

Engenharia Automotiva I – PME-3540

Notas de Aula 3

**DINÂMICA VEICULAR - QUATRO GL
EXCITAÇÃO PELA BASE**

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

1. INTRODUÇÃO

Simulação × Experimentação

“Todos acreditam nos resultados experimentais, menos quem realizou as medidas”
“Ninguém acredita nos resultados numéricos das simulações, exceto quem fez os modelos”...

A análise do comportamento dinâmico de um veículo está intimamente ligada com o tipo de excitação encontrada durante sua movimentação sobre a pista. Um veículo em tráfego por uma estrada com irregularidades, enfrenta movimentação vertical nas rodas e também no chassi. O projeto do veículo contém dois sistemas massa/mola (suspensão primária e secundária) acoplados em série para atenuar a excitação e propiciar conforto aos passageiros. O pneu corresponde ao primeiro atenuador devido a sua elasticidade (suspensão primária). Então o movimento vertical da roda é transmitido ao chassi do veículo de forma atenuada, devido à contribuição da suspensão secundária (molas e amortecedor). O projeto da suspensão pretende isolar as vibrações transmitidas à carroceria da maneira mais eficaz possível. Entretanto uma pista irregular tem uma faixa ampla de comprimentos de onda e com caráter aleatório na distribuição das elevações no plano da pista. Mesmo em uma trilha a irregularidade tem variações aleatórias. Utilizando a técnica de decomposição em comprimento de onda é possível identificar uma distribuição estatística (densidade espectral de comprimento de onda) das irregularidades.

A análise da resposta da dinâmica veicular pode ser obtida pela determinação de suas frequências de oscilação e modos de movimento (propriedades do auto-problema). A função de resposta em frequência permite verificar o comportamento normalizado do veículo para uma excitação unitária de faixa espectral ampla e predefinida. Entretanto as irregularidades da trilha têm magnitude e distribuição própria. Isto requer considerar o espectro real da pista como excitação à suspensão do veículo. Desta forma a introdução do conceito estatístico de análise espectral (análise no domínio da frequência) da resposta do veículo devido ao espectro de irregularidade da trilha da pista é conceitualmente consistente e relevante.

2. OBJETIVO

O objetivo deste texto é apresentar uma das técnicas utilizadas para a descrição e interpretação do comportamento dinâmico de um sistema mecânico, composto por quatro graus de liberdade, representando fisicamente meio veículo, conforme ilustrado na Figura 1. Um sistema de equações diferenciais de segunda ordem a termos constantes, permite descrever o comportamento modal próprio do veículo, que é acoplado. As irregularidades verticais da pista são em geral medidas ao longo de uma trilha e serão identificadas em termos do conteúdo em comprimento de onda (domínio espectral). O sistema veicular será descrito por sua resposta no domínio da frequência, que será excitado pelo espectro das irregularidades da via no domínio inverso do espaço e com atraso de fase para eixos distintos. Finalmente a relação espaço/frequência é correlacionada através da expressão $V = \lambda f$ (análise espectral).

3. MODELO DO VEÍCULO

O veículo físico de meio veículo será representado por um sistema transversal plano (sagital) com três corpos rígidos (chassis e 2 rodas) com 4 graus de liberdade (z_1, z_2, z_3 , e θ) incluindo as excitações pela base ($u_1(s)$ e $u_2(s)$), conforme apresentado na Figura 1.

A irregularidade da pista representada pela função posicional $u_1(s)$ que atinge a roda dianteira, terá o mesmo valor $u_2(s)$, quando atingir a roda traseira com atraso temporal (τ), que é função da velocidade de tráfego. Este aspecto será contemplado na análise espectral.

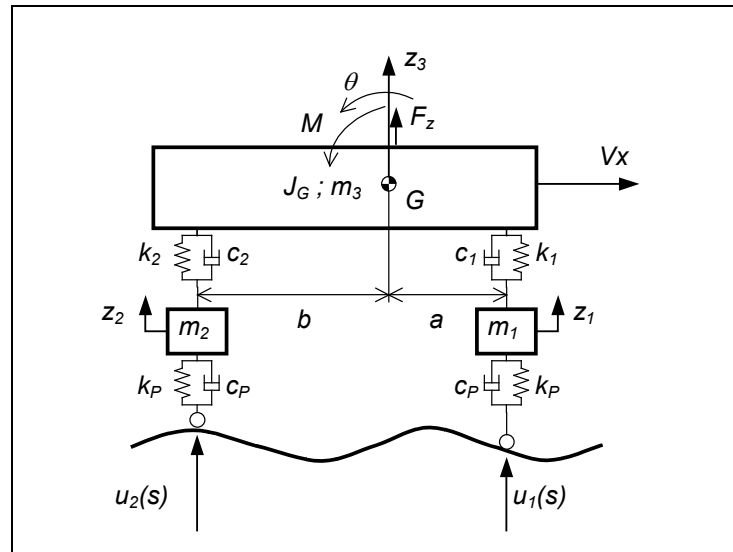


Figura 1 – Modelo Físico de Meio Veículo com 4GL

4. EQUACIONAMENTO

As equações de movimento do veículo podem ser obtidas pelo método de *Lagrange* ou de *Newton-Euler*. Inicialmente obtêm-se as seguintes expressões para a energia cinética e potencial, a função dissipativa (*Rayleigh*) dos três corpos com respectivas massas e inércias envolvidos no sistema e apresentadas na Figura 1:

$$T = \frac{1}{2} m_3 \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2, \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (z_3 + a\theta - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (z_3 - b\theta - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_P (z_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_P (z_2 - u_2)^2, \quad (2)$$

$$R = \frac{1}{2} c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2} c_P (\dot{z}_1 - \dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} c_P (\dot{z}_2 - \dot{u}_2)^2 \quad (3)$$

Note que a energia potencial gravitacional não foi considerada, pois corresponde apenas a um deslocamento de equilíbrio sobre a suspensão. Pode-se obter as equações de movimento fazendo as derivadas parciais das expressões acima e aplicada na equação de *Lagrange* descrita por:

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (4)$$

Para a coordenada z_3 , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_3} &= m_3 \dot{z}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_3} \right) = m_3 \ddot{z}_3 \\ \frac{\partial T}{\partial z_3} &= 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial z_3} = k_1(z_3 + a\theta - z_1) + k_2(z_3 - b\theta - z_2) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_3} &= c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) + c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) \end{aligned} \quad (5)$$

Para a coordenada θ , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= J_G \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_G \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = a \cdot k_1(z_3 + a\theta - z_1) - b \cdot k_2(z_3 - b\theta - z_2) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} &= a \cdot c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) - b \cdot c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Para a coordenada z_1 , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} &= m_1 \dot{z}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) = m_1 \ddot{z}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial z_1} &= 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial z_1} = k_1(z_3 + a\theta - z_1) + k_p(z_1 - u_1) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_1} &= c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) + c_p(\dot{z}_1 - \dot{u}_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Para a coordenada z_2 têm-se:

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} &= m_2 \dot{z}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \right) = m_2 \ddot{z}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial z_2} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = k_2(z_3 - b\theta - z_2) + k_p(z_2 - u_2) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_2} &= c_1(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) + c_p(\dot{z}_2 - \dot{u}_2)\end{aligned}\tag{8}$$

Substituindo as derivadas parciais na equação de *Lagrange*, as seguintes equações diferenciais de segunda ordem a termos constantes são obtidas:

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_p(\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_p(z_1 - u_1) - c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) - k_1(z_3 + a\theta - z_1) = 0, \tag{9}$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + c_p(\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_p(z_2 - u_2) - c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) - k_2(z_3 - b\theta - z_2) = 0, \tag{10}$$

$$m_3 \ddot{z}_3 + c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) + k_1(z_3 + a\theta - z_1) + c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) + k_2(z_3 - b\theta - z_2) = F_z, \tag{11}$$

$$J_G \ddot{\theta} + ac_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{z}_1) + ak_1(z_3 + a\theta - z_1) - bc_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{z}_2) - bk_2(z_3 - b\theta - z_2) = M \tag{12}$$

Alternativamente pode-se obter as mesmas equações utilizando o **TR** e **TQMA**.

A irregularidade do pavimento descrita pela função $\mathbf{u}(s)$ é considerada como uma entrada (deslocamento vertical) ao sistema em função da posição s do veículo. Para um corpo com velocidade constante, obtêm-se da cinemática a expressão $V = s/t$ que permite correlacionar a irregularidade $\mathbf{u}(s)$ com o tempo t . Portanto a função temporal $\mathbf{u}(t)$ será equivalente a $\mathbf{u}(V/s)$ para uma posição s do veículo com velocidade V .

Expressando o sistema de equações na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_p + c_1) & 0 & -c_1 & -ac_1 \\ 0 & (c_p + c_2) & -c_2 & bc_2 \\ -c_1 & -c_2 & (c_1 + c_2) & (ac_1 - bc_2) \\ -ac_1 & bc_2 & (ac_1 - bc_2) & (a^2 c_1 + b^2 c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_p + k_1) & 0 & -k_1 & -ak_1 \\ 0 & (k_p + k_2) & -k_2 & bk_2 \\ -k_1 & -k_2 & (k_1 + k_2) & (ak_1 - bk_2) \\ -ak_1 & bk_2 & (ak_1 - bk_2) & (a^2 k_1 + b^2 k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p & 0 & c_p & 0 \\ 0 & k_p & 0 & c_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ M \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Note que as equações são dependentes (matriz $[k]$ cheia) o que caracteriza vinculação entre os graus de liberdade, definindo modos de movimento acoplados distintos, com frequências próprias de oscilação.

4.1. Resolução do Sistema de Equações Diferenciais

Verifica-se de imediato que as equações de movimento não são independentes, portanto o sistema é acoplado devendo ser tratado em conjunto. Observa-se experimentalmente que sistemas com graus de liberdade dependentes, tem modos de movimento permanentes (após os movimentos transitórios) acoplados com frequências naturais próprias. Tomando o sistema homogêneo e não amortecido e assumindo que o modo “ r ” de movimento tenha uma mesma frequência de movimento acoplado (ω_r) para todos os graus de liberdade, obtêm-se movimentos periódicos com as seguintes proporções:

$$\begin{aligned} z_{1r}(t) &= Z_{1r} \cos(\omega_r t + \phi) & \text{e} & & z_{2r}(t) &= Z_{2r} \cos(\omega_r t + \phi); \\ z_{3r}(t) &= Z_{3r} \cos(\omega_r t + \phi) & \text{e} & & \theta_r(t) &= \Theta_r \cos(\omega_r t + \phi). \end{aligned} \quad (14)$$

Tomando a segunda derivada do movimento periódico do modo “ r ” e substituindo na equação diferencial do sistema homogêneo e não amortecido, obtêm-se:

$$\ddot{z}_{1r}(t) = -\omega_r^2 Z_{1r} \cos(\omega_r t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_{2r}(t) = -\omega_r^2 Z_{2r} \cos(\omega_r t + \phi);$$

$$\ddot{z}_{3r}(t) = -\omega_r^2 Z_{3r} \cos(\omega_r t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}_r(t) = -\omega_r^2 \Theta_r \cos(\omega_r t + \phi). \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{1r} \\ Z_{2r} \\ Z_{3r} \\ \Theta_r \end{Bmatrix} \cdot \omega_r^2 + \begin{bmatrix} (k_p + k_1) & 0 & -k_1 & -ak_1 \\ 0 & (k_p + k_2) & -k_2 & bk_2 \\ -k_1 & -k_2 & (k_1 + k_2) & (ak_1 - bk_2) \\ -ak_1 & bk_2 & (ak_1 - bk_2) & (a^2k_1 + b^2k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{1r} \\ Z_{2r} \\ Z_{3r} \\ \Theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [\cos(\omega_r t + \phi)]^{-1} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} (k_p + k_1 - m_1\omega_r^2) & 0 & -k_1 & -ak_1 \\ 0 & (k_p + k_2 - m_2\omega_r^2) & -k_2 & bk_2 \\ -k_1 & -k_2 & (k_1 + k_2 - m_3\omega_r^2) & (ak_1 - bk_2) \\ -ak_1 & bk_2 & (ak_1 - bk_2) & (a^2k_1 + b^2k_2 - J_G\omega_r^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{1r} \\ Z_{2r} \\ Z_{3r} \\ \Theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

A resolução do sistema acoplado descrito de forma matricial pode ser obtida pelas raízes do polinômio característico de ordem $(\omega_r^2)^4$ do determinante da matriz do sistema (auto-problema). As raízes do polinômio característico de ordem 16, correspondente aos auto-valores que são às frequências naturais do sistema livre (4 frequências naturais), e cada conjunto solução de cada autovalor, obtêm-se os auto-vetores correspondentes os modos de vibrar (4 modos naturais de movimento). Como o sistema é grande utiliza-se de programas numéricos para a resolução (*Octave* ou *MatLab*).

4.2. Resolução Matricial – Espaço de Estados

Outra possibilidade de solução é utilizar a descrição em espaço de estados. Para tanto, considere os vetores de estados $\{x\} = \{z_1 \ z_2 \ z_3 \ \theta \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2 \ \dot{z}_3 \ \dot{\theta}\}^T$; $\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ \dot{u}_1 \ \dot{u}_2\}^T$ e $\{F\} = \{0 \ 0 \ F \ M\}^T$ para a representação matricial do sistema homogêneo de equações na forma de espaço de estados:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (18)$$

$$\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\} \quad (19)$$

Da solução do auto-problema da matriz $[A]$ é possível obter os auto-valores, que são as frequências naturais dos modos de vibrar e os auto-vetores que descrevem a forma de movimentos de cada modo de vibrar. Utilizando-se a transformada de Laplace (\mathcal{L}) no domínio s , para condições iniciais nulas, as duas equações acima podem ser rescritas na forma:

$$s \{X\}_{(s)} = [A] \{X\}_{(s)} + [B] \{U\}_{(s)} \quad (20)$$

$$\{Y\}_{(s)} = [C] \{X\}_{(s)} + [D] \{U\}_{(s)} \quad (21)$$

realizando algumas manipulações obtém-se a relação entre a saída $Y_{(s)}$ e a entrada $U_{(s)}$:

$$(s[I] - [A]) \{X\}_{(s)} = [B] \{U\}_{(s)} \quad (22)$$

$$\{X\}_{(s)} = (s[I] - [A])^{-1} [B] \{U\}_{(s)} \quad (23)$$

$$\{Y\}_{(s)} = [C] (s[I] - [A])^{-1} [B] \{U\}_{(s)} + [D] \{U\}_{(s)} \quad (24)$$

Para conhecer as características do sistema para uma determinada entrada utiliza-se a função $G_{(s)}$ que é a relação entre a saída e a entrada, obtém-se:

$$\{G\}_{(s)} = \frac{\{Y\}_{(s)}}{\{U\}_{(s)}} = [C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D] \quad (25)$$

Cada resposta em frequência (Gráfico de *Bode*) do fator de ampliação (*Receptância*) do estado observado y_i em função da entrada u_i é uma das curvas de $G_{i(s)}$. Transformando s em $i\omega$, é possível avaliar a função $G_{i(i\omega)}$ fazendo uma varredura na faixa de frequência de interesse e calculando a resposta do sistema.

4.3. Comportamento Modal

O comportamento modal decorrente dos modos de vibrar identificados pelos auto-vetores $\{z_1^1 \ z_2^1 \ z_3^1 \ \Theta^1\}^T$ (ver Figura 2) tem frequência (auto-valores) e posição geométrica definida para cada auto-vetor.

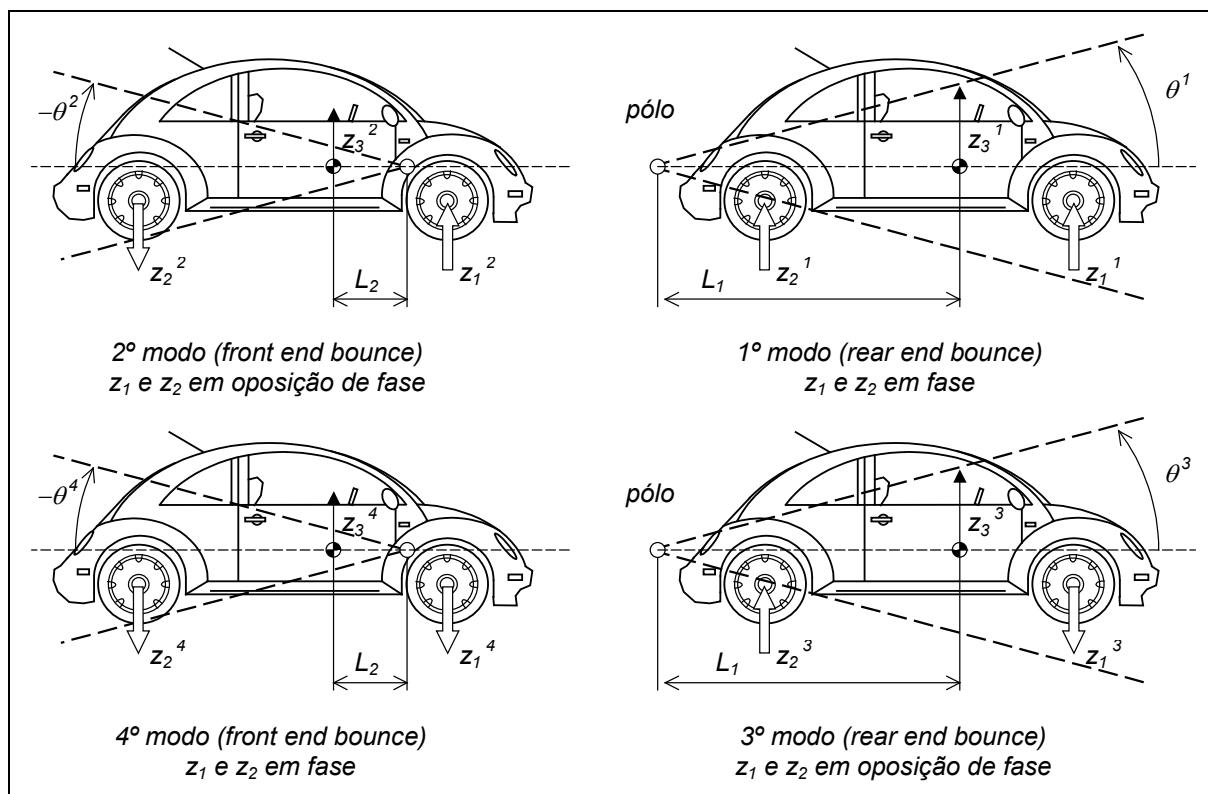


Figura 2 - Descrição dos Modos de Vibrar da Suspensão

DINÂMICA VEÍCULAR

Os movimentos modais para o sistema acoplado (não simétrico) ocorrem com pólo à trás do veículo (*rear end bounce*) com a combinação dos movimento das rodas em fase e oposição de fase. Os demais modos de movimento são combinação destas opções, conforme mostrado na Figura 2.

4.4. Exemplo Numérico:

Considere meio veículo representado pela sua metade no plano transversal lateral (sagital) com 4 graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 3, com as características inerciais, elásticas e dimensionais típicas de veículo de passageiros, conforme apresentado na Tabela 1.

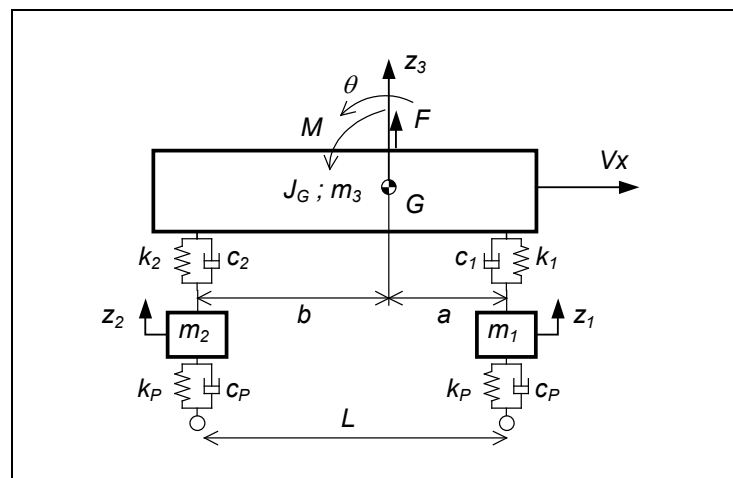


Figura 3 – Meio Veículo com 4GL

DINÂMICA VEÍCULAR

Tabela 1 – Propriedades Inerciais, Elásticas e Dimensionais do Veículo (modelo 1/2)

Elemento/Característica	Chassis	Suspensão	Cubo/Pneu ^A
Massa	750 kg	-----	30 kg
Momento de Inércia	360 kg m ²	----	----
Rigidez ^B	-----	18.25 kN/m	150 kN/m
Amortecimento	-----	912.5 Ns/m	----
Distância do eixo dianteiro ao CM (a)	1.0 metros		
Distância do eixo traseiro ao CM (b)	1.5 metros		

Obs.: ^A propriedade individual; ^B rigidez dependente da pressão de inflamento do pneu

A resolução das equações diferenciais homogênea por uma das técnicas apresentadas e sem excitação pela base, resultam em auto-valores e auto-vetores para os modos de chassis, conforme apresentado na Tabela 2 e para os modos de suspensão, conforme apresentado na Tabela 3.

Tabela 2 – Propriedades Modais do Veículo Amortecido

Identificação do Modo	Modo 1 (rear end bounce)		Modo 2 (front end bounce)	
	Magnitude	Fase	Magnitude	Fase
Freq. Natural Amortecida	1.03 Hz		1.88 Hz	
Fator de amortecimento	0.144		0.261	
Grau de Liberdade	Magnitude	Fase	Magnitude	Fase
z_1	0.0000	-305.87°	0.0000	-307.44°
z_2	0.0002	-203.91°	0.0002	-204.96°
z_3	0.0134	-101.95°	1.0000	0.00°
θ	1.0000	0.00°	0.0136	-102.48°

Utilizando as frequências naturais obtidas: $\omega_1 = 11.81$ e $\omega_2 = 6.47$ rad/s, em uma das linhas da matriz do sistema (eq. 13) obtêm-se os auto-vetores já apresentados na Tabela 2 e determina-se as relações: $L_1 = z_3^1 / \tan \theta^1 \cong Z_3^1 / \Theta^1$ e $L_2 = z_3^2 / \tan \theta^2 \cong z_3^2 / \Theta^2$, que são as distâncias dos pólos ao

DINÂMICA VEÍCULAR

centro de massa, de cada modo de vibrar: $L_1 = -73.53$ e $L_2 = 0.0134$ metros, conforme mostrado na Figura 2.

Tabela 3 – Propriedades Modais da Suspensão

Identificação do Modo	Modo 3 – veículo/roda em fase		Modo 4 – veic/roda fora de fase	
Freq. Natural Amortecida	11.72 Hz		11.86 Hz	
Fator de amortecimento	0.216		0.207	
Grau de Liberdade	Magnitude	Fase	Magnitude	Fase
z_1	0.0842	-105.13°	0.9880	180.00°
z_2	0.9964	0.00°	0.1523	81.712°
z_3	0.0006	-315.41°	0.0235	-16.576°
θ	0.0842	-201.27°	0.0036	-114.86°

Deve ser observado que as frequências dos modos de suspensão estão tipicamente uma década acima das frequências dos modos de chassis.

Tomando os valores apresentados na Tabela 1 pode-se obter as funções de transferência vertical (H_{z_3}) e angular (H_{θ}), em função da entrada de força vertical Fzg ou momento M , conforme apresentado na Figura 4.

DINÂMICA VEÍCULAR

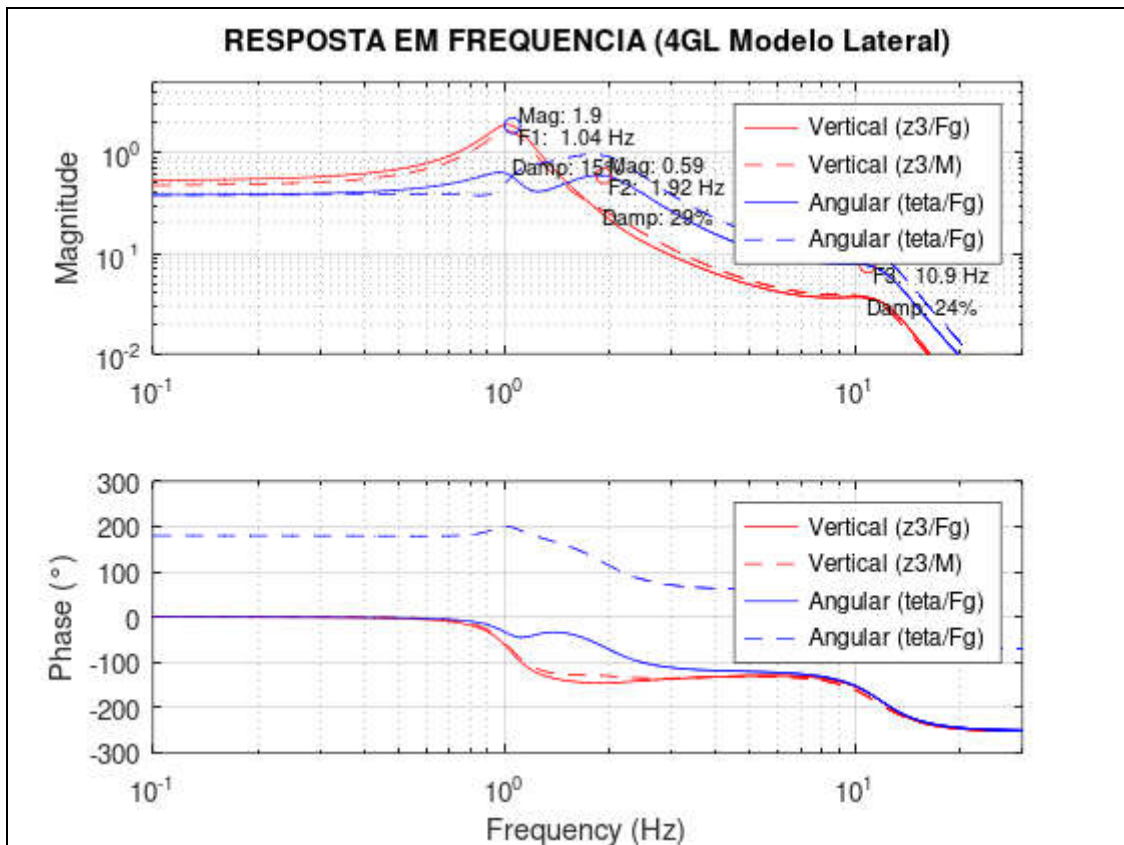


Figura 4 – Função de Resposta em Frequência para Forçamento Externo

5. EXCITAÇÃO PELA BASE

Para a verificação do desempenho do veículo em condições de tráfego é necessário considerar a excitação pela base devido às irregularidades do pavimento. Desta análise é possível identificar o comportamento modal que corresponde a uma entrada de espectro unitário através da função de resposta em frequência (*FRF*), , conforme apresentado no item 5.1. Entretanto o pavimento real possui características aleatórias com magnitude própria em cada faixa de frequência, dependendo da qualidade do pavimento. Neste caso a análise deve considerar a magnitude da distribuição em termos do comprimento de onda das irregularidades verticais, conforme apresentado no item 5.2.

5.1. Modelo Lateral

Tomando a transformada de *Laplace* do sistema de equações diferenciais completas com 4 graus de liberdade excitada pela base do modelo lateral (ou sagital ou transversal de meio carro), conforme apresentado no item 4, e assumindo condições iniciais nulas, obtêm-se as seguintes expressões:

$$[m_1 s^2 + (c_p + c_1)s + (k_p + k_1)]Z_1(s) - (c_1 s + k_1) Z_3(s) - (ac_1 s + ak_1) \Theta(s) = (c_p s + k_p)U_1(s) \quad (26)$$

$$[m_2 s^2 + (c_p + c_2)s + (k_p + k_2)]Z_2(s) - (c_2 s + k_2) Z_3(s) + (bc_2 s + bk_2) \Theta(s) = (c_p s + k_p)U_2(s) \quad (27)$$

$$[m_3 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]Z_3(s) - (c_1 s + k_1) Z_1(s) - (c_2 s + k_2) Z_2(s) + [(ac_1 - bc_2)s + (ak_1 - bk_2)] \Theta(s) = F_z(s) \quad (28)$$

$$[J_G s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2)s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \Theta(s) - a(c_1 s + k_1) Z_1(s) + b(c_2 s + k_2) Z_2(s) + [a(c_1 s + k_1) - b(c_2 s + k_2)] Z_3(s) = Mt(s) \quad (29)$$

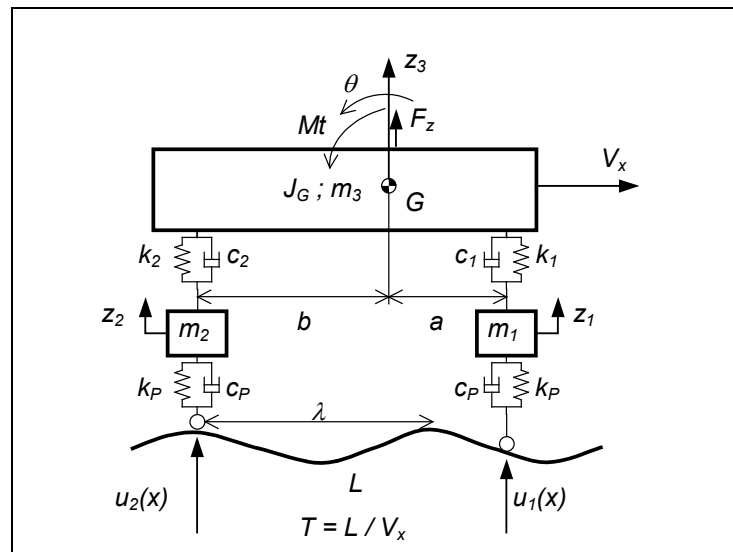


Figura 5 – Modelo com 4GL excitado pela base

Pode-se obter as funções de transferência do sistema homogêneo para as coordenadas vertical $Z_3(s)$ e angular $\Theta(s)$ isoladamente em relação à função das excitações $U_1(s)$ e $U_2(s)$ a partir dos polinômios acima rearranjados conforme apresentado no ANEXO A – .

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= G_{Z31}(s) \cdot U_1(s) + G_{Z32}(s) \cdot U_2(s) \\ \Theta(s) &= G_{\Theta1}(s) \cdot U_1(s) + G_{\Theta2}(s) \cdot U_2(s) \end{aligned} \quad (30)$$

Considerando que as rodas dianteira e traseira percorram a mesma trajetória (trilha de pista), com um tempo de atraso T , a elevação da pista que produz o deslocamento vertical da suspensão dianteira do veículo é a mesma função que excita a roda traseira, apenas com um atraso de fase conforme ilustrado na Figura 5.

Tomando a função harmônica $u_1(t)$ como imposição do deslocamento vertical na roda dianteira, então o deslocamento vertical traseiro $u_2(t)$ com atraso T pode ser expresso como:

$$u_2(t) = u(t - T), \quad \text{onde} \quad u_1(t) = u(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad (31)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

onde a frequência angular da excitação é dada por $\omega = 2\pi V_x / \lambda$ e o tempo de atraso T é determinado por $T = L / V_x$, onde L é a distância entre os eixos ($L = a + b$), V_x a velocidade longitudinal do veículo e λ é o comprimento de onda da irregularidade da pista (ver Figura 5).

A transformada de Laplace (\mathcal{L}) da função de entrada na roda dianteira e traseira, considerando a transformada da função de atraso $\mathcal{L}(t - T) = 1 / s (e^{-Ts})$; são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= \mathcal{L}[u_1(t)] & \text{e} & \quad U_2(s) = \mathcal{L}[u_2(t)] \\ \text{onde} \quad U_1(s) &= U(s) & \text{e} & \quad U_2(s) = U(s)e^{-Ts} \end{aligned} \quad (32)$$

Substituindo nas equações anteriores obtêm-se:

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= (G_{Z31}(s) + G_{Z32}(s) \cdot e^{-Ts})U(s) \\ \Theta(s) &= (G_{\Theta1}(s) + G_{\Theta2}(s) \cdot e^{-Ts})U(s) \end{aligned} \quad (33)$$

ou na forma:

$$\begin{aligned} \frac{Z_3(s)}{U(s)} &= G_{Z31}(s) + G_{Z32}(s) \cdot e^{-ik} \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= G_{\Theta1}(s) + G_{\Theta2}(s) \cdot e^{-ik} \end{aligned} \quad (34)$$

onde $k = \omega \cdot (L / V_x)$. Tipicamente o primeiro modo de vibrar com frequência mais baixa é chamado do **Galope Traseiro** (*rear end bounce*) está associado com o movimento vertical Z_3 . O segundo modo de vibrar chamado de **Arfagem Dianteira** (*front end pitch*) está associado com movimento angular Θ .

$$\frac{Z_3(s)}{U(s)} = H_{Z_3}(s) \quad \text{e} \quad \frac{\Theta(s)}{U(s)} = H_{\Theta}(s) \quad (35)$$

A resposta em frequência da aceleração, chamada de inertância $I(s)$, pode ser obtida substituindo s por $i\omega$ (i número complexo) e multiplicando por ω^2 :

DINÂMICA VEÍCULAR

$$I_{z_3}(i\omega) = \omega^2 H_{z_3}(i\omega) \quad \text{e} \quad I_{\Theta}(i\omega) = \omega^2 H_{\Theta}(i\omega) \quad (36)$$

O comportamento modal decorrente dos modos de vibrar identificados pelos auto-vetores $[Z_3^1 \ \Theta^1; Z_3^2 \ \Theta^2]^T$, tem a posição geométrica do centro instantâneo de rotação (CIR) do movimento acoplado (ver Figura 6), chamado de pólos **A** e **B**, definidos para cada auto-vetor determinados por:

$$\tan \Theta^1 = Z_3^1 / L_1 \quad \text{ou para ângulos pequenos} \quad L_1 \cong Z_3^1 / \Theta^1 \quad \text{e} \quad L_2 \cong Z_3^2 / \Theta^2 \quad (37)$$

Os movimentos modais para o sistema acoplado (veículo não simétrico com motor na dianteira) ocorrem com um pólo **A** à trás do veículo chamado de **Galope Traseiro** (cota L_1 - *rear end bounce*) (em geral com frequência mais baixa ω_1) e outro **B** à frente chamado de **Arfagem Frontal** (cota L_2 - *front end pitch*) (em geral com frequência mais alta ω_2), conforme estão ilustrados na Figura 6b.

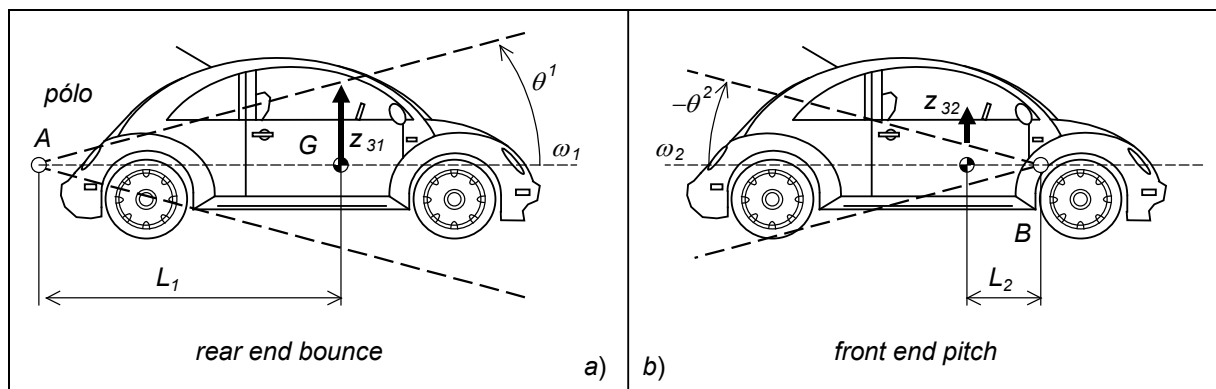


Figura 6 - Identificação dos Modos de Movimento Acoplados

Tomando os valores apresentados na Tabela 1, pode-se obter também as funções de acelerações vertical (I_{z_3}) e angular (I_{θ}) que dependem do atraso T que é função da velocidade de tráfego ($T = L/V_x$). As respostas das funções de inércia, avaliadas na faixa de frequência de 0,1~30 Hz, estão apresentadas na Figura 7 para velocidade de tráfego de 25,6 km/h (7,1 m/s). Na Figura

DINÂMICA VEÍCULAR

8 o resultado foi obtido para velocidade de 120 km/h (33.3 m/s). Em ambos os casos, a distância entre eixos considerada foi de $L = 2.4$ metros.

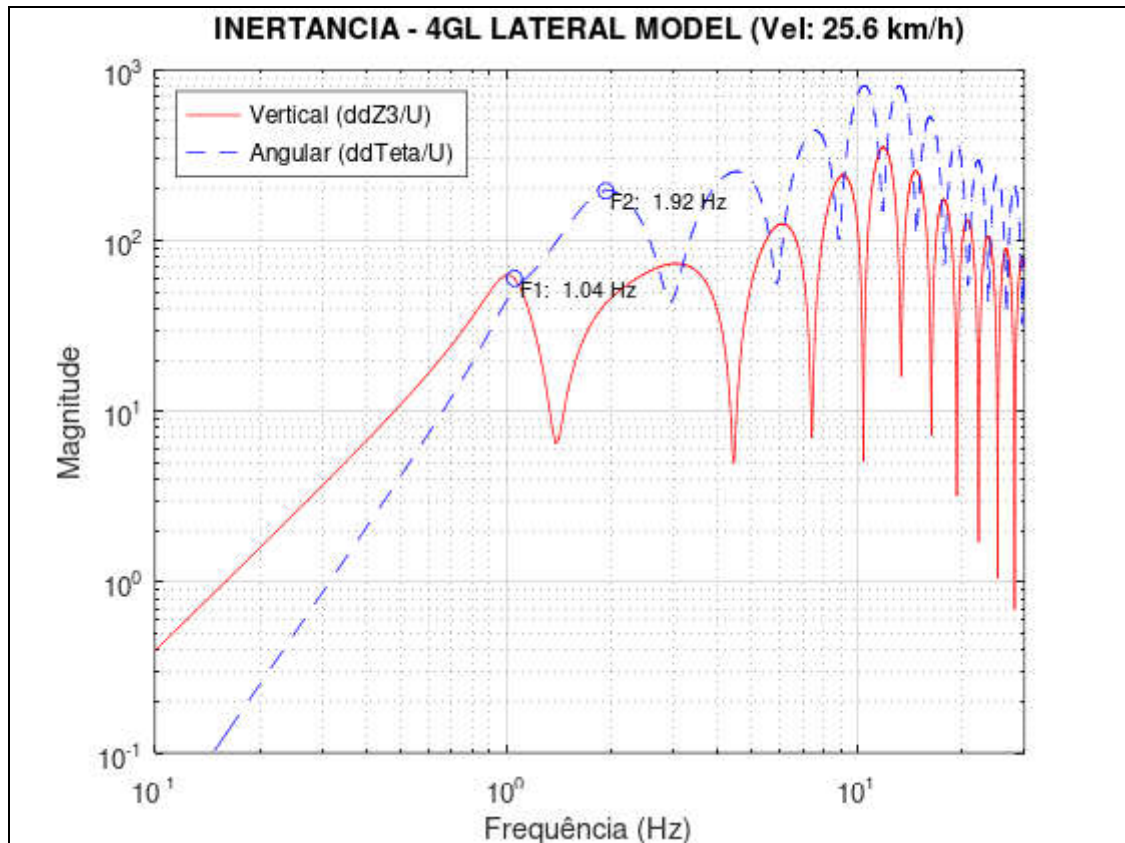


Figura 7 – Resposta em frequência da Inertância Meio Veículo (25.6 km/h)

Vários lóbulos podem ser notados na curva de magnitude da *PSD*, que para o modo vertical, ocorrem à números inteiros, resultando em picos em torno de 1, 3, 6, 9 *Hz*, conforme mostrado na Figura 7 devido à distância entre eixos ($L = 2,4$ metros) e à velocidade do veículo de 25,6 km/h (7,1 m/s). As frequências modais são identificadas com um círculo na figura (galope dianteiro a 1,04 *Hz*, galope traseiro a 1,92 *Hz* e vibração da roda a 11,7 *Hz*). Para os movimentos angulares os picos ocorrem a 13.9, 27.8 *Hz*, conforme mostrado na Figura 8.

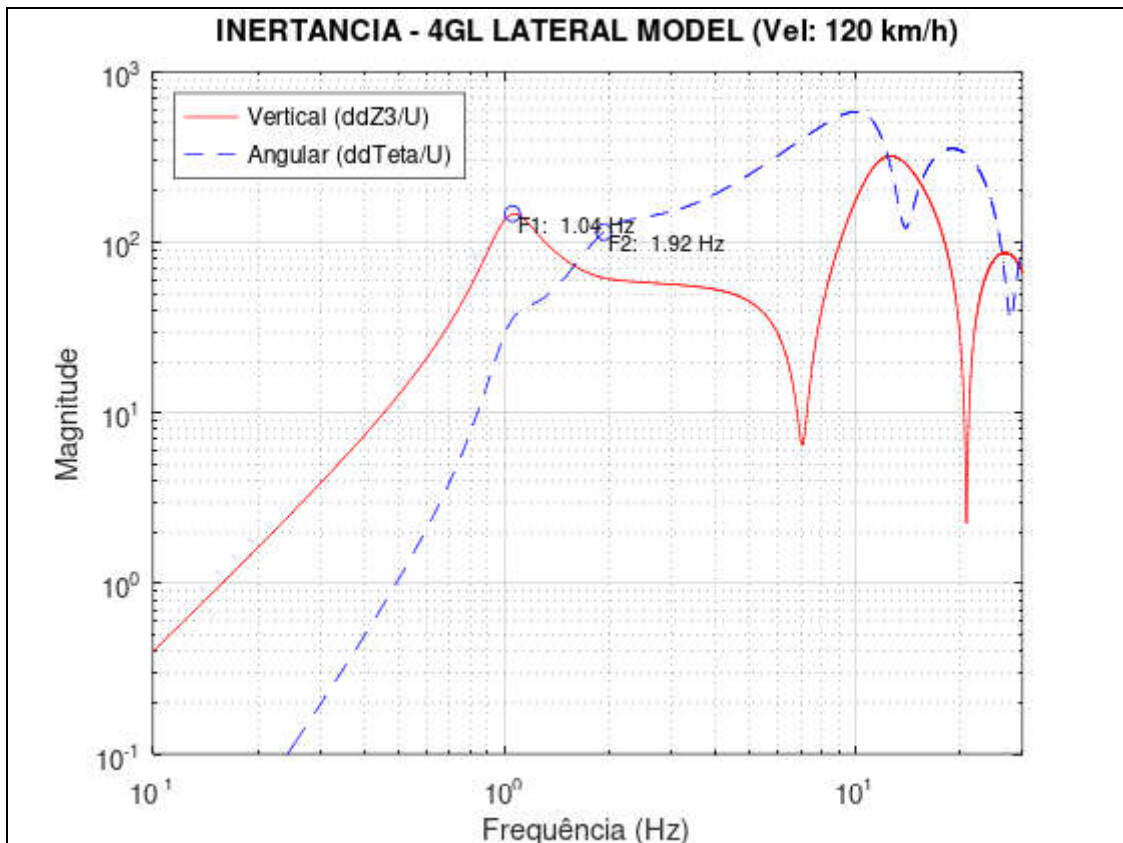


Figura 8 - Resposta em frequência da Inertância Meio Veículo (120 km/h)

Note que para uma velocidade de 86 km/h (24 m/s) e distância entre eixos de 2,4 metros o período T é igual a 0,1 segundos e, portanto as lóbulo ocorrem sucessivamente uma década acima da anterior.

5.2. Descrição da Via

Para analisar a resposta espectral do veículo é necessário conhecer a magnitude do conteúdo em comprimento de onda das irregularidades da pista. A medição da geometria e das irregularidades da pista pode ser realizada com equipamentos apropriados para esta finalidade. Um exemplo de medição das irregularidades de um traçado de pavimento está apresentado na Figura 9. Nela estão apresentadas as elevações de uma trilha do pavimento amostrada a cada 0,1 metros ($f_s = 10$ amostras/metro) em um percurso de 1.4 quilômetros de estrada de terra, com comprimento de onda identificado de até 200 metros, que são necessárias para simular temporalmente o comportamento dinâmico do veículo.

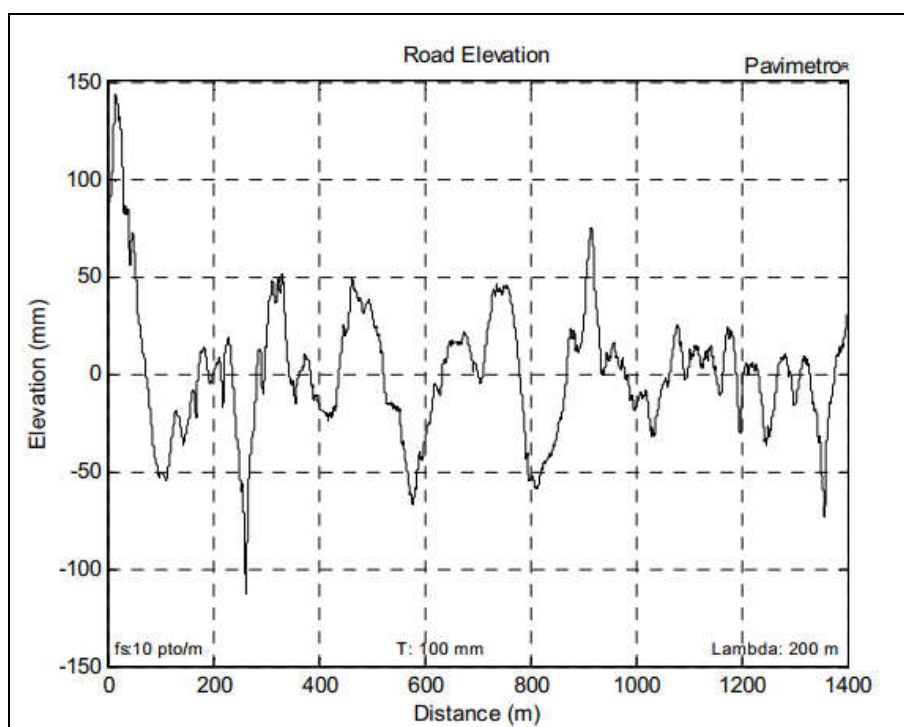


Figura 9 – Medida Experimental da Irregularidade da Pista (não pavimentada)

DINÂMICA VEÍCULAR

Para realizar a avaliação espectral com representatividade estatística do comportamento do veículo, deve-se tratar as irregularidades para obter o conteúdo espectral (*PSD*) em comprimento de onda da pista. Um exemplo esta conversão aplicada à medição mostrada na figura anterior está apresentada na Figura 10. Verifica-se que o espectro se inicia em comprimentos de onda acima de 0,2 metros observando a regra de *Nyquist*. Nota-se uma concentração de comprimentos de onda na faixa de 0,6 a 0,9 metros da pista não pavimentada.

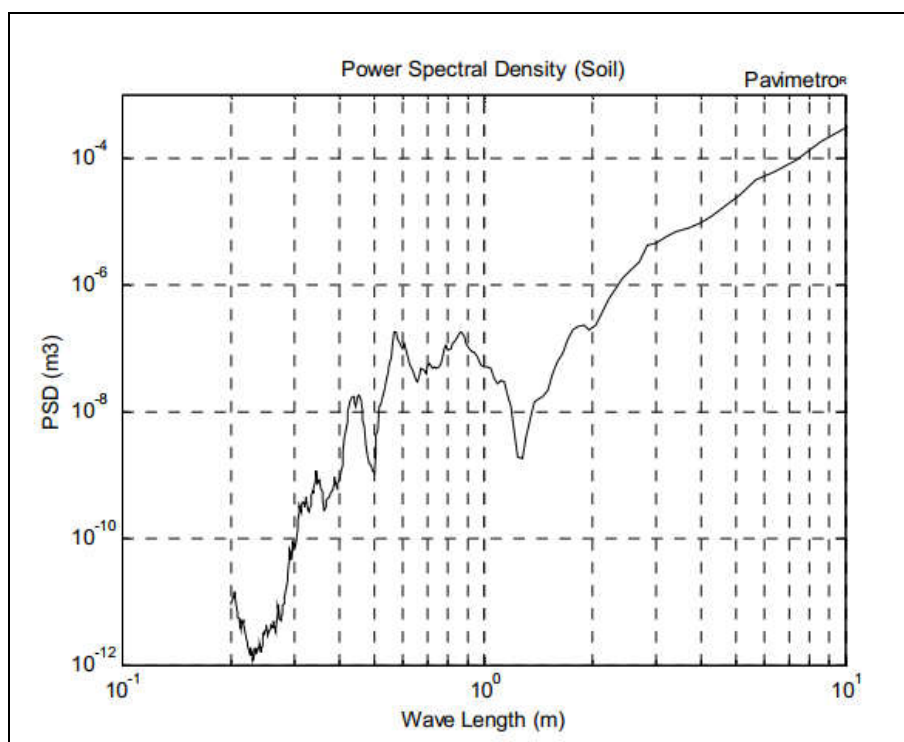


Figura 10 - PSD da Pista Não Pavimentada

Na Figura 11 e Figura 12 estão apresentadas a medição e a análise similar para uma pista asfaltada com 2 quilômetros de extensão em uma auto-estrada (Rodovia dos Bandeirantes). Neste caso a medição foi realizada a cada 0,5 metros ($f_s = 2$ amostras/metro) e a análise espectral em comprimento de onda na faixa de 1.0 até 100 metros (padrão *ISO*). Na Figura 12 estão apresentadas os níveis de irregularidades classificadas segundo a norma *ISO-8068* (classes A até H). Verifica-se ainda uma concentração de comprimentos de onda na faixa de 1,1 a 1,3 metros e outra entre 30 e 42 metros.

DINÂMICA VEÍCULAR

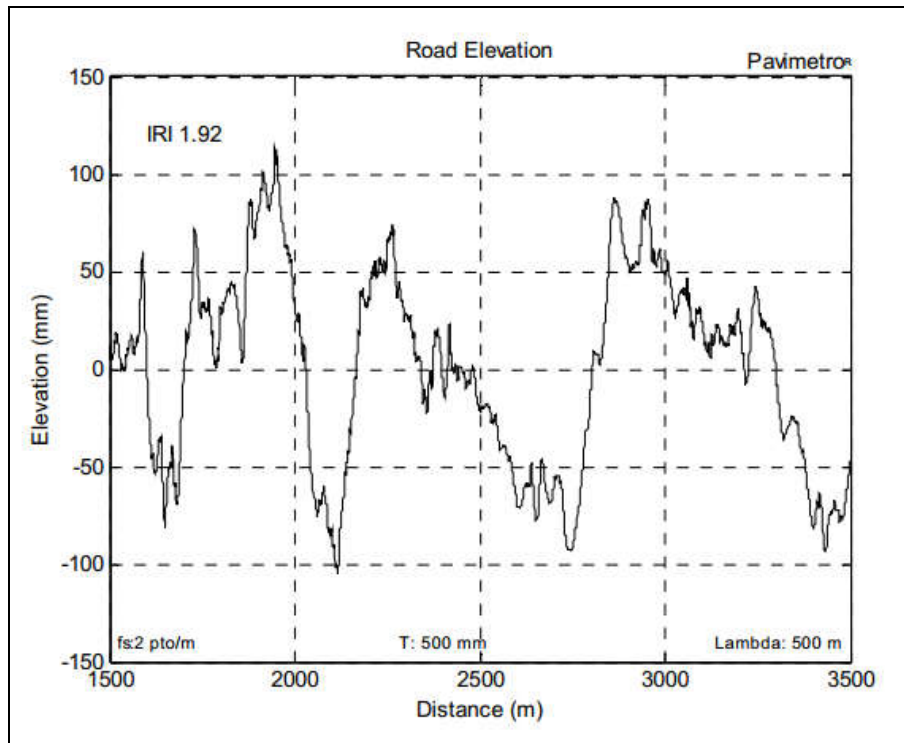


Figura 11 – Irregularidade da Pista (pavimentada em asfalto)

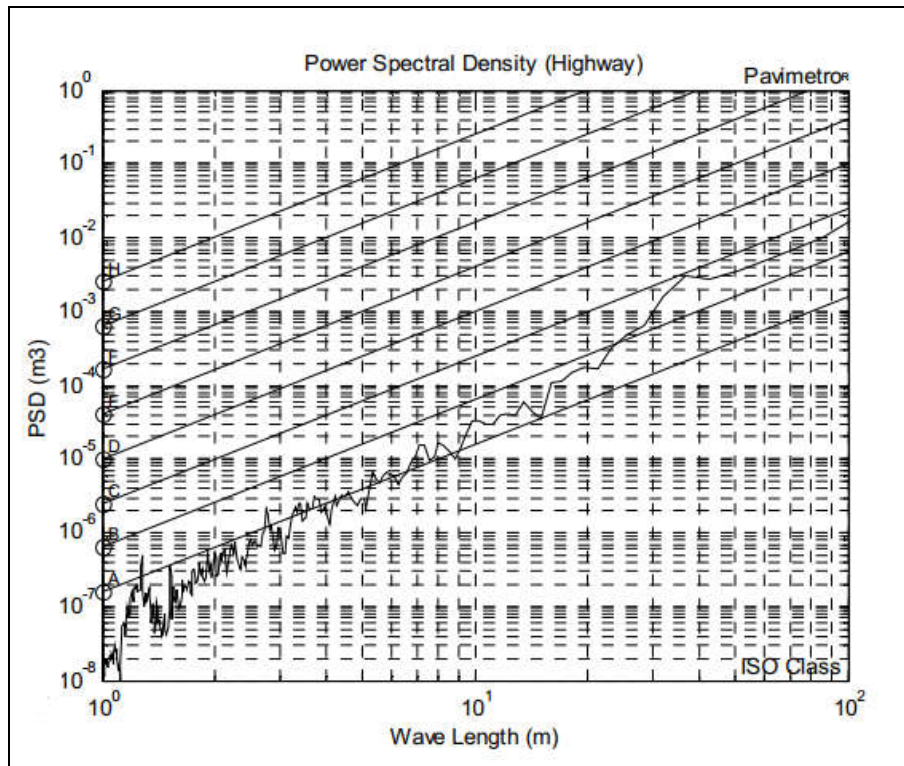


Figura 12 – PSD da Pista Asfaltada

DINÂMICA VEÍCULAR

Esses espectros das medições de elevação vertical da rugosidade da superfície da estrada podem ser utilizados para calcular as respostas espectrais vertical e angular do veículo. A intensidade da rugosidade medida do pavimento é classificada de acordo com a magnitude do padrão espectral de potência das irregularidades de forma exponencial com uma determinada inclinação (norma internacional *ISO-8608*, 1995). A densidade espectral de potência de deslocamento (*PSD*) para uma classe de rugosidade da estrada é obtida por uma expressão logarítmica em unidades de m^3 :

$$Sd(n) = Sd(n_0) \cdot (n / n_0)^{\varpi} \quad (38)$$

onde a inclinação da curva log-log de ϖ é fixada em -2 (40 *dB* por década). A magnitude espacial identificada como Sd para n_0 é obtida como:

$$Sd(n_0) = 4^{cn+1.0} \quad (39)$$

onde cn é a classe de qualidade do pavimento variando de 1 to 8 (de classe **A** até **H**, de acordo com a norma *ISO*). O expoente $+1.0$ na equação anterior corresponde a média geométrica para n_0 em 0.1 ciclo/metro, conforme mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 - Classificação da Irregularidade do Pavimento

Class Number (cn)	Classe do Pavimento	$Sd(n = 1)^*$ ($\times 10^{-6} m^3$)	$S_{RMS}(n = 1)^{**}$ ($\times 10^{-3} m$)	$S_{RMS}(n = 1)$ (mm)
1	A	0.16	0.4	0.4
2	B	0.64	0.8	0.8
3	C	2.56	1.6	1.6
4	D	10.24	3.2	3.2
5	E	40.96	6.4	6.4
6	F	163.84	12.8	12.8
7	G	655.36	25.6	25.6
8	H	2621.44	51.2	51.2

Ob.: * Média Geométrica; **valor RMS; $n = 1$ metro, *ISO 8608*.

DINÂMICA VEÍCULAR

Considerando as irregularidades do pavimento como um processo aleatório estacionário ergódico, descrito pela função de distribuição normal a densidade de irregularidade pode ser expressa pela raiz do valor médio quadrático (*rms*). De acordo com o teorema de *Parseval* (*Oppenheim*, 1975), o valor *rms* da distribuição aleatória normal da irregularidade vertical é igual a raiz quadrada da densidade espectral de potência. Portanto obtêm-se tomando a raiz quadrada de expressão anterior o valor médio quadrático da irregularidade:

$$S_{RMS}(n) = \sqrt{Sd(n)} = Sd(n_0)^{1/2} \cdot (n/n_0)^\theta \quad (40)$$

onde a inclinação do logaritmo θ muda para (-1) , que é a metade da inclinação de $Sd(\omega)$ (20 dB por década).

Portanto para a função $Sd(n)$ que descreve a densidade espectral da potência do sinal de amplitude da irregularidades ($y(s)$ em metros) em função do inverso do comprimento de onda (1/metro) que é a frequência espacial n , pode-se obter a variação média quadrática de $y(s)$ em uma determinada faixa de frequência espacial ($n_1 \rightarrow n_2$), utilizando a expressão:

$$y_{RMS}(n_1 \rightarrow n_2) = \sqrt{\int_{n_1}^{n_2} Sd(n) \cdot dn} \quad (41)$$

5.3. Avaliação de Desempenho

A avaliação do comportamento dinâmico da interação do veículo com o pavimento pode ser realizada por simulação temporal. Determinado o modelo com excitação pela base pode-se integra-lo em intervalos de tempo (Δt) ao longo do tempo ($t_i \rightarrow t_f$) com a entrada medida da irregularidade do pavimento.

Outra alternativa é realizar a análise no domínio espectral. O comportamento natural do veículo é expresso por sua função de resposta no domínio da frequência. As irregularidades do pavimento são expressas por sua frequência espacial (1/espaco). Na presente análise, o pavimento

DINÂMICA VEÍCULAR

rodoviário é considerado uma superfície rígida. A relação entre a frequência temporal ω e a frequência espacial n é a velocidade translacional do veículo V_x , simplesmente dada por:

$$\omega = V_x \cdot n \quad (42)$$

onde ω é a frequência em *Hertz*, $n = 1/\lambda$ é o inverso do comprimento de onda em metros e V_x velocidade do veículo em metros por segundo. Ao transformar $S(n)$ no domínio da frequência, obtém-se:

$$S(\omega) = S(n_0) \cdot (\omega / \omega_0)^\theta \quad (43)$$

De acordo com a teoria de processos estocásticos, a saída de um sistema linear invariante no tempo é um processo aleatório estacionário se a entrada também for um processo aleatório estacionário. Na maioria dos casos, a irregularidade do pavimento pode ser descrita como um processo aleatório ergódico gaussiano de média zero (*Newland*, 1984). Consequentemente, a resposta do sistema de meio carro também é um processo aleatório estacionário gaussiano de média zero. A relação entre a densidade espectral de potência (*PSD*) da resposta do sistema $H(\omega)$ e o *PSD* da excitação do sistema $S(\omega)$ é expressa por:

$$G_{z_3}(\omega) = |H_{z_3}(\omega)|^2 \cdot S(\omega) \quad \text{e} \quad G_\theta(\omega) = |H_\theta(\omega)|^2 \cdot S(\omega) \quad (44)$$

onde $G_{z_3}(\omega)$ e $G_\theta(\omega)$ são as densidades espectrais de potência das respostas de deslocamento vertical do veículo e a resposta angular da massa suspensa, respectivamente.

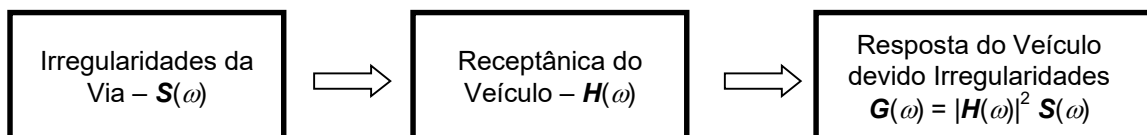


Figura 13 – Diagrama de Bloco das Transformações

DINÂMICA VEÍCULAR

Aplicando esta transformação à função de inércia do veículo ($\times \omega^2$) obtêm-se:

$$GI_{\ddot{z}_3}(\omega) = |I_{\ddot{z}_3}(\omega)|^2 \cdot S(\omega) = |\omega^2 H_{z_3}(\omega)|^2 \cdot S(\omega) \quad \text{e} \quad GI_{\dot{\theta}}(\omega) = |I_{\dot{\theta}}(\omega)|^2 \cdot S(\omega) \quad (45)$$

A magnitude da função densidade das acelerações verticais e angulares do veículo em pista não pavimentada a 25 km/h (7 m/s), é mostrada na Figura 14. Pode-se observar nesta figura que o conteúdo de comprimento de onda mais severo da seção da via não pavimentada, que está na faixa entre 0,6 e 0,9 metros e coincide com frequência natural o suspensão do veículo. Este efeito amplifica a propensão à magnificação da aceleração em torno de 12 Hz, o que pode causar desconforto ao passageiro.

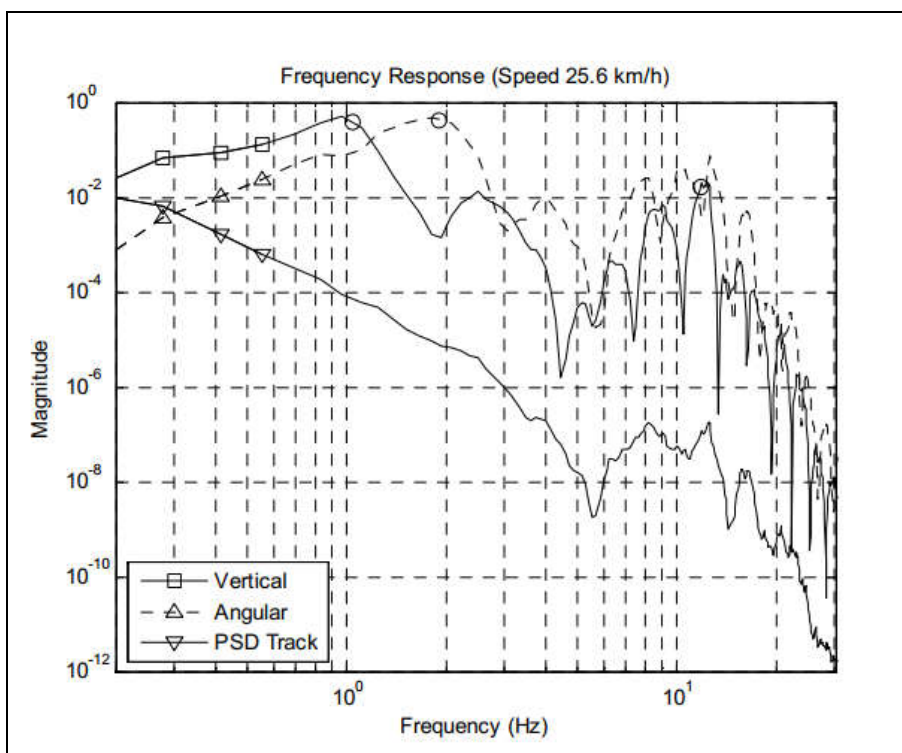


Figura 14 – Resposta em Frequência devido Excitação da Via (pista não pavimentada)

A Figura 15 apresenta a magnitude da função densidade espectral da aceleração vertical (m^3) e angular do veículo trafegando a 120 km/h ($V_x = 33,3$ m/s) na estrada asfaltada. Quando o veículo

DINÂMICA VEÍCULAR

trafegar nesta velocidade a rugosidade do pavimento com conteúdo de comprimento de onda em torno de 30 metros ($f = V_x / \lambda = 1,11 \text{ Hz}$) afetará significativamente o desempenho em conforto do veículo pois coincide com a frequência natural típica do primeiro modo.

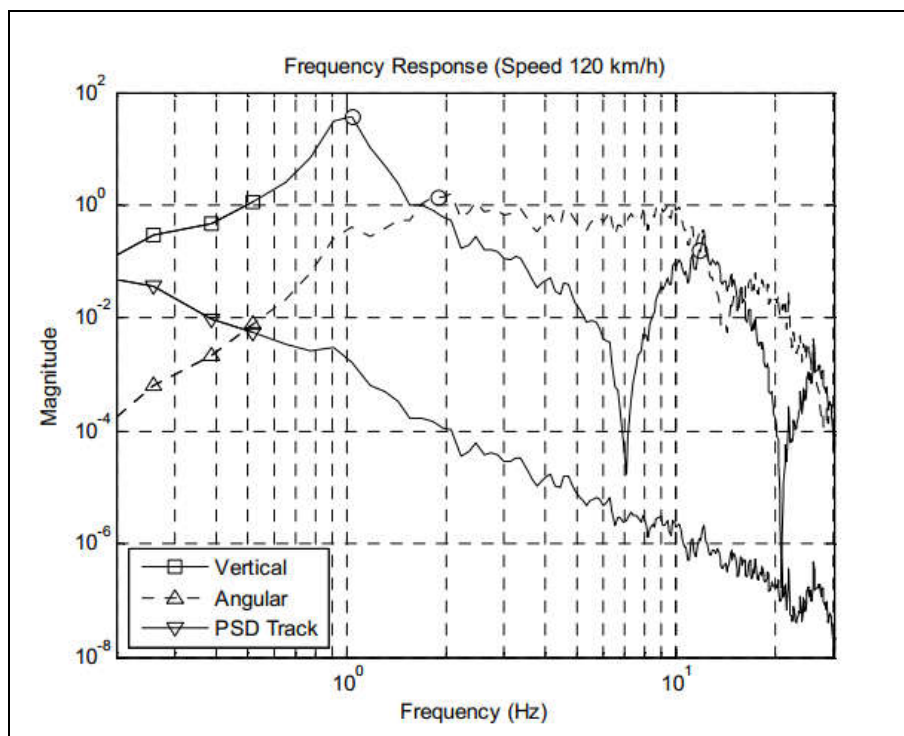


Figura 15 – Resposta em Frequência devido Excitação da Via (Pista pavimentada)

Observe que a manutenção do pavimento pode ser otimizada para conforto considerando que a maioria dos veículo tem faixa de frequência similar para o primeiro modo vertical de movimento (em torno de 1.0~1.2 Hz). Considerando que tráfego de veículo na faixa rápida da rodovia ocorre entre 100 e 120 km/h, resulta que os comprimento de onda de irregularidades verticais mais perniciosas ao conforto dos passageiros encontra-se na faixa de 23 a 33 metros. Desta forma manutenção pode ser otimizada corrigindo preferencialmente esta faixa específica de comprimentos de onda da pista. Para tanto um processo de medição e análise espectral das irregularidades deve ser realizado de forma especializada, buscando a identificação e localização precisa destes efeitos.

6. ANÁLISE DE CONFORTO

A avaliação do conforto dos passageiros é feita de forma experimental com o tráfego do veículo instrumentado pela estrada medindo a aceleração no acento do veículo. De posse das medições o espectro da aceleração deve ser determinado em faixas de terços de oitavas e comparado com os limites normalizados (norma internacional *ISO-2631* de conforto), conforme mostrado na Figura 16.

Esta recomendação auxilia o ajuste da suspensão para obter frequências naturais fora da faixa de maior sensibilidade do passageiro. Ou seja, evitar a faixa entre 4,0 a 8,0 *Hz*. Tipicamente o primeiro modo de oscilação vertical de um veículo encontra-se na faixa entre 1,0 e 1,4 *Hz*, confirmando a afirmativa de quanto menor a frequência maior o conforto do passageiro. A frequência do modo de oscilação da suspensão na faixa entre 10,0 a 15,0 *Hz* justifica a busca pela menor massa não suspensa para aumentar a frequência deste modo de vibração.

O espectro de tolerância apresentado na Figura 16, revela a menor tolerância do usuário do veículo às vibrações na faixa de frequência entre 4,0 a 8,0 *Hz*, com valor médio quadrático aceitável inferior a 0,25 m/s^2 (0,025g - *RMS*). Ou seja, para uma determinada amplitude de aceleração média quadrática o passageiro tem capacidade de suportar dezenas de minutos de viagem sem prejuízo de suas funções vitais (ver definições na norma *ISO*).

A norma *ISO* propõe utilizar um filtro ponderador da aceleração medida por direção (vertical ou lateral/longitudinal) e para desconforto de movimento (náusea ou enjôo – *motion sickness*). A Figura 17 apresenta as faixas de ponderação de cada efeito.

DINÂMICA VEÍCULAR

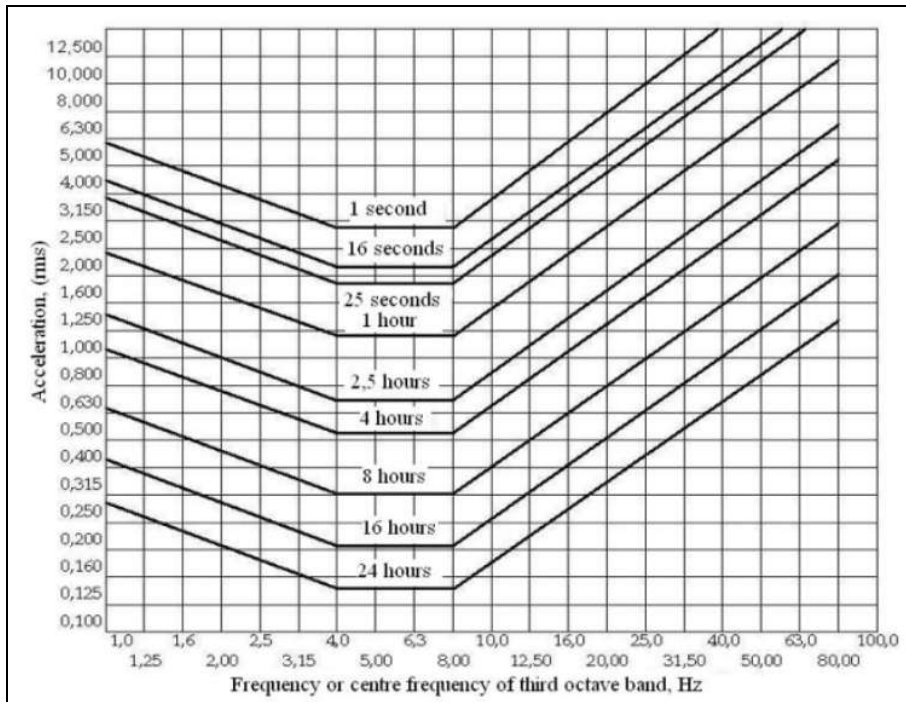


Figura 16 - Tempo Tolerável em Faixa de Aceleração (rms)

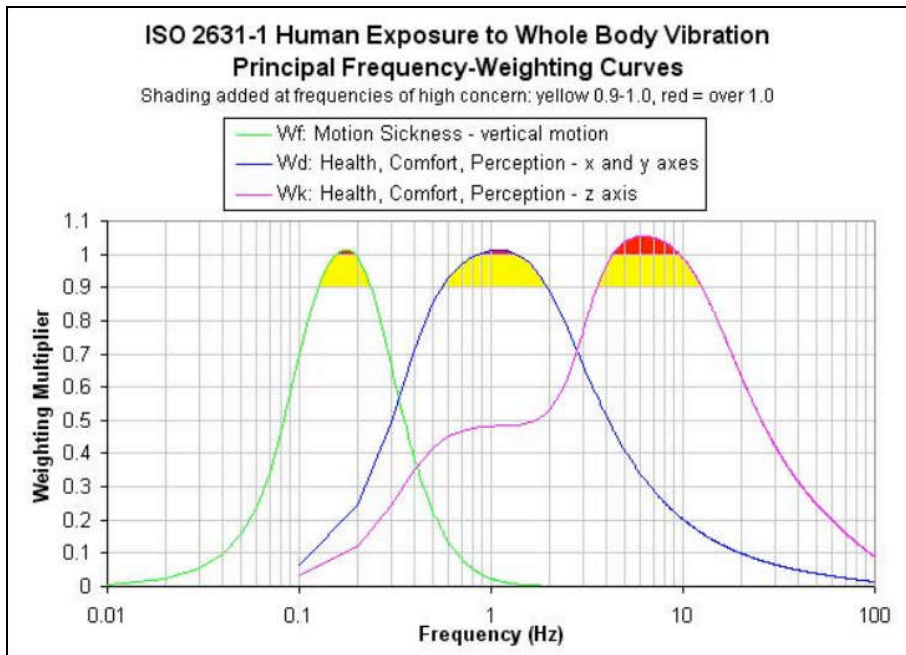


Figura 17 – Filtro Ponderador por Faixa de Frequência (fonte: internet)

DINÂMICA VEÍCULAR

A norma ISO propõe ainda faixas de valores de aceleração para a classificação do conforto. Estes valores de aceleração média quadrática (m/s^2) estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Limite de Aceleração para Conforto

ACELERAÇÃO rms (m/s^2)	CLASSIFICAÇÃO	OBS
$a_{rms} < 0,315$	Confortável	
$0,315 < a_{rms} < 0,63$	Pouco desconfortável	
$0,80 < a_{rms} < 1,60$	Desconfortável	
$1,25 < a_{rms} < 2,50$	Muito desconfortável	
$a_{rms} > 2$	Extremamente desconfortável	

Fonte: ISO 2631-1, 1997

A norma internacional de conforto ISO 2631-1 também sugere a utilização do “*Vibration Dose Value*” que corresponde à aceleração elevada à quarta potência, como uma alternativa para incluir adequadamente os efeitos fator de crista (*high crest factors*) na análise vibrações não contemplado nas figuras de mérito estatísticos (como por exemplo, valor *RMS*). O índice *VDV* pode ser determinado pela aceleração medida em cada uma das três direções cartesianas (direções *x*, *y* e *z*) como:

$$VDV_i = \left[\int_{t=0}^{t=T} a_i^4(t) \cdot dt \right]^{1/4} \quad \text{e} \quad RI = \sum_{i=1}^3 VDV_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \quad (46)$$

Um único índice *RI* (*Ride Index*) pode ser utilizado para quantificar o conforto do passageiro em um veículo trafegando em determinada velocidade *V* sobre uma pista com irregularidade.

6.1. Geração de Irregularidades

Para a verificação virtual do conforto dos passageiros pode-se gerar um irregularidade posicional (ou espectral) e combinar com a simulação numérica temporal (ou produto espectral) para verificar a distribuição de potência ao longo de uma faixa de frequência, a amplitude média quadrática de aceleração (*PSD*).

A geração de irregularidade aleatória tem representatividade no domínio amplo do comprimento de onda. Tomando um espectro de irregularidades (ISO ou FRA), conforme ilustrado na Figura 18 e selecionar uma faixa de frequências (comprimento de onda de 0.6 a 79 metros) pode-se gerar as irregularidades verticais da trilha (2.000 metros com amostras a cada 0.25 metros), conforme mostrado na Figura 19.

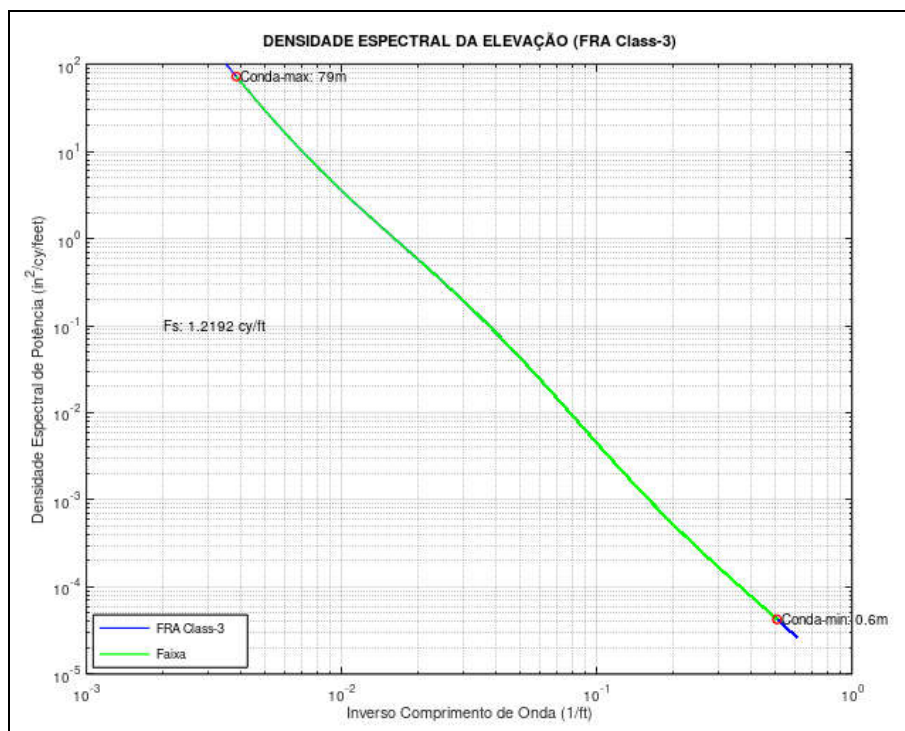


Figura 18 – Densidade Espectral da Elevação

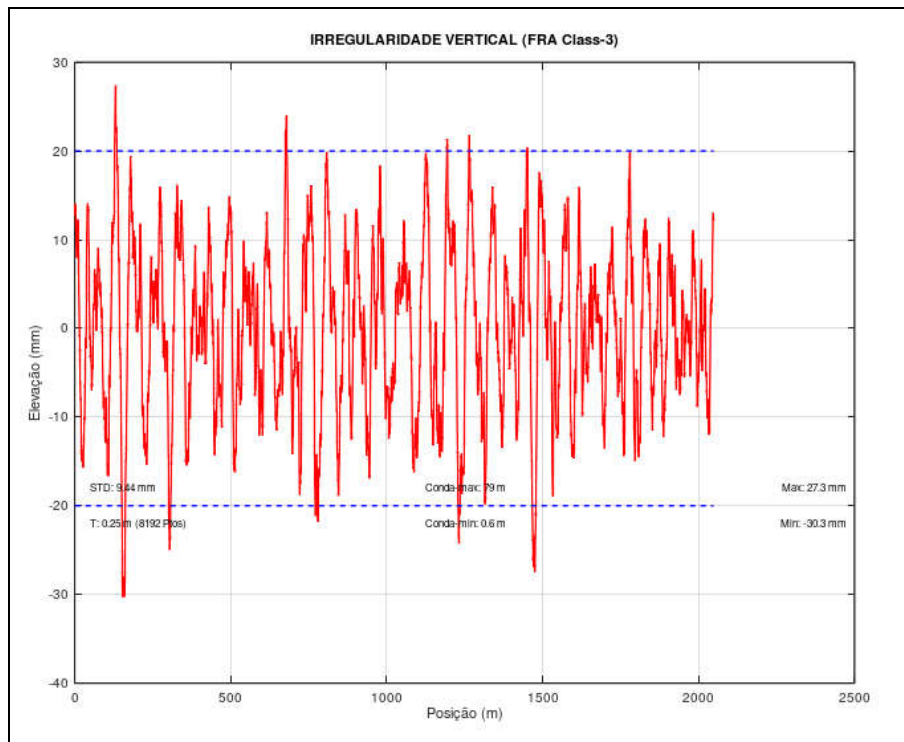


Figura 19 – Irregularidade Vertical (2000 metros)

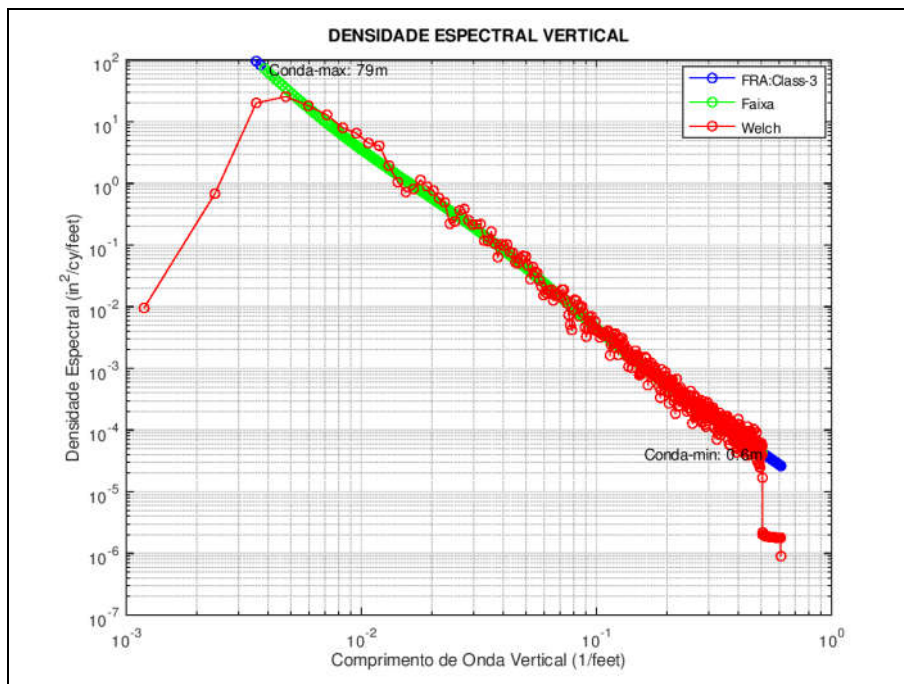


Figura 20 – Verificação da Densidade Espectral

DINÂMICA VEÍCULAR

Para verificar a qualidade da geração da irregularidade, o espectro da irregularidade gerada (pontos em vermelho) pode ser estimado e confrontado com a sua fonte original (linha em verde), conforme apresentado na Figura 20.

6.2. Verificação de Conforto

Para verificar o conforto dos passageiros, submete-se o modelo numérico às irregularidades virtuais geradas e identificam-se as acelerações. Utiliza-se a distribuição em terços da bandas de oitavas para verificar a quantidade de tempo tolerável do passageiro, conforme ilustrado na Figura 21.

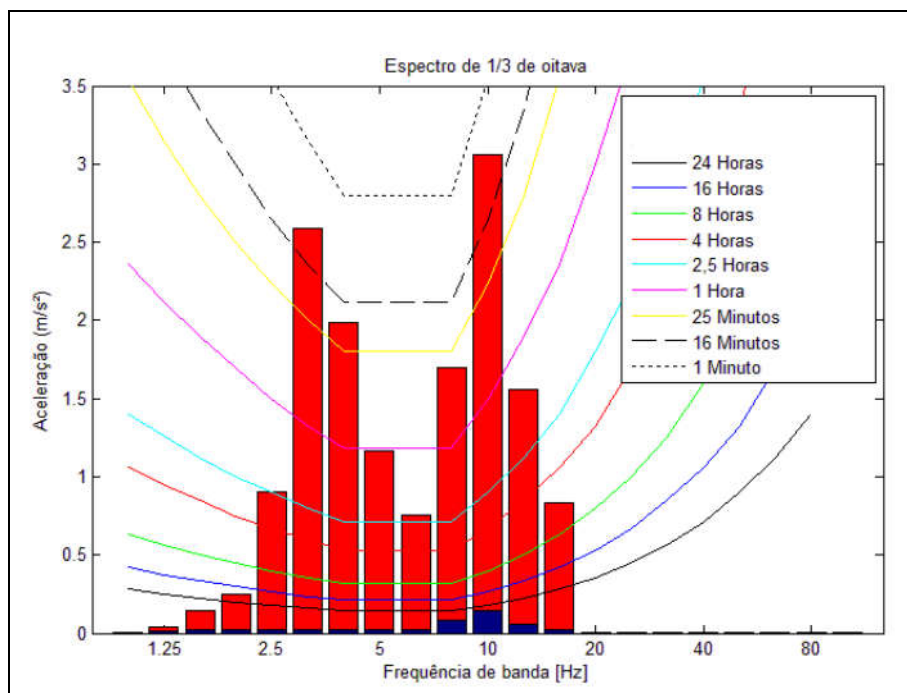


Figura 21 - - Conforto do Passageiro (fonte: Moretti, Baptista, 2015)

7. MODELO DO CONJUNTO DE TRAÇÃO

Com intuito de constituir experiência em modelagem, descreve-se o sistema de tração de um veículo (*power train*), adotando um modelo simples constituído basicamente por uma fonte de potencia (torque do motor em função da rotação) um acoplamento (que permite o deslizamento relativo) e uma carga (inércia do veículo), conforme mostrado na Figura 22.

7.1. Modelo Simplificado

Considere o sistema composto por dois grupos em rotação, conforme mostrado na Figura 22a. O primeiro grupo é constituído pelo motor de combustão interna (*MCI*) considerado como um único corpo rígido com inércia rotativa J_{MCI} e capaz de produzir um torque T_{MCI} gerado pela combustão interna dos cilindros do motor que é uma função da posição do acelerador.

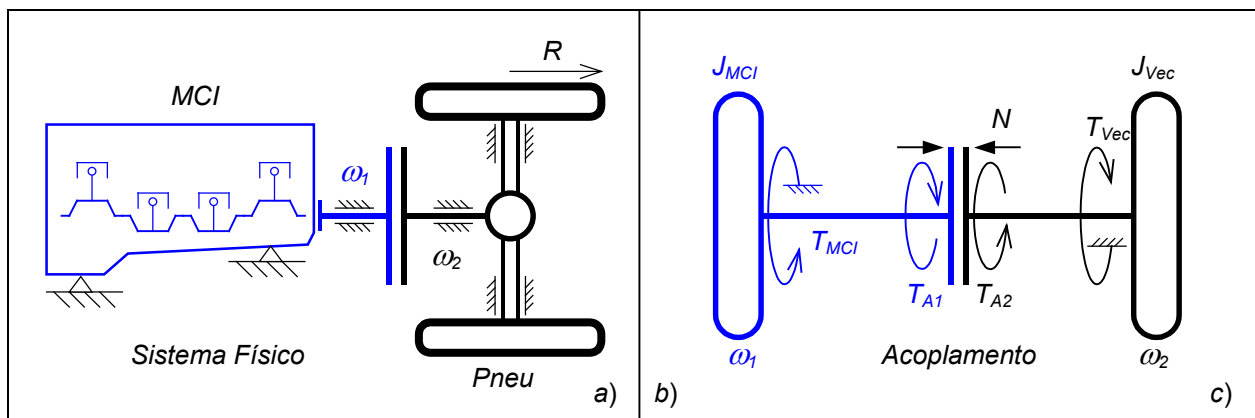


Figura 22 – Modelo Simplificado

Utilizando o *TQMI* escreve-se, em relação ao centro de massa, a seguinte equação diferencial para o motor, com momento de inércia J_{MCI} , conforme mostrado na Figura 22b (em azul):

$$J_{MCI} \dot{\omega}_1 = T_{MCI} - T_{A1} \quad (47)$$

onde o torque T_{A1} é devido à embreagem.

De forma análoga pode-se obter a equação diferencial para o veículo, conforme mostrado na Figura 23.

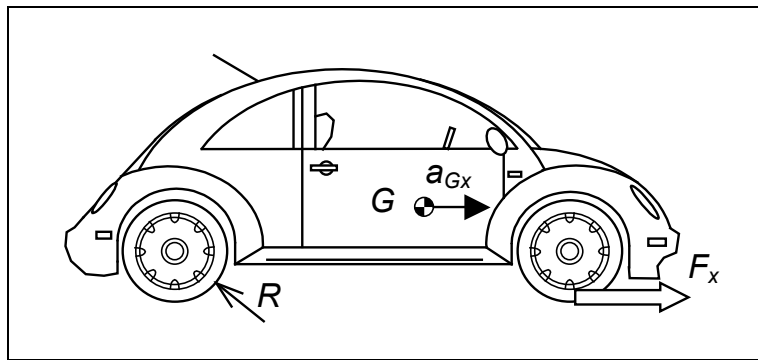


Figura 23 – Modelo do Veículo

Utilizando o TR para o veículo de massa M , que trafega em velocidade translacional V_{Vec} , e tem diâmetro de roda R , pode-se obter uma relação de forças longitudinal F_x e torque na roda T_{Vec} , uma relação cinemática entre ω_2 e V_{Vec} e sua derivada, considerando que não haja escorregamento no contato roda/pista, obtêm-se a própria expressão do $TQMA$, acrescentando o torque do acoplamento T_{A2} :

$$\begin{aligned} M \cdot a_{Gx} &= F_x \\ T_{Vec} &= F_x \cdot R \\ V_{Vec} &= \omega_2 \cdot R \Rightarrow a_{Gx} = \dot{\omega}_2 \cdot R \\ M \cdot \dot{\omega}_2 \cdot R &= T_{Vec} / R \\ MR^2 \cdot \dot{\omega}_2 &= T_{A2} - T_{Vec} \\ J_{Vec} \dot{\omega}_2 &= T_{A2} - T_{Vec} \end{aligned} \quad (48)$$

onde o momento de inércia equivalente do veículo é $J_{vec} = MR^2$. Note ainda que o veículo pode estar submetido à ação dos freios F_{Freio} , resistência aerodinâmica $F_{AeroDin}$, e resistência ao rolamento F_{ResRol} , que não foram consideradas.

7.2. Acoplamento

Para o acoplamento entre os grupos rotativos (embreagem) haverá um escorregamento total (desacoplado) ou escorregamento parcial até nulo (acoplado) em função da força de compressão normal do acoplamento N , conforme mostrado na Figura 22 à direita (T_{A1} e T_{A2}). Utilizando a expressão de *Coulomb* ($F_{AT} \leq \mu \cdot N$) aplicada em um disco de raio externo R_2 e raio interno R_1 (Figura 24, Zengiro, 2004) obtêm-se o momento no acoplamento:

$$M_{Acoplamento} = \frac{2}{3} \mu \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)} N \quad (49)$$

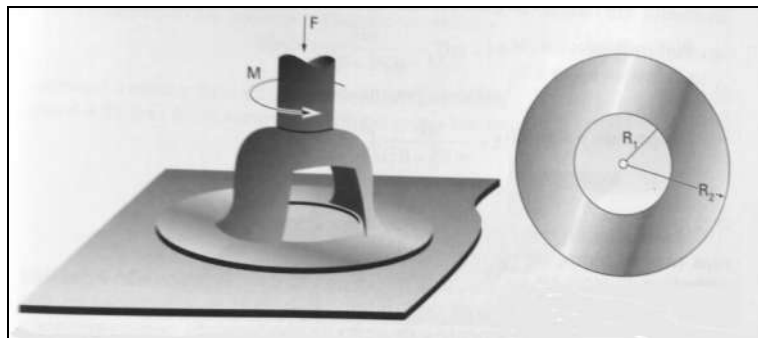


Figura 24 – Acoplamento (Zengiro, 2004)

O motorista controla a aplicação da força na embreagem. Pode liberar a embreagem em alguns décimos de segundos. Portanto $N(t)$ pode ser $N_0 = 0$ para $t = t_0$ até N_{max} em função do intervalo de tempo Δt de acoplamento. Assim a função da força normal de aplicação da embreagem a ser utilizada na expressão anterior, resulta em:

$$N(t) = N_{\max} \cdot \frac{(t-t_0)}{\Delta t} \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} N(t) &= 0 \quad \text{para} \quad t \leq t_0 \\ N(t) &\text{ para } t_0 < t < t + \Delta t \\ N(t) &= N_{\max} \quad \text{para} \quad t \geq t + \Delta t \end{aligned} \quad (50)$$

Desta forma obtêm-se um sistema com dois corpos rígidos em rotação, portanto com dois graus de liberdade (ω_1 e ω_2). Neste caso o momento de inércia do acoplamento (embreagem) deve ser dividido entre as duas inércias J_{MCI} e J_{Vec} .

7.3. Eixo Elástico

Pode-se considerar ainda a flexibilidade rotacional do eixo de transmissão. Para tanto a elasticidade do eixo pode ser identificada em função da posição angular de cada eixo (ϕ_1 e ϕ_2) como um torque T_E :

$$T_E = -k_\phi \cdot \Delta\phi = -k_\phi \cdot (\phi_2 - \phi_1) \quad (51)$$

Incluindo a elasticidade global do eixo de transmissão, adicionando um torque ativo (T_E) e reativo ($-T_E$) em cada corpo em função do angulo de torção $\Delta\phi$, e o torque devido ao acoplamento (T_{A1} e T_{A2}), o sistema resulta acoplado:

$$\begin{aligned} J_{MCI} \dot{\omega}_1 &= T_{MCI} - T_{A1} + T_E \\ J_{Vec} \dot{\omega}_2 &= T_{A2} - T_{Vec} - T_E \\ T_{A2} &= T_{A1} \cdot N(t) \end{aligned} \quad (52)$$

Note que as velocidades angulares (ω_1 e ω_2) se igualam quando a embreagem transmitir um torque suficiente para impedir o escorregamento relativo ($\Delta\phi = 0$).

7.4. Modelo com Duas Fontes de Potência

Para a inclusão no modelo de mais uma fonte de potência (motor/generador elétrico - *MGE*) típica de veículos híbridos, utiliza-se de um conjunto planetário (*PL*) que adiciona as velocidades angulares das fontes de potência, conforme ilustrado na Figura 25.

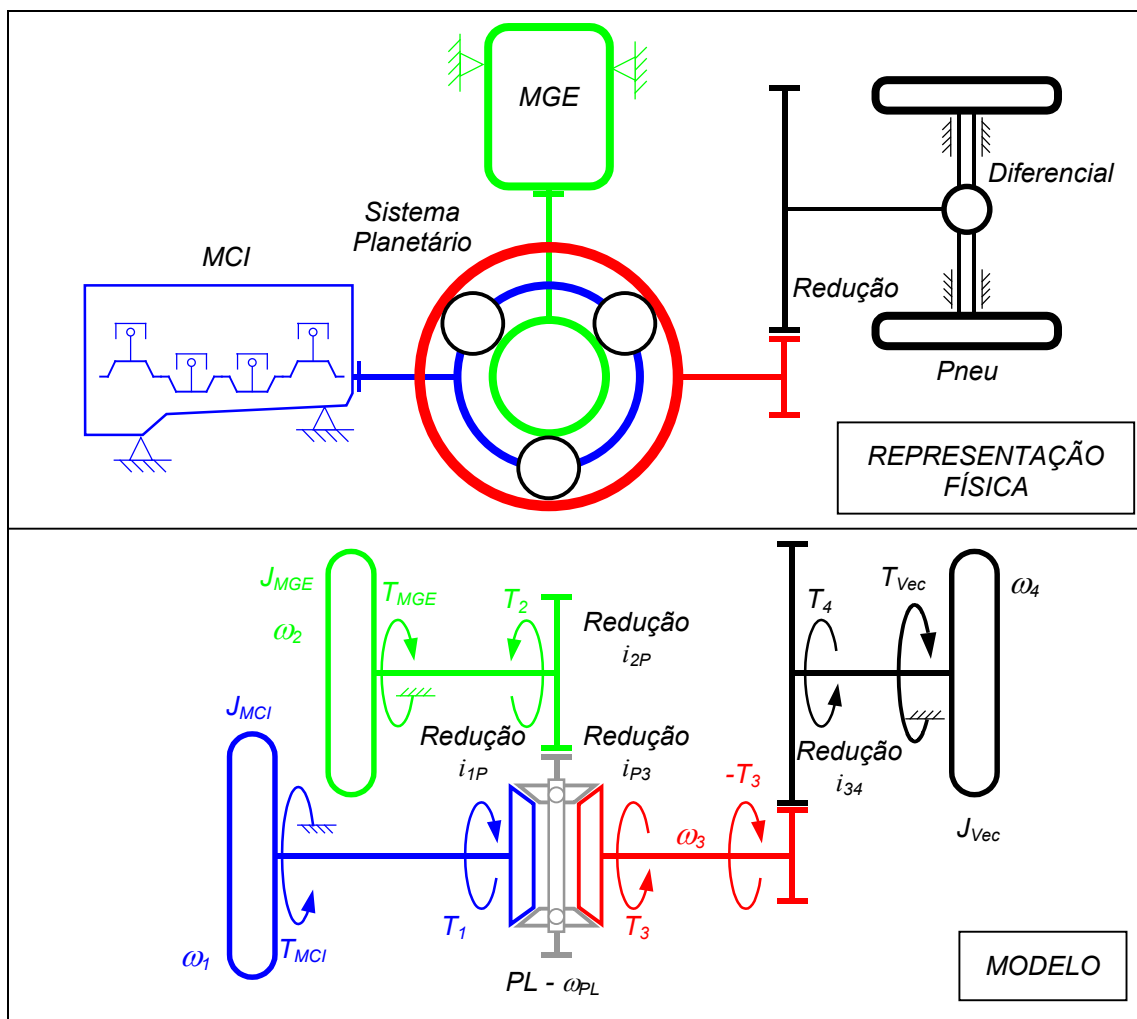


Figura 25 – Conjunto com Duas Fontes de Potência

Para cada corpo rígido em rotação (*MCI*, *MGE*, *PL*, *E3* e *VEC*) obtêm-se as seguintes equações diferenciais a partir da observação da Figura 25:

$$\begin{aligned}
 J_{MCI} \dot{\omega}_1 &= T_{MCI} - T_1 \\
 J_{MGE} \dot{\omega}_2 &= T_{MGE} - T_2 \\
 J_{PL} \dot{\omega}_{PL} &= T_1 + T_{PL} - T_3 \\
 J_3 \dot{\omega}_3 &= T_3 - T_3 \\
 J_{Vec} \dot{\omega}_4 &= T_4 - T_{Vec}
 \end{aligned} \tag{53}$$

Cada engrenamento do sistema planetário possui uma relação de transmissão com as seguintes regras:

$$\omega_1 = i_{1P} \cdot \omega_{PL} \quad ; \quad \omega_{PL} = i_{2P} \cdot \omega_2 \quad ; \quad \omega_{PL} = i_{P3} \cdot \omega_3 \quad ; \quad \omega_3 = i_{34} \cdot \omega_4 \tag{54}$$

7.5. Modelo de Motorista

Para realizar simulações de manobras, seguindo uma trajetória prescrita, deve-se ter um modelo do comportamento do motorista. As ações requeridas são o ângulo de esterçamento da direção, pedal de aceleração e pedal de frenagem (além da eventual troca de marchas). A reação de um motorista é afetada por um tempo de atraso de resposta humana devido a três fatores principais: tempo de elaboração das informações do veículo e do meio ambiente (atitude do veículo, posição da pista, condição do pavimento, identificação de obstáculos, condições climáticas, etc.), tempo de reação neuro-muscular para iniciar os movimentos dos membros ativos, após a decisão da ação e o tempo necessária para realizar a ação de controle (esterçamento da direção e/ou acionamento de pedais e alavancas). O tempo de atraso depende entre outros fatores da habilidade, agilidade e previsibilidade do motorista. Em uma primeira aproximação, um modelo linear simples e que incorpore um comportamento preditivo, com resultados robustos, é apropriado para simulações. A equação dinâmica do ângulo de esterçamento da direção δ do controlador é proposta por *GENTA* (1997) como:

$$\tau \dot{\delta}(t) + \delta(t) = -k_A \cdot [\psi(t) - \psi_1(t) + y(t) / L] \tag{55}$$

DINÂMICA VEÍCULAR

onde τ é o tempo de resposta do motorista (típico de 0.2 segundos), kA é um ganho de atitude e L a distância de predição, conforme identificado na Figura 26. Os valores ψ e ψ_1 são, respectivamente, o ângulo de guinada do veículo e o ângulo de guinada de referência a uma distância L à frente na trajetória. O deslocamento lateral do veículo é dado por $y(t)$.

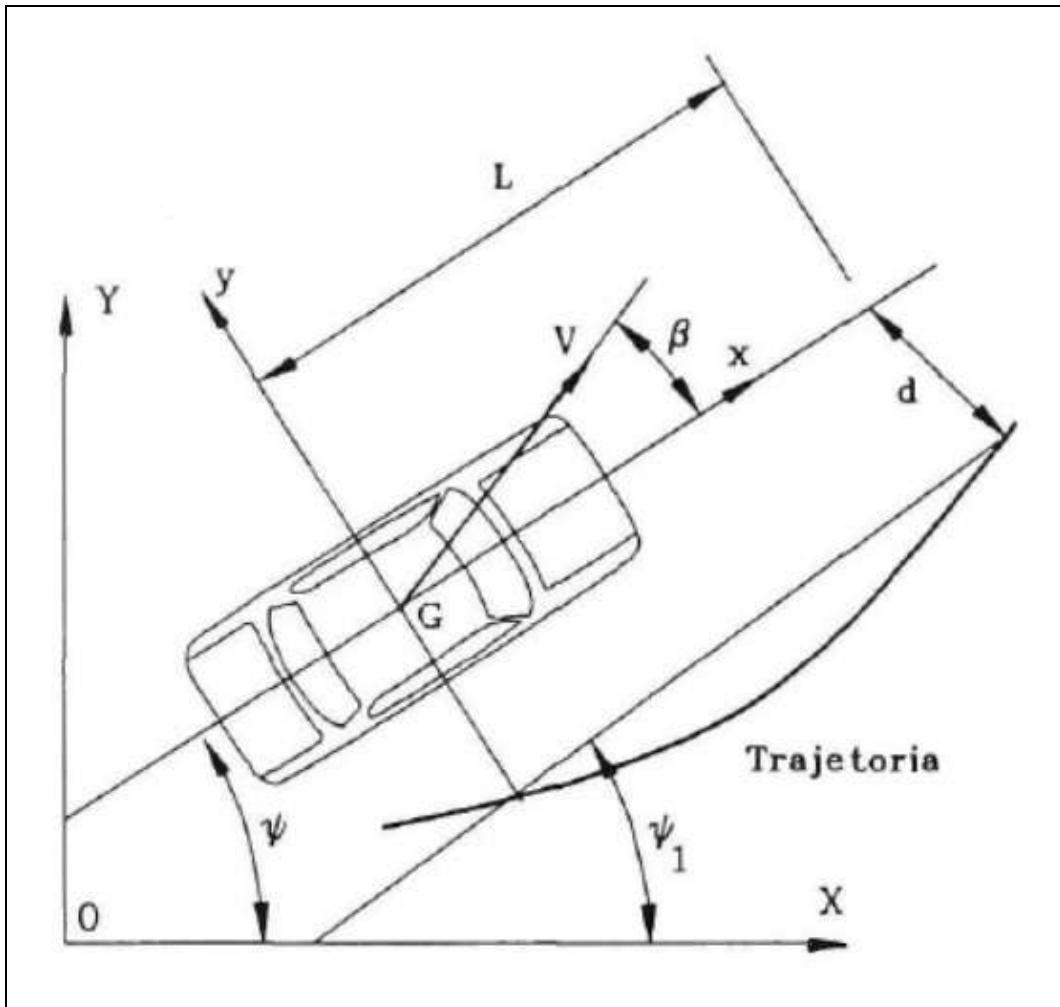


Figura 26 – Trajetória e Atitude do Veículo (Genta, 1997)

7.6. Modelo de Pista

Para simular o comportamento dinâmico de um veículo é necessário a descrição de uma trajetória a ser seguida. Existem diversas trajetórias prescritas em função do tipo de avaliação pretendida. Por exemplo: para avaliação da dirigibilidade (*handling*) uma mudança de pista prevista pela norma *SAE* (*SAE-J2179 Single lane change manoeuvre* ou *ISO-3888*) é uma proposta recomendada. Neste caso limites longitudinais são estabelecidos para o deslocamento lateral do veículo (largura da pista), conforme apresentado na Figura 27. No caso da dinâmica longitudinal um percurso em linha reta com variações de inclinação e velocidade são prescritas (*ISO-3888*).

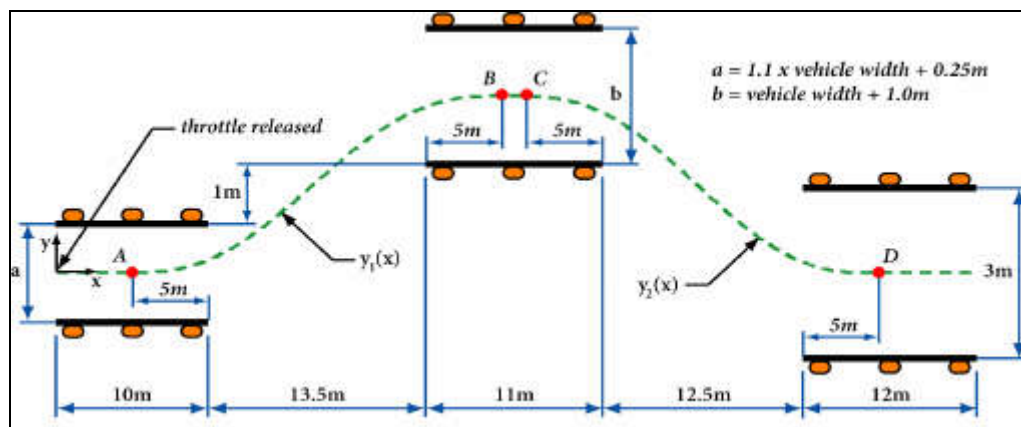


Figura 27 – Dimensões da Envoltória para Teste de Mudança de Pista (ISO - 3888)

Pode-se dividir o traçado em duas componentes: a geometria ampla e as irregularidades de comprimento de onda pequeno. Em linha gerais a mudança de trajetória horizontal (curva circular ou curva de transição) ou vertical (ascendente ou descendente) são variações descritas geometricamente com longos comprimentos.

7.7. Ciclo de Tráfego

Para avaliar o desempenho de um veículo é recomendado fazer um teste de percurso que represente o perfil de utilização ao qual o veículo será submetido e verificar seu desempenho neste trajeto. Como a intensidade de utilização do veículo varia entre os usuários, cerca de 75% das utilizações são inferiores a um percurso de 10 km (ver Figura 28), um trajeto representativo pode ser curto e repetido ciclicamente, representando um circuito urbano típico de cidades de médio a grande porte.

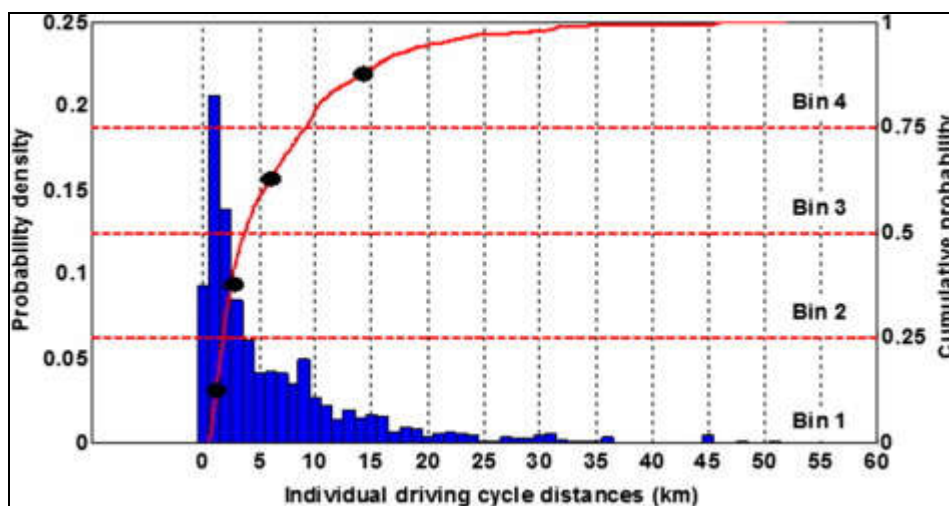


Figura 28 – Tamanho Típico do Trajeto (Fonte: Internet)

Um ciclo típico de tráfego está apresentado na Figura 29, que propõe intervalos de tempo em determinadas velocidades, com as correspondentes acelerações e paradas intermediárias.

Existem várias proposições regulamentadas (consultar *SAE*) e unificadas como a apresentada na Figura 30.

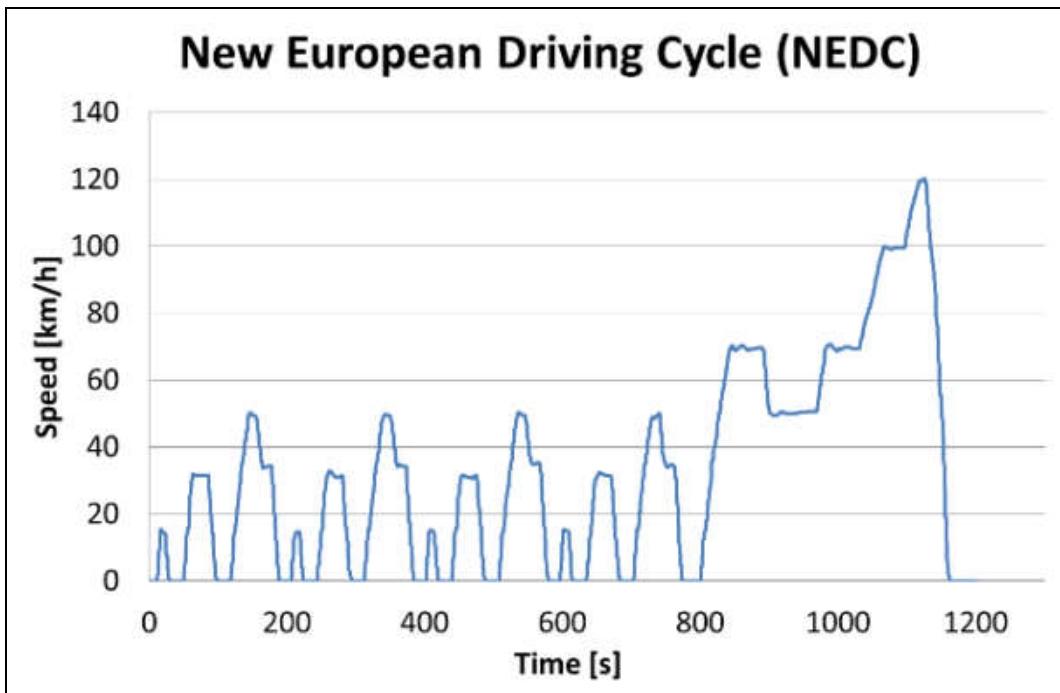


Figura 29 - Perfil de Velocidade para Percurso de Teste (Novo Europa)

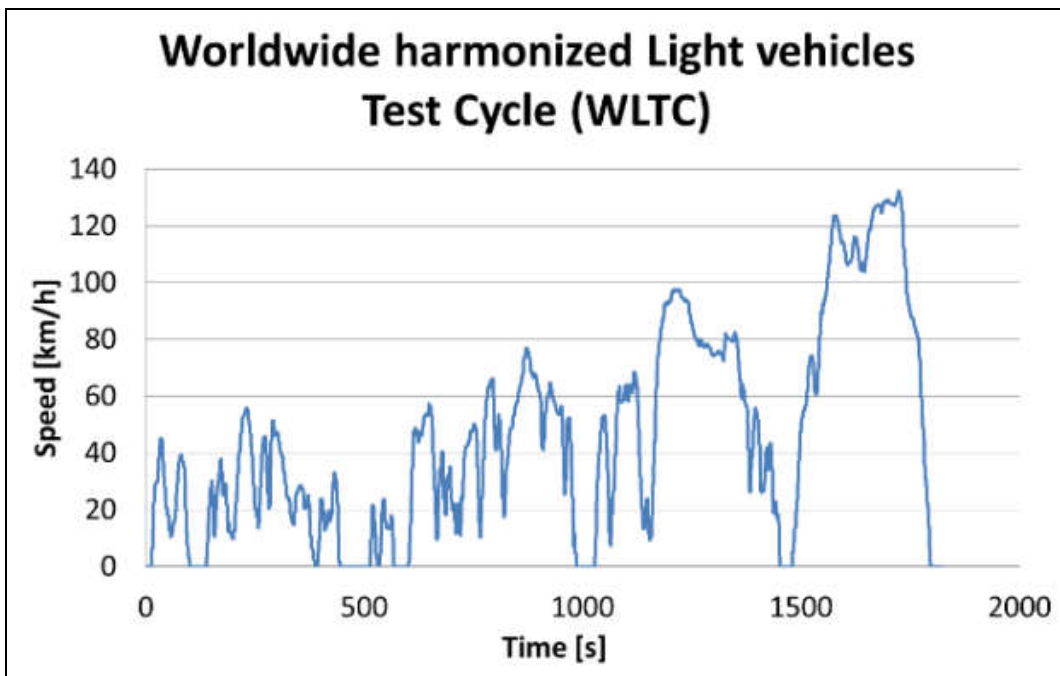


Figura 30 - Perfil de Velocidade para Percurso de Teste (Gallasi, 2018)

8. MODELO DO VEÍCULO HÍBRIDO

O conjunto de tração de um veículo híbrido pode ser descrito como um sistemas com três fontes de energia: motor a combustão interna (*MCI*) motor gerador elétrico (*MGE-1* e *MGE-2*) associadas entre si por acoplamentos, todos gerenciados por uma estratégia de controle otimizadora (desempenho, consumo ou eficiência). Em geral o *MGE-2* tem rotação proporcional a velocidade de tráfego que acarreta uma carga devido à inércia, frenagem e resistência do veículo. Um diagrama típico de sistema híbrido utilizado em veículos de ultima geração (Prius da Toyota, VW, etc.), está apresentado na Figura 31.

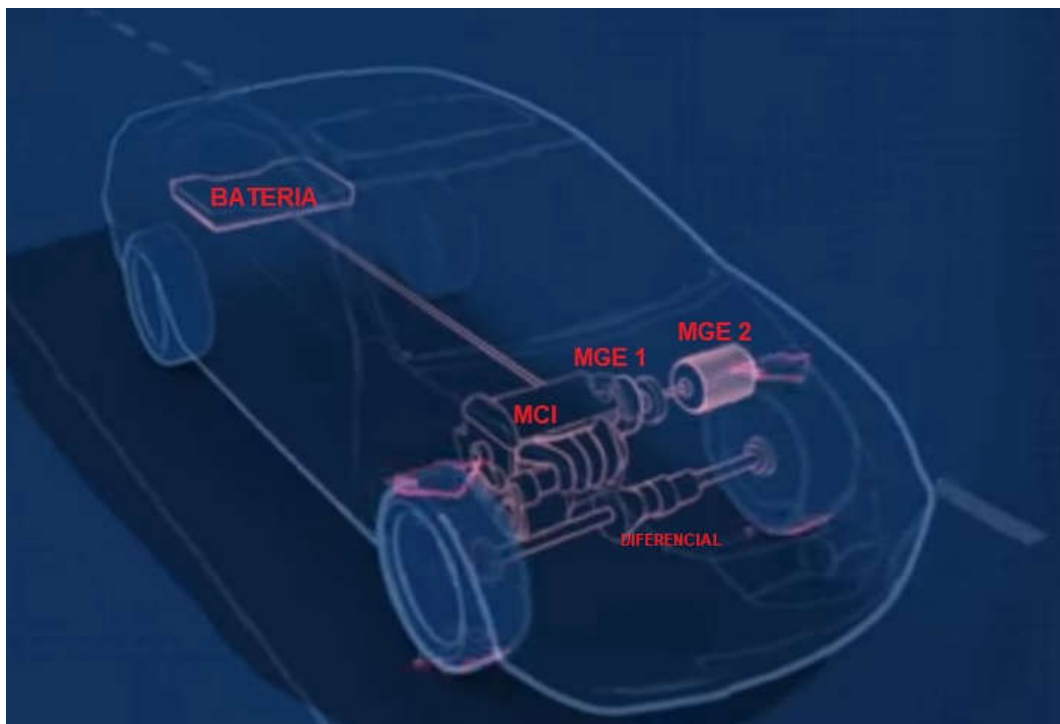


Figura 31 – Veículo Híbrido Típico

Nesta configuração o motor *MGE1* atua como um motor quando o veículo inicia o movimento em baixa velocidade (aceleração) e muda para um gerador imediatamente após o *MCI* entrar em operação em velocidade média. O *MGE2* serve como um motor elétrico principal para fornecer

DINÂMICA VEÍCULAR

energia adicional para impulsionar o veículo em máxima potência complementando o *MCI*. Durante a frenagem do veículo o *MGE2* funciona como gerador para recuperar energia cinética no modo de regeneração (*Regenerative Braking*). Portanto os motores elétricos tem condições de operação totalmente diferentes e variáveis durante o tempo, portanto tem características técnicas distintas, conforme mostrado na Tabela 6 como exemplo do *Toyota Prius*.

Tabela 6 – Conjunto de Propulsão (*Prius*)

Descrição	Parâmetro	Valor	Unidade	Obs.:
Motor Combustão Interna MCI	Deslocamento	1.5	Litros	
	Max torque	102	Nm @4000 rpm	
	Max power	43	kW @4000 rpm	
Moto/Gerador MGE-1	Max speed	5500	rpm	
	Max torque	55	Nm	
	Max power	15	kW	
Moto/Gerador MGE-2	Max speed	6000	rpm	
	Max torque	305	Nm	
	Max power	31	kW	
Conjunto de Baterias	Cell capacity	6	Ah	
	Nominal voltage	308	Volts	

8.1. Equações Dinâmicas

Para a obtenção das equações dinâmicas do sistema utiliza-se do *TQMA* considerando o diagrama de momentos sobre cada rotor livre, conforme mostrado na topologia apresentada na Figura 32 (*Trindade, 2015*).

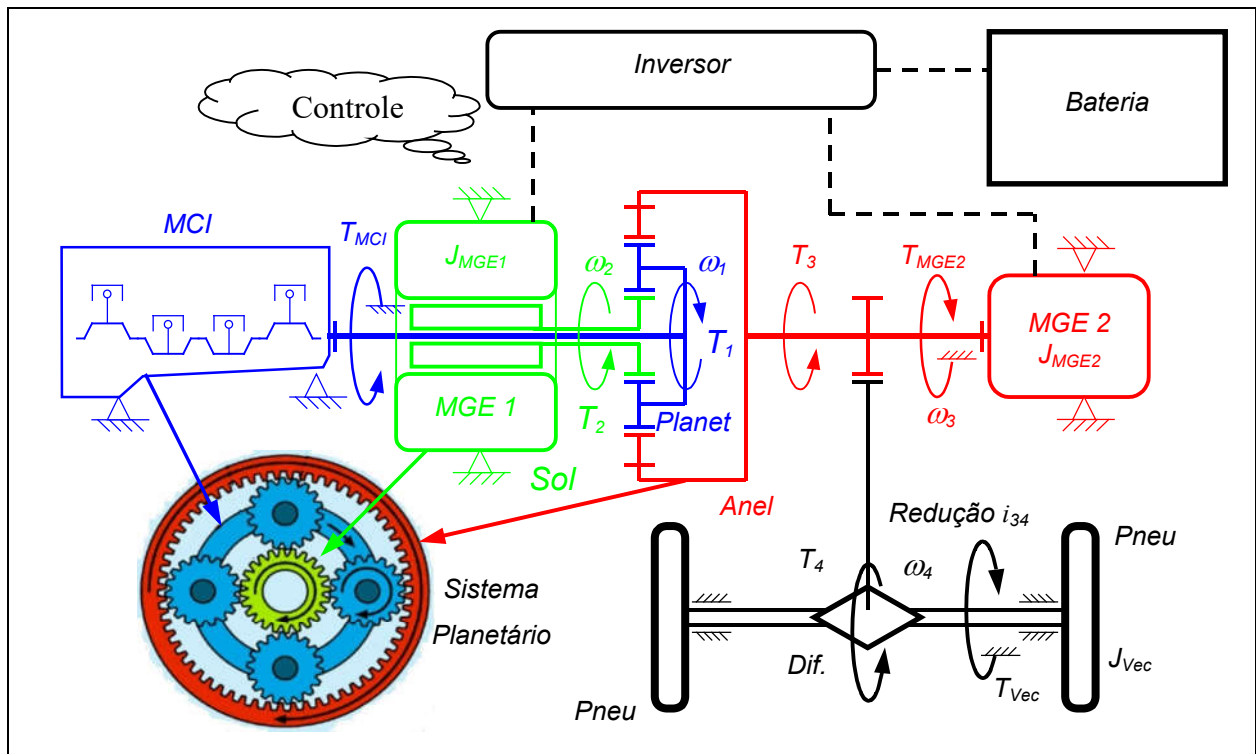


Figura 32 – Topologia Série-Paralelo

Considerando o motor de combustão interna (MCI) com velocidade angular ω_1 e torque próprio T_{MCI} , submetido à carga T_1 , obtêm-se por similaridades as quatro equações de movimento angular:

$$\begin{aligned}
 J_{MCI} \dot{\omega}_1 &= T_{MCI} - T_1 \\
 J_{MGE1} \dot{\omega}_2 &= T_{MGE1} - T_2 \\
 J_{PL} \dot{\omega}_3 &= T_1 + T_2 - T_3 \\
 J_{MGE2} \dot{\omega}_3 &= T_{MGE2} + T_3 - T_4 \\
 J_{Vec} \dot{\omega}_4 &= T_4 - T_{Vec}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Note que a rotação ω_3 e ω_4 são proporcionais devido à relação proporcional do redutor com relação de engrenamento i_{34} .

Para completar a análise é necessário a elaboração do diagrama de forças e momentos dos corpos livres do sistema planetário, conforme mostrado na Figura 33, que permite relacionar as forças nas engrenagens do sistema planetário (em preto).

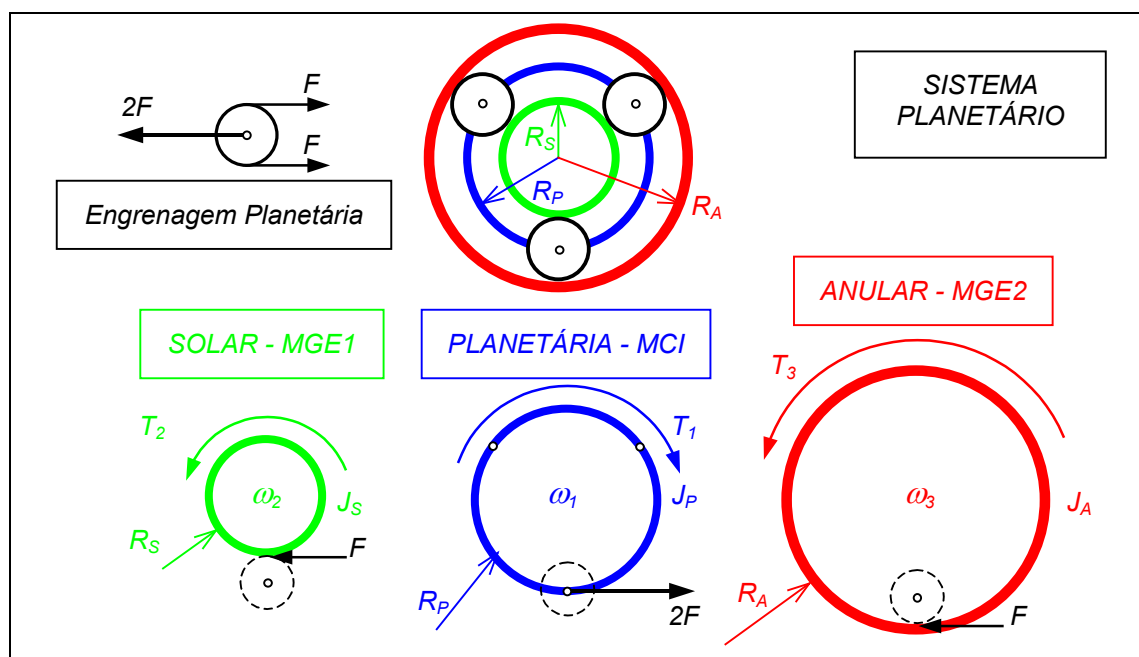


Figura 33 – Diagrama de Forçamentos dos Corpos Livres do Planetário

As equações de cada engrenagem do sistema planetário (planetária, solar e anular), são obtidas utilizando o *TQMA* e da análise do diagrama de forças e momentos aplicados sobre os corpos livres, considerando a engrenagem planetária com inércia desprezível e recebendo forças opostas de magnitude $2F$ (ver lado esquerdo superior da Figura 33) resultando em:

$$\begin{aligned}
 J_P \dot{\omega}_1 &= 2F \cdot R_P - T_1 \\
 J_S \dot{\omega}_2 &= T_2 - F \cdot R_S \\
 J_A \dot{\omega}_3 &= T_3 - F \cdot R_A
 \end{aligned} \tag{57}$$

onde J_P é o momento de inércia do anel planetário, J_S e J_A os momentos de inércia do engrenagem solar e do anel externo. Os raios de cada engrenagem (ou número de dentes) planetária, solar e anular, são respectivamente R_P , R_S e R_A . Devido ao diâmetro da engrenagem

DINÂMICA VEÍCULAR

planetária, vale a relação $R_p = (R_s + R_A) / 2$. As forças F de ação sobre cada engrenagem (solar, planetárias e anular externa) estão identificados na Figura 33.

Note que o sistema é acoplado devido ao vínculo cinemático da engrenamento da engrenagem planetária, resultando nas seguintes expressão e sua derivada:

$$R_p \cdot \omega_1 = R_s \cdot \omega_2 + R_A \cdot \omega_3 \quad \Rightarrow \quad R_p \cdot \dot{\omega}_1 = R_s \cdot \dot{\omega}_2 + R_A \cdot \dot{\omega}_3 \quad (58)$$

As equações na forma matricial do sistema híbrido resultam finalmente em:

$$\begin{bmatrix} (J_{MCI} + J_p) & 0 & 0 & 2R_p \\ 0 & (J_{MGE1} + J_s) & 0 & -R_s \\ 0 & 0 & (J_{MGE2} + J_{Vec}) & -R_A \\ -2R_p & R_s & R_A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{MCI} \\ -T_{MGE1} \\ T_{MGE2} - T_{Vec} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Nota-se que as três primeiras linhas são acopladas pela força F devido às relações de engrenamento do sistema planetário. Verifica-se ainda nas equações a existência de sete incógnitas: ω_1 , ω_2 , ω_3 , T_{MCI} , T_{MGE1} , T_{MGE2} e F . Considerando que o perfil de velocidade do ciclo de condução é prescrito e proporcional à ω_3 , os torques dos acionadores (3) serão otimizados como dados de entrada, resultando, portanto em um sistema com 2 variáveis independentes ω_1 e ω_2 (rotação do *MCI* e do *MGE1* respectivamente) que são gerenciados por uma estratégia de controle (Trindade, 2015).

O torque resistivo devido ao movimento do veículo T_{Vec} e obtido da equação de translação (*TR*) considerando as forças inerciais (m_{Total}), rotacionais (m_{Roda}), de frenagem (F_{Freio}), aerodinâmicas (função de V_x^2) e de arraste ($m_{Total} \cdot g$) do veículo:

$$T_{Vec} = R_{roda} \cdot \left[(m_{Total} \cdot a_{Gx}) + (m_{rodas} R_{roda}^2) + (F_{Freio}) + (0.5 \cdot C_x \cdot \rho \cdot A \cdot V_x^2) + (k_x \cdot m_{Total} \cdot g) \right] \quad (60)$$

8.2. Operação do Sistema

Durante a operação, o *MGE2* atua como motor de tração e regenera energia em eventos de frenagem. O *MGE1* tem a função de controlar a rotação de operação do *MCI* e pode funcionar em regime de tração ou de geração de energia, dependendo da velocidade desejada para o *MCI*. Dessa forma, o *MGE1* não propulSIONA o veículo ou recupera energia de frenagem diretamente. O diagrama de relações que exemplifica a operação dos componentes para diferentes condições está apresentado na Figura 34. Os eixos verticais correspondem à rotação de cada componente. O termo i_p é a relação de transmissão característica da engrenagem planetária.

Na Figura 34 pode-se observar as seguintes situações de cada componente (*MCI*, *MGE-1* e *MGE-2*):

- a) veículo em repouso com todos os componentes com rotação nula (linha vermelha na Figura 34);
- b) veículo em aceleração: *MGE-2* adquire rotação positiva impulsionando o veículo enquanto o *MGE-1* assume rotação negativa, mantendo o *MCI* estacionário (linha verde);
- c) veículo em operação combinada: a rotação do *MGE-1* sobe, ligando o *MCI* em baixa rotação, mantendo velocidade típica de cruzeiro com contribuição do *MGE-2* (linha em azul);
- d) Aumento da velocidade (fornecendo mais potência às rodas e com eventual carregamento das baterias): o *MCI* e *MGE-2* aumentam a rotação, produzindo mais potência e a velocidade do *MGE-1* se ajusta permitindo dosar a contribuição de cada motor (linha em preto).

A sequência ilustra o requisito de rotação do *MGE-1* para controlar a velocidade do *MCI*. Uma vez que a velocidade desejada é atingida, a rotação do *MGE-2* e *MCI* são regularizadas para prover a potência total necessária. Note que o *MGE-2* está diretamente ligado com as rodas do veículo pela redutor de rotação e engrenamento diferencial.

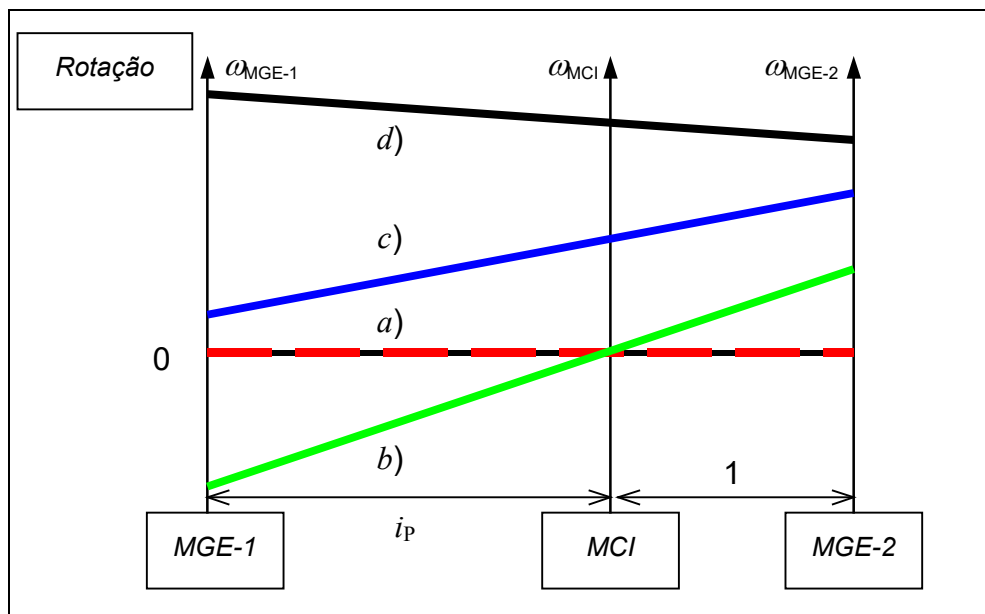


Figura 34 – Combinação de Rotação dos Motores

Existem diferentes estratégias de controle para modos de operação na topologia série-paralelo relacionados com o fluxo de energia ao longo do trem-de-força híbrido. Os principais modos de operação são:

- a) Propulsão Elétrica: ocorre na partida em baixas velocidades ou eventos em que a demanda de potência seja pequena não sendo necessária a operação do *MCI*. Nesse modo, a bateria fornece energia para o *MGE-2*, que é o único responsável por propulsionar o veículo. O *MGE-1* se ajusta para manter a rotação do *MCI* nula.
- b) Propulsão híbrida com recirculação de energia: nesse modo o *MCI* fornece toda a energia necessária para propulsionar o veículo e não existe descarga ou recarga da bateria. Uma parcela do torque do *MCI* é transmitida às rodas mecanicamente e outra parcela é direcionada ao *MGE-1*, que funciona como gerador para controlar a rotação do *MCI*. A energia produzida pelo *MGE-1* é então usada pelo *MGE-2* para tração. Dessa forma, existe recirculação de energia no sistema, o que faz essa configuração não ser muito eficiente em ciclos de condução em rodovia ou quando o *MCI* é o único responsável pela propulsão.

DINÂMICA VEÍCULAR

- c) Propulsão híbrida com carregamento da bateria: semelhante ao caso anterior, mas parte da potência gerada pelo *MGE-1* é usada para recarregar a bateria. Pode ocorrer quando estado de carga (*state of charge – SOC*) da bateria está abaixo do mínimo determinado pela estratégia de controle.
- d) Propulsão híbrida com descarga da bateria: também semelhante ao caso anterior, com a diferença de que o *MCI* e a bateria fornecem energia para a propulsão no *MGE-2*. O *MCI* transmite sua potência às rodas e o utiliza adicionalmente a energia proveniente do *MGE-1* e da bateria no *MGE-2* para tração. Ocorre quando a demanda de potência nas rodas é superior à potência máxima ou ótima do *MCI*.
- e) Recuperação de energia de frenagem: ocorre quando o *MGE-2* absorve toda a energia de frenagem ou parte dela em conjunto com o freio mecânico. Nesse caso, o torque do *MGE-2* é negativo para rotações positivas ou positivo para rotações negativas.
- f) Recarga da bateria em repouso: o *MGE-1* pode ligar o motor de combustão mesmo com o veículo em repouso, para que haja recarga da bateria com o *MGE-1* funcionando como gerador. Isso pode ser necessário quando a bateria é lentamente descarregada devido à corrente elétrica parasita.

As curvas de potência dos motores a combustão interna e motores elétricos (principal e auxiliar) estão apresentadas na Figura 35.

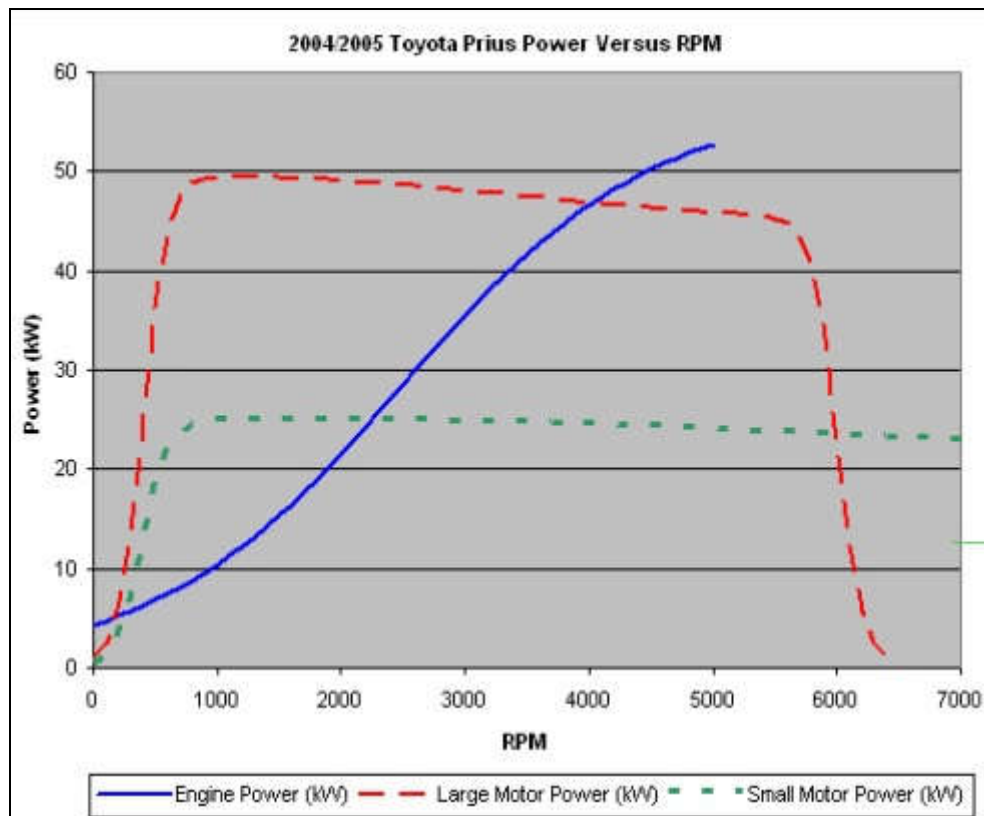


Figura 35 – Curva de Potencia dos Motores (Toyota Prius)

As curvas de torque dos motores a combustão interna e motores elétricos (principal e auxiliar) estão apresentadas na Figura 36.

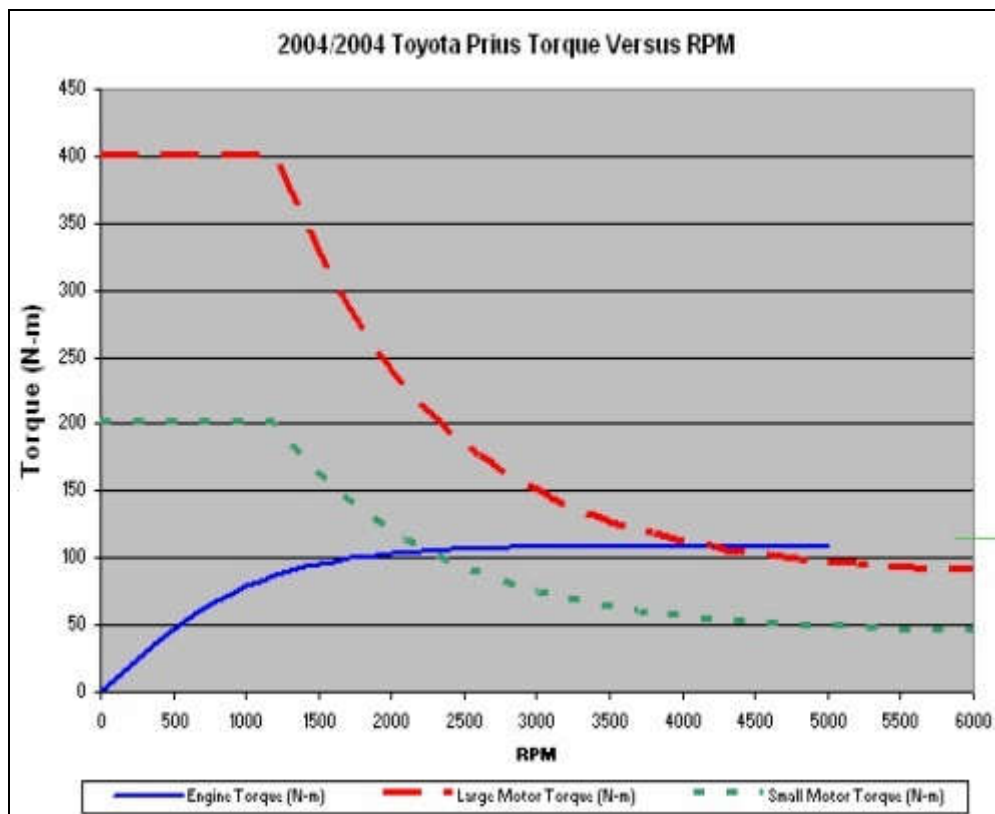


Figura 36 – Curva de Torque dos Motores (Toyota Prius)

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARBOSA, R. S (2012) Vehicle Vibration Response Subjected to Longwave Measured Pavement Irregularity. *Journal of Mechanical Engineering and Automation* 2012, 2(2): 17-24, DOI: 10.5923/j.jmea.20120202.04.
2. BARBOSA, R. S (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas – ABCM*, Vol. 33, No. 3, pp. 302-307.
3. BARBOSA, R. S (2011) Vehicle Dynamic Safety in Measured Rough Pavement. *Journal of Transportation Engineering*, ©ASCE, DOI: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000216, Vol. 137, No. 5, pp. 305-310.
4. BARUH, H. (1999) *Analytical Dynamics*. Rutgers University, Editora McGraw-Hill, pp. 718.
5. RAO, S. (2009) *Vibrações Mecânicas*. Editora Pearson Prentice Hall, 4º Ed. pp. 424.
6. GENTA, G. (1997) *Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation*. Publisher: World Scientific Publishing Company. p. 556.
7. RILL, G. CASTRO, A. A. (2020) *Road Vehicle Dynamics Fundamentals and Modeling with MATLAB® Second Edition*. CRC Press, ISBN: 9780367199739.
8. FRANÇA, L. N. F. Matsumura, A. Z. (2011) *Mecânica Geral*. Editora Blucher, 3º Ed. pp. 316.
9. TRINDADE, I. M. (2015) *Modelagem Controle e Otimização de Consumo de Combustível de um Veículo Híbrido Elétrico Série-Paralelo*. Dissertação Mestrado, USP, pp. 93.

10. VIANNA J. P. A. (2019) Controle de Estabilidade para Veículos com Motores In-Wheel. Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, Poli-USP, p. 117.

10. ANEXO A – EQUACIONAMENTO MODELO LATERAL

DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DO MODELO LATERAL

Tomando a transformada de *Laplace* do sistema de equações diferenciais completas com 4 graus de liberdade (z_1, z_2, z_3, θ) excitada pela base $(u = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi))$ do modelo lateral (modelo sagital ou transversal de meio carro), conforme apresentado no item 4, e assumindo condições iniciais nulas, obtêm-se as seguintes expressões:

$$[m_1 s^2 + (c_p + c_1)s + (k_p + k_1)]Z_1(s) - (c_1 s + k_1) Z_3(s) - (ac_1 s + ak_1) \Theta(s) = (c_p s + k_p)U_1(s) \quad (61)$$

$$[m_2 s^2 + (c_p + c_2)s + (k_p + k_2)]Z_2(s) - (c_2 s + k_2) Z_3(s) + (bc_2 s + bk_2) \Theta(s) = (c_p s + k_p)U_2(s) \quad (62)$$

$$[m_3 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]Z_3(s) - (c_1 s + k_1) Z_1(s) - (c_2 s + k_2) Z_2(s) + [(ac_1 - bc_2)s + (ak_1 - bk_2)] \Theta(s) = F_z(s) \quad (63)$$

$$[J_G s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2)s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \Theta(s) - a(c_1 s + k_1) Z_1(s) + b(c_2 s + k_2) Z_2(s) + [a(c_1 s + k_1) - b(c_2 s + k_2)] Z_3(s) = Mt(s) \quad (64)$$

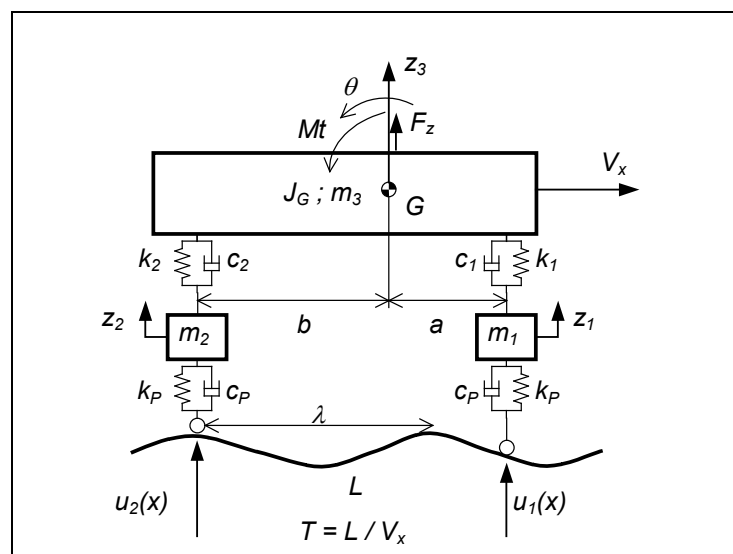


Figura 37 – Modelo com 4GL excitado pela base

DINÂMICA VEÍCULAR

Utilizando os seguintes identificadores para cada polinômio em s , obtêm-se para cada equação:

$$\begin{aligned}
 A &= [m_1 s^2 + (c_p + c_1)s + (k_p + k_1)] \\
 AA &= (c_1 s + k_1) ; AD = (ac_1 s + ak_1) ; AU = (c_p s + k_p) \\
 AZ_1(s) - AA Z_3(s) - AD \Theta(s) &= AU U_1(s)
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 B &= [m_2 s^2 + (c_p + c_2)s + (k_p + k_2)] \\
 BA &= (c_2 s + k_2) ; BD = (bc_2 s + bk_2) ; BU = (c_p s + k_p) \\
 BZ_2(s) - BA Z_3(s) + BD \Theta(s) &= BU U_2(s)
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
 C &= [m_3 s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)] \\
 CA &= (c_1 s + k_1) ; CB = (c_2 s + k_2) \\
 CD &= [(ac_1 - bc_2)s + (ak_1 - bk_2)] \\
 CZ_3(s) - CA Z_1(s) - CB Z_2(s) + CD \Theta(s) &= 0
 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
 D &= [J_G s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2)s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \\
 DA &= a(c_1 s + k_1) ; DB = b(c_2 s + k_2) \\
 DD &= [(ac_1 - bc_2)s + (ak_1 - bk_2)] \\
 D\Theta(s) - DA Z_1(s) + DB Z_2(s) + DD Z_3(s) &= 0
 \end{aligned} \tag{68}$$

Fazendo deliberadamente a troca de sinal de $DB = -(bc_2 s + bk_2)$ resulta em:

$$D\Theta(s) - DA Z_1(s) - DB Z_2(s) + DD Z_3(s) = 0$$

Isolando os polinômios dos graus de liberdade $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ e fazendo a substituição de $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ em $Z_3(s)$ e $\Theta(s)$ obêm-se:

$$\begin{aligned}
 Z_1(s) &= \frac{AA}{A} Z_3(s) - \frac{AD}{A} \Theta(s) + \frac{AU}{A} U_1(s) \\
 Z_2(s) &= \frac{BA}{B} Z_3(s) - \frac{BD}{B} \Theta(s) + \frac{BU}{B} U_2(s)
 \end{aligned} \tag{69}$$

DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{CA}{C} \left(\frac{AA}{A} Z_3 - \frac{AD}{A} \Theta + \frac{AU}{A} U_1 \right) + \frac{CB}{C} \left(\frac{BA}{B} Z_3 - \frac{BD}{B} \Theta + \frac{BU}{B} U_2 \right) - \frac{CD}{C} \Theta \\ \Theta &= \frac{DA}{D} \left(\frac{AA}{A} Z_3 - \frac{AD}{A} \Theta + \frac{AU}{A} U_1 \right) + \frac{DB}{D} \left(\frac{BA}{B} Z_3 - \frac{BD}{B} \Theta + \frac{BU}{B} U_2 \right) - \frac{DD}{D} Z_3 \end{aligned} \quad (70)$$

Rearranjando obtêm-se:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{CA}{C} \frac{AA}{A} - \frac{CB}{C} \frac{BA}{B} \right) Z_3 &= - \left(\frac{CA}{C} \frac{AD}{A} + \frac{CB}{C} \frac{BD}{B} + \frac{CD}{C} \right) \Theta + \frac{CA}{C} \frac{AU}{A} U_1 + \frac{CB}{C} \frac{BU}{B} U_2 \\ \left(1 + \frac{DA}{D} \frac{AD}{A} + \frac{DB}{D} \frac{BD}{B} \right) \Theta &= \left(\frac{DA}{D} \frac{AA}{A} + \frac{DB}{D} \frac{BA}{B} - \frac{DD}{D} \right) Z_3 + \frac{DA}{D} \frac{AU}{A} U_1 + \frac{DB}{D} \frac{BU}{B} U_2 \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \left(C - \frac{CA \cdot AA}{A} - \frac{CB \cdot BA}{B} \right) Z_3 &= - \left(\frac{CA \cdot AD}{A} + \frac{CB \cdot BD}{B} + CD \right) \Theta + \frac{CA \cdot AU}{A} U_1 + \frac{CB \cdot BU}{B} U_2 \\ \left(D + \frac{DA \cdot AD}{A} + \frac{DB \cdot BD}{B} \right) \Theta &= \left(\frac{DA \cdot AA}{A} + \frac{DB \cdot BA}{B} - DD \right) Z_3 + \frac{DA \cdot AU}{A} U_1 + \frac{DB \cdot BU}{B} U_2 \end{aligned} \quad (72)$$

Utilizando os seguintes identificadores adicionais para cada polinômio em s , obtêm-se

$$\begin{aligned} CAB &= \left(C - \frac{CA \cdot AA}{A} - \frac{CB \cdot BA}{B} \right) \\ ABC &= \left(\frac{CA \cdot AD}{A} + \frac{CB \cdot BD}{B} + CD \right) \\ CAU &= \frac{CA \cdot AU}{A} ; \quad CBU = \frac{CB \cdot BU}{B} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\boxed{\begin{aligned} CAB Z_3 &= -ABC \Theta + CAU U_1 + CBU U_2 \\ Z_3 &= -\frac{ABC}{CAB} \Theta + \frac{CAU}{CAB} U_1 + \frac{CBU}{CAB} U_2 \end{aligned}} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} DAB &= \left(D + \frac{DA \cdot AD}{A} + \frac{DB \cdot BD}{B} \right) \\ ABD &= \left(\frac{DA \cdot AA}{A} + \frac{DB \cdot BA}{B} - DD \right) \\ DAU &= \frac{DA \cdot AU}{A} ; \quad DBU = \frac{DB \cdot BU}{B} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\boxed{\begin{aligned} DAB \Theta &= ABD Z_3 + DAU U_1 + DBU U_2 \\ \Theta &= \frac{ABD}{DAB} Z_3 + \frac{DAU}{DAB} U_1 + \frac{DBU}{DAB} U_2 \end{aligned}} \quad (76)$$

Obtendo as funções de transferência do sistema homogêneo para as coordenadas vertical $Z_3(s)$ e angular $\Theta(s)$ isoladamente em relação à função das excitações $U_1(s)$ e $U_2(s)$ a partir dos polinômios acima rearranjados:

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= -\frac{ABC}{CAB} \Theta(s) + \frac{CAU}{CAB} U_1(s) + \frac{CBU}{CAB} U_2(s) \\ \Theta(s) &= \frac{ABD}{DAB} Z_3(s) + \frac{DAU}{DAB} U_1(s) + \frac{DBU}{DAB} U_2(s) \end{aligned} \quad (77)$$

Substituindo os valores mutuamente, obtêm-se as coordenadas vertical $Z_3(s)$ e angular $\Theta(s)$ em função das excitações $U_1(s)$ e $U_2(s)$:

$$\begin{aligned} Z_3 &= -\frac{ABC}{CAB} \left(\frac{ABD}{DAB} Z_3 + \frac{DAU}{DAB} U_1 + \frac{DBU}{DAB} U_2 \right) + \frac{CAU}{CAB} U_1 + \frac{CBU}{CAB} U_2 \\ \left(1 + \frac{ABC \cdot ABD}{CAB \cdot DAB} \right) Z_3 &= \left(\frac{CAU}{CAB} - \frac{ABC \cdot DAU}{CAB \cdot DAB} \right) U_1 + \left(\frac{CBU}{CAB} - \frac{ABC \cdot DBU}{CAB \cdot DAB} \right) U_2 \\ \left(CAB + \frac{ABC \cdot ABD}{DAB} \right) Z_3 &= \left(CAU - \frac{ABC \cdot DAU}{DAB} \right) U_1 + \left(CBU - \frac{ABC \cdot DBU}{DAB} \right) U_2 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\left(DAB + \frac{ABD \cdot ABC}{CAB} \right) \Theta = \left(\frac{ABD \cdot CAU}{CAB} + DAU \right) U_1 + \left(\frac{ABD \cdot CBU}{CAB} + DBU \right) U_2 \quad (79)$$

Criando as funções de transferência $G_{Z31}(s)$; $G_{Z32}(s)$; $G_{\Theta 1}(s)$ e $G_{\Theta 2}(s)$ obtêm-se;

$$G_{Z31}(s) = \frac{\left(CAU - \frac{ABC \cdot DAU}{DAB} \right)}{\left(CAB + \frac{ABC \cdot ABD}{DAB} \right)} \quad e \quad G_{Z32}(s) = \frac{\left(CBU - \frac{ABC \cdot DBU}{DAB} \right)}{\left(CAB + \frac{ABC \cdot ABD}{DAB} \right)} \quad (80)$$

DINÂMICA VEÍCULAR

$$G_{\Theta_1}(s) = \frac{\left(\frac{ABD \cdot CAU}{CAB} + DAU \right)}{\left(DAB + \frac{ABD \cdot ABC}{CAB} \right)} \quad e \quad G_{\Theta_2}(s) = \frac{\left(\frac{ABD \cdot CBU}{CAB} + DBU \right)}{\left(DAB + \frac{ABD \cdot ABC}{CAB} \right)} \quad (81)$$

Considerando que as entradas $U_1(s)$ e $U_2(s)$ sejam similares ($U(s)$) mas defasadas (T):

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= \left(G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{-Ts} \right) \cdot U(s) \\ \Theta(s) &= \left(G_{\Theta_1}(s) + G_{\Theta_2}(s) \cdot e^{-Ts} \right) \cdot U(s) \end{aligned} \quad (82)$$

ou finalmente na forma de ganho vertical e angular do chassi ($Z_3(s)$ e $\Theta(s)$) em relação a entrada ($U(s)$) obtêm-se:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Z_3(s)}{U(s)} &= G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{(-ik)} \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= G_{\Theta_1}(s) + G_{\Theta_2}(s) \cdot e^{(-ik)} \end{aligned}} \quad (83)$$

onde: $k = \omega \cdot L / Vel$ e $L = (a + b)$. Note que as funções estão no domínio s complexo sendo necessário o tratamento da funções como números complexos. Tipicamente o primeiro modo de vibrar com frequência mais baixa é chamado do **Galope Traseiro** (*rear end bounce*) está associado com o movimento vertical Z_3 . O segundo modo de vibrar chamado de **Arfagem Dianteira** (*front end pitch*) está associado com movimento angular Θ .

As funções de transferência em s podem ser avaliados numericamente numa faixa de frequências, utilizando pacotes numéricos, onde pode-se observar o comportamento da resposta em frequência de galope ($Z_3(s)$) e arfagem ($\Theta(s)$) do veículo em função da entrada $U(s)$.

Para elaborar os códigos de cálculo pode-se utilizar da função: ***tf (num, den)*** disponíveis nos softwares *Octave* ou *MatLab*, que geram os polinômios das funções de transferência na forma de numerador (*num*) e denominador (*den*).