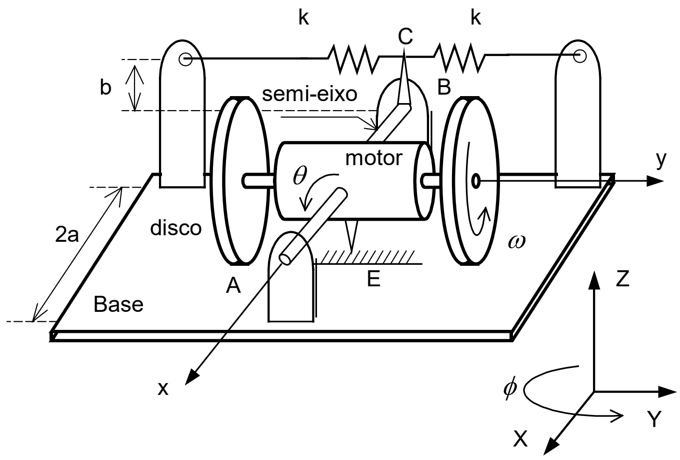
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica B - PME 2200 - PSUB – 03/07/2012

3º Questão



Helicópteros possuem um sensor que mede a velocidade angular baseado no efeito giroscópico, sendo utilizado para controlar a sua atitude rotacional $\dot{\phi}$ em torno do eixo vertical. O rotor do sensor é composto por um motor elétrico e dois discos fixados no eixo. A carcaça do motor elétrico é apoiada por dois semi-eixos sobre os mancais *A* e *B*, espaçados da distância 2a, conforme mostrado na figura. Os semi-eixos são perpendiculares ao eixo do motor elétrico que mantêm a velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{j}$ do rotor constante. Duas molas de rigidez *k* fixadas no ponto *C*, solidário ao semi-eixo, têm deformação nula na posição $\vec{\theta} = \theta \vec{i} = 0$ (quando $\dot{\phi} = 0$ o braço *BC* está na vertical). As molas podem ser consideradas ideais e estão instaladas paralelas à base do sensor. Quando o helicóptero realiza uma manobra em torno do seu eixo vertical $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi} \vec{K}$, a base do sensor é arrastada alterando a posição angular $\vec{\theta}$ do rotor, permitindo a identificação da velocidade angular $\dot{\phi}$ no indicador angular *E*. Sabendo-se que a matriz de inércia do rotor é diagonal com momentos centrais J_x, J_y, J_z e utilizando o sistema de coordenadas móvel, pede-se:

a) Determinar a velocidade angular absoluta do rotor do sensor;
b) Deduzir as equações diferenciais do movimento angular do rotor utilizando o Teorema da Quantidade do Movimento Angular (*TQMA*);
c) Obter a relação entre a velocidade angular $\dot{\phi}$ de manobra do helicóptero e o ângulo de equilíbrio θ do rotor do sensor, admitindo $\ddot{\theta}$ desprezível;

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL

TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3º Questão

a) $\vec{\Omega}_{abs} = \omega_{rel} + \omega_{arr} = (\dot{\theta}\vec{i} + \omega\vec{j}) + \dot{\phi}\vec{K}$

b) Aplicando o *TQMA* no baricentro *G* do rotor, considerando o referencial móvel G$\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ e apenas o movimento angular constante do helicóptero no plano horizontal, ou seja $\vec{K} = \cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$:

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = \vec{M}_G$$

Considerando a velocidade angular de arrastamento $\dot{\phi}\vec{K} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})$, a variação temporal dos versores do referencial móvel são:

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}) \wedge \vec{i} = \cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\vec{k}$;

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = -\cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ resultando em:

$$\boxed{\begin{aligned} & J_x\ddot{\theta} + (J_z - J_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - J_y\cos\theta\,\dot{\phi}\,\omega = M_x \\ & J_y\frac{d}{dt}(\omega + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta) + J_x\cos\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} = M_y \\ & J_x\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\cos\theta) - J_x\operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} = M_z \end{aligned}}$$

As reações dos mancais A e B produzem momento nas direções $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e o momento das molas na direção $\vec{i}$, consideradas paralelas à base, tem magnitude $M_x = -2kb^2\operatorname{sen}\theta$. Em torno de pequenos ângulos a primeira equação resulta em:

$$J_x\ddot{\theta} + (J_z - J_y)\theta\dot{\phi}^2 - J_y\dot{\phi}\,\omega = -2kb^2\theta$$

c) Para aceleração angular do rotor desprezível ($\ddot{\theta} \approx 0$) e $\dot{\phi}$ pequeno, pode-se desprezar o segundo termo da equação devido a $\omega >> \theta$, obtendo-se a função de sensibilidade do sensor:

$$\boxed{\theta = \frac{J_y\,\omega}{2k\,b^2}\,\dot{\phi}}$$