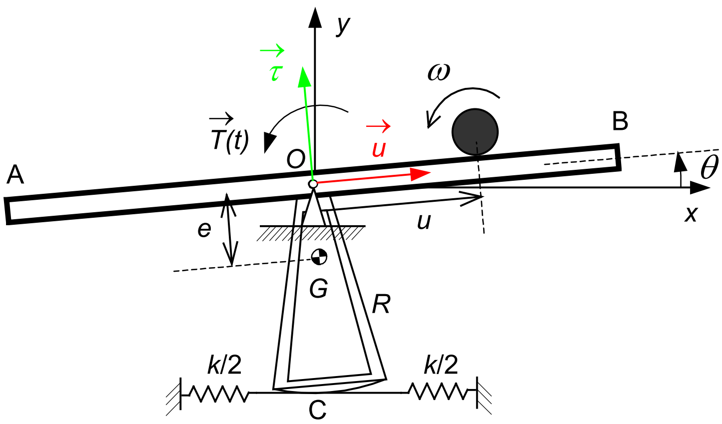
4.7 Linearização Exemplo 5: Disco – Barra Guia



O balancim de massa $\boldsymbol{M}$ e momento de inércia $\boldsymbol{J}_{Gz}$, tem movimento angular θ(t) prescrito em torno da articulação ideal em $\boldsymbol{O}$ fixo. O centro de massa $\boldsymbol{G}$ do balancim dista **e** do ponto $\boldsymbol{O}$. O disco de massa $\boldsymbol{m}$ e raio $\boldsymbol{r}$, rola sem escorregar sobre a guia AB, com posição definida pela cota $\boldsymbol{u}$, medida ao longo da guia por um sensor de posição, a partir do ponto $\boldsymbol{O}$. Este sistema também é conhecido como bola/barra. Adicionalmente no setor de arco de raio $\boldsymbol{R}$ na extremidade inferior do balancim estão ancoradas duas molas de rigidez $\boldsymbol{k}$/2 cada. As molas estão em seu comprimento livre quando $\boldsymbol{\theta}$ = 0. Um momento externo $\vec{T}(t)$ é aplicado no balancim. Considerando as coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\theta}$, pede-se:

a) Escreva a função de Energia Cinética do sistema em função de $\dot{u}$, $\dot{\theta}$ e dos parâmetros $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{J}_{Gz}$. Dois corpos rígidos: balancim e o disco. Para o disco utilizando o referencial móvel $O\vec{u}\,\vec{\tau}\,\vec{k}$ solidário ao balancim, obtêm-se:

$$T = T_{Disco} + T_{Balancim}$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$$

$$\vec{V}_{rel} = \dot{u}\,\vec{u}$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (D - O) = 0 + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (u\,\vec{u} + r\,\vec{\tau}) = u\,\dot{\theta}\,\vec{\tau} - r\dot{\theta}\,\vec{u}$$

$$\vec{V}_D = \dot{u}\,\vec{u} + u\,\dot{\theta}\,\vec{\tau} - r\dot{\theta}\,\vec{u} = (\dot{u} - r\dot{\theta})\vec{u} + u\,\dot{\theta}\,\vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_D^2 = \dot{u}^2 - 2\dot{u}\,r\dot{\theta} + (r^2 + u^2)\dot{\theta}^2$$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2}m \cdot \left[\dot{u}^2 - 2\dot{u}\,r\dot{\theta} + (r^2 + u^2)\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2$$

Da cinemática do disco para rolamento sem escorregamento tem-se: $\omega = -\dot{u}/r$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2} m \cdot \left[\dot{u}^2 - 2\dot{u}\, r\dot{\theta} + \left(r^2 + u^2\right)\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{4} m\dot{u}^2$$

$$\boxed{T_{Disco} = \frac{3}{4} m\,\dot{u}^2 - mr\,\dot{u}\,\dot{\theta} + \frac{1}{2} m \cdot r^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\,u^2\,\dot{\theta}^2}$$

Para o balancim utilizando o referencial móvel $O\vec{u}\,\vec{\tau}\,\vec{k}$ solidário ao conjunto com $\boldsymbol{O}$ fixo, obtêm-se:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \qquad \vec{V}_{rel} = 0$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = 0 + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (-e)\vec{\tau} = e\dot{\theta}\,\vec{u}$$

$$\vec{V}_G^2 = e^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T_{Balancim} = \frac{1}{2} M \cdot \left(e^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left[J_{Gz}\right]\dot{\theta}^2}$$

A Energia Cinética total do sistema resulta em:

$$T = \frac{3}{4} m\,\dot{u}^2 - mr\,\dot{u}\,\dot{\theta} + \frac{1}{2} m\,r^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\,u^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\left(e^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left[J_{Gz}\right]\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} m\,\dot{u}^2 - mr\,\dot{u}\,\dot{\theta} + \frac{1}{2} m\,u^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(m\,r^2 + M\,e^2 + J_{Gz}\right)\dot{\theta}^2}$$

b) Escreva a função de a Energia Potencial e de dissipação do sistema em função de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\theta}$ e dos parâmetros $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M}$;

$$V = V_{Disco} + V_{Balancim} + V_{Mola}$$

$$V_{Disco} = mg \cdot h = mg \cdot u\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V_{Balancim} = mg \cdot h = Mg \cdot R(1 - \cos\theta)$$

$$V_{Mola} = \sum \frac{1}{2} k_i\, x_i^2 = 2\left(\frac{1}{2}\frac{k}{2} R^2\theta^2\right) = \frac{1}{2} k\, R^2\theta^2$$

A Energia Potencial total do sistema resulta em:

$$\boxed{V = mg\,u\,\mathrm{sen}\,\theta + Mg\cdot R(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\,R^2\theta^2}$$

c) Deduza as equações de movimento utilizando o método de *Lagrange*. Para o primeira coordenada generalizada $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{u}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{3}{2}m\,\dot{u} - mr\,\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{3}{2}m\,\ddot{u} - mr\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial u} = m\,u\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial u} = mg\cdot\mathrm{sen}\,\theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\,\ddot{u} - mr\,\ddot{\theta} - m\,u\,\dot{\theta}^2 + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$$

Para a segunda coordenada generalizada $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\theta}$;:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -mr\,\dot{u} + \left(m\,u^2 + mr^2 + M\,e^2 + J_{Gz}\right)\dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = -mr\,\ddot{u} + \left(m\,u^2 + mr^2 + M\,e^2 + J_{Gz}\right)\ddot{\theta} + 2m\,u\,\dot{u}\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\,u\cos\theta + MgR\,\mathrm{sen}\,\theta + kR^2\theta$$

Força generalizada: Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + M \cdot \delta\theta = \sum Q_i \cdot \delta q_i = 0$$
$$T \cdot \delta\theta = Q_2 \cdot \delta\theta \quad \Rightarrow \quad Q_2 = T$$

Finalmente a segunda equação para coordenada generalizada $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\theta}$ resulta em:

$$\boxed{-mr\,\ddot{u} + \left(m u^2 + mr^2 + M\,e^2 + J_{Gz}\right)\ddot{\theta} + 2m\,u\,\dot{u}\,\dot{\theta} + mg\,u\cos\theta + MgR\,\mathrm{sen}\,\theta + kR^2\theta = T(t)}$$

Fazendo a substituição de $\ddot{u}$ da primeira equação na segunda, obtêm-se:

$$\ddot{u} = \frac{2}{3}\left(r\,\ddot{\theta} + u\,\dot{\theta}^2 - g\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$\left(J_{Oz} + \frac{1}{3}mr^2 + m\,u^2\right)\ddot{\theta} - \frac{2}{3}mru\dot{\theta}^2 + 2mu\,\dot{u}\,\dot{\theta} + mg\left(u\cos\theta - \frac{2}{3}r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + MgR\,\mathrm{sen}\,\theta + kR^2\theta = T(t)$$

Linearização:

Para realizar a **linearização** das equações do sistema não amortecido, deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}_{i,j}$ e $\boldsymbol{\beta}_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $\boldsymbol{a}_{i,j}$ e $\boldsymbol{b}_{i,j}$, e montar as equações na forma matricial:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \cdot q_k = 0 \qquad \text{para} \qquad \boldsymbol{i} = 1, 2, 3, ..., n$$

Os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}_{i,j}$ e $\boldsymbol{\beta}_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas da energia cinética e potencial em relação as velocidade e coordenadas generalizadas:

$$T\left(u,\theta,\dot{u},\dot{\theta}\right) = \frac{3}{4}m\dot{u}^2 - mr\,\dot{u}\,\dot{\theta} + \frac{1}{2}mu^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2 + J_{Oz}\right)\dot{\theta}^2$$

$$V(u,\theta) = mg\,u\,\mathrm{sen}\,\theta + Mg \cdot R\left(1 - \cos\theta\right) + \frac{1}{2}k\,R^2\theta^2$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{1,1} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}^2} = \dfrac{3}{2}m \\ \alpha_{1,2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}\,\partial \dot{\theta}} = -mr \\ \alpha_{2,1} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}\,\partial \dot{u}} = -mr \\ \alpha_{2,2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = mr^2 + J_{Oz} \end{Bmatrix} \text{ na origem } \begin{Bmatrix} a_{1,1} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = \dfrac{3}{2}m \\ a_{1,2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}\,\partial \dot{\theta}}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = -mr \\ a_{2,1} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}\,\partial \dot{y}}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = -mr \\ a_{2,2} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = mr^2 + J_{Oz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_{1,1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0 \\ \beta_{1,2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial \theta} = mg\cos\theta \\ \beta_{2,1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial u} = mg\cos\theta \\ \beta_{2,2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = kR^2 \end{Bmatrix} \text{ na origem } \begin{Bmatrix} b_{1,1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = 0 \\ b_{1,2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial \theta}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = mg \\ b_{2,1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial y}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = mg \\ b_{2,2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big|_{\substack{u=0\\ \theta=0}} = kR^2 \end{Bmatrix}$$

Utilizando os termos da matriz *Hessiana* acima, as duas equações finais resultam em:

$\boldsymbol{i} = 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\cdot\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\cdot q_k = a_{1,1}\cdot\ddot{u} + a_{1,2}\cdot\ddot{\theta} + b_{1,1}\cdot u + b_{1,2}\cdot\theta = \frac{3}{2}m\ddot{u} - mr\ddot{\theta} + mg\,\theta = 0$ e $\boldsymbol{i} = 2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\cdot\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\cdot q_k = a_{2,1}\cdot\ddot{u} + a_{2,2}\cdot\ddot{\theta} + b_{2,1}\cdot u + b_{2,2}\cdot\theta = -mr\ddot{u} + \left(mr^2 + J_{Oz}\right)\ddot{\theta} + mg\,u + kR^2\,\theta = 0$$

Rearranjando as equações linearizadas na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 3m/2 & -mr \\ -mr & \left(mr^2 + J_{Oz}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mg \\ mg & kR^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

As equações lineares obtidas pode ser isolas nas variáveis $\ddot{u}$ e $\ddot{\theta}$ por substituição, obtendo:

$\ddot{u} = \frac{2}{3} r \ddot{\theta} - \frac{2}{3} g \theta$ e $\ddot{\theta} = \frac{mr\ddot{u} - mgu - kR^2 \theta}{\left(mr^2 + J_{Oz}\right)}$ e substituindo em cada equação, resulta em:

$$\left(\frac{1}{2} mr^2 + \frac{3}{2} J_{Oz}\right)\ddot{u} + mgr\,u + \left[rkR^2 + \left(mr^2 + J_{Oz}\right)g\right]\theta = 0$$

$$\left(\frac{1}{3} mr^2 + J_{Oz}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{2}{3} mgr + kR^2\right)\theta + mg\,u = 0$$

Ou finalmente na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} mr^2 + \frac{3}{2} J_{Oz}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3} mr^2 + J_{Oz}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr & \left[rkR^2 + \left(mr^2 + J_{Oz}\right)g\right] \\ mg & \left(\frac{2}{3} mgr + kR^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que é apropriada para aplicação da técnica de controle.