

NOTAS DE AULA

**EQUAÇÕES DINÂMICAS DE
MOVIMENTO ESPACIAL PARA
UM CORPO RÍGIDO**

ROBERTO SPINOLA BARBOSA

1 MOTIVAÇÃO

Um veículo tem seu movimento descrito de forma geral quando tem sua posição, atitude e correspondentes variações, expressas no espaço tridimensional (\mathcal{R}^3). A obtenção das equações dinâmicas de movimento espacial de um corpo rígido pelo método de *Newton-Euler* requer a definição adequada de sistemas de referencia para descrição dos movimentos e forçamentos externos.

Para o movimento de translação do veículo, o referencial fixo (*inertial frame*) é suficiente para a descrição das equações de movimento (*Teorema da Resultante*). É conveniente entretanto, expressar o movimento angular que descreve a atitude do veículo (*Teorema da Quantidade de Movimento Angular*) em um referencial móvel auxiliar solidário ao corpo (*body fix*). Neste caso a distribuição de massa do corpo (matriz de inércia) torna-se constante. Os momentos das forças externas atuantes sobre o veículo, ficam facilmente descritos no referencial móvel. As forças externas que agem sobre o corpo são aplicadas em pontos específicos do veículo. Portanto sua descrição conveniente também será no referencial móvel.

Existe uma matriz de rotação que permite expressar vetores em outro sistema de coordenadas. Esta transformação permite a escolha conveniente do sistema de coordenadas para a descrição de grandezas vetoriais como forças e velocidade angular e a correspondente transformação para outro sistema de coordenadas, que neste caso será em relação ao referencial fixo. Estes tópicos serão abordados adiante neste texto.

A metodologia de modelagem e integração numérica das equações diferenciais de movimento é abordada e o fluxograma de etapas do processo são apresentados.

2 POSIÇÃO, VELOCIDADE E REFERENCIAIS

A posição do centro de massa G de um corpo rígido, expresso no referencial fixo (ou inercial) com sistema de coordenadas $OXYZ$, conforme apresentado na Figura 1, é dado pelo vetor de posição em relação a origem O do sistema de coordenadas cartesianas descrito por:

$$\vec{r} = (G - O) = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \quad (1)$$

onde $\vec{I}; \vec{J}$ e \vec{K} são os versores tri-ortogonais unitários do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$.

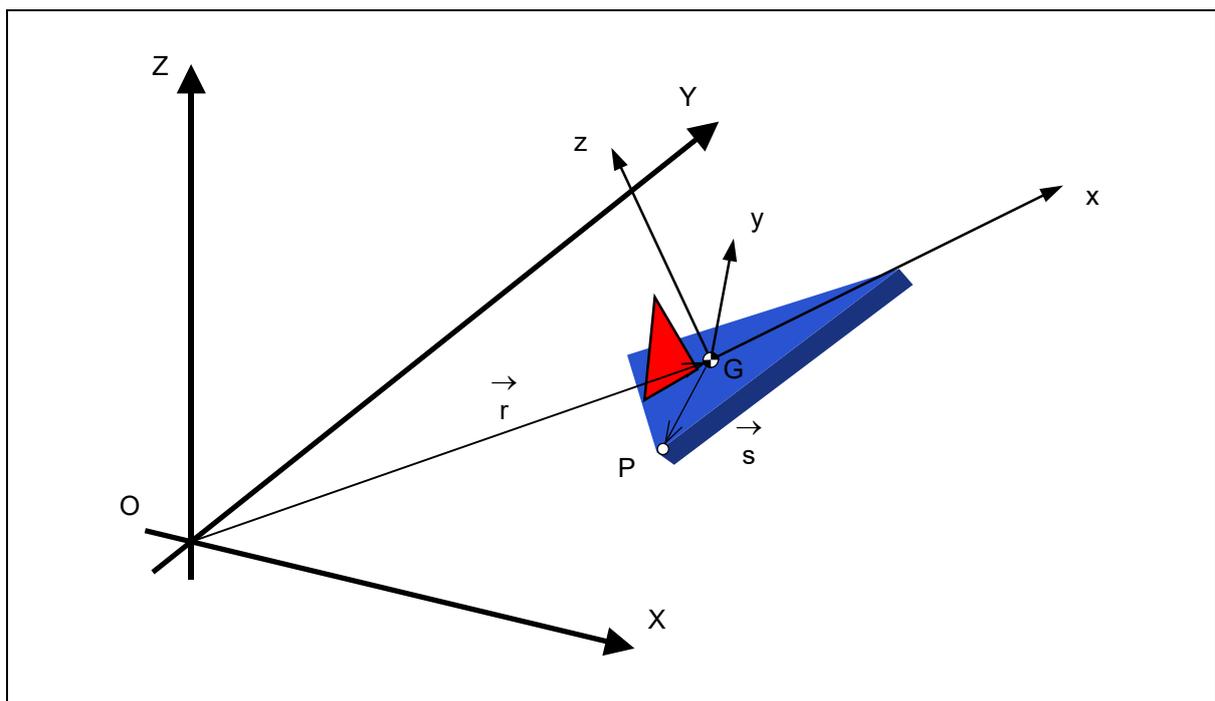


Figura 1 – Referenciais Fixo OXYZ e móvel Gxyz

De imediato, a velocidade do centro de massa é obtida pelo diferencial em relação ao tempo do vetor posição absoluta:

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (X \vec{I} + Y \vec{J} + Z \vec{K}) = \frac{d}{dt} X \vec{I} + \frac{d}{dt} Y \vec{J} + \frac{d}{dt} Z \vec{K} + X \frac{d}{dt} \vec{I} + Y \frac{d}{dt} \vec{J} + Z \frac{d}{dt} \vec{K} \quad (2)$$

No sistema de coordenadas fixo $OXYZ$ não há variação temporal dos versores resultando simplesmente em:

$$\vec{V}_G = \dot{X} \vec{I} + \dot{Y} \vec{J} + \dot{Z} \vec{K} \quad (3)$$

Em um referencial móvel auxiliar solidário ao corpo, conforme apresentado na Figura 1, que por conveniência pode ser coincidente com o centro de massa G , permite descrever a localização de um ponto P qualquer do corpo, em sua posição relativa a G por:

$$\vec{s} = (P - G) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (4)$$

onde \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} são os versores tri-ortogonais unitários do sistema de coordenadas móvel $Gxyz$.

Portanto a posição do ponto P em relação à origem O e descrita no referencial fixo é dada por:

$$(P - O) = (G - O) + (P - G) = \vec{r} + [R] \vec{s} \quad (5)$$

onde $[R]$ é a matriz de rotação que correlaciona a atitude do referencial móvel $Gxyz$ solidário ao corpo, medida em relação ao sistema de coordenadas fixo $OXYZ$.

O referencial móvel auxiliar pode ser alinhado com os eixos principais de inércia do corpo e sendo solidário a ele, a matriz de inércia, descrita neste referencial permanece constante. Adota-se o eixo x alinhado com o plano de simetria longitudinal de um veículo. Caso o corpo seja simétrico os produtos de inércia serão nulos. O eixo z será perpendicular ao plano do corpo (para cima). Por decorrência o eixo y na direção lateral aponta para a esquerda quando observado de cima, conforme mostrado na Figura 1.

3 ATITUDE E VELOCIDADE ANGULAR

A atitude do corpo e portanto do referencial móvel $Gxyz$ em relação ao referencial fixo $OXYZ$, pode ser descrita pelos ângulos de *Euler*, conforme apresentado na Figura 2. Os ângulos de atitude são:

- Ângulo de Direção ψ (ângulo *psi* em torno do eixo Z fixo - azimute);
- Ângulo de Elevação θ (ângulo *teta* em relação ao plano OXY em torno do eixo J' rodado de ψ);
- Ângulo de Inclinação ϕ (ângulo *phi* em torno do eixo x do referencial móvel);

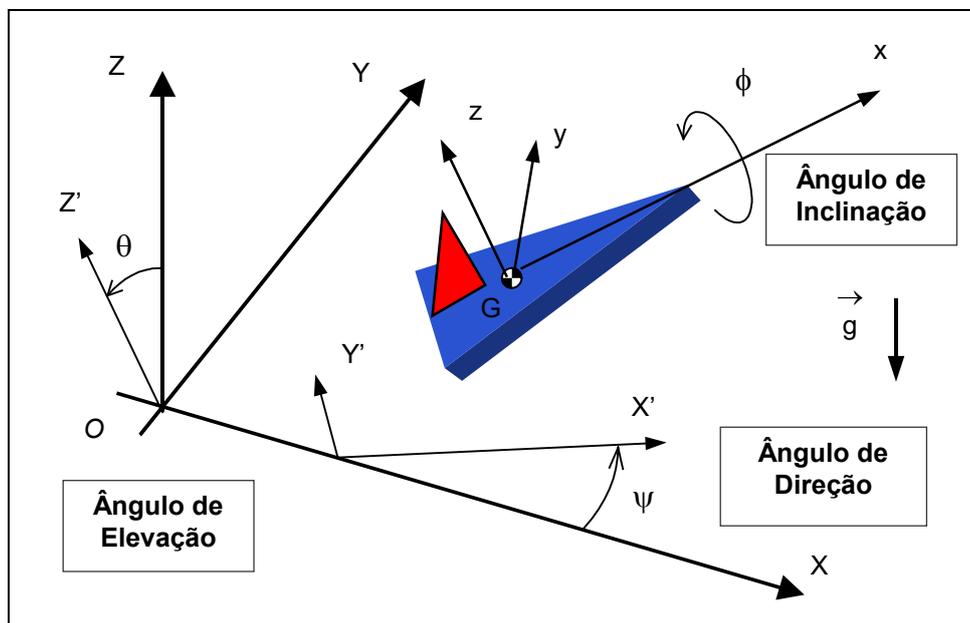


Figura 2 – Ângulos de Atitude (*Euler*)

Um vetor (posição, força ou velocidade angular) pode ser descrito em outro referencial utilizando a matriz de rotação composta por três rotações simples sucessivas.

$$\vec{S} = [R]\vec{s} \quad \text{onde} \quad [R] = [R_\phi] \cdot [R_\theta] \cdot [R_\psi] \quad (6)$$

3.1 Matriz de Rotação Angular

A matriz de rotação $[R]$ é obtida por uma sequência de três rotações simples sucessivas. Adotando a sequência 3-2-1 (*Nasa Standard Airplane*) dentre as 12 combinações possíveis (*Baruh*, p. 419) a primeira rotação é descrita pela matriz de rotação R_ψ de orientação \vec{K} conforme o ângulo de direção ψ . A segunda rotação R_θ de orientação \vec{J}' correspondendo a elevação de ângulo θ , em relação ao plano \mathbf{OXY} , de onde se obtêm:

$$\begin{Bmatrix} \vec{I}' \\ \vec{J}' \\ \vec{K}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \vec{I}'' \\ \vec{J}'' \\ \vec{K}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I}' \\ \vec{J}' \\ \vec{K}' \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Considerando a rotação própria em torno do eixo longitudinal (\mathbf{x}), obtêm-se a matriz R_ϕ da inclinação do corpo do ângulo ϕ em torno de seu eixo longitudinal. Desta forma, obtêm-se as seguintes matrizes de transformação para cada rotação sucessiva:

$$[R_\psi] = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [R_\theta] = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [R_\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Finalmente a seqüência de rotações sucessivas (3-2-1) permite determinar a matriz de rotação total que relaciona os versores da base fixa (\mathbf{OXYZ}) com os versores da base móvel (\mathbf{Gxyz}) descrita por:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = [R_\phi] \cdot [R_\theta] \cdot [R_\psi] \cdot \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} ; \quad \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\}^T = [R] \{\vec{I} \quad \vec{J} \quad \vec{K}\}^T \quad \text{onde} \quad [R] = [R_\phi] \cdot [R_\theta] \cdot [R_\psi] \quad (9)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & c\theta s\phi \\ s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

Note que a matriz de rotação $[R_{(t)}]$ tem valor para cada instante de tempo t que descreve a atitude instantânea do corpo rígido em seu movimento no espaço. A operação inversa devido as propriedade de ortogonalidade da matriz de rotação (*Baruh*, p. 348) resulta, para expressar no referencial fixo em:

$$\{\vec{I} \quad \vec{J} \quad \vec{K}\}^T = [R]^T \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\}^T \quad (11)$$

onde $[R]^{-1} = [R]^T$

Assim a velocidade pode ser expressa no referencial móvel (*body fix*) como:

$$\vec{V}_G = \dot{X} \vec{I} + \dot{Y} \vec{J} + \dot{Z} \vec{K} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_G^B = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_G^B = [R] \cdot \vec{V}_G \quad (12)$$

tal que: $\{\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}\}^T = [R] \cdot \{\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z}\}^T$

Obs.: alguns autores utilizam as letras $\{u \quad v \quad w\}^T$ para descrever as componentes do vetor velocidade translacional, expressas no sistema de coordenadas relativo **Oxyz** (*SAE*).

3.2 Velocidade Angular

A velocidade angular $\vec{\omega}$ do corpo, conforme mostrado em vermelho na Figura 3, pode ser expressa no referencial móvel $Gxyz$ por suas componentes:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad \text{ou} \quad \{\omega\} = \{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}^T \quad (13)$$

com as seguintes identificação das componentes:

- Velocidade angular de rolagem: $\omega_x \vec{i}$,
- Velocidade angular de arfagem: $\omega_y \vec{j}$ e
- Velocidade angular de guinada: $\omega_z \vec{k}$.

Obs.: alguns autores utilizam as letras $\{p \quad q \quad r\}^T$ para expressar as componentes do vetor velocidade angular no referencial relativo.

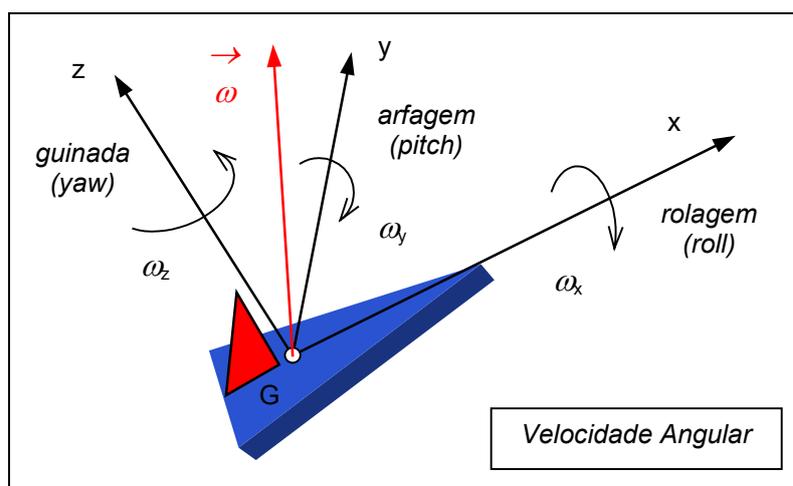


Figura 3 – Velocidade Angular Expressa no Referencial Móvel

A velocidade angular do corpo também pode ser expressa utilizando a variação temporal dos ângulos de *Euler* na convenção *NED* (*north - east - down*) no referencial fixo **OXYZ**. Assim a variação temporal da atitude tem as seguintes componentes:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{J}' + \dot{\psi} \vec{K} \quad (14)$$

onde:

- Velocidade de variação da direção ou **guinada** (*yaw*)- $\dot{\psi} \vec{K}$,
- Velocidade de variação da elevação ou **arfagem** (*pitch*) - $\dot{\theta} \vec{J}'$ e
- Velocidade de variação da inclinação ou **rolagem** (*roll*) - $\dot{\phi} \vec{i}$.

Os versores podem ser facilmente descritos quando $\psi = 0$ por:

$$\vec{K} = -s\theta \vec{i} + c\theta s\phi \vec{j} + c\theta c\phi \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{J}' = c\phi \vec{j} - s\phi \vec{k} \quad (15)$$

substituindo na expressão anterior e rearranjando na forma matricial obtêm-se:

$$\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \dot{\phi} \vec{i} + \dot{\theta} (c\phi \vec{j} - s\phi \vec{k}) + \dot{\psi} (-s\theta \vec{i} + c\theta s\phi \vec{j} + c\theta c\phi \vec{k}) \quad (16)$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\phi} - s\theta \dot{\psi} \\ \omega_y = c\phi \dot{\theta} + c\theta s\phi \dot{\psi} \\ \omega_z = -s\phi \dot{\theta} + c\theta c\phi \dot{\psi} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases} \quad (17)$$

Portanto haverá uma matriz de transformação das velocidades angulares $[T]$ que correlaciona os vetores de velocidades angulares expressas nos dois referenciais (*Baruh*, 375) tal que:

$$\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}^T = [T] \{\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}\}^T \quad \text{onde} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

Note que a matriz de transformação $[T]_{(t)}$ tem valor para cada instante de tempo quando descreve a variação da atitude instantânea do corpo rígido.

$$\{\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}\}^T = [T]^{-1} \{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}^T \quad \text{onde} \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & -c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

Obs: alguns autores descrevem as componentes de velocidade angular expressa no referencial móvel como: $\{p \quad q \quad r\}^T$ onde $\omega_x = p$; $\omega_y = q$ e $\omega_z = r$.

4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A obtenção das equações diferenciais de movimento é realizada através da aplicação do Teorema da Resultante (*Newton*) e Teorema da Quantidade de Movimento Angular (*Euler*). Por hipótese será considerado que o corpo rígido é simétrico, tem massa invariante e não tem partes internas em rotação. A rotação e curvatura da terra serão desprezados.

4.1 Graus de Liberdade Independentes

Para o corpo livre no espaço são suficientes seis graus de liberdade para sua completa descrição de posição e atitude. Os graus de liberdade de translação (X , Y e Z) e rotação (ϕ , θ e ψ) que formam o vetor de estados do sistema, expressos em referencial inercial (fixo) e ângulos de *Euler* são:

$$y = \{X \quad Y \quad Z \quad \phi \quad \theta \quad \psi\}^T \quad (20)$$

Aplicando o Teorema da Resultante (**TR**), da segunda Lei de *Newton* ao corpo rígido, obtém-se a seguinte equação vetorial de movimento:

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_i^{ext} \quad (21)$$

Para a aplicação do **TR** faz-se necessário portanto a determinação da velocidade e aceleração absoluta do centro massa **G**. Derivando em relação ao tempo as expressões da posição e velocidade do centro de massa, ambas expressas no referencial fixo **OXYZ**, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (G - O) = \vec{V}_G - \vec{V}_O = \vec{V}_G = \dot{X} \vec{I} + \dot{Y} \vec{J} + \dot{Z} \vec{K} \quad (22)$$

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt} \vec{V}_G = \frac{d}{dt} (\dot{X} \vec{I} + \dot{Y} \vec{J} + \dot{Z} \vec{K}) = \ddot{X} \vec{I} + \ddot{Y} \vec{J} + \ddot{Z} \vec{K} \quad (23)$$

4.2 Forças Externas

As forças externas agentes sobre o corpo rígido são mais facilmente descritas no referencial móvel solidário ao veículo. Em geral as forças são função da posição relativa de pontos específicos e da atitude dos corpos que produz movimento relativo (ex. forças horizontais de contato de uma roda, forças de sustentação e arraste de um perfil de asa, etc.) e do tempo, conforme ilustrado na Figura 4:

$$\vec{F}_i^{rel} = f(\vec{s}_i, [R_{(t)}], t) \quad \vec{R}^{rel} = \sum \vec{F}_i^{rel} \quad (24)$$

Para a aplicação das forças nas equações é necessário projetar a resultante das forças no referencial fixo, pré-multiplicando pela matriz de rotação **[R]** da seguinte forma:

$$\{R_x \quad R_y \quad R_z\}^T = [R]^T \cdot \{R_x^{rel} \quad R_y^{rel} \quad R_z^{rel}\}^T \quad (25)$$

Alguns tipos de força são proporcionais a velocidade de escorregamento (contato rolamento). Neste caso pode-se utilizar diretamente a velocidade de escorregamento do ponto C de contato expressa no referencial fixo e multiplicada pela rigidez $\{k_x \ k_y \ k_z\}$ em cada direção:

$$\{R_{Cx} \ R_{Cy} \ R_{Cz}\}^T = \{k_x \dot{X}_C \ k_y \dot{Y}_C \ k_z \dot{Z}_C\}^T \quad (26)$$

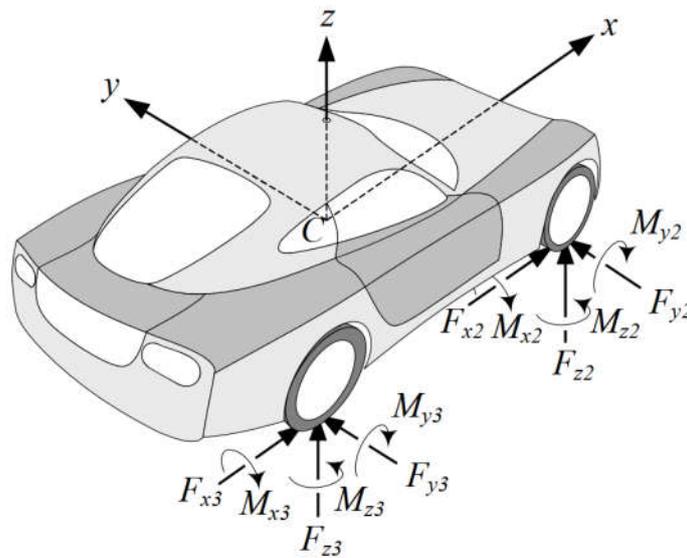


Figura 4 – Diagrama de Forças e Momentos Externos (Fonte: Jazar, 2008)

4.3 Equações do Movimento de Translação

Utilizando o Teorema da Resultante (**TR**) obtêm-se finalmente, para a resultante das forças externas \vec{R} e ação gravitacional (tudo expresso no referencial fixo) a seguinte equação vetorial:

$$\boxed{m \vec{a}_G = \vec{R} + m \vec{g}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{X} = R_x^{ext} / m \\ \dot{Y} = R_y^{ext} / m \\ \dot{Z} = R_z^{ext} / m - g \end{cases} \quad (27)$$

4.4 Posição do Veículo

Para um sistema de equações não lineares, a posição do corpo rígido pode ser calculada por um processo numérico de integração dupla da aceleração expressa no referencial fixo. Conhecidas as condições iniciais de velocidade e posição, expressas no referencial fixo, e integradas ao longo do tempo (entre t_i e t_f), obtêm-se a posição absoluta do corpo rígido conforme as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \end{Bmatrix}^T &= \int_{t_i}^{t_f} \begin{Bmatrix} \ddot{X} & \ddot{Y} & \ddot{Z} \end{Bmatrix}^T dt + \begin{Bmatrix} \dot{X}_0 & \dot{Y}_0 & \dot{Z}_0 \end{Bmatrix}^T \quad e \\ \begin{Bmatrix} X & Y & Z \end{Bmatrix}^T &= \int_{t_i}^{t_f} \begin{Bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \end{Bmatrix}^T dt + \begin{Bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \quad (28)$$

Estes valores temporais do vetor de posição, descrevem a localização temporal entre t_i e t_f do veículo no referencial fixo $OXYZ$.

5 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

O teorema da Quantidade de Movimento Angular (**TQMA**) aplicada a um corpo rígido e expressa no referencial móvel $Gxyz$, fornece as equações diferenciais de movimento angular do corpo:

$$\frac{d}{dt} \{ \vec{H}_O \} + (G-O) \wedge m \vec{a}_O = \sum \vec{M}_O^{ext} \quad (29)$$

Utilizando o referencial auxiliar móvel $G \vec{i} \vec{j} \vec{k}$ e aplicando o **TQMA** em relação ao pólo G (eixos centrais) tem-se a matriz de inércia constante e o termo de pólo acelerado nulo, resultando na forma matricial em:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum \vec{M}_O^{ext} \quad (30)$$

A variação temporal do momento da quantidade de movimento angular para o referencial móvel solidário ao corpo (portanto matriz de inércia constante) é dado por:

$$\{\dot{H}_O\} = \frac{d}{dt} \{[J_G] \cdot \{\omega\}\} = [J_G] \frac{d}{dt} \{\omega\} + [J_G] \frac{d}{dt} \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\} \cdot \{\omega\} \quad (31)$$

A variação temporal da atitude do corpo no espaço (e portanto dos versores do referencial auxiliar móvel) é descrito por sua velocidade angular $\vec{\omega}$ e suas componentes conforme apresentado na Figura 3. Assim considerando que o corpo tem velocidade angular $\vec{\omega}$ conforme mostrado na Figura 5, sua expressão no referencial móvel $Oxyz$ é dado por:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (32)$$

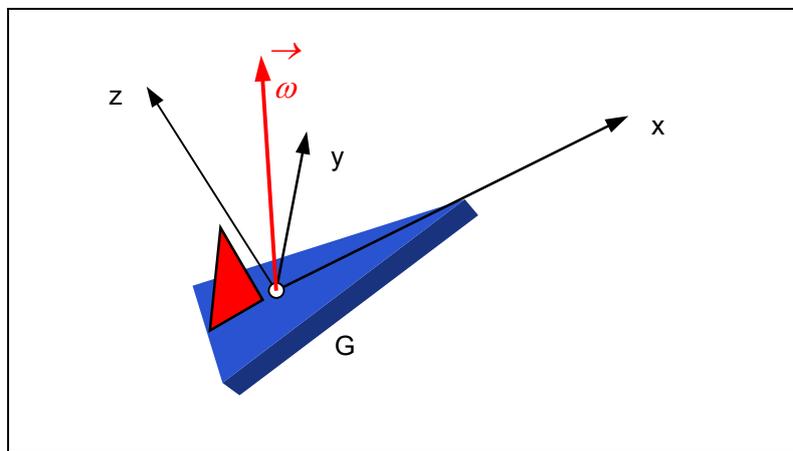


Figura 5 – Velocidade angular (expressa no referencial móvel)

Note que, no caso do referencial móvel ser solidário ao corpo, as variações angulares dos versores devido ao movimento de arrastamento deste referencial, resultam em:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{i} = \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k},$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{j} = \omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i}, \quad (33)$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{k} = -\omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{i}.$$

Rearranjando obêm-se a matriz anti-simétrica (*skew simetric matrix*) $[\tilde{\omega}]$ conforme:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_z \vec{j} - \omega_y \vec{k} \\ \omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i} \\ \omega_y \vec{i} - \omega_x \vec{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Resultando de forma compacta em:

$$\boxed{[J]_G \{\alpha\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}] \cdot [J]_G \{\omega_{abs}\} = \{M_G^{ext}\}} \quad (35)$$

ou na forma matricial considerando o corpo com simetria e eixos principais de inércia, submetido a momento de forças em relação ao pólo coincidente com o centro de massa G :

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{G1} \\ M_{G2} \\ M_{G3} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ou na forma vetorial:

$$\begin{aligned} & (J_{G1}\alpha_1 + J_{G3}\omega_2\omega_3 - J_{G2}\omega_2\omega_3)\vec{i} + (J_{G2}\alpha_2 + J_{G1}\omega_3\omega_1 - J_{G3}\omega_3\omega_1)\vec{j} + \\ & (J_{G3}\alpha_3 + J_{G2}\omega_1\omega_2 - J_{G1}\omega_1\omega_2)\vec{k} = \vec{M}_G \end{aligned} \quad (37)$$

e separando as componentes da equação vetorial em cada direção expressa no referencial móvel $Oxyz$, obtêm-se as expressões de *Euler*:

$$\begin{cases}
 J_{G1} \alpha_1 + (J_{G3} - J_{G2}) \omega_2 \omega_3 = M_{G1}^{ext} \\
 J_{G2} \alpha_2 + (J_{G1} - J_{G3}) \omega_3 \omega_1 = M_{G2}^{ext} \\
 J_{G3} \alpha_3 + (J_{G2} - J_{G1}) \omega_1 \omega_2 = M_{G3}^{ext}
 \end{cases} \quad (38)$$

5.1 Equações do Movimento de Rotação

Finalmente as equações diferenciais de movimento de translação e rotação para o corpo rígido expressas no referencial fixo $OXYZ$ são:

$$m \vec{a}_G = \vec{R} \quad (39)$$

$$[J]_G \{\dot{\omega}\}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge [J]_G \{\omega\} = \vec{M}_G^{ext} \quad (40)$$

5.2 Momentos das Forças Externas

O momento decorrente do sistema de forças aplicado ao veículo, pode ser obtido quando a resultante for aplicada no mesmo pólo onde o momento será calculado (conceito de sistema equivalente de forçamentos). As forças externas agentes sobre o corpo rígido são mais facilmente descritas no referencial móvel solidário ao veículo (forças horizontais de contato de uma roda, forças de sustentação e arraste de um perfil de asa, etc.) conforme ilustrado na Figura 4. Portanto o momento das forças externas aplicadas em pontos específicos do veículo (\vec{s}_i) são função da posição relativa devido a atitude ($R_{(t)}$) instantânea (t). Então o momento em relação ao pólo G pode ser determinado como:

$$\vec{F}_i^{rel} = f(\vec{s}_i, [R_{(t)}], t) \quad ; \quad \vec{M}_G^i = (P_i - G) \wedge \vec{F}_i^{rel} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_G = \sum (P_i - G) \wedge \vec{F}_i^{rel} \quad (41)$$

Neste caso é necessário também reduzir as forças ao sistema equivalente com resultante $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ aplicada no mesmo pólo, ou seja no centro de massa G .

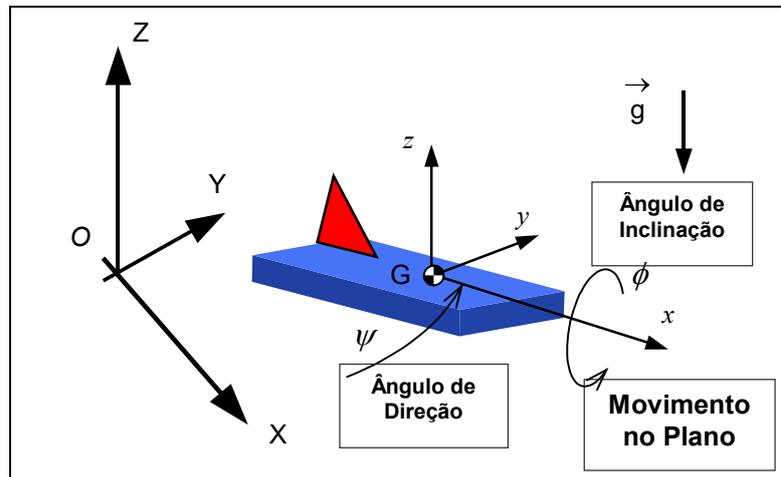


Figura 6 – Forças Externas

5.3 Atitude do Veículo

Há interesse apenas na atitude do corpo rígido descrita pelos ângulos de *Euler* expressas no referencial fixo. A integração da aceleração angular expressa no referencial móvel resulta na velocidade angular neste mesmo referencial. Pode-se transformar a velocidade angular $\vec{\omega}$ expressa no referencial móvel para a variação temporal dos ângulos de *Euler* (referencial fixo).

Conhecidas as condições iniciais de velocidade angular e integrando a aceleração angular ao longo do tempo, obtêm-se as velocidades angulares. Transformando a velocidade angular em variação temporal dos ângulos de *Euler* e integrando novamente, conhecidas as posições angulares, obtêm-se a atitude do corpo rígido expressa no referencial fixo:

$$\{\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3\}^T = \int_{t_i}^{t_f} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\}^T dt + \{\omega_1^0 \quad \omega_2^0 \quad \omega_3^0\}^T$$

$$\{\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}\}^T = [T]^T \{\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3\}^T \quad (42)$$

$$\{\phi \quad \theta \quad \psi\}^T = \int_{t_i}^{t_f} \{\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}\}^T dt + \{\phi_0 \quad \theta_0 \quad \psi_0\}^T$$

Finalmente os valores temporais do vetor de ângulos de *Euler* $\{\phi \quad \theta \quad \psi\}^T$, descrevem a atitude temporal entre os instantes t_i e t_f do veículo no referencial fixo **OXYZ** que é o local de observação do movimento de um veículo por uma observador fixo, conforme ilustrado na Figura 7.

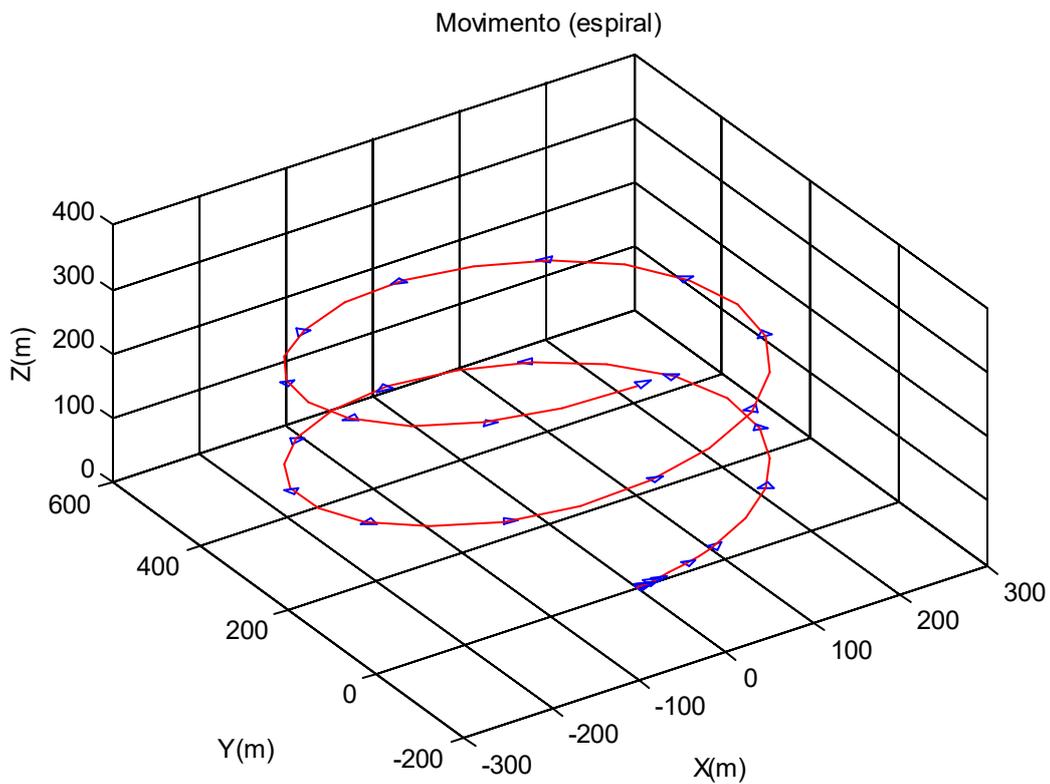


Figura 7 - Exemplo de Movimento Espiral

6 FORÇAMENTOS

As forças e os momentos externos são decorrentes dos vínculos das rodas com a pista ou eventualmente efeitos da aerodinâmica de uma asa ou da fluidodinâmica de um líquido vinculado ao corpo, além da ação gravitacional e eventuais acoplamentos externos do veículo (engates, reboques, cabos, vento, etc.).

6.1 Forças e Momentos

Para tratar as solicitações externas é conveniente utilizar o conceito de sistema equivalente de **Resultante** e **Momento** com pólo no centro de massa \mathbf{G} do corpo rígido. A resultante \mathbf{R} e o momento \mathbf{M}_G expressos no referencial móvel $\mathbf{G}xyz$ são assim obtidos:

$$\left\{ R_x^{rel} \quad R_y^{rel} \quad R_z^{rel} \right\}^T = \left\{ \sum F_x^{rel} \quad \sum F_y^{rel} \quad \sum F_z^{rel} \right\}^T \quad (43)$$

$$\left\{ M_{Gx}^{rel} \quad M_{Gy}^{rel} \quad M_{Gz}^{rel} \right\}^T = \left\{ \sum (P_i - G) \wedge F_x^{rel} \quad \sum (P_i - G) \wedge F_y^{rel} \quad \sum (P_i - G) \wedge F_z^{rel} \right\}^T \quad (44)$$

Para a utilização da resultante na equação das acelerações expressa no referencial fixo, uma rotação é necessária para projetar a resultante das forças no referencial fixo \mathbf{OXYZ} , pré-multiplicando pela matriz de rotação $[\mathbf{R}]^T$ da seguinte forma:

$$\left\{ R_X \quad R_Y \quad R_Z \right\}^T = [\mathbf{R}]^T \cdot \left\{ R_x^{rel} \quad R_y^{rel} \quad R_z^{rel} \right\}^T \quad (45)$$

As forças externas atuantes sobre o corpo rígido descritas no referencial local, móvel solidário ao veículo deve ter a **RESULTANTE** das forças descritas neste referencial projetada no referencial fixo para efeito de montagem das equações diferenciais. O **MOMENTO** das forças, determinado em relação ao pólo \mathbf{G} permanecem expressas no referencial móvel onde a equação do **TQMA** é deduzida (não há necessidade de transformação).

6.2 Força de Contato na Roda

As forças de contato de rolamento podem ser descritas no referencial móvel $Gxyz$ solidário ao veículo pois os micro-eskorregamento são determinados pela variação da posição do ponto de contato do pneu pois o solo é considerado fixo.

A força \vec{F}_{C_i} de contato de cada roda em cada ponto de contato C_i é decorrente da distância d_i em relação ao ponto P_i no veículo, velocidade de deformação da suspensão (sistema mola/amortecedor) e do micro-eskorregamento no contato considerado pontual sobre a superfície, conforme ilustrado na Figura 8, onde o veículo é representado por uma caixa (*box car*) com a suspensão de cada roda na extremidade (P_1, P_2, P_3, P_4).

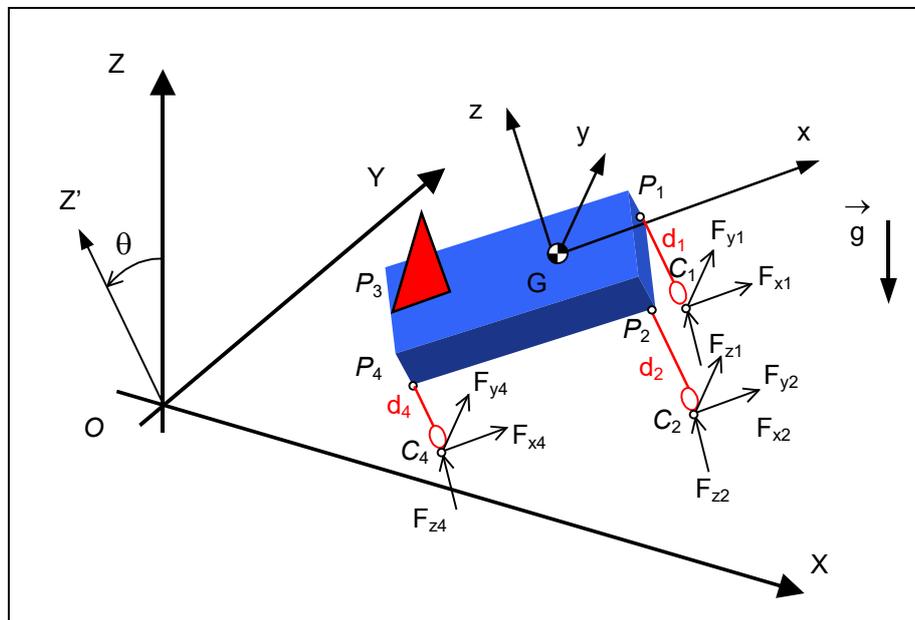


Figura 8 – Força de Contato de cada Roda

Para cada roda uma força de contato \vec{F}_{C_i} deve ser determinada. No referencial móvel $Gxyz$ solidário ao veículo, tem-se que:

$$\vec{F}_{C_i} = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad (46)$$

Considera-se que o deslocamento da mola da suspensão seja apenas perpendicular ao plano do veículo (\vec{k}), requer portanto que o movimento seja guiado por ligações rígidas transversais, conforme ilustrado na Figura 9.

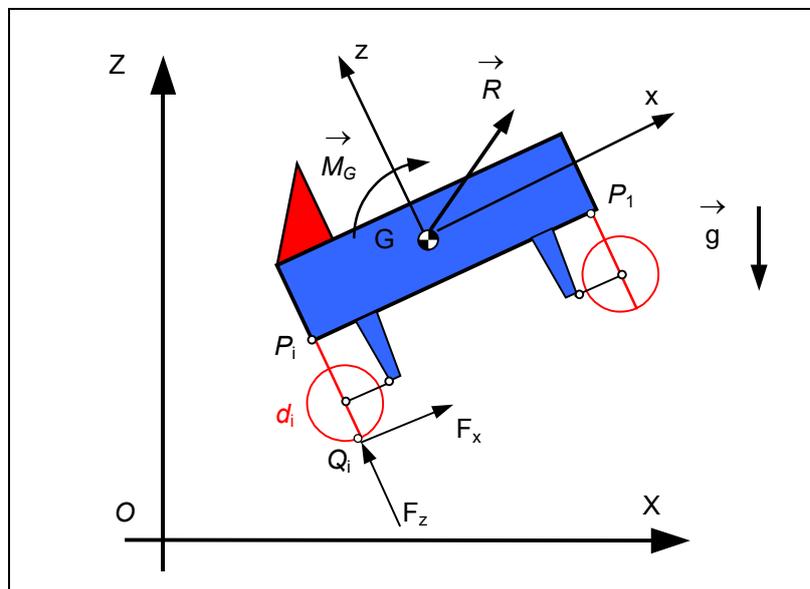


Figura 9 – Vínculo Horizontal da Suspensão

Note ainda que cada roda tem seu plano próprio devido ao ângulo de esterçamento de direção δ_i .

6.3 Localização do Ponto de Contato

Considerando que o movimento de cada roda seja independente e apenas de translação em relação ao plano do veículo seja permitida, a distância “ d_i ” do ponto “ P_i ” no corpo até o plano da pista, conforme lustrado na Figura 10, deve ser identificada. O plano do veículo pode ser descrito pelo versor normal \vec{k} da base móvel solidária ao corpo xyz . A distância do ponto “ P_i ”, onde uma das molas da suspensão está ancorada, em relação a origem O é obtida de: $(P_i - O) = (P_i - G) + (G - O)$, conforme mostrado na Figura 10.

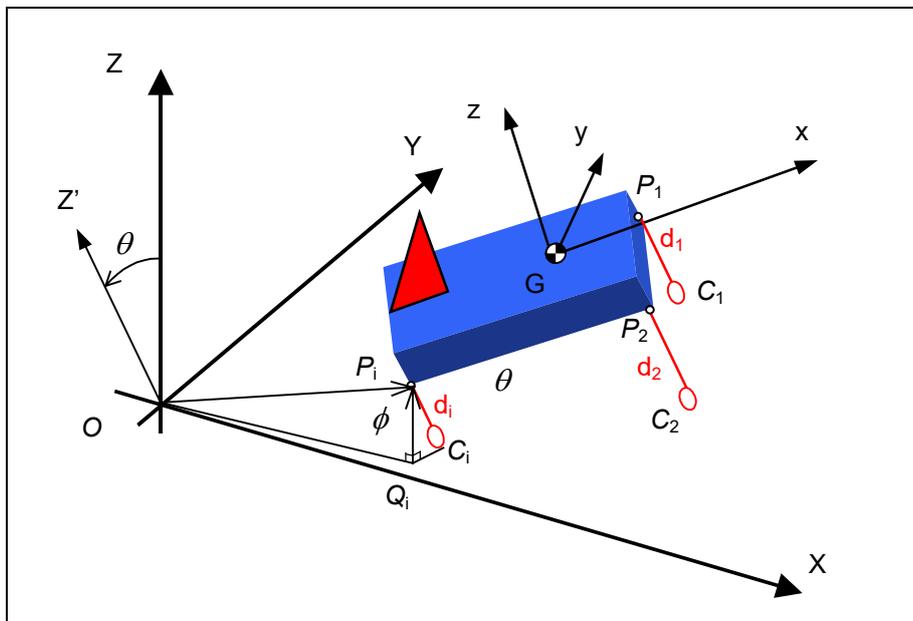


Figura 10 – Distância da Suspensão ao Solo

A distância do ponto P_i ao plano de referência XY , correspondente a cota vertical $(P_i - Q_i)$ do triângulo $\Delta P_i O Q_i$ é:

$$dist(P_i, XY) = \frac{|(P_i - O) \cdot \vec{K}|}{\|\vec{K}\|} = (P_i - Q_i) \quad (47)$$

Finalmente a distância do ponto P_i ao plano XY , mas na direção do plano do veículo (\vec{k}), correspondente a cota “ d_i ” (marcada em vermelho na Figura 10) é:

$$d_i = \frac{|dist(P_i, XY) \cdot \vec{k}|}{\|\vec{k}\|} \Rightarrow d_i = \frac{|(P_i - O) \cdot \vec{K} \cdot \vec{k}|}{\|\vec{K}\| \cdot \|\vec{k}\|} \quad (48)$$

Assim o versor \vec{k} é obtido da terceira coluna da matriz de rotação $[R]$:

$$\{\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}\}^T = [R] \{\vec{I} \ \vec{J} \ \vec{K}\}^T \Rightarrow \vec{k} = [R(:,3)] \{\vec{I} \ \vec{J} \ \vec{K}\}^T \quad (49)$$

onde $[R] = [R_\phi] \cdot [R_\theta] \cdot [R_\psi]$ típico:

$$[R] = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & c\theta s\phi \\ s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\vec{k} = \{-s\theta \vec{I} \ c\theta s\phi \vec{J} \ c\theta c\phi \vec{K}\}^T \quad (51)$$

Portanto $\vec{K} \cdot \vec{k}$ é o terceiro termo da expressão anterior:

$$\vec{K} \cdot \vec{k} = \vec{K} \cdot \{-s\theta \vec{I} \ c\theta s\phi \vec{J} \ c\theta c\phi \vec{K}\}^T = c\theta c\phi \Rightarrow d_i = (P_i - O) \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi \quad (52)$$

Finalmente a posição do ponto de contato “ C_i ” em relação ao centro de massa G , expressa no referencial móvel $Gxyz$ é:

$$(C_i - G)_{xyz} = (d_i \vec{k}) + (P_i - G)_{xyz} \quad (53)$$

Vale a mesma expressão para os demais extremos da caixa do veículo (P_1, P_2, P_3, P_4).

Note que a cota “ d_i ” corresponde ao curso da suspensão na direção \vec{k} onde a força de mola é determinada para o comprimento natural “ d_0 ” por:

$$F_{mola} = -k \cdot (x - x_0) = -k \cdot (d_i - d_0) \quad \Rightarrow \quad F_{P_i} \vec{k} = -k \cdot (d_i - d_0) \vec{k} \quad (54)$$

6.4 Velocidade no Ponto de Contato

As velocidades dos pontos de contato “ C_i ” de cada roda podem ser obtidos da fórmula de campo de velocidades de corpo rígido. Note entretanto que cada roda tem rotação própria $\vec{\Omega}_i$ que ocorre no plano da roda $P_i x_i y_i z_i$, conforme ilustrado na Figura 11.

Utilizando a fórmula de campo de velocidades sobre o veículo com a suspensão deformada de “ d_i ”, a velocidade do ponto de contato “ C_i ” expressa no referencial móvel $Gxyz$ é dada por:

$$\vec{V}_{C_i} = \vec{V}_{P_i} + \vec{\Omega}_i \wedge (C_i - P_i) \quad (55)$$

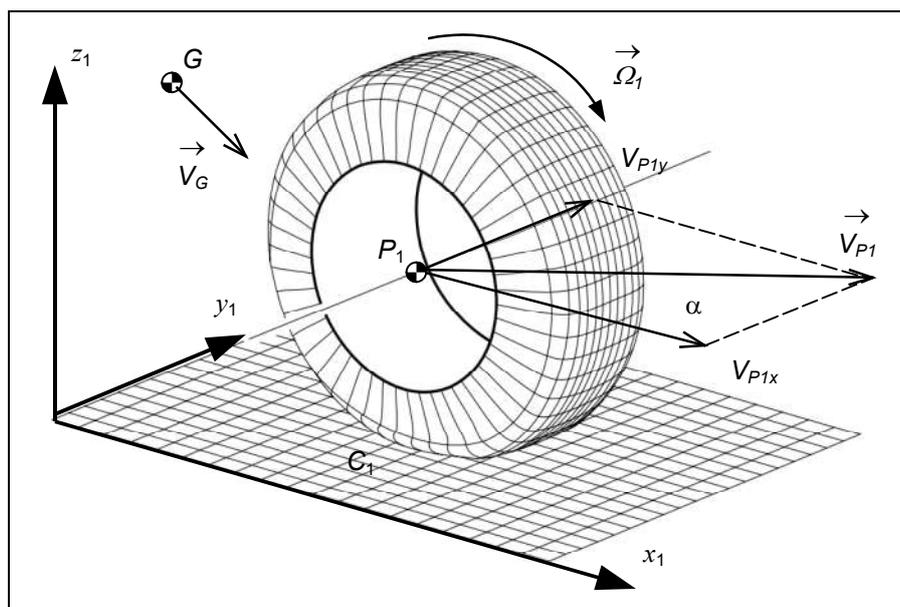


Figura 11 – Velocidade do Eixo do Pneu no Plano do Roda (Fonte: Jazar 2008)

Note que a velocidade do centro do eixo de cada roda “ P_i ” expressa no referencial móvel $Gxyz$, em relação à velocidade do centro de massa do veículo \vec{V}_G que é um grau de liberdade determinada pelo vetor de estados é expressa por:

$$\{x \ y \ z\}^T = [R] \cdot \{X \ Y \ Z\}^T \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \{\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3\}^T \quad (56)$$

$$\vec{V}_{P_i} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (P_i - G) = V_{Px_i} \vec{i} + V_{Py_i} \vec{j} + V_{Pz_i} \vec{k} \quad (57)$$

onde:

$$\alpha_i = a \tan \frac{V_{Py_i}}{V_{Px_i}} \quad (58)$$

Para cada roda haverá um referencial auxiliar $P_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1$, com $z_i \equiv \vec{k}$ onde a velocidade angular da roda é expresso por: $\vec{\Omega}_i = \Omega_i \vec{j}_i$.

$$\vec{V}_{C_i} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (P_i - G) + \vec{\Omega}_i \wedge (C_i - P_i) \quad (59)$$

6.5 Escorregamento Ponto de Contato

Os micro-escorregamentos em cada ponto de contato “ C_i ” de cada roda com velocidade angular “ Ω_i ”, conforme ilustrado na Figura 12 expressos no referencial móvel $Gxyz$, são obtido por:

$$\vec{D}_i = \frac{(\vec{\Omega}_i \wedge (R_{D_i} - P_i) - \vec{V}_{P_i})}{|\vec{V}_{P_i}|} \Rightarrow v_{x_i} \vec{i} + v_{y_i} \vec{j} = \frac{\left[(\Omega_i \vec{j} \wedge R_{D_i} \vec{k}) - |\vec{V}_{P_i}| \cdot (\cos \alpha_i \vec{i} + \sin \alpha_i \vec{j}) \right]}{|\vec{V}_{P_i}|} \quad (60)$$

Neste caso as componentes do escorregamento horizontal terá projeção no plano da roda e expressos no referencial móvel $Gxyz$, como:

$$\begin{cases} v_{x_i} = \frac{(\Omega_i R_D - |\vec{V}_{P_i}| \cdot \cos \alpha_i)}{|\vec{V}_{P_i}|} \\ v_{y_i} = \text{sen } \alpha_i \\ v_{z_i} = 0 \end{cases} \quad (61)$$

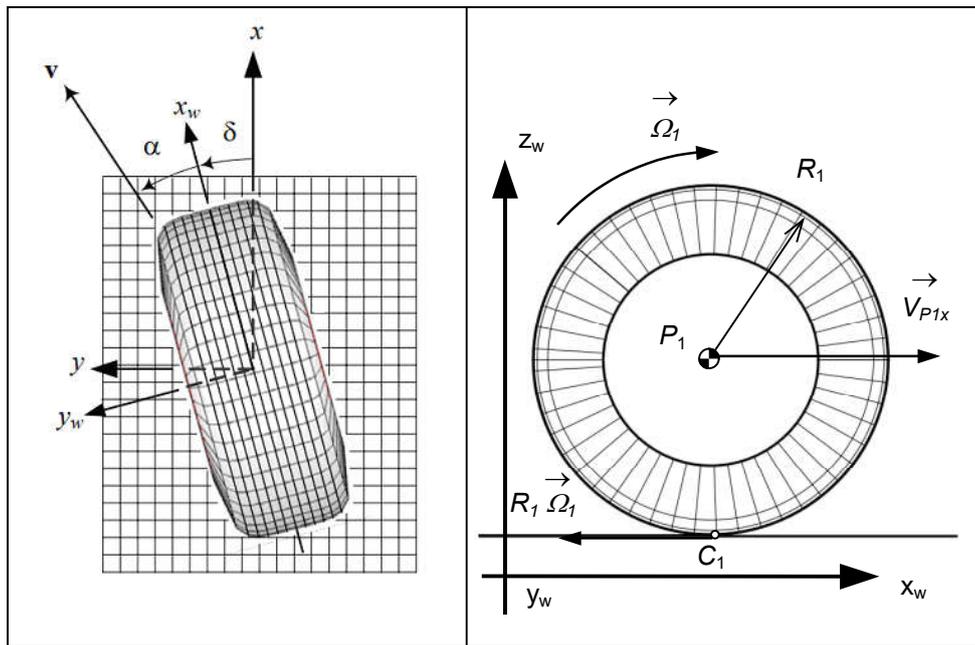


Figura 12 – Ponto de Contato da Roda

Caso haja ângulo de esterçamento, o plano da roda ficará rotacionado do ângulo δ , conforme ilustrado na Figura 12

6.6 Modelo da Roda

Para modelar cada roda considera-se apenas um grau de liberdade correspondente a velocidade angular expressa por: $\vec{\Omega}_i = \Omega_i \vec{j}_i$ e a equação do **TQMA**, obêm-se no referencial móvel auxiliar $P_i x_i y_i z_i$, solidário à roda mas não girando com ela:

$$(J_{y_i} \cdot \dot{\Omega}_i) \vec{j}_i = M_{P_i}^{ext} \vec{j}_i \quad (62)$$

Os momentos externos são obtidos do diagrama do forças sobre o corpo livre (**DFCL**) da roda, ilustrado na Figura 13, e calculados adotando o pólo coincidente com o centro do eixo P_i com:

$$\vec{M}_{P_i}^{ext} = \sum (C_i - P_i) \wedge \vec{F}_{C_i} + \vec{T} \quad (63)$$

As forças externas são devidos à reações no eixo (R_{P_i}), ao contato (forças horizontais em “ C_i ”), peso próprio da roda e devido ao torque ativo do motor de propulsão (haverá torque reativo no veículo).

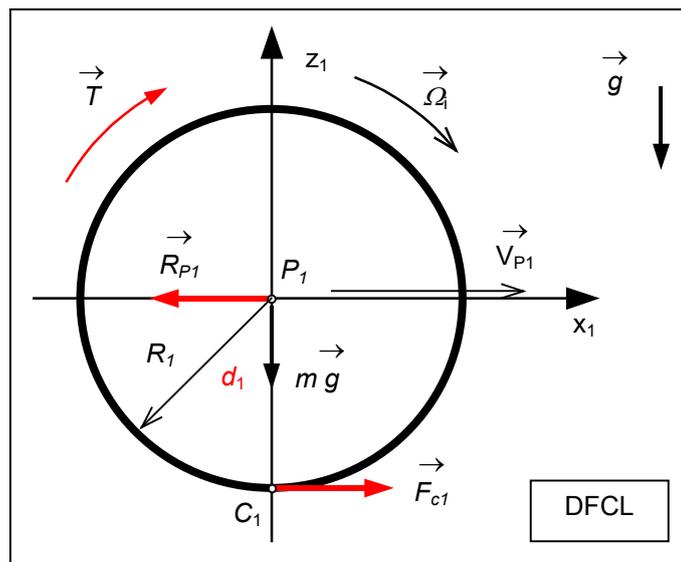


Figura 13 – Modelo Dinâmico da Roda

Para integrar a equação de movimento angular de cada roda o vetor de estados deve ser ampliado com a inclusão da rotação $\vec{\Omega}_i$ individual de cada roda:

$$y = \{X \ Y \ Z \ \phi \ \theta \ \psi \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4\}^T \quad (64)$$

6.7 Forças Horizontais de Contato

Considerando que cada roda seja indeformável e tenha um único ponto de contato “ C_i ”, as componentes forças horizontais (F_x e F_y) de contato de rolamento são proporcionais aos micro-escorregamentos em cada direção em cada ponto de contato.

As forças de contato na direção do plano do pneu (força longitudinal) e perpendicular a ela (força lateral) expressas no referencial auxiliar móvel ($P_i \ x_i \ y_i \ z_i$) solidário à roda, são consideradas proporcionais aos micro-escorregamentos (constante de rigidez do pneu em cada direção k_{x_i} e k_{y_i}) e obtidas por:

$$F_{x_i} \cong k_{x_i} v_{x_i} \quad ; \quad F_{y_i} \cong k_{y_i} v_{y_i} \quad (65)$$

Note que a componente vertical da forças da suspensão (F_z) é devido à deformação da mola e apresentada no próximo item. O referencial ligado a roda mas não girando junto com ela ($P_i \ x_i \ y_i \ z_i$), é o mesmo do centro de massa do veículo ($Gxyz$). Note entretanto que cada roda pode estar sujeita a um ângulo de esterçamento δ_i . Este efeito será considerado no próximo item.

Para projetar as forças de contato de cada roda no referencial fixo utiliza-se da matriz de rotação $[R]$ conforme:

$$\{F_x \ F_y \ F_z\}^T = [R]^T \cdot \{F_{x_i}^{rel} \ F_{y_i}^{rel} \ F_{z_i}^{rel}\}^T \quad (66)$$

6.8 Ângulo de Esterçamento

O ângulo de esterçamento da cada roda δ_i devido a ação do piloto sobre o volante de direção gira o plano da roda. Isso requer que as forças de contato horizontais (longitudinal e lateral) sejam projetadas no referencial auxiliar móvel $P_i x_i y_i z_i$ de cada roda e posteriormente projetados na base móvel do veículo $Gxyz$.

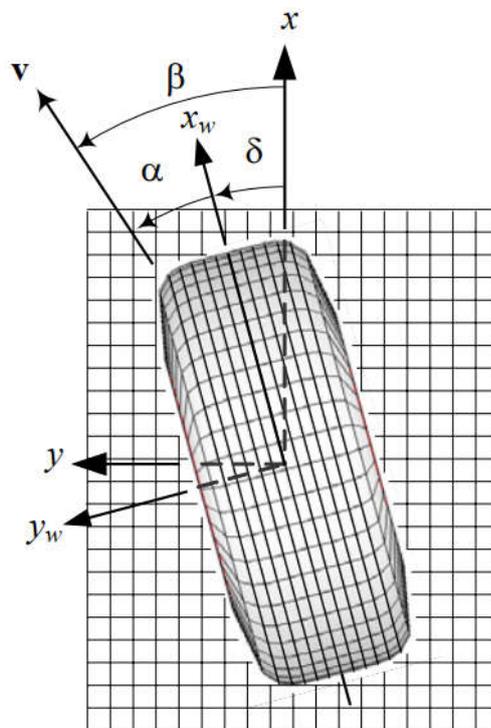


Figura 14 – Ângulos de Esterçamento da Roda (Fonte: Jazar, 2008)

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\text{sen } \delta & 0 \\ \text{sen } \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{Bmatrix} \quad (67)$$

6.9 Força da Suspensão

Considerando a suspensão com deslocamento apenas ortogonal ao plano do veículo, conforme o modelo ilustrado na Figura 9, a força F_{zi} normal de contato de cada roda devido à suspensão é produzida pela deformação elástica de cada mola e dissipativa do amortecedor, conforme apresentado na Figura 15 para o ponto de contato “ C_2 ”.

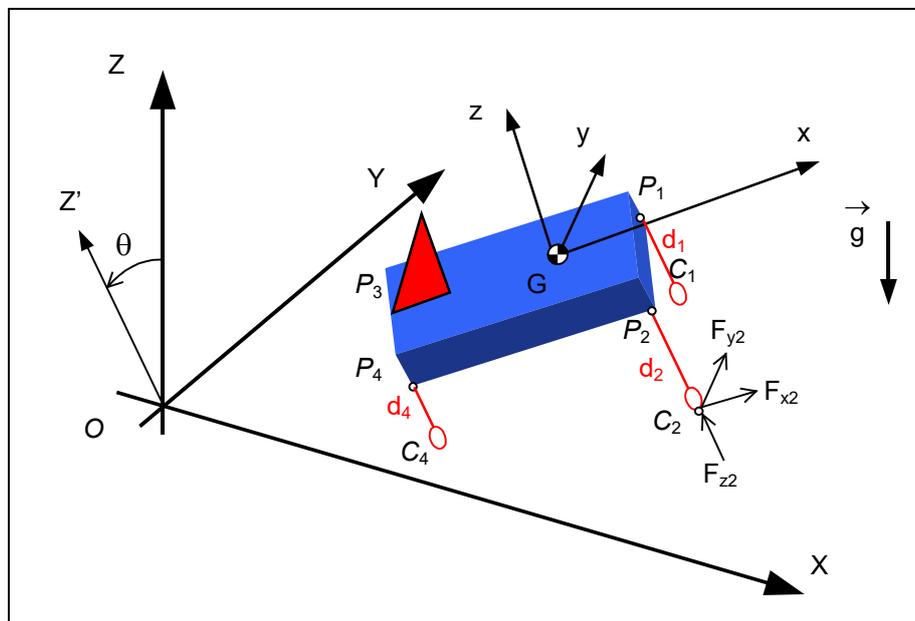


Figura 15 – Força da Mola da Suspensão

A força de cada mola de rigidez k é determinada para a cota “ d_i ” corresponde ao curso da suspensão na direção \vec{k} , considerando comprimento natural “ d_0 ” da mola, cujo valor foi apresentado no item 6.3 e expresso por:

$$F_{mola} = -k \cdot (x - x_0) = -k \cdot (d_i - d_0) \quad \Rightarrow \quad F_{z_i} \vec{k} = -k \cdot (d_i - d_0) \vec{k} \quad (68)$$

Note ainda que a suspensão típica possui amortecedor linear que produz força dissipativa proporcional à variação do curso da suspensão na direção \vec{k} , conforme apresentado no item 6.4.

$$\vec{V}_{P_i} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (P_i - G) = V_{P_{x_i}} \vec{i} + V_{P_{y_i}} \vec{j} + V_{P_{z_i}} \vec{k} \quad (69)$$

Assim a força de cada amortecedor com constante de dissipação “ c ” é determinada para a variação da cota “ d_i ” ao curso do ponto P_i do veículo na direção \vec{k} em relação ao solo (fixo):

$$F_{\text{amortecedor}} = -c \cdot \dot{x} = -c \cdot \dot{d}_i \quad \Rightarrow \quad F_{z_i} \vec{k} = -c \cdot V_{P_{z_i}} \vec{k} \quad (70)$$

A força da suspensão resulta para a mola/amortecedor como:

$$F_{z_i} = -k \cdot (d_i - d_0) - c \cdot V_{P_{z_i}} \quad (71)$$

Finalmente as forças total da suspensão de cada roda é expressa pela contribuição das forças de contato, forças elásticas das molas e dissipativa dos amortecedores expressa no referencial móvel G_{xyz} :

$$\vec{F}_{\text{susp}}^{\text{rel}} = \left\{ F_{\text{contato}_x}^{\text{rel}} \quad F_{\text{contato}_y}^{\text{rel}} \quad F_{\text{susp}_z}^{\text{rel}} \right\} \quad (72)$$

7 DESENHO DO VEÍCULO

O desenho do veículo pode ser descrito como um conjunto de pontos P_i . Cada ponto tem posição relativa $\{P_{x_i}, P_{y_i}, P_{z_i}\}^T$ em relação a uma origem descrita por $\{x_G, y_G, z_G\}^T$. A visualização pode ser apresentada com linhas interligando os pontos (*wire-frame*) de uma matriz com as coordenadas destes pontos. Para desenhar a posição do veículo no espaço \mathfrak{R}^3 é necessário o conhecimento de sua translação e rotação. A rotação é fornecida pela matriz de rotação $[R]$ e a translação pelo vetor $\{tx, ty, tz\}^T$. Alternativamente pode-se montar a matriz 4×4 que contempla num único produto a roto-translação (Corke, 2011):

$$\begin{Bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & tx \\ & [R_{(3 \times 3)}]^T & ty \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ P_{z_i} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & tx \\ & [R_{(3 \times 3)}]^T & ty \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ P_{z_i} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

Pode ser utilizada a função *patch* que desenha superfícies a partir de um polígono de pontos. Ver manual do *Octave* ou *MatLab*.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Baruh, H. (1999) *Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, p. 718.

França, L. N. F. Matsumura, A. Z. (2011) *Mecânica Geral*, Blucher, 3ª Ed., p. 316.

Jazar, R. N. (2008) *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. Springer, p. 1022.

Pacejka, H (2006) *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE International, 2nd Edition, p. 642.

Rill, G. Castro, A. A. (2020) *Road Vehicle Dynamics, Fundamentals and Modeling with MATLAB®*, CRC Press, Second Edition, p. 377.

Genta, G. (1997) *Motor Vehicle Dynamics – Modeling and simulation*, Word Scientific Publishing Co., p. 524.

Shabana, A. A. et al. (2008) *Railroad Vehicle Dynamics – A Computational Approach*. CCR Press, p. 343.

Corke, P. (2011) *Robotics, Vision and Control – Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer, ISBN 978-3-642-20143-1, p. 570.