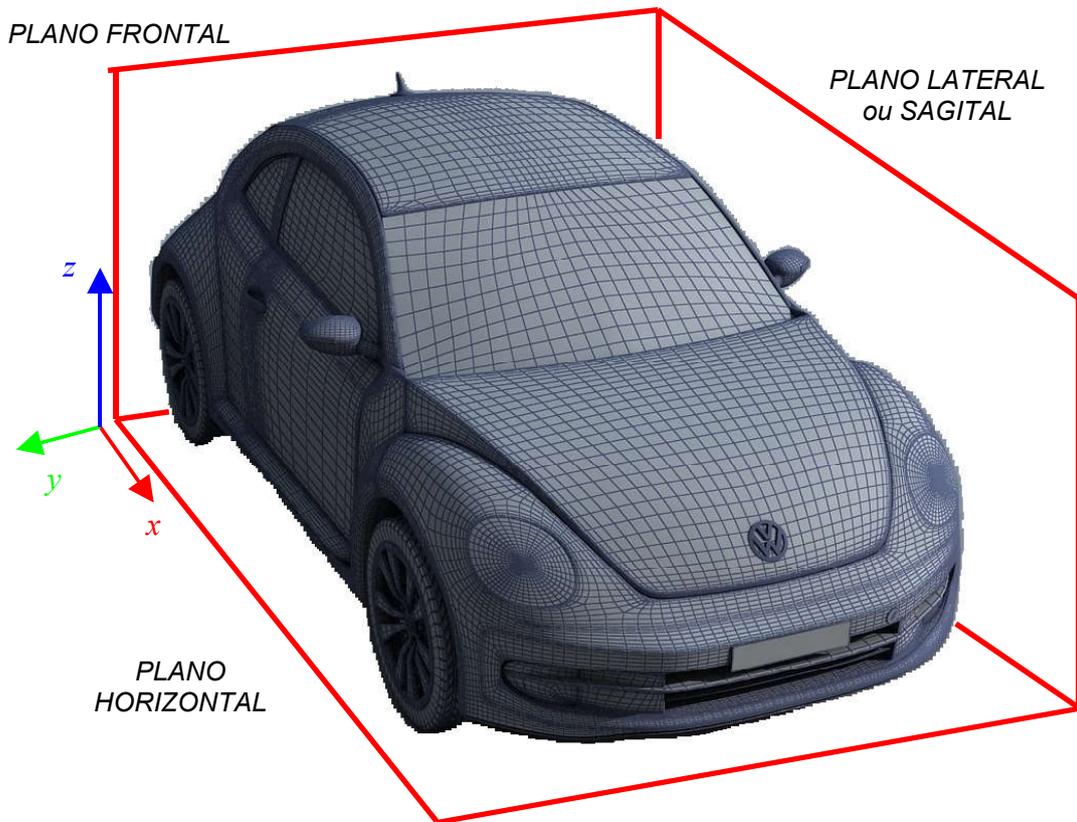


Figura 3 – Planos de Modelos

Para o modelo lateral (ou *sagital*) os movimento vertical, longitudinal e de arfagem (x , z e ϕ) são os graus de liberdade devidos. Finalmente para o modelo horizontal os movimentos lateral, longitudinal e de direção (x , y , e ψ) são os graus de liberdade correspondentes.

1.4. OBJETIVO

O objetivo deste texto é apresentar uma das técnicas utilizadas para a descrição e interpretação do comportamento dinâmico de um sistema mecânico composto por um ou mais corpos, com dois ou mais graus de liberdade, representado por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem a termos constantes, acopladas com comportamento modal próprio.

DINÂMICA VEÍCULAR

Os modelos de dois graus de liberdade do veículo podem ser descritos em planos específicos, conforme ilustrado na Figura 3 com objetivos de estudar o comportamento dinâmico correspondente:

- Modelo Longitudinal (*running*)
- Modelo Vertical (*ride*);
- Modelo Sagital (*bounce & pitch*);
- Modelo Frontal (*upper & lower sway*);
- Modelo Horizontal (*handling*).

Como exemplo de aplicação da utilização da técnica de solução de sistemas com dois ou mais graus de liberdade, apresentaremos a modelagem no plano sagital de um veículo automotor com excitação pela base, conforme mostrada na Figura 13.

2. MODELO VERTICAL COM 2 GL

Uma descrição mais detalhada do sistema veicular de um grau de liberdade (massa suspensa m_1) que inclui a suspensão intermediária (pneu ou truque) requer a inclusão de mais um corpo de massa m_2 e portanto um grau de liberdade z_2 adicional, conforme mostrado na Figura 4.

Para cada corpo pode-se obter uma equação diferencial utilizando o **TR**:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= F_1 \\ m \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}) + k_2 (z_2 - u) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= F_2 \end{aligned} \quad (2)$$

onde as forças externas F_1 e F_2 podem ser ações produzidas pelas vibrações do motor à combustão suportado na carroceria por coxins e um desbalanceamento da roda de raio R trafegando em velocidade constante V (portanto frequência de excitação $f = V / 2\pi R$) respectivamente.

DINÂMICA VEÍCULAR

Pode-se também representar na forma matricial para o sistema homogêneo ($F_1 = 0$ e $F_2 = 0$) sem excitação pela base ($u_0 = 0$) como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ -c_2 & (c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

O modelo vertical elementar com dois graus de liberdade z_1 e z_2 , está esquematizado na Figura 4.

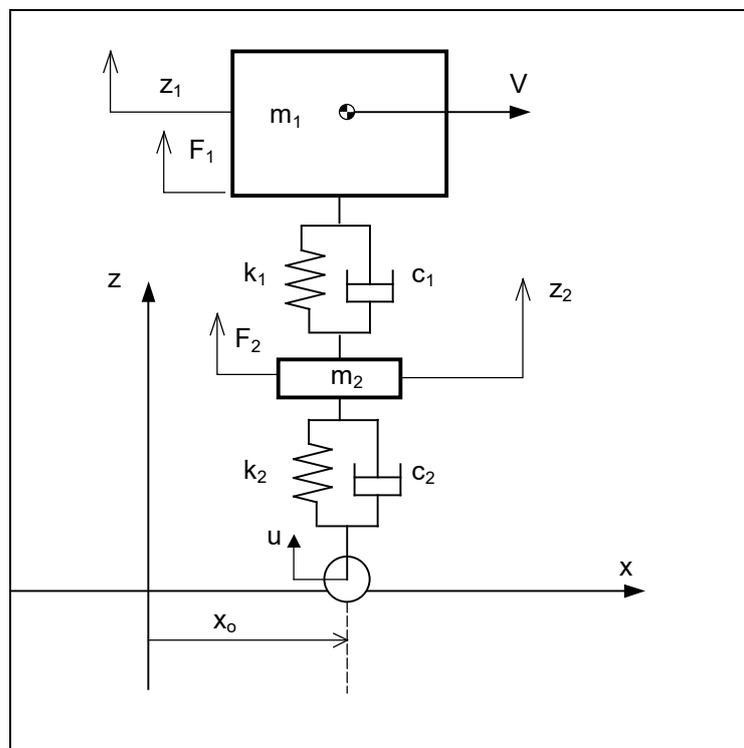


Figura 4 – Modelo Vertical com dois grau de liberdade

Note que as equações são dependentes o que caracteriza o acoplamento de movimentos.

Expressando as equações na forma matricial compacta, para $\{x\}^T = \{z_1 \ z_2\}^T$ obtêm-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4)$$

2.1. Sistema com Amortecedor Coxinizado

Tipicamente o amortecedor do veículo é fixado com buchas elásticas que permitem a articulação do amortecedor durante a excursão da suspensão. Para contemplar essa característica no modelo faz-se a inclusão de um componente com um amortecedor associado em série com uma mola (conhecido como modelo visco-elástico de *Maxwell*). Para tanto um grau de liberdade auxiliar de primeira ordem (z_2) é utilizado para incluir o efeito da bucha elastomérica no modelo (rigidez k_c), conforme ilustrado na Figura 5.

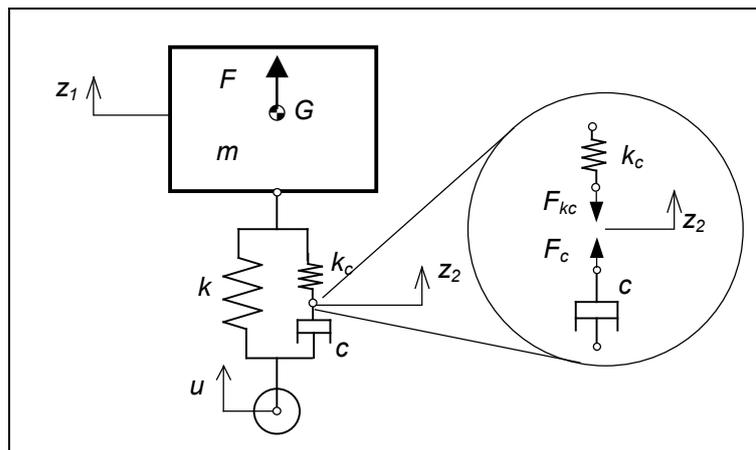


Figura 5 – Modelo com Amortecedor Coxinizado

Considerando que as forças do amortecedor e do coxim na ligação são idênticas ($-F_c = F_{kc}$), o modelo vertical simplificado passa a ter também dois graus de liberdade descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) + k_c(z_1 - z_2) &= F \\ c(\dot{z}_2 - \dot{u}) - k_c(z_1 - z_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ou representando na forma matricial para dois graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k+k_c) & -(k+k_c) \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ c \end{Bmatrix} \dot{u} \quad (6)$$

Note que o sistema é acoplado com a segunda equação diferencial de primeira ordem.

2.2. Amortecedor Não Linear

Amortecedores não lineares (com atrito interno, efeito de histerese ou dissipador ativo) tem sido desenvolvidos e utilizados em veículos especiais. Na engenharia estrutural o modelo de amortecedor com histerese de *Bouc-Wen* (Krishna et al, 2021) é um dos modelos histeréticos não lineares mais utilizados. Ele é constituído de um elemento elástico (k_1) em paralelo com um elemento dissipativo (c_1) em série com outro elemento elástico/dissipativo/ativo (k_0 , c_0 e BW), conforme modelo ilustrado na Figura 6.

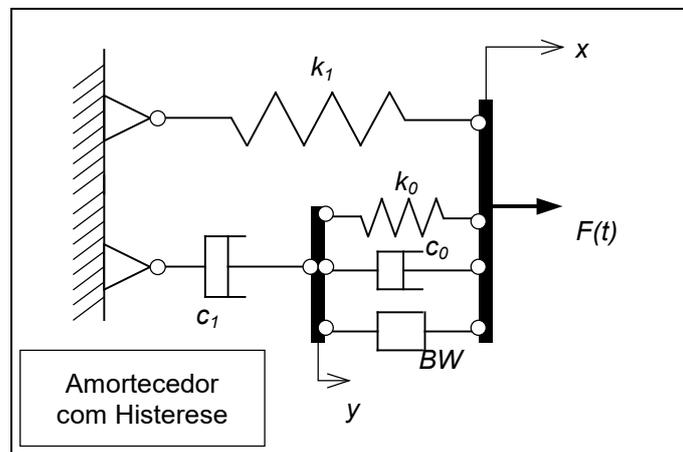


Figura 6 – Modelo de Amortecedor Histerético não Linear

O equacionamento para $F(t)$ é obtido considerando as variáveis: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, e suas derivadas em função dos parâmetros: k_0 , k_1 , c_0 , c_1 , e fonte de potência ativa $BW(t)$, como:

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned}c_1 \cdot \dot{y} + k_1 \cdot (x - x_0) &= F(t) \\ \dot{y} &= \frac{1}{c_0 + c_1} [\alpha \cdot z + c_0 \cdot \dot{x} + k_0 \cdot (x - y)] \\ \dot{z} &= \gamma \cdot |\dot{x} - \dot{y}| \cdot z \cdot |z|^{n-1} - \beta \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \cdot |z|^n + \delta \cdot (\dot{x} - \dot{y})\end{aligned}\tag{7}$$

onde os parâmetros: α , β , δ e γ são os parâmetros do modelo *Bouc-Wen* de n -ésima ordem. Assim a forma da curva de histerese pode ser controlada pelos parâmetros α , γ e os parâmetros β , δ influência na amplitude de restauração, n é o parâmetro que representa a suavidade da transição da resposta elástica para a plástica.

Estes são apenas alguns tipos de elementos de suspensão e respectivos modelos, disponíveis na literatura vigente.

3. MODELO VERTICAL COM EXCITAÇÃO PELA BASE

A descrição mais detalhada do sistema veicular com 2 GL é feita com um corpo suspenso de massa m_1 e outro corpo intermediário (pneu ou truque) com massa m_2 , formando portanto dois grau de liberdade z_1 e z_2 , conhecido como modelo de um quarto de veículo, conforme ilustrado na Figura 7. Foi considerada adicionalmente as irregularidades do pavimento como uma função periódica de entrada dependente da posição $u(x) = u_0 \text{ sen } (\omega x)$. Neste caso os movimentos verticais dos corpos do sistema (z_1 e z_2) ficam mutuamente dependentes devido à interligação da suspensão secundária (k_1 e c_1) e ocorrem os modos de movimento acoplados.

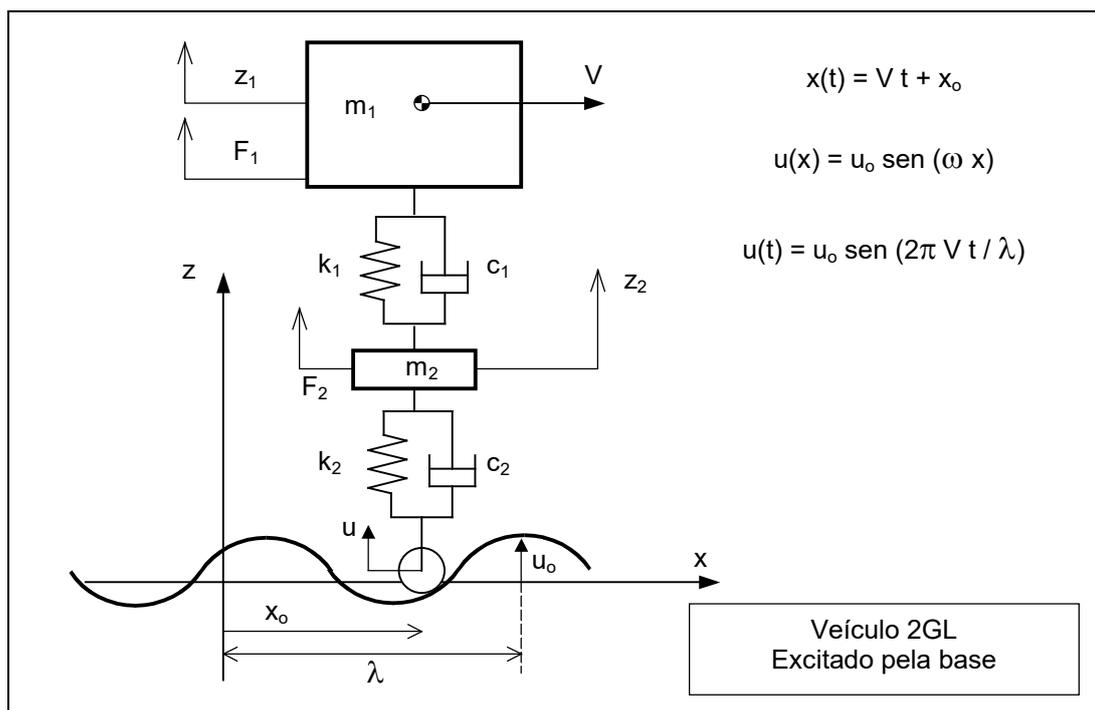


Figura 7 – Modelo com dois graus de liberdade

Neste caso o pneu foi considerado como corpo rígido rolante (disco) de massa desprezível que acompanha as irregularidades da pista ($u(x)$) e sua elasticidade e dissipação quantificada por k_2 . e

DINÂMICA VEÍCULAR

por c_2 . O sistema de equações diferenciais do sistema com dois corpos (com massas m_1 e m_2) e dois graus de liberdade (z_1 e z_2) com excitação pela base (u_0) é descrito por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2 (z_2 - u(t)) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= F_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

3.1. Exemplo Modal

Exemplo Numérico Modal [3]: Considere um veículo modelado conforme mostrado na Figura 7, com as características descritas na Tabela 1. Um dos movimentos oscilatório natural não amortecido possível do sistema homogêneo, com frequência ω livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas obtêm-se:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= Z_1 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad z_2(t) = Z_2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{z}_1(t) &= -\omega^2 Z_1 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2(t) = -\omega^2 Z_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando estes valores na matriz dinâmica do sistema obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} (k_1 - m_1 \omega^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Utilizando os valores numéricos da Tabela 1, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} (676 - 1415 \omega^2) & -68 \\ -68 & (744 - 185 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

com polinômio característico em ω^4 obtido do determinante da matriz do sistema: $261775 (\omega^2)^2 - 1177820 \omega^2 + 498320 = 0$, de onde se obtêm-se as raízes que correspondem as frequências naturais: $\omega_1 = 6.6042 \text{ rad/s}$ ($f_1 = 1.05 \text{ Hz}$) e $\omega_2 = 63.451 \text{ rad/s}$ ($f_2 = 10.1 \text{ Hz}$).

Tabela 1 – Características do Veículo

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa total do veículo (m_1)	1415 kg	total
Massa total da suspensão (m_2)	185 kg	total
Rigidez da mola da suspensão (k_1)	68.0 kN/m	conjunto
Rigidez do pneu (k_2)	676.0 kN/m	conjunto

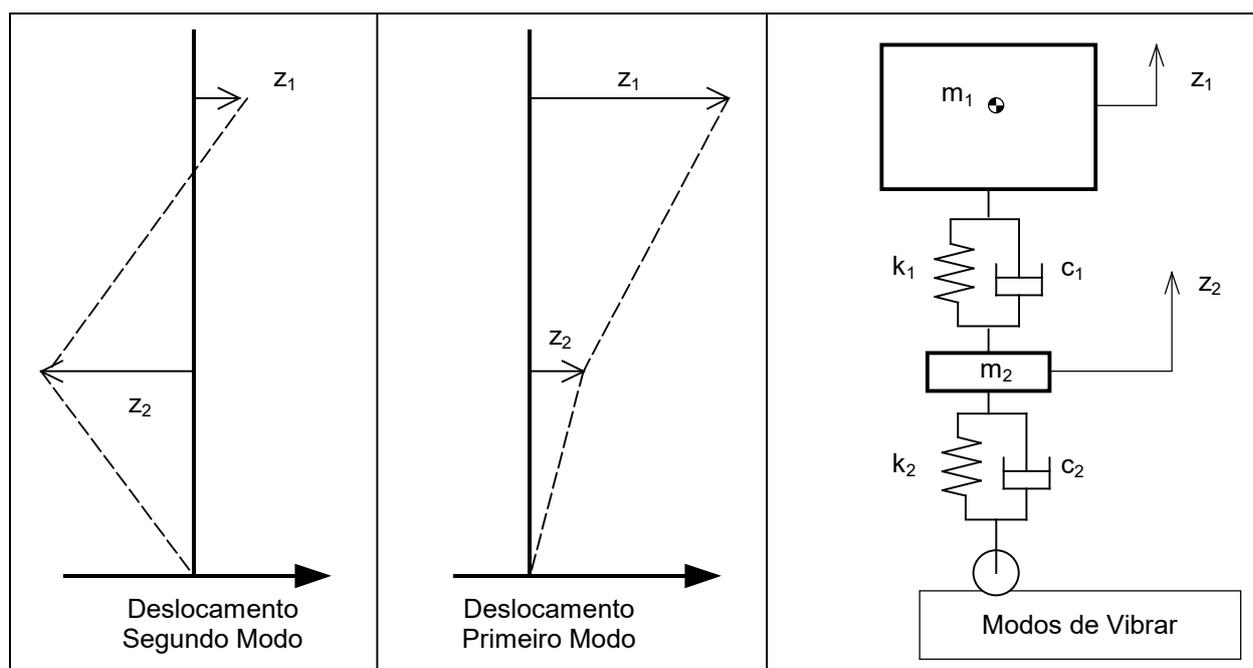


Figura 8 – Modos de Vibrar

Utilizando cada frequência natural obtida: $\omega_1 = 6.6042 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 63.451 \text{ rad/s}$, em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo: $(676 - 1415\omega_1^2) \cdot Z_1^1 - 68 \cdot Z_2^1 = 0$), determina-se cada modo de vibrar (Modo #1: $[0.99 ; 0.10]^T$ em fase) e (Modo #2: $[0.01 ; -0.99]^T$ fora de fase), cujas amplitudes normalizadas estão apresentadas na Figura 8.

3.2. Resolução Sistema Amortecido com Excitação pela Base

Considere novamente o modelo vertical de um quarto de veículo, com dois grau de liberdade z_1 e z_2 , conforme mostrado na Figura 7. Neste caso os movimentos verticais dos corpos do sistema (z_1 e z_2) ficam mutuamente dependentes devido à interligação da suspensão secundária (k_1 e c_1) e ocorrem os modos de movimento acoplados. Foi considerada adicionalmente a irregularidade vertical do pavimento como uma função periódica $u(t) = U \cdot \text{sen } \omega t$. As equações de movimento obtidas são:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2(z_2 - u(t)) - c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1(z_1 - z_2) &= F_2(t) \end{aligned} \quad (13)$$

isolando as ações externas do pavimento e considerando o sistema homogêneo, obtêm-se

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_1 z_1 - c_1 \dot{z}_2 - k_1 z_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + (c_2 + c_1) \dot{z}_2 + (k_2 + k_1) z_2 - c_1 \dot{z}_1 - k_1 z_1 &= c_2 \dot{u}(t) + k_2 u(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Fazendo a transformada de *Laplace* das equações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] Z_1(s) - [c_1 s + k_1] Z_2(s) &= 0 \\ [m_2 s^2 + (c_2 + c_1) s + (k_2 + k_1)] Z_2(s) - [c_1 s + k_1] Z_1(s) &= [c_2 s + k_2] U(s) \end{aligned} \quad (15)$$

Com algumas manipulações algébricas (isolando $Z_2(s)$ na primeira expressão e utilizando na segunda expressão), pode-se obter a seguinte polinômio correspondente ao deslocamento do chassis ($Z_1(s)$) em função da amplitude da entrada ($U(s)$):

$$\begin{aligned} Z_2(s) &= \frac{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]}{[c_1 s + k_1]} Z_1(s) \\ \left\{ \frac{[m_2 s^2 + (c_2 + c_1) s + (k_2 + k_1)] \cdot [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] - [c_1 s + k_1]^2}{[c_1 s + k_1]} \right\} Z_1(s) &= [c_2 s + k_2] U(s) \end{aligned} \quad (16)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

Finalmente identificando a função de transferência que correlaciona o comportamento em frequência do deslocamento vertical do chassi ($Z_1(s)$) em função da amplitude da ondulação da pista ($U(s)$):

$$\frac{Z_1(s)}{U(s)} = \frac{[c_2 s + k_2] \cdot [c_1 s + k_1]}{[m_2 s^2 + (c_2 + c_1)s + (k_2 + k_1)] \cdot [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] - [c_1 s + k_1]^2} \quad (17)$$

Exemplo típico de Resposta em Frequência da magnitude de oscilação do chassi desse modelo é apresentado na Figura 9.

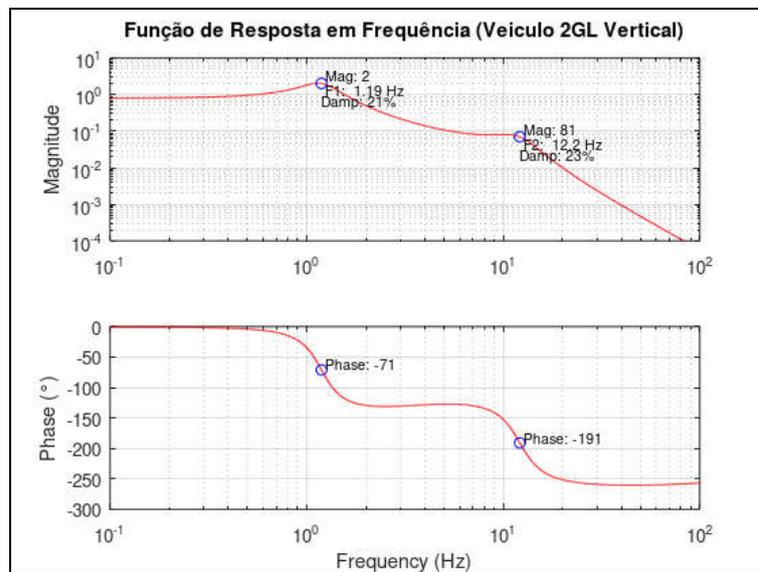


Figura 9 – Função de Resposta em Frequência (2GL Vertical)

De maneira similar pode-se obter a função de resposta em frequência para a suspensão (Z_2).

Os códigos típicos na plataforma *Octave* ou *MatLab* são apresentados a seguir:

```
% Modelo Vertical 2GL com excitação pela base – Função de Transferência de Deslocamento Vertical
% Polinômios
A=[m1 c1 k1];
B=[m2 (c1+c2) (k1+k2)];
C=[0 c1 k1];
D=[0 c2 k2];
```

```
% Funcao e Transferencia
num = conv(C,D);
den = (conv(A,B) - conv(C,C));
G = tf(num,den);
[MAG,PHASE,W] = bode(G);
F = W/(2*pi);      % Hz

% Figuras
figure(2),subplot(211),
loglog(F,MAG,'r'),
title('Função de Resposta em Frequência (2GL Vertical)'),
ylabel('Magnitude'),grid,

subplot(212),
semilogx(F,PHASE,'r'),
xlabel('Frequency (Hz)'),ylabel('Phase (°)'),grid,
```

3.3. Resposta da Força de Contato

Se for necessário obter a resposta da força de contato F_C entre o pneu e a pista, ou o curso da suspensão, é possível criar as coordenadas auxiliares (y_1 e y_2) correspondente ao curso da suspensão do veículo e a deformação do pneu respectivamente:

$$y_1 = z_1 - z_2 \quad \text{e} \quad y_2 = z_2 - u(t) \quad (18)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_1 - \dot{z}_2 \quad ; \quad \ddot{z}_1 = \ddot{y}_1 + \ddot{z}_2 \quad \text{e} \quad \ddot{z}_1 = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}(t) \quad (19)$$

$$z_2 = y_2 + u(t) \quad ; \quad \dot{z}_2 = \dot{y}_2 + \dot{u}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2 = \ddot{y}_2 + \ddot{u}(t) \quad (20)$$

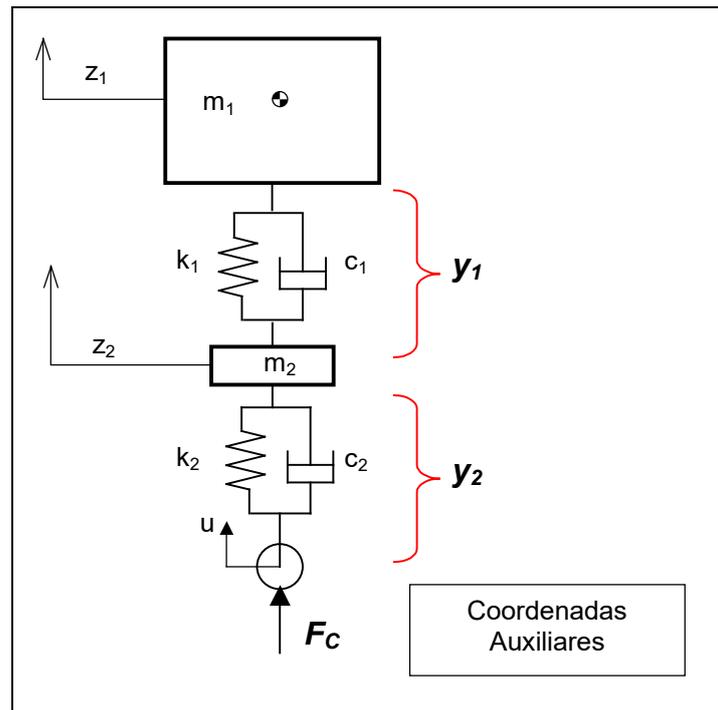


Figura 10 – Coordenadas Auxiliares

Desta forma, reescrevendo o sistema de equações expresso em z_1 e z_2 , utilizando as coordenadas auxiliares (y_1 e y_2) obtidas acima, obtêm-se substituindo:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= 0 \\ m_1 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2 (z_2 - u(t)) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= 0 \\ m_2 (\ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - c_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente incluindo a equação da forças de contato F_C entre o pneu e a pista obtêm-se:

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= 0 \\ m_2 (\ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - c_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 &= 0 \\ c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= F_C \end{aligned} \quad (23)$$

Tomando as transformadas de Laplace das três equações obtidas resulta em:

$$\begin{aligned}
 [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] Y_1(s) + [m_1 s^2] Y_2(s) &= (-m_1 s^2) U(s) \\
 [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] Y_2(s) - [c_1 s + k_1] Y_1(s) &= (-m_2 s^2) U(s) \\
 [c_2 s + k_2] Y_2(s) &= F_C(s)
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Fazendo as devidas substituições nas expressões anteriores (isolando $Y_1(s)$ na primeira expressão e utilizando na segunda expressão), obtêm-se $Y_2(s)$ em função da amplitude da irregularidade $U(s)$:

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= \frac{(-m_1 s^2) U(s) - [m_1 s^2] Y_2(s)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \\
 [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] Y_2(s) - [c_1 s + k_1] \frac{(-m_1 s^2) U(s) - [m_1 s^2] Y_2(s)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} &= (-m_2 s^2) U(s) \\
 \left\{ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + \frac{[c_1 s + k_1][m_1 s^2]}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\} Y_2(s) &= \left\{ (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] \frac{(-m_1 s^2)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\} U(s)
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Rearranjando a expressão obtida e invertendo, obtêm-se Y_2 em função de $U(s)$:

$$U(s) = \frac{\left\{ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + \frac{[c_1 s + k_1][m_1 s^2]}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\}}{\left\{ (-m_2 s^2) + \frac{[c_1 s + k_1](-m_1 s^2)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\}} Y_2(s)
 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 U(s) &= \frac{\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1] [m_1 s^2] \}}{\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] (-m_1 s^2) \}} Y_2(s) \\
 Y_2(s) &= \frac{\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] (-m_1 s^2) \}}{\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1] [m_1 s^2] \}} U(s)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Utilizando o resultado de Y_2 na terceira expressão, obtêm-se a função de transferência da forças de contato F_C entre o pneu e a pista em função da amplitude da irregularidade da pista $U(s)$:

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\frac{F_c(s)}{U(s)} = \frac{\{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1] \cdot (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] \cdot (-m_1 s^2)\} \cdot [c_2 s + k_2]}{\{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1] \cdot [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1] \cdot [m_1 s^2]\}} \quad (28)$$

Exemplo típico de Resposta em Frequência da magnitude da força de contato da roda com o solo F_c é apresentado na Figura 11.

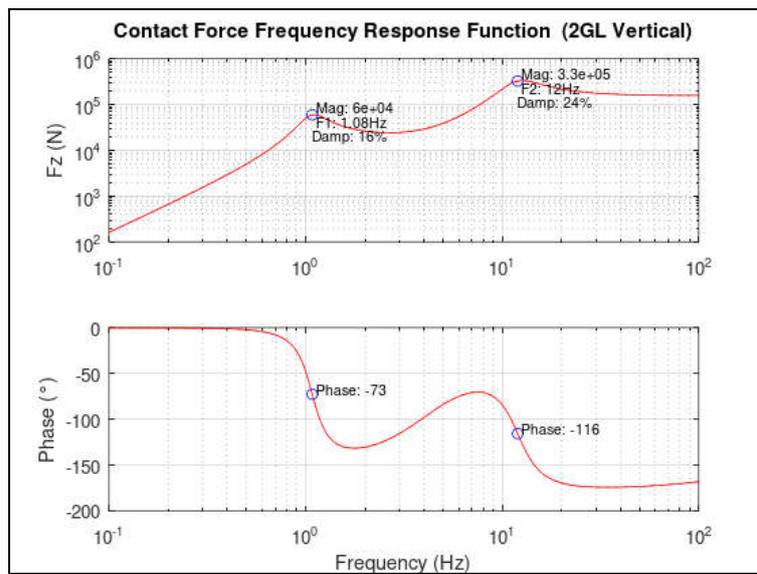


Figura 11 – Magnitude da Força Vertical na Roda

Os códigos típicos na plataforma *Octave* ou *MatLab* são apresentados a seguir:

```
% Modelo Vertical 2GL com excitação pela base – Função de Transferência de Forças de Contato

% Gera Polinomios
A=[m1 c1 k1];
B=[m2 c2 k2];
C=[-m1 0 0];
D=[0 c1 k1];
E=[-m2 0 0];
F=[0 c2 k2];
G=[m1 0 0];

AB = conv(A,B);
EA = conv(E,A);
CD = conv(C,D);
GD = conv(G,D);

% Monta Funcao de Transferencia
num = conv(F,(EA+CD));
den = (AB+GD);

G = tf(num,den);          % Octave
[MAG,PHASE,W] = bode(G); % octave
F = W/(2*pi);           % Hz
```

DINÂMICA VEÍCULAR

```
% Figuras
figure(2),subplot(211),
loglog(F,MAG,'r'),
title(' Vehicle Frequency Response Function (2GL Vertical Base Excitation)'),
ylabel('Magnitute'),grid,

subplot(212),
semilogx(F,PHASE,'r'),
xlabel('Frequency (Hz)'),ylabel('Phase (°)'),grid,
```

3.4. Resolução em Espaço de Estados com Excitação pela Base

A solução analítica do sistema amortecido excitado pela base foi apresentada no item 7.2 das Notas de Aula 1. Considerando agora a descrição do sistema amortecido descrito pelo vetor de espaço de estados $\{x\} = [z_1 \ z_2 \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2]^T$ e com excitação pela base: $\{u\} = \{u \ \dot{u}\}^T$, a representação matricial do sistema de equações para o sistema vertical com dois graus de liberdade, é dada por:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A] \{x\} + [B] \{u\} \\ \{y\} &= [C] \{x\} + [D] \{u\} \end{aligned} \quad (29)$$

onde as matrizes $[A]$ que representa o sistema mecânico e $[B]$ que descreve a proporção da excitação externa da irregularidade do pavimento $\{u\}$, são descritas para o sistema homogêneo (sem força externa) como:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & k_1/m_1 & -c_1/m_1 & c_1/m_1 \\ k_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & c_1/m_2 & -(c_1+c_2)/m_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_2/m_2 & c_2/m_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Da resolução do auto problema da matriz $[A]$ é possível obter os auto-valores, que são as frequências naturais dos modos de vibrar e os auto-vetores que descrevem a forma de movimentos dos modos. Utilizando-se a transformada de *Laplace* no domínio s , as duas equações acima podem ser rescritas da forma:

$$\begin{aligned} s\{X\}_{(s)} &= [A] \{X\}_{(s)} + [B] \{U\}_{(s)} \\ \{Y\}_{(s)} &= [C] \{X\}_{(s)} + [D] \{U\}_{(s)} \end{aligned} \quad (31)$$

realizando algumas manipulações obtém-se a relação entre a saída y e a entrada u .

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned}(s[I]-[A])\{X\}_{(s)} &= [B]\{U\}_{(s)} \\ \{X\}_{(s)} &= (s[I]-[A])^{-1}[B]\{U\}_{(s)} \\ \{Y\}_{(s)} &= [C](s[I]-[A])^{-1}[B]\{U\}_{(s)} + [D]\{U\}_{(s)}\end{aligned}\quad (32)$$

Deseja-se conhecer a resposta do sistema para uma determinada entrada. Então, é conveniente expressar a função $\{G_{(s)}\}$ que é a relação entre a saída e a entrada. Como em geral para sistemas mecânicos a matriz $[D]$ é nula, obtém-se:

$$\{G\}_{(s)} = \frac{\{Y\}_{(s)}}{\{U\}_{(s)}} = [C](s[I]-[A])^{-1}[B] \quad (33)$$

Observa-se na Figura 12 os valores de receptância em função da frequência onde estão quantificadas as frequências naturais ($\omega_{n1} = 1.05$ e $\omega_{n2} = 10.3$ Hz), e os fatores de amortecimento de cada modo ($\zeta_1 = 15\%$ e $\zeta_2 = 21\%$) além do gráfico da fase em graus.

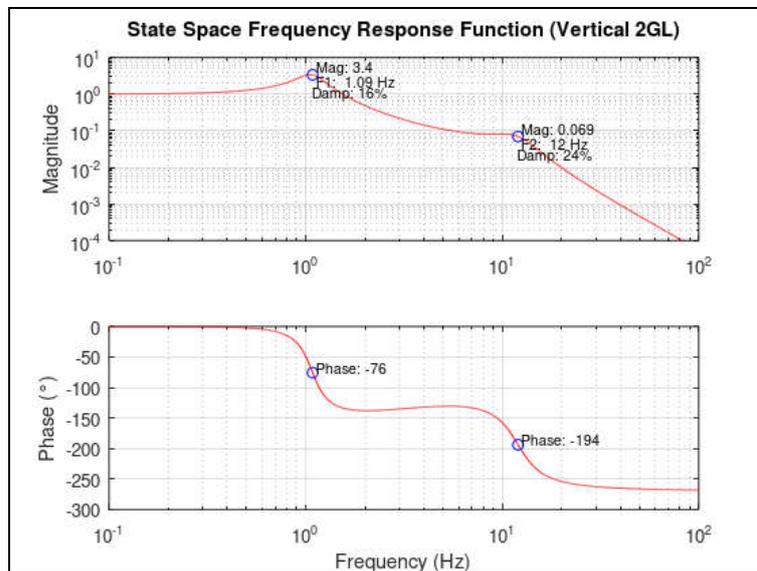


Figura 12 – Modelo Espaço Estados (Receptância e Fase)

Os códigos típicos na plataforma Octave ou MatLab são apresentados a seguir:

DINÂMICA VEÍCULAR

```
% Sistema 2GL na forma de espaço de estados x = [x1 x2 xd1 xd2]' entrada u = [u ud]'
% Equação xd = [A]x + [B]u
%          y = [C]x + [D]u

A=[ 0      0      1      0
    0      0      0      1
   -k1/m1   k1/m1  -c1/m1  c1/m1
    k1/m2  -(k1+k2)/m2  c1/m2  -(c1+c2)/m2];
C=[1 0 0 0]; % Para X1/U1
D=[0 0];

SYS = ss(A,B,C,D); % Matrizes em Espaço de Estados
TF = tf(SYS);      % Função de Transferencia

[MAG, PHASE, W] = bode(TF(1,1)); % Usar TF(1,1) para o primeiro grau de liberdade
F = W/(2*pi);          % Hz

% Figura
figure(3),subplot(211),
loglog(F,MAG,'r'),
title('State Space Frequency Response Function (Vertical 2GL)'),
ylabel('Magnitude'),grid,

subplot(212),
semilogx(F,PHASE,'r'),
xlabel('Frequency (Hz)'),ylabel('Phase (°)'),grid,
```

Para obter a Resposta em Frequência da magnitude da força de contato da roda com o solo F_c , determinada da equação $F_c = k_1(z_1 - z_2) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$, basta definir a matriz $[C]$ como:

$$[C] = [k_1 \quad -k_1 \quad c_1 \quad -c_1].$$

4. MODELO LATERAL

O modelo físico de representação simplificada de um veículo no plano lateral (sagital), pode ser elaborado considerando um corpo rígido de massa m e momento de inércia J_{Gy} , interligado a elementos elásticos (suspensão) de conexão com o solo irregular ($u(s)$), conforme apresentado na Figura 13. Para problemas no plano (Oxz) três coordenadas independentes são suficientes para descrever os movimentos no plano sagital:

- Movimento de translação horizontal (x);
- Movimento de translação vertical (z);
- Movimento angular de arfagem (θ);

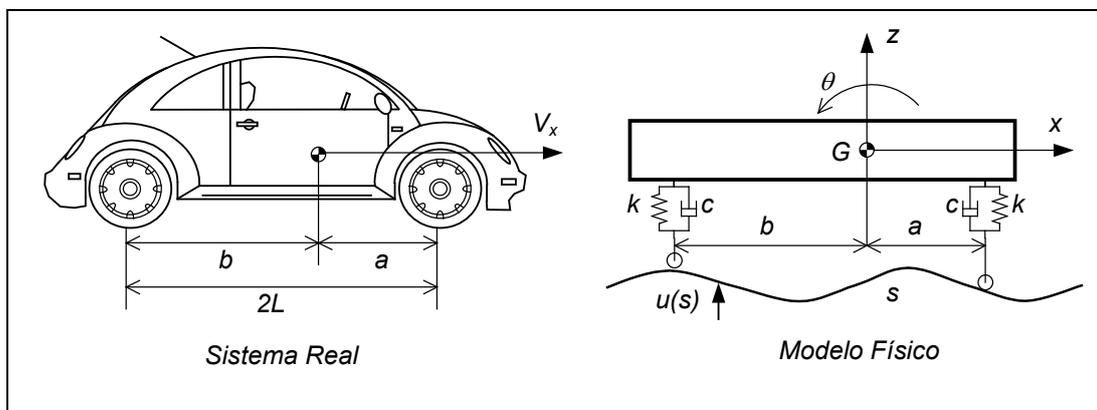


Figura 13 – Modelo Físico do Sistema Real

Considerando que o veículo tenha movimento retilíneo e uniforme com velocidade translacional constante $\vec{V} = V_x \vec{i} = \text{cte}$, pode-se adotar o referencial móvel Gxz como inercial, a partir do qual, o movimento vertical z o ângulo θ são descrito. Neste caso resultam apenas dois graus de liberdade necessários e suficientes para descrição dos movimentos (z e θ). A irregularidade do pavimento descrita pela função $u(s)$ é considerada como uma entrada ao sistema em função da

posição s do veículo ao longo do percurso. Para corpo com velocidade constante, obtêm-se da cinemática a expressão $s = s_0 + Vt$, que permite correlacionar a irregularidade $u(s)$ e o tempo t .

4.1. Equacionamento Modelo Lateral 2GL

Tomando a representação física do veículo, conforme mostrado na Figura 14, descrito por um modelo matemático lateral com dois graus de liberdade (translacional e rotacional) pode-se descrever as seguintes equações diferenciais de movimento obtidas pelo método *Newton-Euler* a partir do teorema da resultante (*TR*) e teorema da quantidade de movimento angular (*TQMA*) aplicado em relação ao pólo no centro de massa G e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*), obtêm-se:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_1 (z_1 - u_1) + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_2 (z_2 - u_2) &= F_z \\ J_{Gy} \ddot{\theta} + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{u}_1) a + k_1 (z_1 - u_1) a - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}_2) b - k_2 (z_2 - u_2) b &= M_G \end{aligned} \quad (34)$$

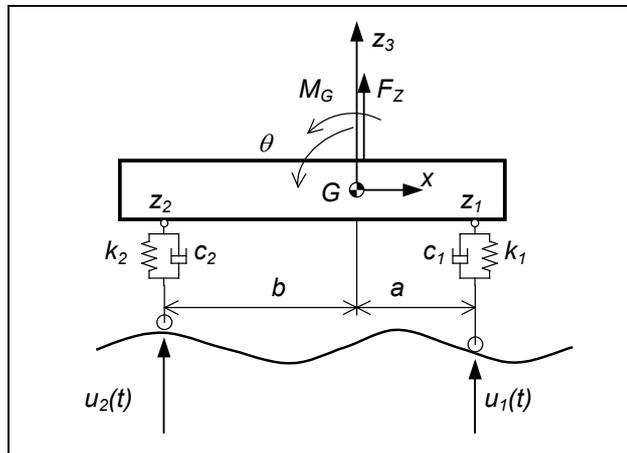


Figura 14 – Modelo Físico com 2 GL

Utilizando as relações cinemáticas: $z_1 = z_3 + a\theta$ e $z_2 = z_3 - b\theta$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) + c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) + k_2 (z_3 - b\theta - u_2) &= F_z \\ J_{Gy} \ddot{\theta} + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) a - c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) b + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) a - k_2 (z_3 - b\theta - u_2) b &= M_G \end{aligned} \quad (35)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

ou rearranjando as expressões colocando à esquerda os termos função dos graus de liberdade e a direita as ações externas devido à pista:

$$m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = c_1 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 + k_1 u_1 + k_2 u_2 + F \quad (36)$$

$$J_{Gy} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 = \dots \quad (37)$$

$$c_1 a \dot{u}_1 + c_2 b \dot{u}_2 + k_1 a u_1 + k_2 b u_2 + M_G$$

Tomando o sistema homogêneo ($F_z = 0$ e $M_G = 0$) e sem excitação pela base (pista reta $u_1 = u_2 = \text{cte}$), resulta em:

$$m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = 0 \quad (38)$$

$$J_{Gy} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 = 0$$

Expressando as equações na forma matricial utilizando o vetor de coordenadas $\{z_3 \ \theta\}^T$:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_3 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & (c_1 a - c_2 b) \\ (c_1 a - c_2 b) & (c_1 a^2 + c_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Note que as equações são dependentes o que caracteriza o acoplamento de movimentos (galope com pivotamento frontal ou traseiro). Caso o sistema seja simétrico ($k_1 a = k_2 b$ e $c_1 a = c_2 b$) as equações tornam-se independentes definindo movimento distintos com frequências próprias.

Expressando as equações na forma matricial compacta, para $\{x\}^T = \{z_3 \ \theta\}^T$ obtêm-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (40)$$

4.2. Resolução do Sistema de Equações Diferenciais

Verifica-se de imediato que as equações de movimento não são independentes, o que acarreta movimento acoplado, portanto o sistema deve ser tratado como um todo. Tomando o sistema homogêneo não amortecido e assumindo que um dos movimentos acoplados do sistema tenha a frequência de vibração acoplada (ω) para os dois graus de liberdade, obtêm-se movimento periódico com as seguintes proporções:

$$z(t) = Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (41)$$

Tomando a segunda derivada do movimento periódico obtêm-se:

$$\ddot{z}(t) = \omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}(t) = \omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (42)$$

e substituindo as duas expressões na equação diferencial do sistema homogêneo e não amortecido, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} [\omega^2 \cos(\omega t + \phi)] + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} [\cos(\omega t + \phi)] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

colocando em evidencia o vetor de magnitudes $\{Z \ \Theta\}^T$ e simplificando, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m\omega^2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2 - J_{Gy}\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Observe novamente que a matriz do sistema é cheia revelando o acoplamento entre os movimentos do sistema. Note ainda que se $k_1 a = k_2 b$ a matriz se torna diagonal resultando em sistema desacoplado e, portanto tendo movimentos vertical e angular distintos.

DINÂMICA VEÍCULAR

A resolução do sistema acoplado descrito de forma matricial pode ser obtida pelas raízes do polinômio característico do determinante da matriz do sistema (auto-problema). Calculando o determinante de ordem (ω^2) resulta em:

$$(k_1 + k_2 - m\omega^2)(k_1a^2 + k_2b^2 - J_{Gy}\omega^2) - (k_1a - k_2b)(k_1a - k_2b) = 0 \quad (45)$$

$$(mJ_{Gy})(\omega^2)^2 - \{m(k_1a^2 + k_2b^2) + J_{Gy}(k_1 + k_2)\}\omega^2 + (k_1^2a^2 - 2k_1k_2ab + k_2^2b^2) = 0 \quad (46)$$

O polinômio característico obtido é de segunda ordem em (ω^2) possuindo duas raízes. As raízes ou auto-valores correspondem às duas frequências naturais do sistema com dois graus de liberdade e são obtidas pela fórmula de *Bhaskara*:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m(k_1a^2 + k_2b^2) + J_G(k_1 + k_2)}{mJ_G} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{m(k_1a^2 + k_2b^2) + J_{Gy}(k_1 + k_2)}{mJ_{Gy}} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1^2a^2 - 2k_1k_2ab + k_2^2b^2)}{mJ_{Gy}} \right\} \right]^{1/2} \quad (47)$$

Para cada raiz do polinômio característico (auto-valores: $\omega_{1,2}$), um conjunto solução $\{Z^1 \Theta^1\}^t$ será obtido (auto-vetores) correspondente a cada modo acoplado de movimento ou forma de vibrar.

Alternativamente, para um sistema homogêneo acoplado do tipo $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$ descrito por:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1a - k_2b) \\ (k_1a - k_2b) & (k_1a^2 + k_2b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

e utilizando novamente a solução periódica para um modo de vibração e aplicando no conjunto de equações do sistema:

$$\ddot{z}(t) = \omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad \text{obtêm-se:} \quad (49)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} [-\omega^2 \cos(\omega t + \phi)] + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} [\cos(\omega t + \phi)] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Eliminando o termo periódico ($\cos(\omega t + \phi)$) e normalizando a primeira linha por m e a segunda linha por J_G resulta em:

$$-\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m & (k_1 a - k_2 b)/m \\ (k_1 a - k_2 b)/J_{Gy} & (k_1 a^2 + k_2 b^2)/J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

ou rearranjando:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m & (k_1 a - k_2 b)/m \\ (k_1 a - k_2 b)/J_{Gy} & (k_1 a^2 + k_2 b^2)/J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \quad (52)$$

que corresponde ao auto-problema típico descrito como $[A]\{X\} = \{\lambda\}[I]\{X\}$ onde $\{X\} = \{Z \ \Theta\}^T$ e $\lambda = \omega^2$.

A matriz $[A]$ do auto-problema pode ser resolvida com auxílio de programa numérico (*Octave*, *Scilab* ou *Matlab*) utilizando o comando (**eig**) que determina os auto-valores ($\lambda = \omega^2$) e os auto-vetores $\{X\}$ que corresponde à proporção dos movimento de cada modo com frequência própria.

Para a primeira frequência natural $\lambda_1 = \omega_1^2$ obtêm-se a proporção do primeiro modo de vibrar:

$\{Z_1 \ \Theta_1\}^T$. Para a segunda frequência natural $\lambda_2 = \omega_2^2$ obtêm-se a proporção do segundo modo

de vibrar: $\{Z_2 \ \Theta_2\}^T$. Tipicamente os programas numéricos fornecem os resultados na forma

matricial: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \Theta_1 & \Theta_2 \end{bmatrix}$

4.3. Comportamento Modal

O comportamento modal decorrente dos modos de vibrar não amortecidos identificados pelos auto-vetores $[Z_1 \Theta_1; Z_2 \Theta_2]^T$, tem a posição geométrica do centro instantâneo de rotação (CIR) do movimento acoplado (ver Figura 15), chamado de pólos **A** e **B**, definidos para cada auto-vetor determinados por:

$$\tan \Theta^1 = Z_1 / L_1 \quad \text{ou para ângulos pequenos} \quad L_1 \cong Z_1 / \Theta_1 \quad \text{e} \quad L_2 \cong Z_2 / \Theta_2 \quad (53)$$

Os movimentos modais para o sistema acoplado (veículo não simétrico com motor na dianteira) ocorrem com um pólo **A** à trás do veículo chamado de Galope Traseiro (cota L_1 - *rear end bounce*) (em geral com frequência mais baixa ω_1) e outro **B** à frente chamado de Arfagem Frontal (cota L_2 - *front end pitch*) (em geral com frequência mais alta ω_2), conforme estão ilustrados na Figura 15b.

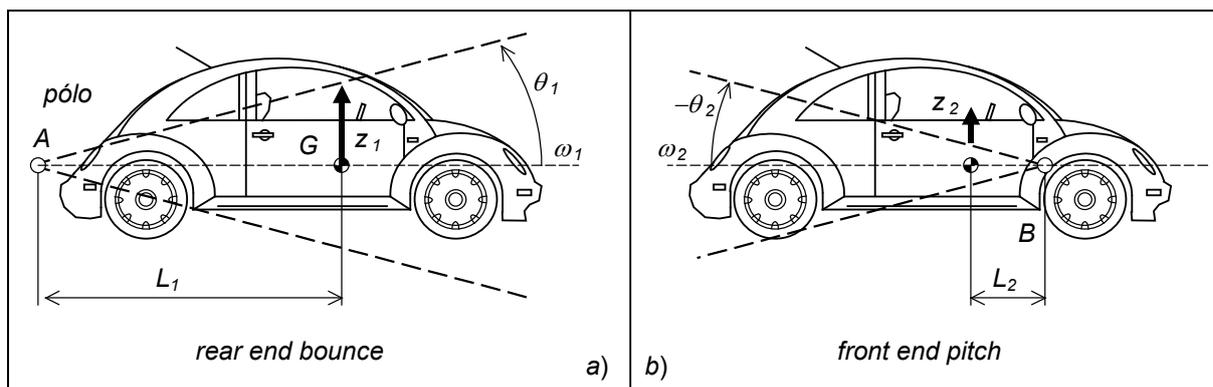


Figura 15 - Identificação dos Modos de Movimento Acoplados

Alguns analistas costumam observar que o movimento do primeiro modo em torno do pólo mais afastado do centro de massa (pólo **A** da Figura 15a com distância L_1) a excursão vertical z_1 do centro de massa **G** é relevante, sendo o movimento mais perceptível o de translação vertical (Galope Traseiro - *rear end bounce*).

DINÂMICA VEÍCULAR

Quando o movimento ocorre em torno do pólo mais próximo ao centro de massa (pólo **B** da Figura 15b com distância L_2) tem o movimento vertical z_2 pequeno sendo o movimento mais perceptível de rotação angular (Arfagem Frontal - *front end pitch*). Na verdade os movimentos ocorrem sempre acoplados (translação e rotação) enquanto $k_1a \neq k_2b$, mas com diferentes percepções em cada posição de observação. Adicionalmente, o incremento da carga no veículo (passageiros e cargas) e a conseqüente mudança da posição do centro de massa (cotas a e b da Figura 14) produz variação da posição dos pólos. Além disso a relação normalizada entre as frequências de movimento (vertical/angular) se alteram tanto quanto a posição do centro de massa e os pólos se movimentam, conforme mostrado na Figura 16.

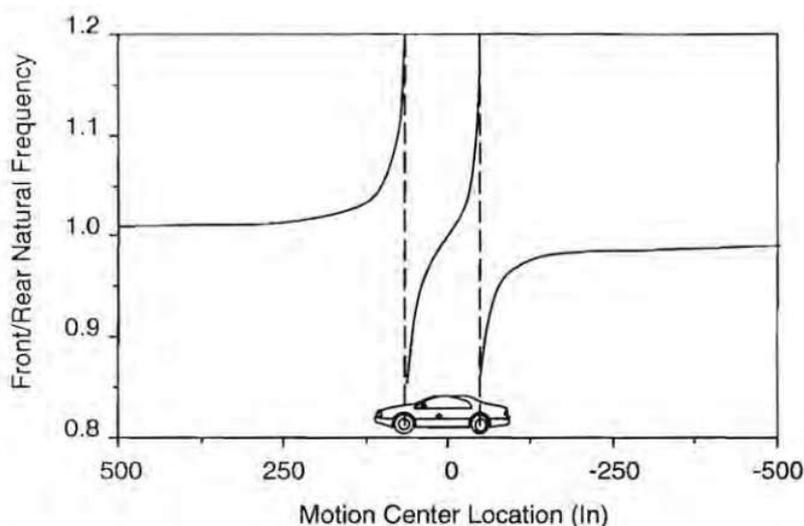


Figura 16 - Passeio dos Pólos em relação a Razão de Frequências (fonte: Miliken)

Note ainda que a posição do centro de massa varia em função do carregamento do veículo. Conforme pesquisa feita por *Heydinger* (1999) a relação entre a distância do CG ao eixo dianteiro (a , conforme mostrado na Figura 15) em função da distância entre eixo $2L$ vai de 0,35 até 0,40 para o carro com o motorista até 0,45 ~ 0,48 para o veículo totalmente carregado (*GVWR*) conforme apresentado na Figura 17.

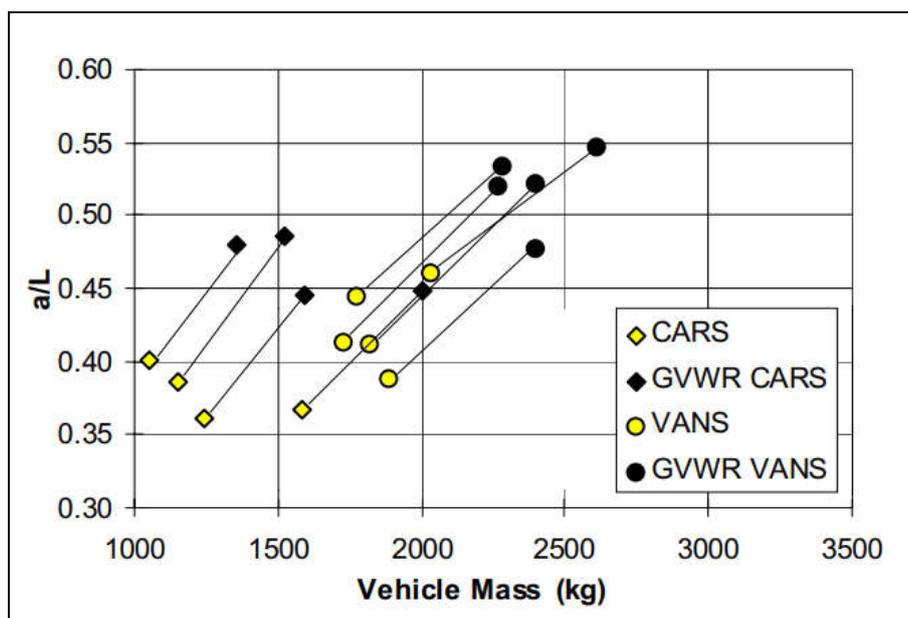


Figura 17 – Posição do Centro de Massa do Veículo (Fonte: Heydinger 1999)

Note ainda que o comprimento de onda das irregularidades da pista tem efeito relevante quanto ao movimento excitado. Para uma excitação harmônica com comprimento de onda $\lambda = 2c / 2^n$ (para $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ etc.) conforme ilustrado na Figura 18a, o movimento excitado será predominantemente a translação vertical (*bounce*). Caso o comprimento de onda seja $\lambda = 3c / 2^n$ o movimento dominante será angular de arfagem (*pitch*) conforme ilustrado na Figura 18b.

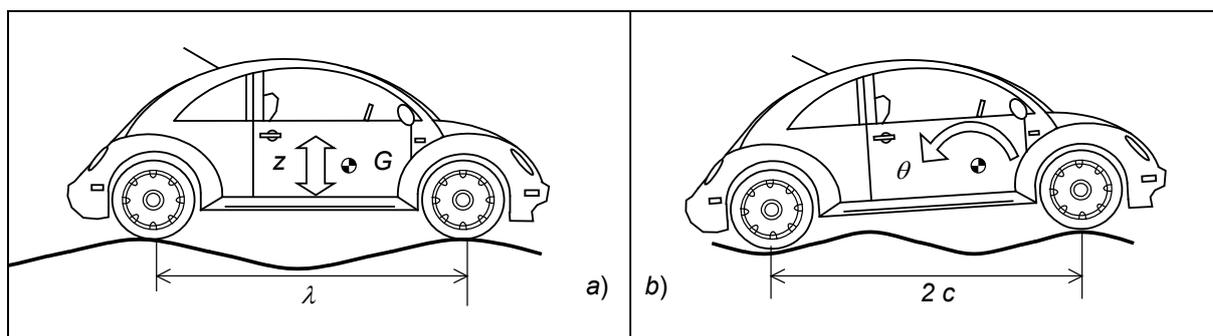


Figura 18 – Excitação pela Base (comprimento de onda)

DINÂMICA VEÍCULAR

Exemplo Numérico [2]: Considere um veículo modelado conforme mostrado na Figura 14, com as características descritas na Tabela 2. Um dos movimentos oscilatórios possíveis, com frequência ω livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas aplicando à matriz dinâmica do sistema resulta em:

$$\begin{aligned} z(t) &= Z \cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{z}(t) &= -\omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m\omega^2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2 - J_{Gy} \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e utilizando os respectivos valores numéricos da Tabela 2, resulta em:

$$\begin{bmatrix} (40000 - 1000 \omega^2) & 15000 \\ 15000 & (67500 - 810 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

com o polinômio característico obtido do determinante da matriz $[A]$ do sistema: $8.1 (\omega^2)^2 - 999 \omega^2 + 24750 = 0$, obtêm-se as raízes que correspondem as frequências naturais: $\omega_1 = 5.8593 \text{ rad/s}$ ($f_1 = 0.93 \text{ Hz}$) e $\omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s}$ ($f_2 = 1.5 \text{ Hz}$).

Tabela 2 – Características do Veículo

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo (m)	1000 kg	--
Momento de Inércia (J_{Gy})	810 kg m ²	Pólo G
Distância do eixo dianteiro ao CM (a)	1.0 metros	--
Distância do eixo traseiro ao CM (b)	1.5 metros	--
Rigidez da mola dianteira (k_1)	18.0 kN/m	conjunto
Rigidez da mola traseira (k_2)	22.0 kN/m	conjunto

Utilizando as frequência naturais obtidas: $\omega_1 = 5.8593$ e $\omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s}$, em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo: $(40000 - 1000 \omega_1^2) \cdot Z_1 + 15000 \cdot \Theta_1 = 0$ da eq. 55) determina-

DINÂMICA VEÍCULAR

se as relações: $L_1 = z_1/\tan\theta_1 \cong Z_1/\Theta_1$ e $L_2 = z_2/\tan\theta_2 \cong Z_2/\Theta_2$, que são as distâncias dos pólos A e B ao centro de massa, de cada modo de vibrar: $L_1 = -2.6461$ e $L_2 = 0.3061$ metros, conforme ilustrado na Figura 15. Note que a utilização da outra linha da matriz do sistema resulta nos mesmas proporções. Essa configuração de modos de vibrar é típica de veículos com motor na dianteira.

Para conforto (*ride*) recomenda-se a menor frequência possível (movimento vertical suave atenuando as irregularidades – $f_n \leq 1.3$ Hz e curso de suspensão de 152 mm) e a frequência vertical deve ser menor que 1.2 Hz vezes a frequência de arfagem (*Olley*, 1930).

A dedução completa da função de resposta em frequência do sistema, quando excitado pela base, está apresentada no Anexo B.

5. MODELO FRONTAL

O modelo frontal do veículo com massa m , momento de inércia J_G e não amortecido com 2 GL , conforme apresentado na Figura 19, permite avaliar o comportamento modal acoplado do movimento de rolagem/lateral inferior/superior, conforme a combinação dos movimentos $y(t)$ e $\phi(t)$, apresentados na Figura 20.

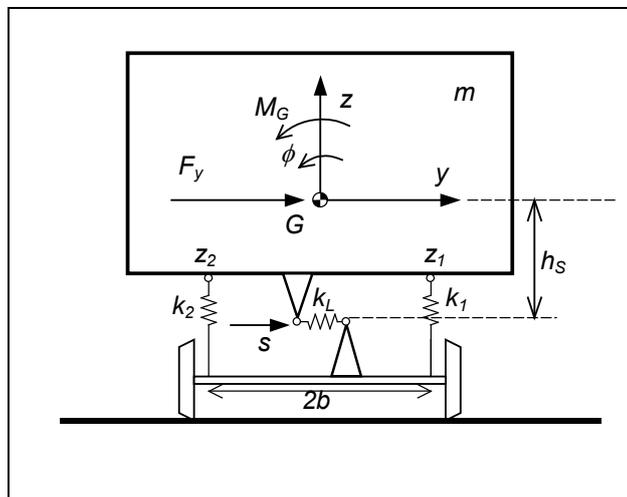


Figura 19 – Modelo Frontal

Utilizando as relações cinemáticas: $z_1 = b \cdot \phi$; $z_2 = -b \cdot \phi$ e $s = y + h_s \phi$, o teorema da resultante (TR), o teorema da quantidade de movimento angular ($TQMA$) com pólo em G e referencial móvel $Gxyz$ e o diagrama de forças sobre o corpo livre ($DFCL$), válidas para pequenos deslocamentos ($y \cong Y$), obtêm-se as equações diferenciais para os movimentos dos graus de liberdade $y(t)$ e $\phi(t)$:

$$m \ddot{Y} = \sum F_y = F_{Mola} + F_y^{ext} = (-s \cdot k_L) + F_y = -(y + h_s \phi) \cdot k_L + F_y^{ext} \quad (56)$$

$$J_G \ddot{\phi} = \sum \bar{M}_G = -b \cdot (k_1 \cdot b \phi) - b \cdot (k_2 \cdot b \phi) - h_s \cdot [k_L \cdot (y + h_s \phi)] + M_G^{ext} \quad (57)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

As equações de movimento para o sistema acoplado do tipo $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$ com $x = \{y \ \phi\}^T$ e adotando rigidez vertical idêntica ($k_1 = k_2 = k_V$), são descritas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_L & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_V b^2 + k_L h_s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y^{ext} \\ M_G^{ext} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Utilizando novamente a solução periódica para um modo de vibração e aplicando as derivadas no conjunto de equações do sistema homogêneo:

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \beta) \quad \text{e} \quad \phi(t) = \Phi \cos(\omega t + \beta) \quad \text{derivando 2 vezes:} \quad (59)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \cos(\omega t + \beta) \quad \text{e} \quad \ddot{\phi}(t) = -\omega^2 \Phi \cos(\omega t + \beta) \quad \text{obtem-se:} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 \cos(\omega t + \beta) \\ -\omega^2 \cos(\omega t + \beta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_L & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_V b^2 + k_L h_s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \beta) \\ \cos(\omega t + \beta) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

Eliminando o termo periódico e normalizando a primeira linha por m e a segunda linha por J_G , obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} k_L / m & (k_L h_s) / m \\ (k_L h_s) / J_G & (2k_V b^2 + k_L h_s^2) / J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \quad (62)$$

que corresponde ao auto-problema típico descrito por $[A]\{X\} = \lambda [I]\{X\}$ onde $\{X\} = \{Y \ \Phi\}^T$ e $\lambda = \omega^2$. O determinante da matriz $[A]$ do auto-problema, produz o polinômio característico que pode ser resolvido com auxílio de programa numérico (*Octave*, *Scilab* ou *Matlab*) utilizando o comando (*eig*) que calcula as raízes, correspondente aos auto-valores ($\lambda = \omega^2$) e os auto-vetores $\{X\}$ do sistema, que fornecem a proporção dos movimentos de cada modo com frequência própria.

5.1. Exemplo

Considere o modelo frontal de um veículo, conforme mostrado na Figura 19 e com as características descritas na Tabela 3. Um dos movimentos oscilatórios possíveis, com frequência ω livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas aplicando à matriz dinâmica do sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} (k_L - m\omega^2) & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_v b^2 + k_L h_s^2 - J_G \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

e utilizando os respectivos valores numéricos da Tabela 3, resulta em:

$$\begin{bmatrix} (320000 - 1415\omega^2) & 128000 \\ 128000 & (89450 - 250\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

com o polinômio característico obtido do determinante da matriz $[A]$ do sistema: $0.353750 (\omega^2)^2 - 206.571 \omega^2 + 12240 = 0$, obtêm-se as raízes que correspondem as frequências naturais: $\omega_1 = 8.168 \text{ rad/s}$ ($f_1 = 1.3 \text{ Hz}$) e $\omega_2 = 22.745 \text{ rad/s}$ ($f_2 = 3.62 \text{ Hz}$).

Tabela 3 – Características do Veículo

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo (m)	1415 kg	--
Momento de Inércia de Rolagem (J_{Gx})	250 kg m ²	Pólo G
Distância entre molas verticais ($2b$)	1.5 metros	--
Distância da mola lateral ao CM (h_s)	0.4 metros	--
Rigidez da mola vertical (k_v)	34.0 kN/m	2 molas
Rigidez da mola lateral (k_L)	320.0 kN/m	total

DINÂMICA VEÍCULAR

Utilizando as frequências naturais obtidas: $\omega_1 = 8.168$ e $\omega_2 = 22.745$ rad/s, em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo $(320000 - 1415\omega_1^2) \cdot Y^1 + 118000 \cdot \Phi^1 = 0$ da eq. 45) determina-se as relações: $h_1 = z^1 / \tan\theta^1 \cong Z^1 / \Phi^1$ e $h_2 = z^2 / \tan\theta^2 \cong Z^2 / \Phi^2$, que são as distâncias dos pólos **B** e **A** ao centro de massa, de cada modo de vibrar: $L_1 = -0.568$ e $L_2 = 0.331$ metros, conforme identificado na Figura 20. Note que utilizando a segunda expressão resulta nos mesmos valores.

Os modos de movimento rolagem frontal com centro inferior (*lower sway*) e superior (*upper sway*) estão apresentados na Figura 20.

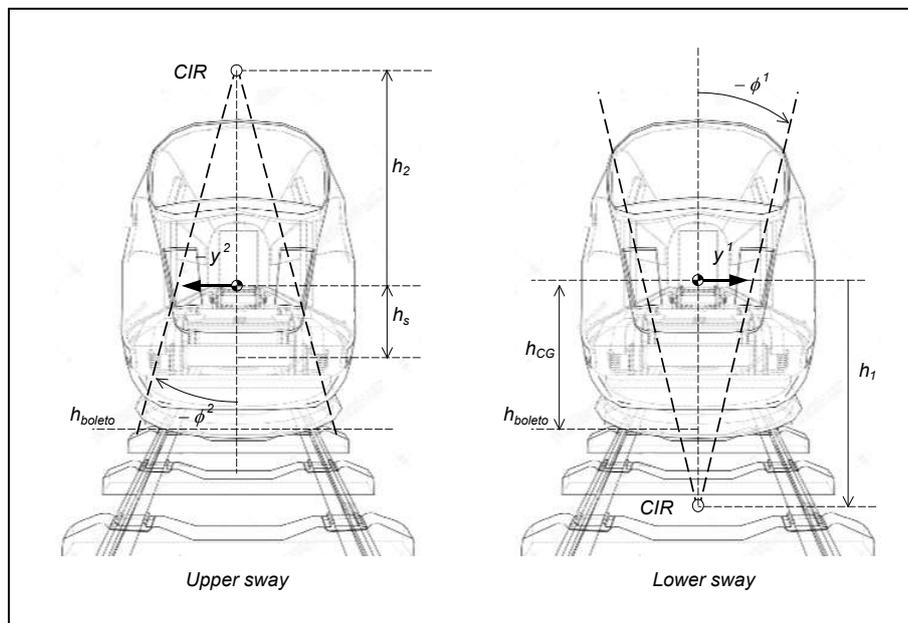


Figura 20 – Modos de Movimento de Rolagem/Lateral

Na forma de espaço de estados, considerando $x = \{y \ \phi\}^T$ e o sistema homogêneo, considerando $k_1 = k_2 = k_y$, e amortecedores $c_{y1} = c_{y2} = c_y$, e amortecedor lateral c_L , obtêm-se a partir das equações do sistema:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + c_L \dot{y} + k_L y + c_L h_s \dot{\phi} + k_L h_s \phi &= 0 \\ J_G \ddot{\phi} + [2b^2 c_y + h_s^2 c_L] \dot{\phi} + [2b^2 k_y + h_s^2 k_L] \phi + (h_s c_L) \dot{y} + (h_s k_L) y &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_L/m & -h_s k_L/m & -c_L/m & -h_s c_L/m \\ -h_s k_L/J_G & -(2b^2 k_y + h_s^2 k_L)/J_G & -h_s c_L/J_G & -(2b^2 c_y + h_s^2 c_L)/J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (66)$$

5.2. Resposta Lateral/Rolagem Inferior/Superior

Para o modelo frontal do sistema amortecido com excitação pela base, obtêm-se para o primeiro modo de vibrar as respostas apresentadas na Figura 21.

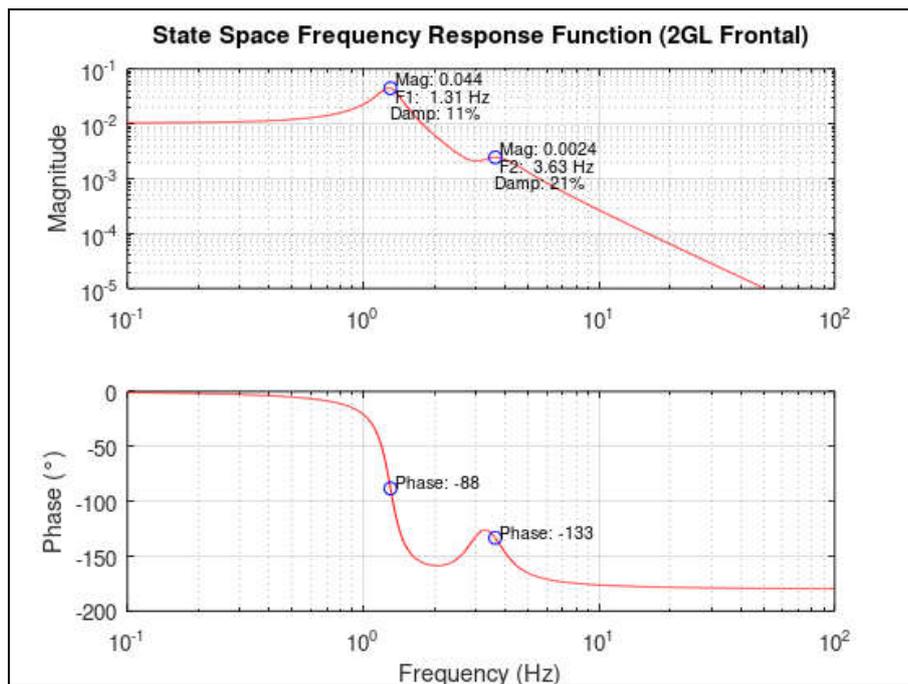


Figura 21 - Movimento de Balanço Lateral Inferior (Receptância e Fase)

Alternativamente um modelo com 3 graus de liberdade, incluindo a variação do movimento vertical, pode ser considerado.

DINÂMICA VEÍCULAR

A função de resposta em frequência também pode ser apresentada no formato 3D cujas projeções nos planos real×imaginário, amplitude×frequência e fase×frequência, podem ser apreciadas na Figura 22.

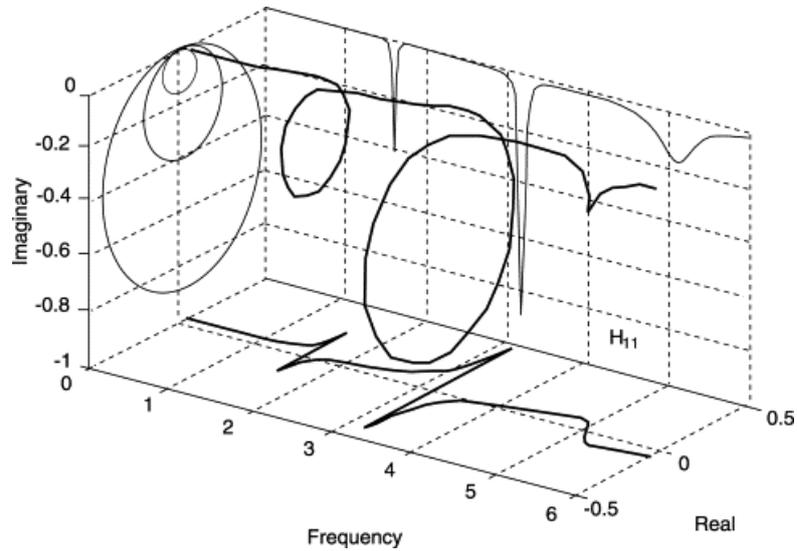


Figura 22 – Projeções da Função de Resposta em Frequência Completa 3D

6. DEMAIS MODOS DE MOVIMENTO

Uma vez estabelecida a metodologia de análise de sistemas com $2GL$, pode-se realizar a identificação da resposta em frequência dos diversos modos de movimento do veículo com auxílio da resposta de cada modelo correspondente.

A seguir serão apresentados os resultados gráficos de **Receptância** para os diversos modelos do veículo: vertical $2G$ (caixa e truque), modelo sagital correspondente aos movimentos vertical/angular de galope e arfagem (*bounce & pitch*), modelo frontal com movimento lateral e angular de rolagem formando o modo acoplado de balanço lateral inferior e superior (*lower & upper sway*) e modelo horizontal com resposta de direção do veículo (*yaw*) na faixa de excitação de 0,1 Hz a 100 Hz.

6.1. Resposta de Arfagem

O modelo sagital amortecido com $2 GL$ e excitado pela base, conforme apresentado na Figura 23, permite identificar as respostas em receptância e fase do veículo no movimento de arfagem que estão apresentadas na Figura 24

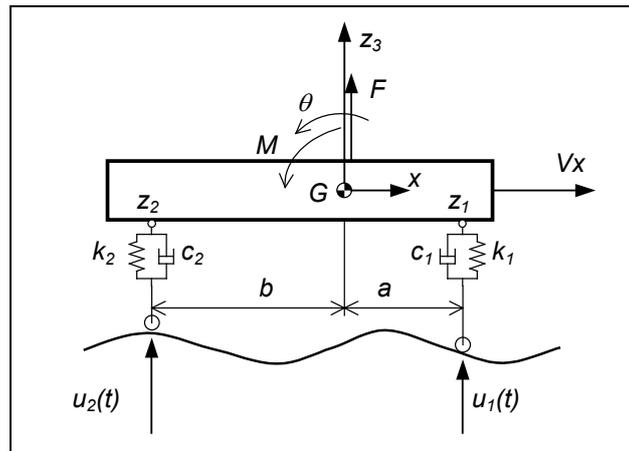


Figura 23 – Modelo Sagital (2 GL)

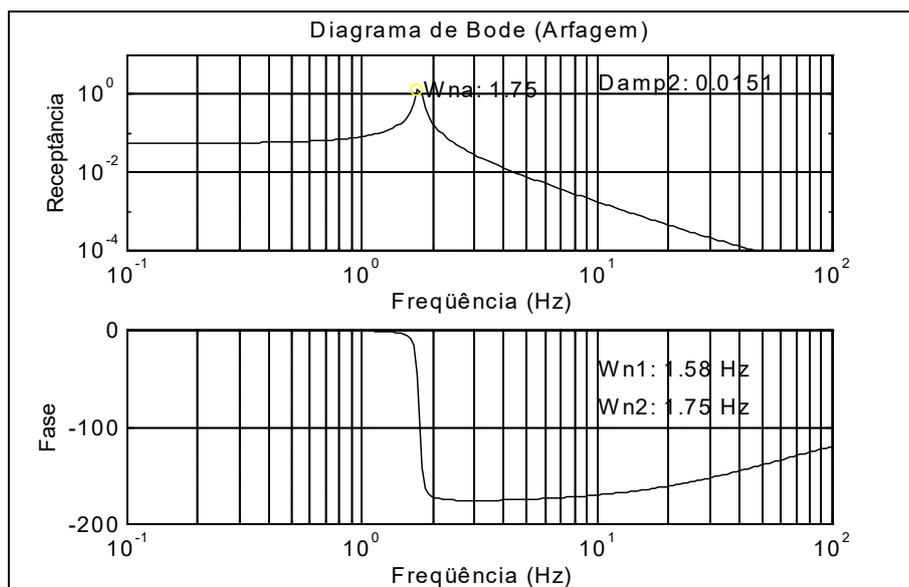


Figura 24 - Gráfico de Bode do Movimento de Arfagem do Carro (Receptância e Fase)

6.2. Resposta do Modelo Horizontal

O modelo horizontal do veículo com 2 GL possui o deslocamento lateral e deslocamento angular de guinda. Quando este modo ocorre de forma acoplada de maneira similar com o movimento

sagital (item 3) resultando do modo de guinada frontal, conforme mostrado na parte superior na Figura 25, e traseira mostrada na parte inferior da mesma figura.

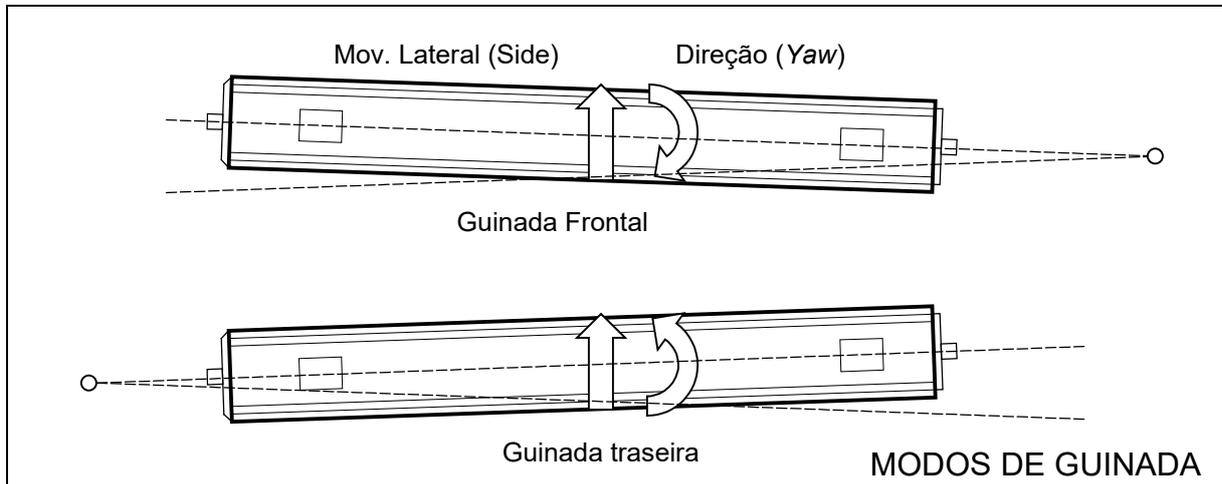


Figura 25 – Modo Acoplado de Guinada (Frontal e Traseira)

No caso particular do veículo metro-ferroviário, as rodas cônicas proporcionam a centralidade na via durante o tráfego. Esta resposta, entretanto está associada a um comprimento de onda fixo que para uma determinada velocidade, produz um movimento de oscilação chamado de direcionamento ou guinada. A frequência de oscilação é portanto diretamente proporcional à velocidade, sendo que o amortecimento devido ao contato de rolamento é fixo. Portanto o fator de amortecimento $\zeta = c / (2m\omega_n)$ é inversamente proporcional à velocidade, tendendo a se anular ampliando o movimento de oscilação sustentada resultando em uma velocidade limite crítica (movimento de *lacet* ou *hunting*).

No caso específico de veículos automotores a suspensão com pneumáticos também há uma velocidade limite de estabilidade, conforme proposto por Rill (Rill, 2009)

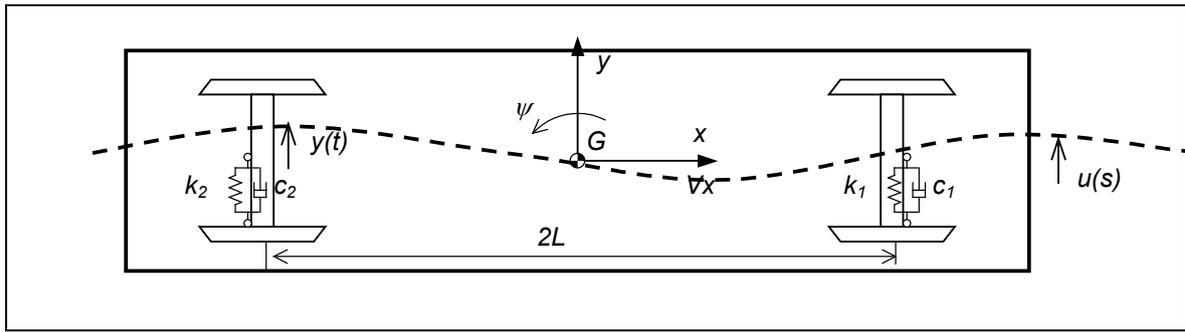


Figura 26 – Modelo Horizontal

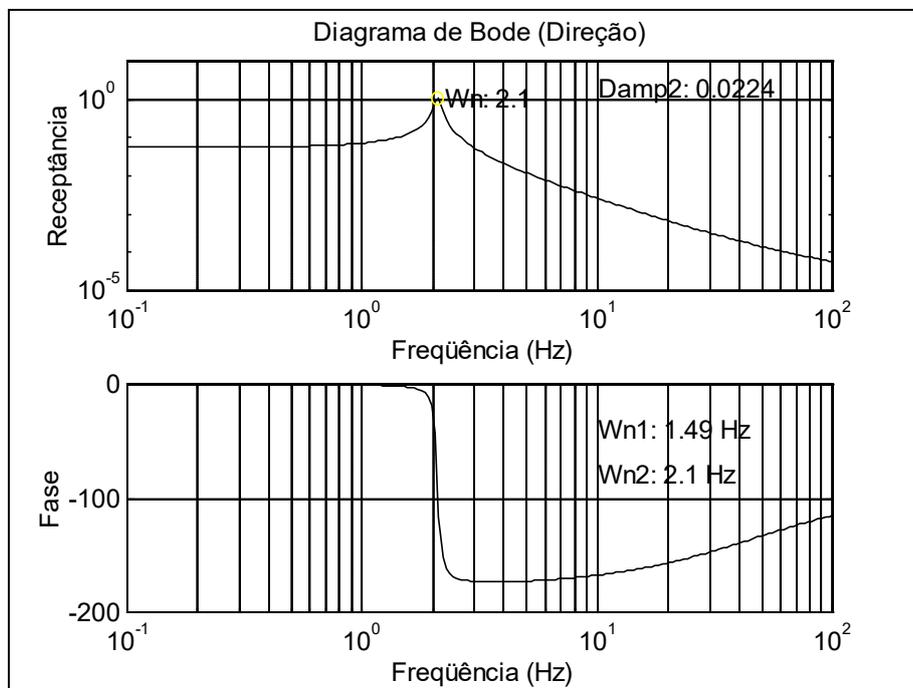


Figura 27 - Gráfico de Bode do Movimento de Direcionamento do Veículo (Receptância e Fase)

7. AJUSTE DA SUSPENSÃO

Três termos são usualmente empregados para qualificar a percepção do motorista e quantificar o desempenho dinâmico e estrutural do veículo:

- Conforto (*Ride*);
- Dirigibilidade (*Handling*);
- Aderência em Aceleração e Frenagem (*Road Grip*)
- Fadiga (Fatigue).

Entende-se por ***Ride*** a percepção subjetiva do motorista associado com o nível de conforto ao dirigir o veículo (resposta oscilatória de regime na direção vertical e angular de arfagem, vibração, ruídos, acomodação no banco, posição dos comandos, tempo da viagem, etc.). Característica típica esperada de veículos de passeio para viagens longas e tranquilas. Entende-se por ***Handling*** a percepção subjetiva do motorista associado com a capacidade e resposta transitória do veículo as alterações de direção e velocidade (variação de velocidade de resposta horizontal em aceleração e frenagem, dirigibilidade, capacidade de sustentar aceleração lateral, estabilidade, previsibilidade, governabilidade, segurança). Embora não excludente da anterior é uma característica típica adicional esperada de carros esportivos e de alto desempenho. A suspensão filtra as irregularidades do pavimento e em função da velocidade transmitem solicitações oscilatórias à estrutura do veículo. Neste aspecto o dano em **fadiga** à estrutura do veículo, pode ser avaliada (ver Figura 28).

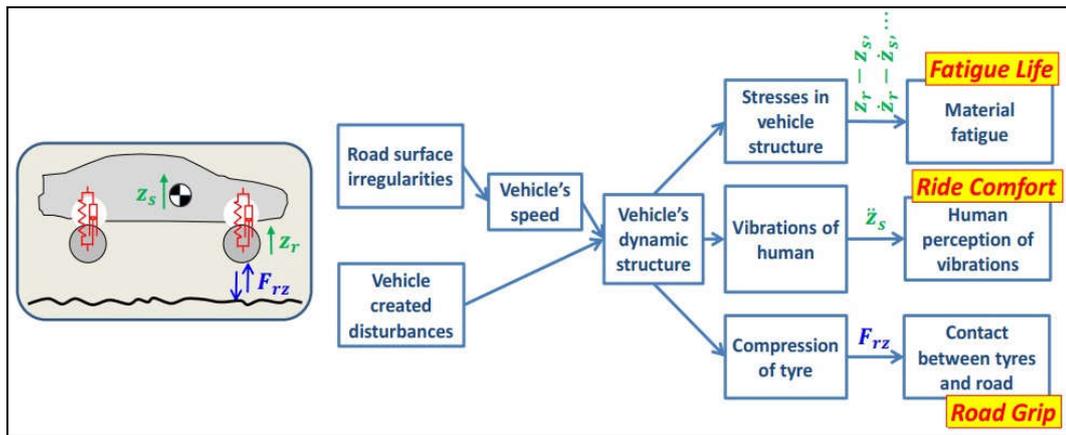


Figura 28 – Características Principais da Suspensão (Fonte: Jacobson 2017)

Para o ajuste da suspensão, buscando atender a estes requisitos, os seguintes parâmetros devem ser avaliados e podem ser otimizados:

- Altura do Centro de Massa;
- Momento de Inércia;
- Rigidez vertical da suspensão;
- Rigidez lateral da suspensão;
- Fator de amortecimento;
- Barra de torção anti-rolagem.

7.1. Movimento Vertical

Na direção vertical o modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo é suficiente para verificar sua interação com as irregularidades do pavimento. O modo elegante de tratar o problema consiste em identificar a função de transferência do modelo excitado pela base e multiplicar pelo espectro das irregularidades da via descrito no domínio do espaço. Para compatibilizar as duas funções utiliza-se a relação $f = \lambda \cdot V$ que permite para uma determinada velocidade de tráfego V , transformar o espectro espacial das irregularidades num espectro de frequência o que permite fazer a multiplicação no domínio da frequência.

DINÂMICA VEÍCULAR

Pode-se dividir as oscilações verticais em dois grupos por faixa de frequência:

- *Ride Primário* – movimentos do veículo sobre sua suspensão (movimentos: *Bounce*, *Pitch* e *Roll*) na faixa de: 0.5 a 4.0 Hz.
- *Ride Secundário* – movimentos das rodas sobre a suspensão devido as irregularidades da pista, na faixa de 4.0 a 25.0 Hz.

A intensidade das vibrações de baixa frequência dos primeiros modos de movimento (*Ride Primário*) estão associadas a capacidade de filtragem da suspensão ao espectro de solicitações produzidas pelas irregularidades do pavimento. Relembrando que a curva de resposta em frequência (*FRF* receptância) tende a atenuar as oscilações após o pico de ressonância, quanto menor o valor da frequência natural maior a faixa de frequência que será atenuada. Esta avaliação pode ser feita considerando diferentes frequência naturais, conforme comparação apresentada na Figura 29.

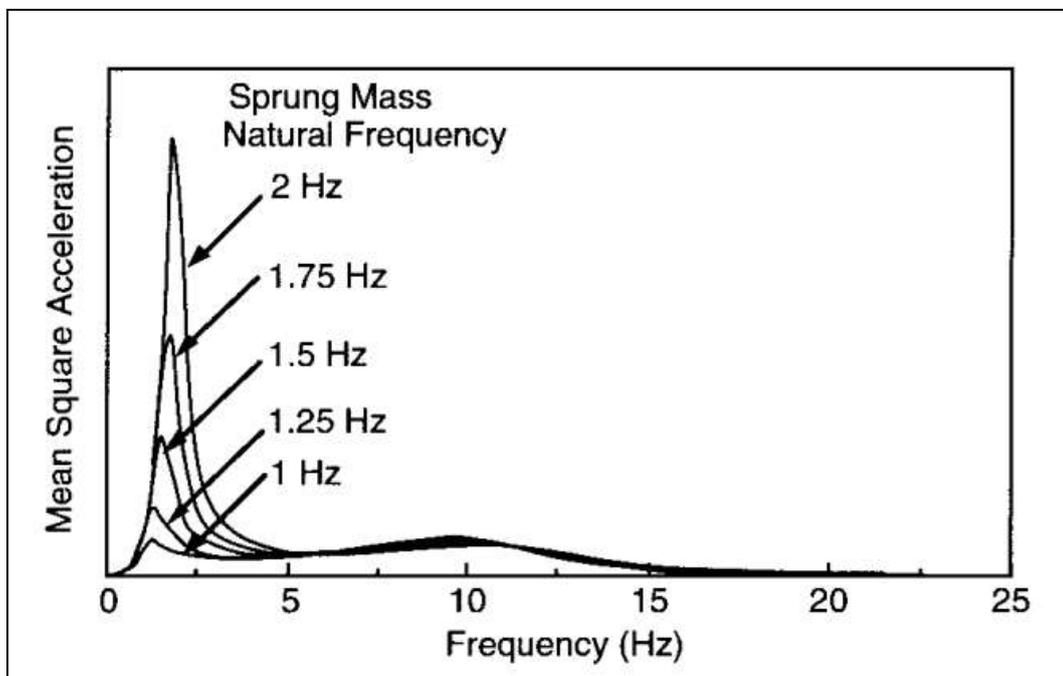


Figura 29 –Aceleração Vertical Média Quadrática em Tráfego Função da Frequência Natural (Fonte: Gillespie)

DINÂMICA VEÍCULAR

Para quantificar a irregularidade da pista pode-se utilizar a norma internacional ISO 8608 que classifica em vários níveis (*A* até *H*), conforme mostrado na Figura 30, as diferentes qualidade de pista em função da seu conteúdo em comprimento de onda no domínio espectral.

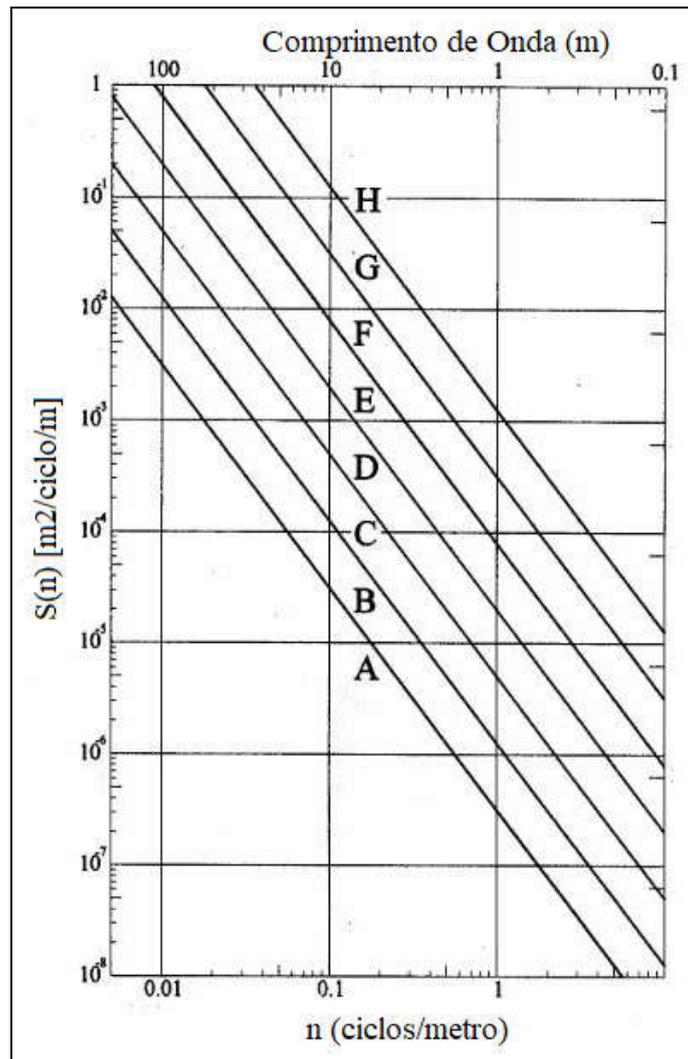


Figura 30 - Nível de Qualidade da Pista (ISO-8608)

Para quantificar a sensibilidade do motorista as vibrações não filtradas pela suspensão do veículo, utiliza-se a norma internacional *ISO-2631* de conforto. O espectro de tolerância apresentado na Figura 31, revela a menor tolerância do usuário do veículo às vibrações na faixa de frequência entre 4,0 a 8,0 Hz, com valor médio quadrático aceitável inferior a 0.25 m/s^2 ($0.025g - RMS$).

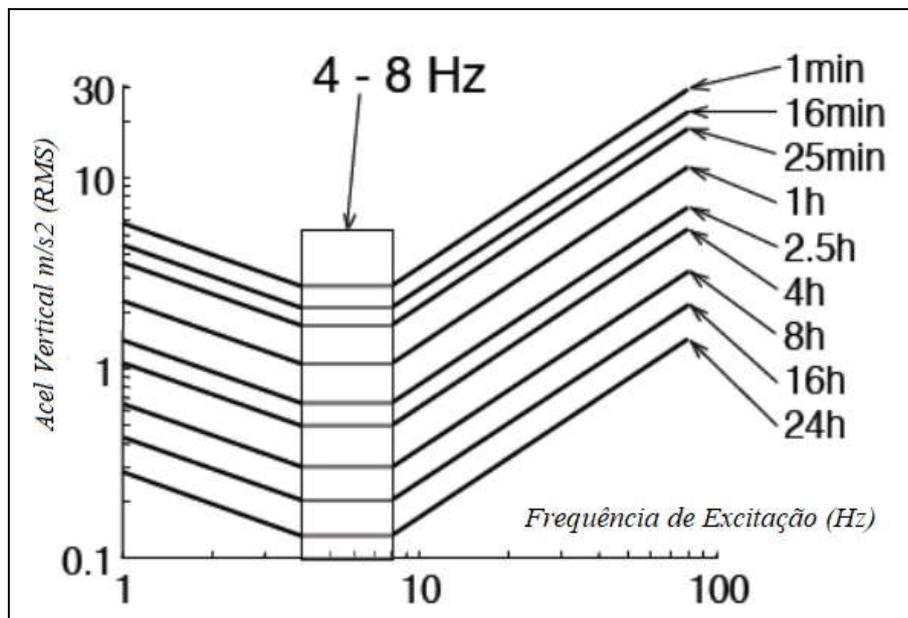


Figura 31 – Tempo Tolerável em Faixa de Aceleração (rms)

A norma internacional de conforto ISO 2631-1 também sugere a utilização do “*Vibration Dose Value*” que corresponde à aceleração elevada à quarta potência, como uma alternativa para incluir adequadamente os efeitos fator de crista (*high crest factors*) na análise vibrações não contemplado nas figuras de mérito estatísticos (como por exemplo, valor *RMS*). O índice *VDV* pode ser determinado pela aceleração medida em cada uma das três direções cartesianas (direções *x*, *y* e *z*) como:

$$VDV_i = \left[\int_{t=0}^{t=T} a_i^4(t) \cdot dt \right]^{1/4} \quad \text{e} \quad RI = \sum_{i=1}^3 VDV_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \quad (67)$$

Um único índice *RI* (*Ride Index*) pode ser utilizado para quantificar o conforto do passageiro em um veículo trafegando em determinada velocidade *V* sobre uma pista com irregularidade.

7.2. Plano Sagital (Vertical/Arfagem)

Devido ao processo de aceleração e frenagem horizontal, o veículo é excitado angularmente devido ao binário de momento (M_{ac} ou M_{br}) na direção y , produzido pelas forças tangenciais de contato da roda (F_{ac} ou F_{bf} e F_{bt}) e a inércia da massa do veículo em função da altura h_G do centro de massa G , conforme mostrado na Figura 32. Ou seja, quando se aplica o freio (degrau de desaceleração), a frente do veículo tende a baixar, devido à transferência de carga para o eixo dianteiro produzido pelo binário de momento de frenagem (M_{br}). Este movimento é conhecido com na língua inglesa como *dive* (mergulho). Durante a aceleração o movimento é oposto (M_{ac}), elevando da dianteira do veículo (denominado de *squad*). O ajuste da suspensão para este efeito é realizado tomando a posição angular estacionária, conforme deduzida a seguir e otimizar o parâmetro multiplicador.

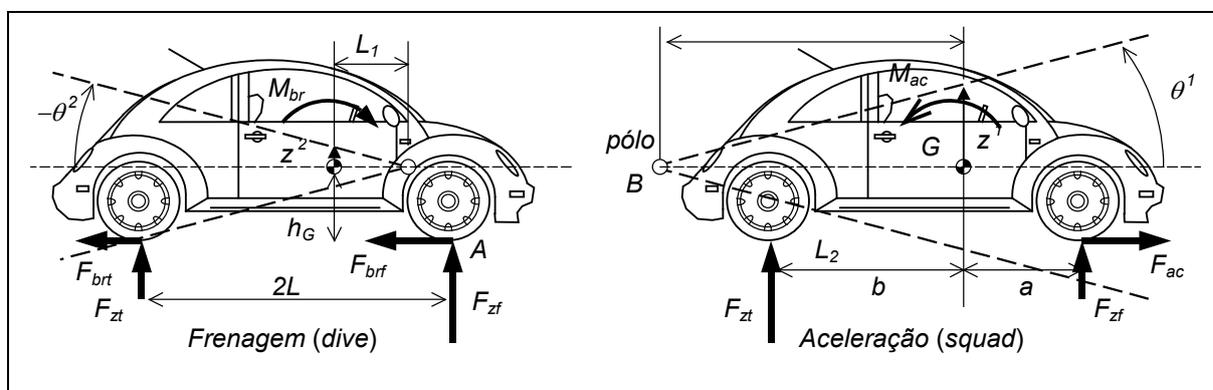


Figura 32 – Arfagem na Aceleração e Frenagem

Este fenômeno também é observado em máquinas agrícolas (ex. tratores) que rebocam implementos com elevada força tracionadora. Devido à heterogeneidade do solo e reduzida rigidez rotacional e vertical dos pneus, o conjunto de tração (*power train*) tende a oscilar variando a força tracionadora excitando o modo angular (*pitch*) da suspensão do veículo. Este fenômeno é chamado de *power-hop*.

DINÂMICA VEÍCULAR

Para tratar este efeito considera-se um aceleração ou frenagem constante e, portanto aceleração angular nula (efeitos dinâmicos transitórios desconsiderados). Utilizando o **TR** no plano sagital (eixo x e z), o **TQMA** com pólo no ponto de contato da roda dianteira (A) e o diagrama de forças sobre o corpo livre da Figura 32, obtêm-se:

$$\begin{aligned} m \cdot a_{Gx} &= F_{ac} \\ m \cdot a_{Gz} &= F_{zf} + F_{zt} - mg = 0 \\ J_{Ay} \dot{\omega}_y &= -2L \cdot F_{zt} + h_G \cdot F_{ac} = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

resultando em:

$$2L \cdot F_{zt} = h_G \cdot m \cdot a_{Gx} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{zt}}{m} = a_{Gx} \frac{h_G}{2L} \quad (69)$$

Para veículo simétrico ($a = b = L/2$) com molas idênticas (k_z) o binário de momento M_y pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} ma_{Gx} h_G &= M_y \\ F_{zf} + F_{zt} &= m \cdot g \\ F_{zf} &= -k_z(z_f - \Delta z) \text{ e } F_{zt} = -k_z(z_t + \Delta z) \\ M_y &= k_z \cdot \Delta z \cdot L \end{aligned} \quad (70)$$

Tomando a relação geométrica da deflexão da suspensão Δz em função do ângulo θ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} ma_{Gx} h_G &= k_z \cdot \Delta z \cdot L \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \frac{ma_{Gx} h_G}{k_z L} \\ \theta &= a \tan\left(\frac{\Delta z}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta \cong \frac{h_G}{L^2} \frac{m}{k_z} a_{Gx} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\theta \cong k_{pitch} \cdot a_{Gx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{pitch} = \frac{h_G}{L^2} \cdot \frac{m}{k_z}} \quad (72)$$

Portanto para uma determinada aceleração longitudinal a_{Gx} , quanto maior a altura do centro de massa (h_G) e menor a distância entre eixos ($2L$) maior será o ângulo θ de arfagem (*squad - dive*)

DINÂMICA VEÍCULAR

devido ao momento de binário da aceleração ou frenagem. Para ajustar a suspensão e minimizar o efeito angular, o único parâmetro, exceto as dimensões (h_G e $2L$), é a rigidez vertical das molas k_z que deve ser incrementada para reduzir o ângulo de regime no movimento angular de arfagem.

Alguns projetistas sugerem introduzir mecanismos de variação geométrica do curso da suspensão (curso vertical \times curso em arco com centro definido) com objetivo de mudar a distribuição das cargas sobre os elementos elásticos, produzindo uma suspensão não linear com intenção de minimizar o efeito *squad/dive*.

Esta mesma análise pode ser aplicada para o movimento de rolagem (*lower/upper sway*) utilizando o modelo frontal tratado no item 5.2. Neste caso para ajustar a suspensão e minimizar o efeito angular, além das dimensões geométricas, pode-se introduzir a barra anti-rolagem que tem a função específica de incrementar a rigidez angular e reduzir o ângulo de regime no movimento angular de rolagem lateral (*lower sway*).

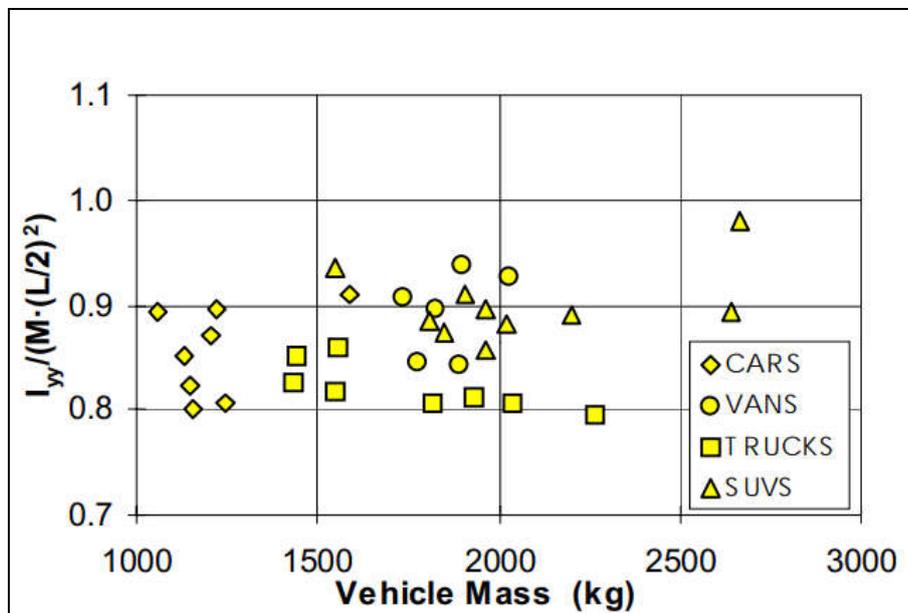


Figura 33 – Momento de Inércia normalizado pelo Raio de Giração (Fonte: Heydinger, 1999)

A distribuição de massa do veículo pode ser apreciada pela relação entre o momento de inércia transversal (J_y) e o raio de giração (massa $\times L^2$) para diferentes tipos de veículos. Os resultados foram consolidados por Heydinger (1999) e tem valor na faixa de 0.8~0.9, conforme apresentado na Figura 33.

7.3. Influência do Comprimento de Onda da Irregularidade

Os movimentos vertical e de arfagem do veículo podem ser excitados em função do comprimento de onda das irregularidades da pista. Dependendo da distância entre eixos ($2c$) e o comprimento de onda da irregularidade (λ), pode haver uma razão que promove predominantemente um movimento ou o outro. Para uma excitação harmônica com comprimento de onda $\lambda = 2c / 2^n$ (para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, etc.) conforme ilustrado na Figura 34a, o movimento excitado será predominantemente a translação vertical (*bounce*). Caso o comprimento de onda seja $\lambda = 3c / 2^n$ o movimento dominante será angular de arfagem (*pitch*) conforme Figura 34b.

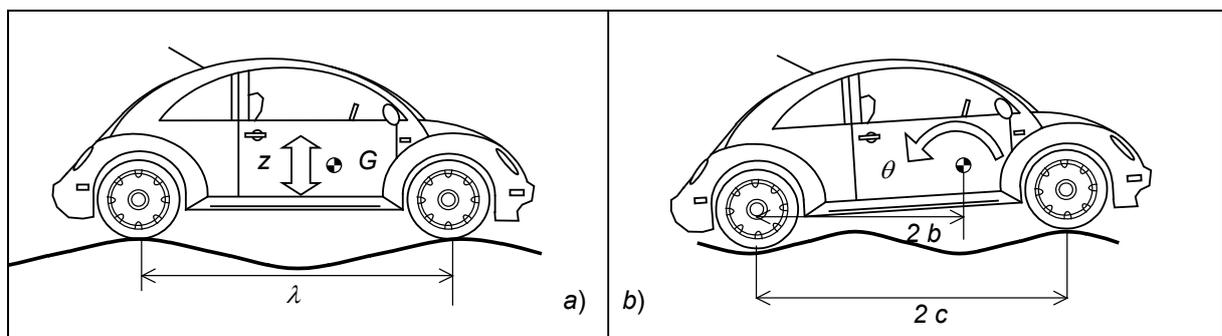


Figura 34 - Entre Eixo ($2c$) e Comprimento de Onda (λ)

Este tópico será abordado com detalhes mais adiante na apresentação do modelo SAGITAL. O efeito das irregularidades da pista no comportamento oscilatório do veículo depende da magnitude e comprimento de onda da elasticidade da suspensão e da distância entre os eixos do veículo.

DINÂMICA VEÍCULAR

Uma excitação periódica pela base ($u_1(t)$) tem atraso de τ segundos para excitar o segundo eixo do veículo ($u_2(t)$) em função da distância L entre eixos e pode ser descritas pelas seguintes funções com atraso τ quando expresso em função do tempo:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_0 \text{sen}(\omega t) \\ u_2(t) &= u_0 \text{sen}(\omega(t + \tau)) = u_0 [\text{sen}(\omega t)\cos(\omega\tau) + \cos(\omega t)\text{sen}(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (73)$$

Este efeito causa ganhos variáveis em diferentes modos dominantes de movimento (galope ou arfagem) em função da velocidade e razão entre o comprimento de onda e distância entre os eixos (*wheel base* - WB), conforme mostrado na Figura 35.

Este efeito pode ser observado quando se compara o ganho da resposta em frequência determinada para o modelo $\frac{1}{4}$ de veículo, sem o efeito da distância entre eixos e o modelo $\frac{1}{2}$ de veículo que considera este efeito. Para velocidade de 80 km/h e espectro amplo de comprimentos de onda da irregularidade, as frequências naturais dos dois modos distintos de galope e arfagem (*bounce e pitch*) são magnificados, conforme apresentado na Figura 36.

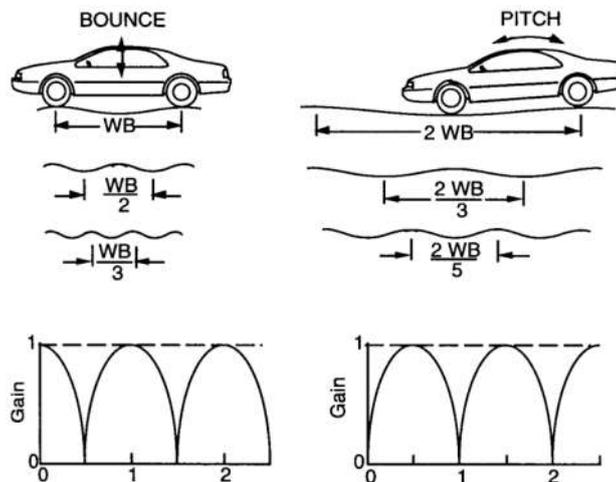


Figura 35 – Efeito da Distância entre Eixos (Fonte: Gillespie)

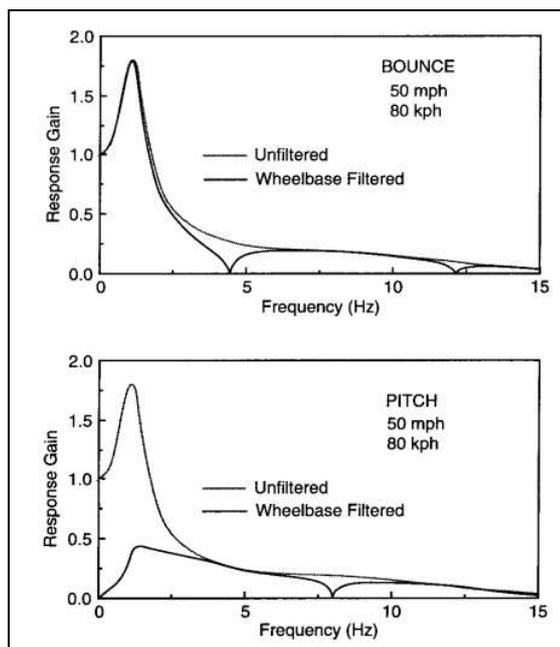


Figura 36 – Efeitos da Sincronização do Comprimento de Onda e Entre eixos (Fonte: Gillespie)

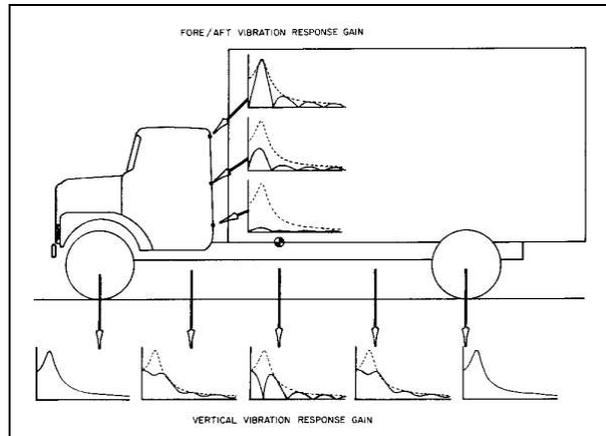


Figura 37 – Efeito das Vibrações Translacional e Rotacional ao Longo do Chassi (Fonte: Gillespie)

Atenção especial deve ser tomada em função da oscilação translacional e rotacional. No caso da aceleração ser de translação, todo o corpo rígido adquire a mesma magnitude. Para aceleração angular os diferentes pontos ao longo do chassi terão variação de velocidade distinta, conforme pode ser observado no espectro em diferentes pontos da carroceria de um caminhão,

DINÂMICA VEÍCULAR

apresentados na Figura 37. Note que este efeito é significativo em veículos altos como o caso dos ônibus de dois andares.

A oscilação entretanto pode ser utilizada para quantificar de forma indireta a irregularidade do pavimento. O projeto internacional muito grande (*International Roughness Index - IRI*) foi realizado inclusive no Brasil (*Queiroz, Sayers, 1986*) para estabelecer uma correlação entre as oscilações da suspensão e aceleração do veículo com a irregularidade do pavimento. Neste estudo um modelo de um quarto do veículo foi utilizada (ver notas de aula sobre Irregularidade e Conforto).

CENTRO DE PERCUSSÃO

Alguns autores (*Guilespie, 1992*) utilizam o Índice Dinâmico (*Dynamic Index*) que nada mais é que localização do centro de percussão, como parâmetro de projeto. Ou seja, no caso do veículo, cada eixo é locado no centro conjugado de percussão. Assim, um eventual impulso ($I = \int \vec{F} dt$) vertical praticado na rodas dianteira, não afeta a velocidade vertical instantânea na roda traseira ($m \Delta V_G = I$). Como os ocupantes do veículo estão em geral entre os eixos, sempre haverá impulso sobre os passageiros, causando mesmo assim desconforto e sendo portanto um índice questionável. Soma-se a isto, o fato de que o momento de inércia e o centro de massa tem sua magnitude e posição variável em função da carga do veículo. Quando o $DI = 1$ a posição das rodas coincidem com o centro de percussão.

$$DI = \frac{k^2}{4bc} = \frac{J_y}{m \cdot 4bc} \Rightarrow DI = 1 \Rightarrow 2c = \frac{J_y}{m \cdot 2b} \quad (74)$$

Como as irregularidades do pavimento são aleatórias em magnitude e comprimento de onda, para o conforto cabe apenas garantir fatores de amortecimento adequados para cada modo de oscilação (*bounce & pitch*).

8. CONTROLE

A resposta em frequência do sistema veicular nem sempre atende aos requisitos desejados. Em particular alguns aspectos são antagônicos produzindo linhagens de projetos como o caso do fator de amortecimento que pode produzir veículos confortáveis (otimizado para mínima aceleração) ou veículos esportivos (otimizado para menor variação da força de contato). Desta forma técnicas de controle podem ser utilizadas para melhorar o desempenho global ou seletivo do veículo. Aspectos como:

- Segurança;
- Estabilidade;
- Agilidade;
- Fidelidade;
- Linearidade.

são requisitos desejáveis do comportamento. A atenuação de eventuais distúrbios externos melhora a **estabilidade** do veículo no tráfego. Resposta com mais **sensibilidade** (ex, multiplicados de ângulo de esterçamento da direção hidráulica) aumenta a **agilidade** do veículo. Implementação da precisão (acurácia) dos comandos, melhora a **fidelidade** da resposta (freio ABS). Finalmente a rejeição de distúrbio e efeitos cruzados garante a **linearidade** da resposta do veículo, desejável do ponto de vista do condutor.

Estes aspectos são amplamente estudados e aplicados em veículos modernos sendo objetos de estudos mais aprofundados não atingidos por este texto. Para maiores informações consulte as referencias bibliográficas.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

1. Barbosa, R. S. (2012) Vehicle Vibration Response Subjected to Longwave Measured Pavement Irregularity. *Journal of Mechanical Engineering and Automation* 2012, 2(2): 17-24, DOI: 10.5923/j.jmea.20120202.04.
2. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas – ABCM*, Vol. 33, n.º. 3, pp. 302-307. DOI: 10.1590/S1678-58782011000300005
3. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Safety in Measured Rough Pavement. *Journal of Transportation Engineering*, ©ASCE, DOI: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000216, Vol. 137, No. 5, pp. 305-310.
4. Rao, S. S. (2011) *Vibrações Mecânicas*. Editora Pearson Prentice Hall, 5º Ed. p. 1105.
5. Rill, G. Castro, A. A. (2020) *Road Vehicle Dynamics Fundamentals and Modeling with MATLAB®* Second Edition. CRC Press, ISBN: 9780367199739.
6. Rill, G. (2009) *Vehicle Dynamics*. University of Applied Sciences, Lecture Notes, p. 200.
7. Genta, G. (1997) *Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation*. Publisher: World Scientific Publishing Company. p. 556.
8. Gillespie, T. D. (1992) *Fundamentals of vehicle dynamics*. Society of Automotive Engineers – SAE, Warrendale, PA, p. 519.
9. Bengt Jacobson et al (2017) *Vehicle Dynamics - Compendium*. Chalmers University of Technology, p. 296.

DINÂMICA VEÍCULAR

10. Heydinger, G. J. et al. (1999) Measured Vehicle Inertial Parameters – NHTSA’s Data Through November 1998. Paper SAE n° 1999-01-1336, pp. 33.
11. Krishna, H., Vasanth, S., Sonnappa, D., Kumar, H. and Gangadharan, K. (2021) Study the dynamic behaviour of seven DOF of full car model with semi-active suspension system, International Journal of Vehicle Performance, Vol. 7, Nos. 1/2, pp. 21~40.
12. Sayers, M. W. (1986) On the calculation of international roughness index from longitudinal road profile. Transportation Research Record 1501, pp. 12.

10. ANEXO A - Formula de Bhaskara e Inversão de Matriz

Para um polinômio de 2 ordem em x^2 do tipo $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$, as raízes são obtidas pela conhecida fórmula de *Bhaskara* (Indiano de 1.114):

$$x_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (75)$$

Para solucionar o sistema linear de equações $[A]x = \{b\}$ utiliza-se da matriz inversa $[A]^{-1}[A] = [I]$ para obter $\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$. Para determinar a inversa da matriz utiliza-se o determinante ($Det [A]$) e a matriz adjunta ($Adj [A]$) da seguinte forma:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{Det [A]} Adj [A] \quad (76)$$

$$\text{Se } [A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ então } Det [A] = ad - bc \quad \text{e} \quad Adj [A] = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

11. ANEXO B – Função de Transferência do Modelo Lateral com 2GL

DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DO MODELO LATERAL

Considerando a projeção lateral do veículo, conforme mostrado na Figura 38, descrito por um modelo matemático com dois graus de liberdade (translacional e rotacional), pode-se descrever as seguintes equações diferenciais de movimento obtidas pelo método *Newton-Euler* a partir do teorema da resultante (**TR**) e teorema da quantidade de movimento angular (**TQMA**) aplicado em relação ao pólo no centro de massa **G** e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (**DFCL**), obtêm-se:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_1 (z_1 - u_1) + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_2 (z_2 - u_2) &= F_z \\ J_{Gy} \ddot{\theta} + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{u}_1) a + k_1 (z_1 - u_1) a - c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}_2) b - k_2 (z_2 - u_2) b &= M_G \end{aligned} \quad (77)$$

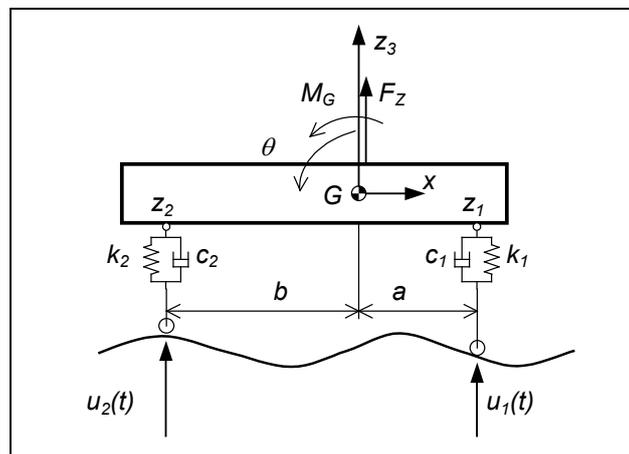


Figura 38 – Modelo Físico com 2 GL

Utilizando as relações cinemáticas: $z_1 = z_3 + a\theta$ e $z_2 = z_3 - b\theta$, para o sistema homogêneo obtêm-se:

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) + c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) + k_2 (z_3 - b\theta - u_2) &= 0 \\ J_{G_y} \ddot{\theta} + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) a - c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) b + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) a - k_2 (z_3 - b\theta - u_2) b &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

ou rearranjando as expressões colocando à esquerda os termos função dos graus de liberdade e a direita as ações externas devido à pista:

$$m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = c_1 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 + k_1 u_1 + k_2 u_2 \quad (79)$$

$$\begin{aligned} J_{G_y} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 &= \dots \\ c_1 a \dot{u}_1 + c_2 b \dot{u}_2 + k_1 a u_1 + k_2 b u_2 & \end{aligned} \quad (80)$$

Tomando a transformada de *Laplace* do sistema de equações diferenciais completas com 2 graus de liberdade (z_3 e θ) excitada pela base ($u_1(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$ e $u_2(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi + \theta)$) e assumindo condições iniciais nulas, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} [m_3 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2)] Z_3(s) + [(ac_1 - bc_2) s + (ak_1 - bk_2)] \Theta(s) &= \dots \\ (c_1 s + k_1) U_1(s) + (c_2 s + k_2) U_2(s) & \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} [J_{G_y} s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2) s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \Theta(s) + [a(c_1 s + k_1) - b(c_2 s + k_2)] Z_3(s) &= \dots \\ a(c_1 s + k_1) U_1(s) + b(c_2 s + k_2) U_2(s) & \end{aligned} \quad (82)$$

Utilizando os seguintes identificadores para cada polinômio em s , obtêm-se para cada grupo:

$$\begin{aligned} A &= [m_3 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2)] \\ AA &= (c_1 s + k_1) ; AB = (c_2 s + k_2) \\ AC &= [(ac_1 - bc_2) s + (ak_1 - bk_2)] \\ AZ_3(s) + AC \Theta(s) &= AAU_1(s) + ABU_2(s) \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} B &= [J_{G_y} s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2) s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \\ BA &= a(c_1 s + k_1) ; BB = b(c_2 s + k_2) \\ BC &= [(ac_1 - bc_2) s + (ak_1 - bk_2)] \\ B \Theta(s) + BC Z_3(s) &= BAU_1(s) + BBU_2(s) \end{aligned} \quad (84)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

Isolando os polinômios dos graus de liberdade $\Theta(s)$ e fazendo a substituição em $Z_3(s)$ obêm-se:

$$\Theta(s) = \frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s) \quad (85)$$

$$AZ_3(s) + AC\left(\frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s)\right) = AAU_1(s) + ABU_2(s) \quad (86)$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} AZ_3(s) - \frac{AC \cdot BC}{B}Z_3(s) &= \left(AA - \frac{AC \cdot BA}{B}\right)U_1(s) + \left(AB - \frac{AC \cdot BB}{B}\right)U_2(s) \\ [(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]Z_3(s) &= (B \cdot AA - AC \cdot BA)U_1(s) + (B \cdot AB - AC \cdot BB)U_2(s) \end{aligned} \quad (87)$$

Utilizando os seguintes identificadores adicionais para cada grupo polinômial, obtêm-se

$$G_{Z_{31}} = \frac{(B \cdot AA - AC \cdot BA)}{[(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]} ; \quad G_{Z_{32}} = \frac{(B \cdot AB - AC \cdot BB)}{[(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]} \quad (88)$$

$$Z_3(s) = G_{Z_{31}}U_1(s) + G_{Z_{32}}U_2(s) \quad (89)$$

Isolando os polinômios dos graus de liberdade $Z_3(s)$ e fazendo a substituição em $\Theta(s)$ obêm-se:

$$Z_3(s) = \frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s) \quad (90)$$

$$B\Theta(s) + BC\left(\frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s)\right) = BAU_1(s) + BBU_2(s) \quad (91)$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} B\Theta(s) - \left(\frac{BC \cdot AC}{A}\right)\Theta(s) &= \left(BA - \frac{BC \cdot AA}{A}\right)U_1(s) + \left(BB - \frac{BC \cdot AB}{A}\right)U_2(s) \\ [(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]\Theta(s) &= (A \cdot BA - BC \cdot AA)U_1(s) + (A \cdot BB - BC \cdot AB)U_2(s) \end{aligned} \quad (92)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

Utilizando as seguintes funções de transferência em s , obtêm-se

$$G_{\Theta_{11}} = \frac{(A \cdot BA - BC \cdot AA)}{[(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]} ; G_{\Theta_{12}} = \frac{(A \cdot BB - BC \cdot AB)}{[(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]} \quad (93)$$

$$\Theta(s) = G_{\Theta_{11}} U_1(s) + G_{\Theta_{12}} U_2(s) \quad (94)$$

Considerando que as entradas $U_1(s)$ e $U_2(s)$ em cada eixo sejam similares ($U(s)$) mas defasadas ($s = i \omega$ e $T = L / Vel$):

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= (G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{-Ts}) U(s) \\ \Theta(s) &= (G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{-Ts}) U(s) \end{aligned} \quad (95)$$

ou na forma de ganho vertical e angular do chassis ($Z_3(s)$ e $\Theta(s)$) em relação a entrada ($U(s)$):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Z_3(s)}{U(s)} &= G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{-ik} \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{-ik} \end{aligned}} \quad (96)$$

onde: $k = \omega \cdot L / Vel$ e $L = (a + b)$. Note que as funções estão no domínio s complexo sendo necessário o tratamento das funções como números complexos. Tipicamente o primeiro modo de vibrar com frequência mais baixa é chamado do **Galope Traseiro** (*rear end bounce*) está associado com o movimento vertical Z_3 . O segundo modo de vibrar chamado de **Arfagem Dianteira** (*front end pitch*) está associado com movimento angular Θ .

As funções de transferência em s podem ser avaliadas numericamente numa faixa de frequências, utilizando pacotes numéricos, onde pode-se observar o comportamento da resposta em frequência de galope ($Z_3(s)$) e arfagem ($\Theta(s)$) do veículo em função da entrada $U(s)$.

DINÂMICA VEÍCULAR

Tabela 4 – Características do Veículo (meio carro)

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo (m_3)	750 kg	--
Momento de Inércia (J_{Gy})	360 kg m ²	Pólo G
Distância do eixo dianteiro ao CM (a)	1.0 metros	--
Distância do eixo traseiro ao CM (b)	1.4 metros	--
Rigidez da mola dianteira (k_1)	18.25 kN/m	1 par
Rigidez da mola traseira (k_2)	18.25 kN/m	1 par
Amortecedor dianteiro (c_1)	912.5 kN/m/s	1 par
Amortecedor traseiro (c_2)	912.5 kN/m/s	1 par

As propriedades do veículo são: Primeiro modo de vibrar (**galope traseiro** – *rear end bounce*) frequência $F_1 = 1,12$ Hz (fator de amortecimento de 17%) e segundo modo de vibrar (**arfagem dianteira** – *front end pitch*) frequência $F_2 = 1,98$ Hz (fator de amortecimento de 31%). As figuras a seguir mostram o comportamento do sistema no domínio da frequência:

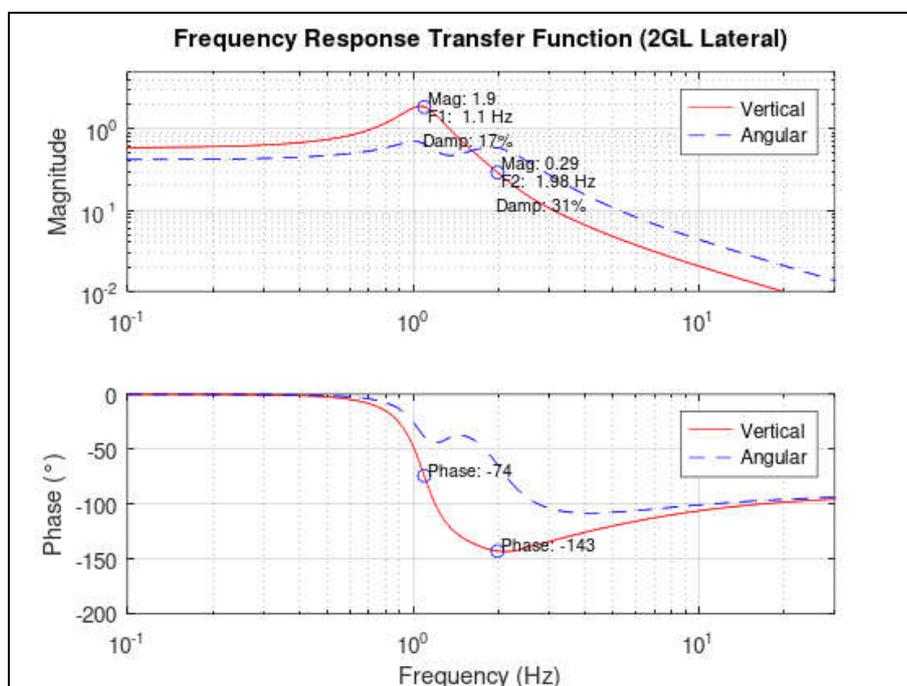


Figura 39 – Receptância com Excitação no Eixo Dianteiro

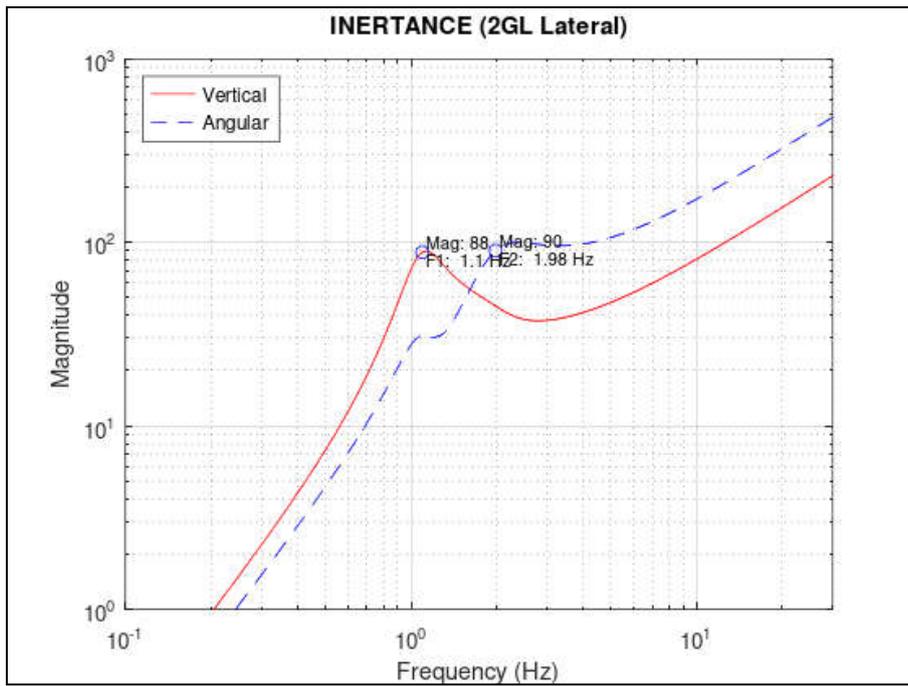


Figura 40 – Inertância com Excitação no Eixo Dianteiro

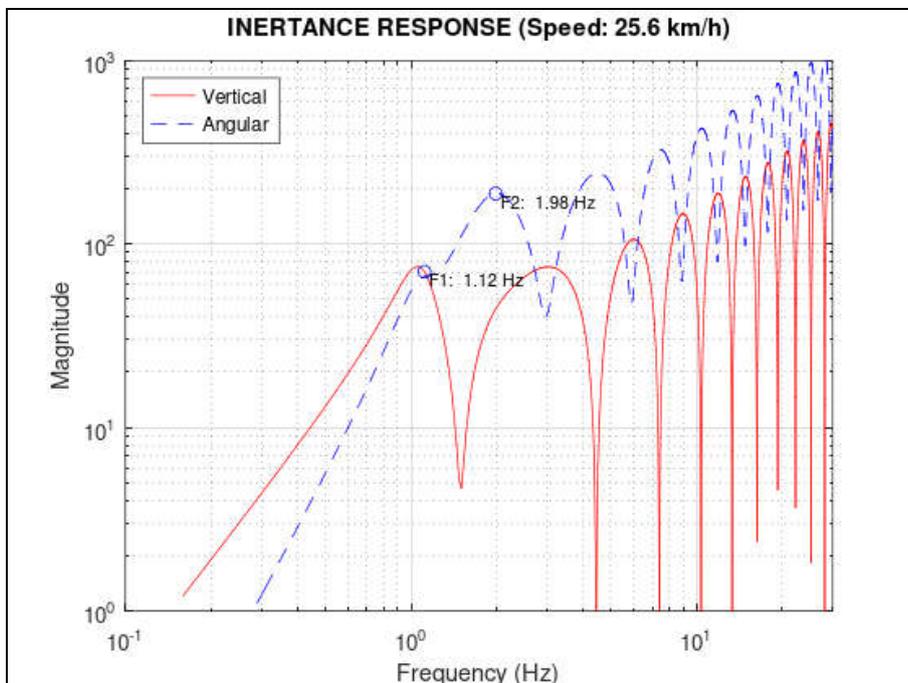


Figura 41 – Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 25,6 km/h)

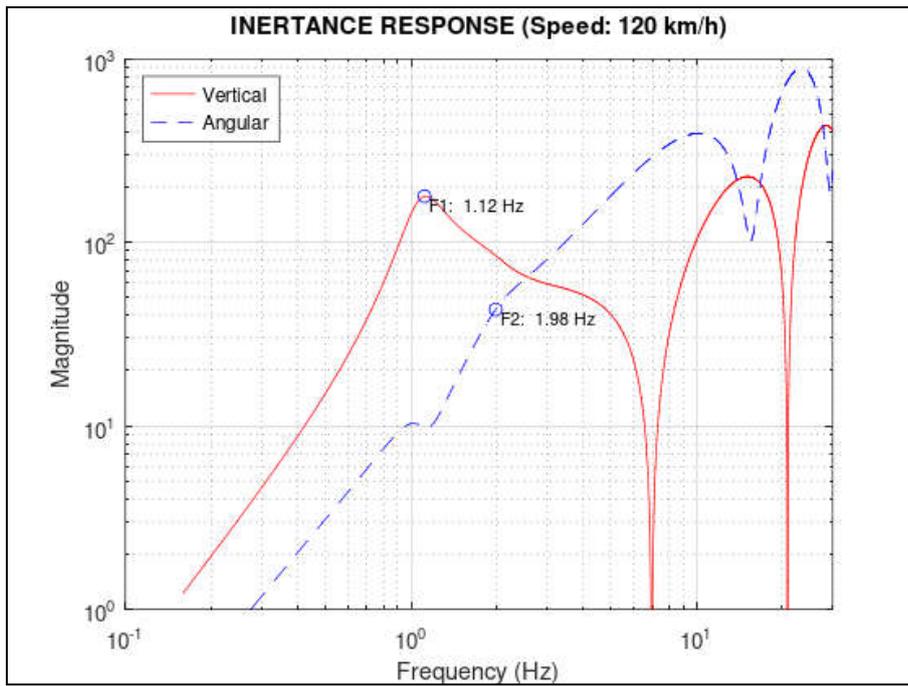


Figura 42 - Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 120 km/h)

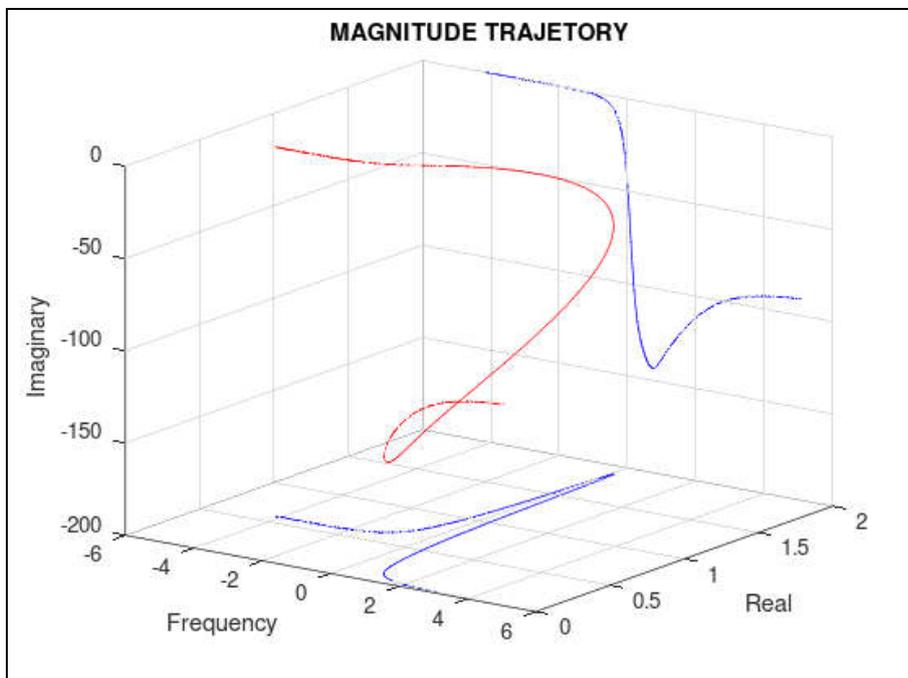


Figura 43 – Trajetória da Função de Resposta no Espaço Complexo × Frequência

11.1. REFERÊNCIAS

Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciency & Engeneering - ABCM, Vol. XXXIII, nº 3, pp. 302-307. DOI: 10.1590/S1678-58782011000300005

Rao, S. S. (2011) Vibrações Mecânicas. Editora Pearson Prentice Hall, 5º Ed. p. 1105.