ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Laboratório de Vibrações e Simulação Numérica

PME 2341 - VIBRAÇÕES

MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS E SOLUÇÃO NUMÉRICA

Notas de Aula

Prof. Roberto Spinola Barbosa

Modelagem de Sistemas Mecânicos e Soluções Numéricas

1. Introdução

O modelo matemático de um sistema mecânico corresponde a uma representação idealizada pelo analista do sistema físico real, com a intenção de descrever e estudar algumas de suas características. A representação do sistema real (em geral complexa) deve ser feita inicialmente de forma simplificada contemplando os aspectos relevantes de interesse.

2. Sistema Linear

Um sistema mecânico elementar de um grau de liberdade do tipo massa, mola, tem equação de movimento obtida pelos teoremas da mecânica (*TMB* e/ou *TQMA*) e descrita por uma equação diferencial ordinária (*ODE*) de segunda ordem a termos constante do tipo:

$$m\,\ddot{x}\,(t) + k\,x(t) = F\,(t) \qquad \text{ou} \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \qquad 1$$

onde ω^2 = k/m é a freqüência natural não amortecida.

3. Solução Equação Homogênea

Considerando o sistema massa mola sem forçamento externo (F = 0) a resposta livre para condições inicias diferentes de zero será uma oscilação harmônica e a solução analítica da equação homogênea pode ser obtida por uma somatória de senos e co-senos:

$$x(t) = A\ sin(\omega\,t) + B\ \cos(\omega\,t) \qquad 2$$

onde as constantes dependem das condições iniciais (*CI*) de posição e velocidade, sendo $B = x_o$ e $A = V_o / \omega$.

4. Sistema amortecido

Para um sistema mecânico do tipo massa, mola e amortecedor, a equação diferencial de movimento para o sistema com forçamento externo resulta em:

$$m\,\ddot{x}\,(t) + c\,\dot{x}\,(t) + k\,x\,(t) = F\,(t) \qquad 3$$

ou alternativamente:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x + \frac{F}{m} \qquad 4$$

$$\ddot{x} = -2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x} - \omega_n^2\,x + \frac{F}{m} \quad \text{onde} \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad 5$$

onde ζ (*zeta*) é o fator de amortecimento $\zeta = c\,/(2m\omega_n)$, ω_n é a freqüência natural não amortecida e ω_d é a freqüência amortecida obtida de $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Considerando novamente a solução analítica do sistema homogêneo, obtém-se a reposta amortecida descrita por um decaimento exponencial (parte real) e uma oscilação de frequência ω_n:

$$x(t) = e^{-\zeta.\omega.t}\;[C_1\;\cos(\omega_d\,t) + C_2\;sin(\omega_d\,t)] \qquad 6$$

as constantes C_1 e C_2 dependem das condições iniciais.

5. Resposta Forçada Harmônica

Um sistema submetido a ação de uma força externa harmônica tem resposta sintonizada com aquele freqüência de excitação. Para um sistema mecânico do tipo massa/mola, a equação diferencial de movimento para o sistema com forçamento externo resulta em:

$$m\,\ddot{x}\,(t) + k\,x\,(t) = F\,(t) \qquad 7$$

ou alternativamente:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_o \operatorname{sen} \omega t}{m} \qquad 8$$

com solução permanente (***x***$_a$) relacionada com o próprio sistema (freqüência natural $\boldsymbol{\omega}$) somada à solução particular (***x***$_b$) com características do forçamento externo (freqüência natural $\boldsymbol{\omega_f}$):

$$x = x_a + x_b \qquad 9$$

$$x_a = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t \quad \text{e} \quad x_b = C \operatorname{sen} \omega_f\, t \qquad 10$$

cuja solução é obtida por derivação sucessiva e substituição na primeira equação:

$$-m\omega_f^2 C \operatorname{sen} \omega_f\, t + k\,C \operatorname{sen} \omega_f\, t = F_o \operatorname{sen} \omega_f\, t \qquad 11$$

Para uma excitação de freqüência variável haverá um valor para o qual a resposta do sistema aumenta a sua amplitude (ressonância). Pode-se desenhar a Curva de Resposta em Freqüência que caracteriza este fenômeno.

Para sistemas não lineares ou com excitação randômica em geral não é possível obter solução analítica da equação diferencial e um método numérico de integração pode ser utilizado.

6. Tipos de excitação

O sistema mecânica pode estar sujeito a diferentes tipos de excitação:

- harmônica;
- Periódica (conjunto harmônico);
- Excitação aplicada na base;
- randômica (curta duração – impulso ou impacto, degrau ou pulso longa duração);
- Não periódica, etc..

A excitação harmônica aplicada ao corpo é caracterizada por uma função do tipo:

$$F = F_o \operatorname{sen} \omega_f \, t \qquad 12$$

onde $\boldsymbol{F}_o$ é a amplitude da variação e ω_f a sua freqüência.

A excitação aplicada na base é caracterizada em geral por deslocamento ($\boldsymbol{u}(t)$) e deve ser conhecida a função temporal de seu movimento e respectiva derivada:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) = F(t) \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku + F(t) \qquad 13$$

onde $\boldsymbol{F}_o$ é a amplitude da variação e ω_f a sua freqüência.

A excitação periódica é caracterizada por uma função repetitiva com período próprio de repetição. Um conjunto de funções harmônicas pode caracterizar uma função periódica:

$$F = \sum F_i \operatorname{sen}(\omega_{fi} \, t + \phi_i) \qquad 14$$

onde $\boldsymbol{F}_i$ é a amplitude da variação da componente i do somatório, ω_{fi} a sua freqüência e ϕ_i a fase.

No caso de uma excitação randômica de curta duração o sistema será submetido a um impulso ou impacto. No caso de não haver variação significativa da posição o impacto corresponde a uma mudança da velocidade. A implementação desta função deve ser realizada pelo troca do estado do sistema (mudança da velocidade sem mudança da posição).

No caso de uma excitação randômica de longa duração o sistema será submetido a uma variação suave da entrada. Excitação do tipo rampa ou degrau são formas usuais para excitação do sistema. Com exemplo uma excitação do tipo degrau com rampa de crescimento pode ser descrita numericamente em função do tempo por:

```
Fo = 10;
F = 0;
if (t>ti | t<= tf),  F = Fo * (t - ti)/(tf - ti);
else F = Fo;
end
```

7. Espaço de Estados

Uma forma alternativa de representação do sistema de equações diferenciais de um sistema mecânico é conhecida como equações de estado. Nesta forma um conjunto de "***n***" equações diferenciais de 2ª ordem pode ser reduzido a um conjunto de "**2*n***" equações de 1ª ordem.

Esta forma facilita o processo de interação numérica. Tomando a equação 4 e chamando de posição $y_1 = x(t)$ e velocidade $y_2 = \dot{x}(t)$, obtém-se

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{c}{m} y_2 - \dfrac{k}{m} y_1 + \dfrac{F}{m} \end{cases} \qquad 15$$

Representando o conjunto de equações na forma matricial obtém-se:

$$\{\dot{y}(t)\} = [A]\{y(t)\} + [B]\{u(t)\} \qquad 16$$

onde o vetor de estados e a força externa são dados respectivamente por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \tag{17}$$

produzindo a matriz dinâmica [***A***] do sistema de ordem 2***n*** × 2***n***, e a matriz de forçamento [***B***] de ordem 2***n*** × 1, expressas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \tag{18}$$

A solução numérica é obtida do 1° teorema fundamental do cálculo que fornece para uma função $F = f(x)$ a integral do tipo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{19}$$

Considerando que a função $\dot{y}(t)$ seja integrável entre os instantes ***t*** = ***a*** e ***t = b***, e que $y(t)$ seja a primitiva de $\dot{y}(t)$ entre [a, b] obtêm-se:

$$\int_t^{t+dt} \dot{y}(t)\,d\,t = y(t+d\,t) - y(t) \quad \text{ou} \quad y(t+d\,t) = y(t) + \int_t^{t+dt} \dot{y}(t)\,d\,t \tag{20}$$

ou seja, para condições iniciais $y(t$o) e intervalo de tempo dt obtêm-se:

$$y\left(t+d\,t\right) = y(t_0) + \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} \dot{y}(t_0)\,d\,t \tag{21}$$

A integração da equação descrita pode ser feita por algoritmos numéricos (*Euler* ou *Runge-Kutta* por exemplo) para sucessivos pequenos intervalos de tempo, onde o vetor $y(t_0)$ são as condições iniciais de posição e velocidade do sistema:

$$y(t_o) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_o) \\ \dot{x}(t_o) \end{bmatrix} \qquad 22$$

A implementação computacional do processo de integração numérica pode ser realizada no ambiente programa *Scilab*, usando a função ODE que realiza a integração numérica a partir de condições iniciais fornecidas.

Para tanto cria-se um arquivo que contem a função (*function*) que descreve o sistema na forma da equação dinâmica linear de estados do tipo.

$$\dot{y} = [A]\,y + [B]\,u \qquad 23$$

Considere que a função recebe os estados (*y*) e o tempo (*t*). As funções descritas neste arquivo podem portanto ser dependentes destas entradas (*y*, *t*). Por exemplo: uma ação externa de força ***u*** de magnitude ***f***o e freqüência ω de excitação.

```
function ydot = mma(t,y)

u = fo * sin (w*t);
ydot = A*y + B*u;

endfunction
```

A função retorna o valor de $\dot{y}$ que é integrado conforme mostrado na equação 13. Este arquivo deve ser salvo com o mesmo nome da função e extensão `sci (neste caso mma.sci)`, para ser interpretado pelo programa Scilab com uma *`function`*. Antes de chamar a função ele deve ser carregada pelo programa com o comando ***`getf`*** `ou` ***`exec`*** (dependendo da versão do programa Scilab).

Fornecidas a matriz [A] do sistema, matriz [B] de forçamento externo e as condições iniciais no ambiente de simulação, determina-se as variações dos estados do sistema (posição; velocidade) utilizando o comando:

```
to = 0;
passo = 0.1;
tf = 30;
t = to:passo:tf;
yo = 10;
y = ode(yo,to,t,sistema);
```

que é o integrador onde y_o é o vetor de condições iniciais, t_o é o tempo inicial, t é o vetor de instantes de tempo onde o resultado deve ser apresentado e "*sistema*" é o nome do arquivos que contem a função que descreve o sistema (neste caso *mma*).

8. Sistema não Linear

Considera-se agora como exemplo o pêndulo livre descrito pela equação diferencial de 2ª ordem não linear.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} sin(\theta) = 0 \qquad 24$$

Por ser uma equação não linear (função de seno de θ) será utilizado o método de solução numérica. Chamando a posição angular do pêndulo de $y_1 = \theta(t)$ e a velocidade angular de $y_2 = \dot{\theta}(t) = \omega(t)$, obtém-se o vetor de estados (posição e velocidade) e condições iniciais em t = to = 0

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \qquad y_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \qquad 25$$

Como o sistema não é linear, sua descrição será feita por uma matriz dinâmica linear [***A***] e terá um termo não linear *g*(*y*):

$$\dot{y} = [A]\,y + [B]\,u + [E]\,g(y) \qquad 26$$

Se o sistema possuir um amortecimento viscoso angular de magnitude ***c*** devido a lubrificação do mancal e um momento externo ***M(t)*** no eixo a equação do sistema fica:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{mL^2}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\,sin(\theta) = \frac{M}{mL^2} \qquad 27$$

O que resulta na matriz linear [***A***], matriz contendo as não linearidades do sistema [***E***] e a função $g(y)$ = sen $\{y\}$ do sistema com forçamento externo distribuído segundo [***B***]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-c}{mL^2} \end{bmatrix} \rightarrow \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-g}{L} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/mL^2 \end{bmatrix} \qquad 28$$

Pode-se escrever a expressão de cada termo diretamente em função dos estados (y) e o tempo (t), conforme mostrado a seguir:

```
function ydot = pendulo(t,y)

u = fo * sin (w*t);
ydot = A*y + B*u + E*sin(y)

endfunction
```

A função retorna o valor de $\dot{y}$. O arquivo deve ser salvo com nome "*pendulo*.`sci`", para ser interpretado em comando *ODE* como uma *function*.

Fornecidas as condições iniciais e os parâmetros do sistema, obtém-se a variação dos estados do sistema (posição; velocidade) utilizando o comando de integração:

$y = ode(y_o, t_o, t, pendulo)$;

onde y_o é o vetor de condições iniciais t_o é o tempo inicial, ***t*** é o vetor de instantes onde o resultado deve ser apresentado e *"pendulo"* é o nome do arquivo (*function*) que contem a função que descreve o sistema.

Os resultados obtidos depois da integração podem ser observados de forma gráfica por:

```
scf(1);
plot(t,y(1,:)*180/%pi);
xtitle("Pêndulo Simples","Tempo (s)","Posição Angular (°)"),
xgrid;

scf(2);
plot(t,y(2,:));
xtitle("Pêndulo Simples","Tempo (s)","Velocidade Angular (rad/s)");
xgrid;

scf(3);
plot(y(1,:) *180/%pi,y(2,:));
xtitle("Plano de Fase - Pêndulo Simples","Posição Angular (°)","Velocidade
Angular");
xgrid;
```

Use a seguinte base de tempo e as seguintes condições iniciais:

```
// dados do sistema
m = 1.0;k = 1.0;c = 0.5;
g = 9.81;L = 1.5;
// matrizes do sistema não linear
A=[0  1 ; 0  -c/(m*L*L)];
B=[0 ; 1/(m*L*L)];
E=[0  0 ; -g/L  0];
// forçamentos externos
Mo = 0.0; ti = 3; tf = 10;    // Mo = 10.0;
to = 0;passo = 0.01;tf = 30;
t = 0:passo:tf;
teta = %pi; omega = 0.001;  // para pendulo
```

Experimente usar omega = 5.5. Por quantas voltas o pêndulo vai girar ?

Para o caso de um sistema com acionamento externo de um momento de magnitude constante que se inicia num determinado instante de tempo (*ti* = 3) e interrompe em (*tf* = 10) , a rotina pendulo fica:

```
function ydot = pendulo(t,y)

if (t < ti | t > tf) M = 0; else M = Mo; end;
u = M;
ydot = A*y + B*u + E*sin(y)

endfunction
```

Neste caso a não linearidade do sistema é uma função periódica dos estados (seno) mas pode ser de várias naturezas. Por exemplo uma mola com elasticidade não linear do tipo $k = k_1\, x + k_2\, x^3$. Neste caso o termo k_1 ocorre na matriz $\boldsymbol{A}$ que é função dos estados e o termo k_2 da origem a matriz $\boldsymbol{E}$ com não linearidade cúbica do estado.

9. Referencias Bibliográficas

França, L. N. F., *Matsumura*, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, 3ª edição, São Paulo, p. 235.