11. ANEXO B – Função de Transferência do Modelo Lateral com 2GL

DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DO MODELO LATERAL

Considerando a projeção lateral do veículo, conforme mostrado na Figura 38, descrito por um modelo matemático com dois graus de liberdade (translacional e rotacional), pode-se descrever as seguintes equações diferenciais de movimento obtidas pelo método *Newton-Euler* a partir do teorema da resultante (***TR***) e teorema da quantidade de movimento angular (***TQMA***) aplicado em relação ao pólo no centro de massa ***G*** e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (***DFCL***), obtêm-se:

$$\begin{aligned} &m\,\ddot{z}_3 + c_1\,(\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_1\,(z_1 - u_1) + c_2\,(\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_2\,(z_2 - u_2) = F_Z \\ &J_{Gy}\,\ddot{\theta} + c_1(\dot{z}_1 - \dot{u}_1)\,a + k_1(z_1 - u_1)\,a - c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}_2)\,b - k_2(z_2 - u_2)\,b = M_G \end{aligned} \tag{77}$$

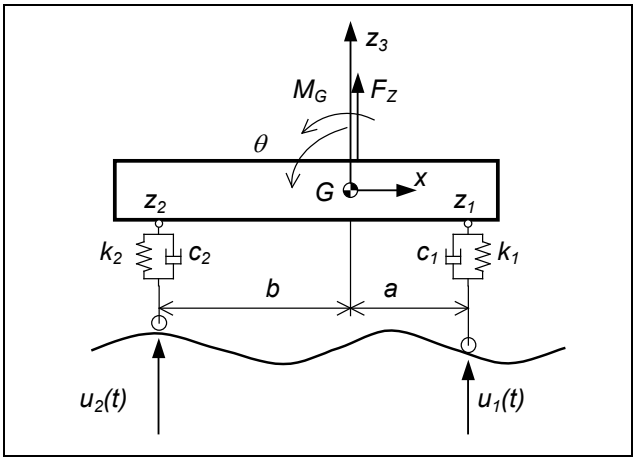

Figura 38 – Modelo Físico com 2 GL

Utilizando as relações cinemáticas: $z_1 = z_3 + a\,\theta$ e $z_2 = z_3 - b\,\theta$, para o sistema homogêneo obtêm-se:

$$\begin{aligned} &m\,\ddot{z}_3 + c_1\,(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) + c_2\,(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) + k_1\,(z_3 + a\theta - u_1) + k_2\,(z_3 - b\theta - u_2) = 0 \\ &J_{Gy}\,\ddot{\theta} + c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1)\,a - c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2)\,b + k_1(z_3 + a\theta - u_1)\,a - k_2(z_3 - b\theta - u_2)\,b = 0 \end{aligned} \tag{78}$$

ou rearranjando as expressões colocando à esquerda os termos função dos graus de liberdade e a direita as ações externas devido à pista:

$$m\,\ddot{z}_3 + (c_1 + c_2)\,\dot{z}_3 + (k_1 + k_2)\,z_3 + (c_1 a - c_2 b)\dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b)\theta = c_1\dot{u}_1 + c_2\,\dot{u}_2 + k_1 u_1 + k_2 u_2 \tag{79}$$

$$\begin{aligned} J_{Gy}\,\ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2)\dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2)\theta + (c_1 a - c_2 b)\dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 = \ldots \\ c_1 a\,\dot{u}_1 + c_2 b\,\dot{u}_2 + k_1 a\,u_1 + k_2 b\,u_2 \end{aligned} \tag{80}$$

Tomando a transformada de *Laplace* do sistema de equações diferenciais completas com 2 graus de liberdade (z_3 e θ) excitada pela base ($u_1(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$ e $u_2(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi + \theta)$) e assumindo condições iniciais nulas, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} &[m_3\,s^2 + (c_1 + c_2)\,s + (k_1 + k_2)]\,Z_3(s) + [(ac_1 - bc_2)\,s + (ak_1 - bk_2)]\,\Theta(s) = \ldots \\ &(c_1\,s + k_1)\,U_1(s) + (c_2\,s + k_2)\,U_2(s) \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} &[J_{Gy}\,s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2)\,s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)]\,\Theta(s) + \left[a(c_1\,s + k_1) - b(c_2\,s + k_2)\right] Z_3(s) = \ldots \\ &a(c_1\,s + k_1)\,U_1(s) + b(c_2\,s + k_2)\,U_2(s) \end{aligned} \tag{82}$$

Utilizando os seguintes identificadores para cada polinômio em ***s***, obtêm-se para cada grupo:

$$\begin{aligned} &A = [m_3\,s^2 + (c_1 + c_2)\,s + (k_1 + k_2)] \\ &AA = (c_1\,s + k_1)\;\;;\;\; AB = (c_2\,s + k_2) \\ &AC = [(ac_1 - bc_2)\,s + (ak_1 - bk_2)] \\ &A\,Z_3(s) + AC\,\Theta(s) = AA\,U_1(s) + AB\,U_2(s) \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} &B = [J_{Gy}\,s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2)\,s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \\ &BA = a(c_1\,s + k_1)\;\;;\;\; BB = b(c_2\,s + k_2) \\ &BC = \left[(ac_1 - bc_2)\,s + (ak_1 - bk_2)\right] \\ &B\,\Theta(s) + BC\,Z_3(s) = BA\,U_1(s) + BB\,U_2(s) \end{aligned} \tag{84}$$

Isolando os polinômios dos graus de liberdade $\boldsymbol{\Theta}(s)$ e fazendo a substituição em $\boldsymbol{Z}_3(s)$ obêm-se:

$$\Theta(s) = \frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s) \tag{85}$$

$$AZ_3(s) + AC\left(\frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s)\right) = AAU_1(s) + ABU_2(s) \tag{86}$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} AZ_3(s) - \frac{AC\cdot BC}{B}Z_3(s) &= \left(AA - \frac{AC\cdot BA}{B}\right)U_1(s) + \left(AB - \frac{AC\cdot BB}{B}\right)U_2(s) \\ \left[(B\cdot A) - (AC\cdot BC)\right]Z_3(s) &= (B\cdot AA - AC\cdot BA)U_1(s) + (B\cdot AB - AC\cdot BB)U_2(s) \end{aligned} \tag{87}$$

Utilizando os seguintes identificadores adicionais para cada grupo polinômial, obtêm-se

$$G_{Z_{31}} = \frac{(B\cdot AA - AC\cdot BA)}{\left[(B\cdot A) - (AC\cdot BC)\right]} \quad ; \quad G_{Z_{32}} = \frac{(B\cdot AB - AC\cdot BB)}{\left[(B\cdot A) - (AC\cdot BC)\right]} \tag{88}$$

$$Z_3(s) = G_{Z_{31}}U_1(s) + G_{Z_{32}}U_2(s) \tag{89}$$

Isolando os polinômios dos graus de liberdade $\boldsymbol{Z}_3(s)$ e fazendo a substituição em $\boldsymbol{\Theta}(s)$ obêm-se:

$$Z_3(s) = \frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s) \tag{90}$$

$$B\Theta(s) + BC\left(\frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s)\right) = BAU_1(s) + BBU_2(s) \tag{91}$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} B\Theta(s) - \left(\frac{BC\cdot AC}{A}\right)\Theta(s) &= \left(BA - \frac{BC\cdot AA}{A}\right)U_1(s) + \left(BB - \frac{BC\cdot AB}{A}\right)U_2(s) \\ \left[(A\cdot B) - (BC\cdot AC)\right]\Theta(s) &= (A\cdot BA - BC\cdot AA)U_1(s) + (A\cdot BB - BC\cdot AB)U_2(s) \end{aligned} \tag{92}$$

Utilizando as seguintes funções de transferência em ***s***, obtêm-se

$$G_{\Theta_{11}} = \frac{\left(A \cdot BA - BC \cdot AA\right)}{\left[\left(A \cdot B\right) - \left(BC \cdot AC\right)\right]} \quad ; \quad G_{\Theta_{12}} = \frac{\left(A \cdot BB - BC \cdot AB\right)}{\left[\left(A \cdot B\right) - \left(BC \cdot AC\right)\right]} \tag{93}$$

$$\Theta(s) = G_{\Theta_{11}} U_1(s) + G_{\Theta_{12}} U_2(s) \tag{94}$$

Considerando que as entradas $\boldsymbol{U}_1$(s) e $\boldsymbol{U}_2$(s) em cada eixo sejam similares ($\boldsymbol{U}$(s)) mas defasadas ($\boldsymbol{s} = i\,\omega$ e $\boldsymbol{T} = L / \text{Vel}$):

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= \left(G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{-Ts}\right) U(s) \\ \Theta(s) &= \left(G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{-Ts}\right) U(s) \end{aligned} \tag{95}$$

ou na forma de ganho vertical e angular do chassis ($\boldsymbol{Z}_3$(s) e $\boldsymbol{\Theta}$(s)) em relação a entrada ($\boldsymbol{U}$(s)):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Z_3(s)}{U(s)} &= G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{(-ik)} \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{(-ik)} \end{aligned}} \tag{96}$$

onde: $k = \omega \cdot L / Vel$ e L = (a + b). Note que as funções estão no domínio ***s*** complexo sendo necessário o tratamento da funções como números complexos. Tipicamente o primeiro modo de vibrar com frequência mais baixa é chamado do **Galope Traseiro** (*rear end bounce*) está associado com o movimento vertical $\boldsymbol{Z}_3$. O segundo modo de vibrar chamado de **Arfagem Dianteira** (*front end pitch*) está associado com movimento angular $\boldsymbol{\Theta}$.

As funções de transferência em ***s*** podem ser avaliados numericamente numa faixa de frequências, utilizando pacotes numéricos, onde pode-se observar o comportamento da resposta em frequência de galope ($\boldsymbol{Z}_3$(s)) e arfagem ($\boldsymbol{\Theta}$(s)) do veículo em função da entrada $\boldsymbol{U}$(s).

Tabela 4 – Características do Veículo (meio carro)

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo (m_3)	750 kg	--
Momento de Inércia (J_{Gy})	360 kg m^2	Pólo G
Distância do eixo dianteiro ao CM (a)	1.0 metros	--
Distância do eixo traseiro ao CM (b)	1.4 metros	--
Rigidez da mola dianteira (k_1)	18.25 kN/m	1 par
Rigidez da mola traseira (k_2)	18.25 kN/m	1 par
Amortecedor dianteiro (c_1)	912.5 kN/m/s	1 par
Amortecedor traseiro (c_2)	912.5 kN/m/s	1 par

As propriedades do veículo são: Primeiro modo de vibrar (**galope traseiro** – *rear end bounce*) frequência $\boldsymbol{F}_1$ = 1,12 Hz (fator de amortecimento de 17%) e segundo modo de vibrar (**arfagem dianteira** – *front end pitch*) frequência $\boldsymbol{F}_2$ = 1.98 Hz (fator de amortecimento de 31%). As figuras a seguir mostram o comportamento do sistema no domínio da frequência:

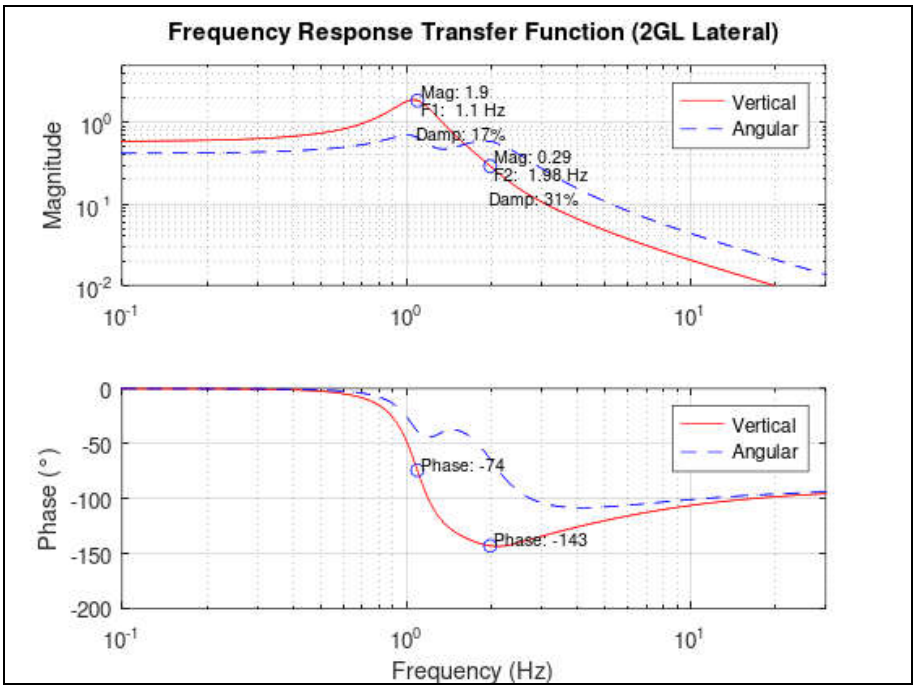

Figura 39 – Receptância com Excitação no Eixo Dianteiro

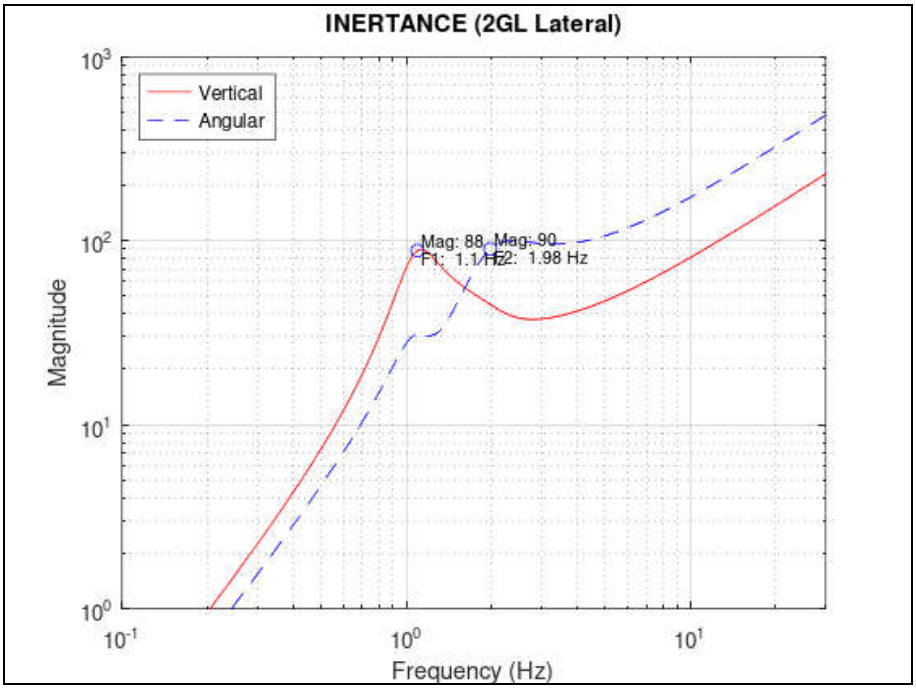

Figura 40 – Inertância com Excitação no Eixo Dianteiro

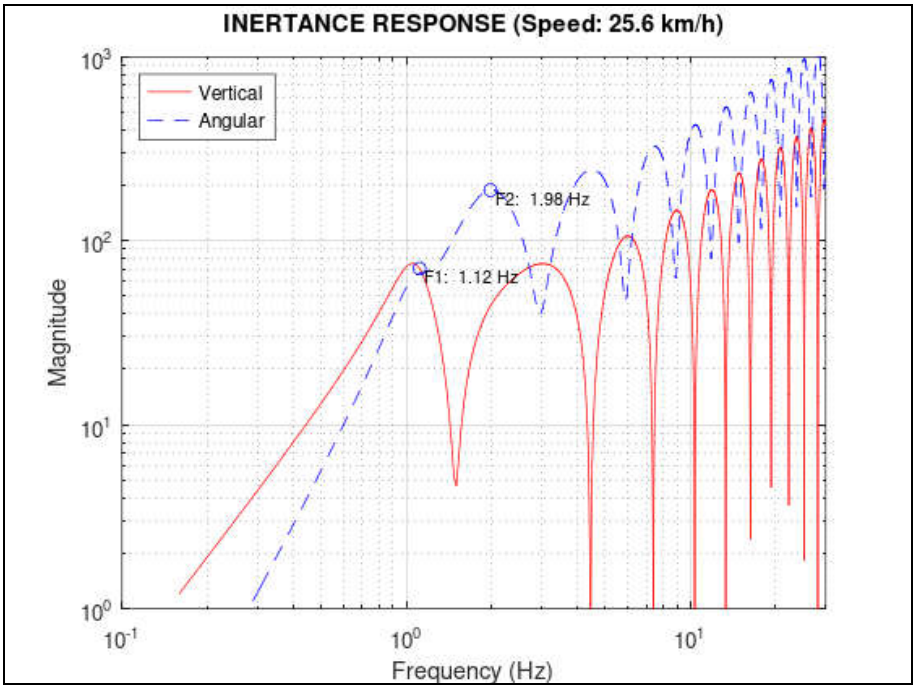

Figura 41 – Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 25,6 km/h)

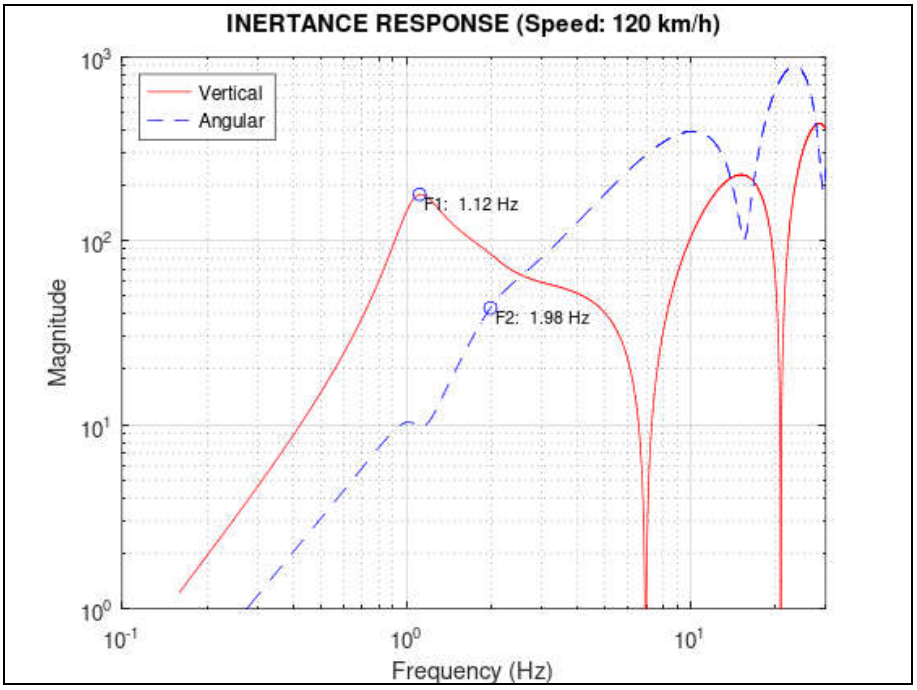

Figura 42 - Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 120 km/h)

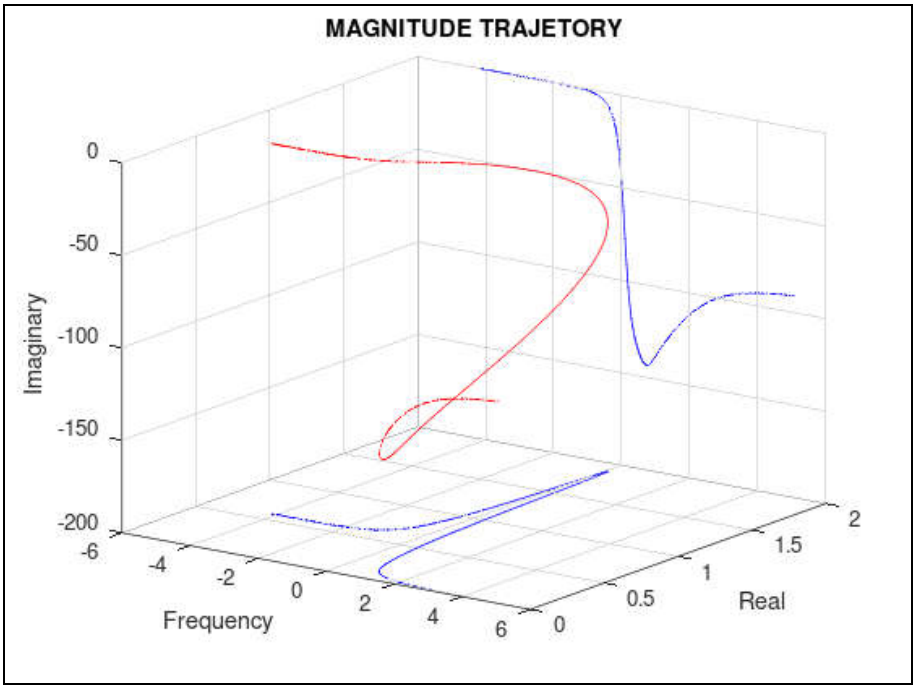

Figura 43 – Trajetória da Função de Resposta no Espaço Complexo × Frequência

11.1. REFERÊNCIAS

Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciency & Engeneering - ABCM, Vol. XXXIII, nº 3, pp. 302-307. DOI: 10.1590/S1678-58782011000300005

Rao, S. S. (2011) Vibrações Mecânicas. Editora Pearson Prentice Hall, 5º Ed. p. 1105.

Jazar, *R*. *N*. (2008) Vehicle Dynamics: Theory and Application. Springer, p. 1022.