

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**ESTUDO DA DINÂMICA  
LONGITUDINAL DO TREM**

**ROBERTO SPINOLA BARBOSA**

**São Paulo  
1993**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

# **ESTUDO DA DINÂMICA LONGITUDINAL DO TREM**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual  
de Campinas para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia.

Autor: **ROBERTO SPINOLA BARBOSA**

Orientador: **Prof. Dr. HANS INGO WEBER**

Campinas - São Paulo

1993

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Dissertação de: **Mestrado**

Título da Dissertação: **Estudo da Dinâmica Longitudinal do Trem**

Autor : **Roberto Spinola Barbosa**

Orientador: **Prof. Dr. Hans Ingo Weber**

Dissertação submetida à Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. **Hans Ingo Weber**, Presidente

---

Dr. **Antônio Arlindo Guidetti Porto**

---

Professor Convidado: Dr. **Francisco Emilio Baccaro Nigro**

---

Professor Convidado: Dr.

Campinas, 29 de Setembro de 1993

À Emilia, companheira dos momentos difíceis. À Maíra pelo estímulo e criatividade transmitidos. Ao Danilo pela energia irradiada, incansável...

À Emilia, Maíra e Danilo motivos da minha vida, pela compreensão, apoio e cooperação que me deram durante esta jornada.

Aos meus pais com reconhecimento pela educação recebida.

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar seus agradecimentos ao Prof. Hans pela orientação desta dissertação e especialmente pela paciência na espera do seu crescimento.

Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo - IPT, à Divisão de Tecnologia de Transportes - DITT e especialmente ao corpo técnico do Desenvolvimento Ferroviário.

Aos colegas do curso de Pós-Graduação do UNICAMP deste período de estudos (1991 à 1993).

De forma geral a todos aqueles que direta ou indiretamente incentivaram e contribuíram para a realização deste árduo trabalho.

---

# SUMÁRIO

## Capítulo 1

1.1 Introdução	1
1.2 Histórico	6
1.3 Estado da Arte	9
1.4 Motivação e Aplicações	12

## Capítulo 2

2.1 Composição de Veículos	15
2.2 Sistema de Tração	16
2.3 Freio Pneumático	19
2.4 Acoplamento	21
2.5 Via Férrea	24
2.6 Operação do Trem	27

## Capítulo 3

3.1 Modelo do Trem	30
3.2 Modelo do ACT	31
3.3 Modelo do Sistema de Freio	41
3.4 Resistência ao Movimento	46

## Capítulo 4

4.1 Equações de Movimento	50
4.2 Processo de Integração Numérica	55
4.3 Condições Iniciais	57

## Capítulo 5

5.1 Modelo Físico	62
5.2 Equações de Movimento	63
5.3 Equações Diferenciais	67
5.4 Desacoplamento das Equações	70
5.5 Sistema com Amortecimento	71
5.6 Verificação da Ortogonalidade	74
5.7 Conteúdo da Matriz Fundamental	77
5.8 M.F. para Sistema com Amortecimento	82
5.9 Integral de Convolução	85

## Capítulo 6

6.1 Estudo de Caso	89
6.2 Condições da Simulação	90
6.3 Simulação por Integração Numérica	91
6.4 Resultados do Método Analítico	96

## Capítulo 7

7.1 Análise dos Resultados	104
7.2 Conclusões	118

- Anexo A** - Características do Aparelho de Choque e Tração
- Anexo B** - Sistema de Freio
- Anexo C** - Determinação das Características Equivalentes do ACT
- Anexo D** - Estudo da Variação da Rigidez e Amortecimento
- Anexo E** - Métodos de Integração Numérica
- Anexo F** - Gráficos do Impulso

## Referências Bibliográficas

---

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Ilustração de Trem Longo de Minério	5
FIGURA 2 - Esquema do Sistema de Freio	20
FIGURA 3 - Vista Explodida do Engate e ACT	21
FIGURA 4 - Aparelho de Choque e Tração	23
FIGURA 5 - Perfil Topográfico da Via Férrea	25
FIGURA 6 - Forças de Compressão (Sup.) e Tração (Inf.)	32
FIGURA 7 - Esquema das Cunhas do ACT	34
FIGURA 8 - Curva do ACT. (Modificada)	34
FIGURA 9 - Ciclo de Histerese do ACT	37
FIGURA 10 - Localização dentro do Ciclo de Histerese	39
FIGURA 11 - Curva de Pressão no Cilindro de Freio	43
FIGURA 12 - Representação dos Trechos	44
FIGURA 13 - Detalhe da Força nos Engates	51
FIGURA 14 - Forças Agrupadas dos Engates	51
FIGURA 15 - Diagrama de Bloco do Programa	56
FIGURA 16 - Modelo do Conjunto de Veículos	62
FIGURA 17 - Diagrama de Corpo Livre	64
FIGURA 18 - Representação da Função Força Externa	87

---

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - Volume de Carga Transportada	3
GRÁFICO 2 - Curva do Gerador	17
GRÁFICO 3 - Curva característica do ACT	33
GRÁFICO 4 - Registro da Velocidade (1º Veículo)	92
GRÁFICO 5 - Registro da Aceleração (1º Veículo)	92
GRÁFICO 6 - Registro das Forças (1º Acoplamento)	93
GRÁFICO 7 - Registro das Forças (5º Acoplamento)	93
GRÁFICO 8 - Registro das Forças (9º Acoplamento)	94
GRÁFICO 9 - Registro das Forças (13º Acoplamento)	94
GRÁFICO 10 - Registro das Forças (19º Acoplamento)	95
GRÁFICO 11 - Pressão do Cilindro de Freio (1º e 20º Veículos)	95
GRÁFICO 12 - Autovalores do Sistema	97
GRÁFICO 13 - Autovetores do Sistema	97
GRÁFICO 14 - Deslocamentos dos G.L. do Sistema	101
GRÁFICO 15 - Velocidades dos G.L. do Sistema	101
GRÁFICO 16 - Força entre Graus de Liberdade	102
GRÁFICO 17 - Força do Sistema	103
GRÁFICO 18 - Comparação das Forças (1 G.L.)	106
GRÁFICO 19 - Comparação das Forças (3 G.L.)	106
GRÁFICO 20 - Comparação das Forças (5 G.L.)	107
GRÁFICO 21 - Comparação das Forças (7 G.L.)	107
GRÁFICO 22 - Comparação das Forças (9 G.L.)	108
GRÁFICO 23 - Comparação das Forças (11 G.L.)	108
GRÁFICO 24 - Comparação das Forças (13 G.L.)	109
GRÁFICO 25 - Comparação das Forças (15 G.L.)	109
GRÁFICO 26 - Comparação das Forças (17 G.L.)	110
GRÁFICO 27 - Comparação das Forças (19 G.L.)	110
GRÁFICO 28 - Impulso entre Dois Veículos	112
GRÁFICO 29 - Deslocamento (Desloc Unitário 1º G.L.)	114
GRÁFICO 30 - Força (Desloc Unitário 1º G.L.)	115
GRÁFICO 31 - Velocidade (Vel. Unitária 1º G.L.)	116
GRÁFICO 32 - Força (Vel. Unitária 1º G.L.)	117

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Volume de Carga Transportada	1
TABELA 2 - Principais Ferrovias	8
TABELA 3 - Evolução do Tamanho dos Trens	12
TABELA 4 - Condições Iniciais	59

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\sim$  - (til) representação de variável dependente do tempo.  
 $i$  - índice de variável (veículo).  
 $j$  - índice de variável (acoplamento).  
 $f$  - força.  
 $g$  - aceleração da gravidade.  
 $n$  - número de graus de liberdade do sistema.  
 $nl$  - número de locomotivas da composição.  
 $p$  - pressão do sistema de freio.  
 $t$  - tempo.  
 $u_{i\sim}$  - deslocamento associado ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $\dot{u}_{i\sim}$  - velocidade associada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $\ddot{u}_{i\sim}$  - aceleração associada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $m_i$  - massa associada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $m_{ri}$  - massa rotacional associada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $s_i$  - rigidez associada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $d_i$  - amortecimento associado ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $f_{i\sim}$  - força aplicada entre o  $i$  e  $(i-1)$ -ésimo grau de liberdade.  
 $f_{e_i}$  - força externa aplicada ao  $i$ -ésimo grau de liberdade.  
 $u_{ACT}$  - deslocamento do Aparelho de Choque e Tração.  
 $k_{ACT}$  - rigidez do ACT.  
 $k_m$  - rigidez da mola principal (ou de retorno) do ACT.  
 $f_{r_m}$  - força de resistência ao movimento.  
 $f_{r_r}$  - força de resistência ao rolamento.  
 $f_{r_g}$  - força de resistência devido a inclinação da via.  
 $f_{r_c}$  - força de resistência devido a curvatura da via.  
 $f_{r_p}$  - força de resistência de partida.  
 $ff_i$  - força de retardamento do  $i$ -ésimo veículo.  
 $f_L$  - força de tração da locomotiva.  
 $\{ \}$  - representação de vetor (entre chaves).  
 $[ ]$  - representação de matriz (entre colchetes).  
 $\{ \}^T$  - vetor transposto.  
 $[ ]^{-1}$  - inversa da matriz.

- $\{\tilde{u}\}$  - vetor de deslocamentos do sistema.
- $\{\tilde{u}'\}$  - vetor de velocidades do sistema.
- $\{\tilde{u}''\}$  - vetor de acelerações do sistema.
- $\backslash$  - autovalor.
- $\{\mathbf{X}\}$  - autovetor.
- Det. - determinante.
- $[\mathbf{M}]$  - matriz de massa do sistema.
- $[\mathbf{D}]$  - matriz de amortecimento do sistema.
- $[\mathbf{S}]$  - matriz de rigidez do sistema.
- $[\mathbf{U}]$  - matriz modal.
- $[\mathbf{O}]$  - matriz fundamental.
- $dt$  - diferencial em relação ao tempo.

---

## LISTA DE ABREVIATURAS

AAR	- Association of American Railroads
ACT	- Aparelho de Choque e Tração.
CVRD	- Companhia Vale do Rio Doce.
EFC	- Estrada de Ferro Carajás.
EFVM	- Estrada de Ferro Vitória Minas.
FEPASA	- Ferrovia Paulista S.A.
ITT	- Institute of Transporte and Technology.
ORE	- Office for Research and Experiments da UIC.
UIC	- Union Internationale des Chamin de Fer.
RFFSA	- Rede Ferroviária Federal S.A.

## UNIDADES ADOTADAS

[s]	- unidade de tempo em segundo.
[m]	- unidade de comprimento em metro.
[m/s]	- unidade de velocidade em metro por segundo.
[km/h]	- unidade de velocidade em quilometro por hora.
[m/s <sup>2</sup> ]	- unidade de aceleração em metro por segundo ao quadrado.
[kg]	- unidade em massa em quilograma.
[N]	- unidade de força em Newton.
[J]	- unidade de energia em Joule.
[kJ]	- unidade de energia em quilo Joule.
[N/m]	- unidade de rigidez em Newton por metro.
[Ns/m]	- unidade de amortecimento em Newton segundo por metro.

## RESUMO

São desenvolvidos métodos de cálculo para realizar o estudo do comportamento da **Dinâmica Longitudinal do Trem**. Os elementos mecânicos relevantes para a representação do sistema são descritos e modelados.

São realizados os cálculos do comportamento do trem pelos dois métodos: o primeiro baseado no processo de integração numérica com elementos não lineares; o segundo, analítico e linear, utiliza vetor de estado e a Matriz Fundamental composta pelos autovalores e autovetores da solução do sistema de equações diferenciais ordinárias com coeficientes invariantes no tempo.

Para introdução das forças externas no sistema utiliza-se da Integral de Convolução, realizada com auxílio da Matriz Dinâmica do Sistema e Matriz Fundamental.

Os dois métodos são utilizados para o estudo de caso de um processo de frenagem do trem. Os valores calculados são apresentados e analisados. Os resultados mostram boa concordância sendo que o método analítico permite visualizar o comportamento próprio do sistema.

## ABSTRACT

Title: **Longitudinal Train Dynamics.**

Author: **Roberto Spinola Barbosa**

Sponsor: Prof. Dr. **Hans Ingo Weber**

University: **Universidade Estadual de Campinas - São Paulo - Brasil**

Analytical methods to study the **Longitudinal Train Dynamics** were developed and presented. System relevant mechanical elements were described and modeled.

Two methods for train behavior calculation were developed. The first method, consisted of a numerical integration process with non-linear elements. The second method, being analytical and linear, used state-space vector and Fundamental Matrix (or Transition Matrix) composed by eigenvalues and eigenvectors of the ordinary differential equations solution with time invariant coefficients. Convolution Integral solved with Sistem Dynamic Matrix was used to introduce external forces to the sistem.

Both methods were used in a Train Braking Process Case Study. Calculated values were presented and analysed. The results shown good agreement and the analytical method allows a visualization of the system's behavior.

# Capítulo 1

## 1.1 Introdução

O sistema de transporte ferroviário é a mais tradicional forma de movimentação de passageiros e cargas. É um meio de transporte econômico quando comparado com o modal rodoviário, predominante no país. Entretanto este fato está intimamente ligado à sua operação racional e eficiente.

O volume de carga transportada no país por ferrovia gira em torno de 218 milhões de toneladas por ano. Uma parcela expressiva deste volume de carga, cerca de 63%, é transportada por trens unitários longos como pode ser observado na Tabela 1.

TABELA 1 - Volume de Carga Transportada

Distribuição do Volume de Transporte por Tipo de Trem			
Carga Útil em Milhares de Toneladas (1992)			
Empresa	Trem Unitário Longo	Outros	Total
EFVM	64.600 (76%)	19.956 (24%)	84.556
RFFSA	32.296 (40%)	48.506 (60%)	80.802
EFC	32.792 (95%)	1.823 ( 5%)	34.615
FEPASA	* 6.970 (38%)	11.238 (62%)	18.208
<b>TOTAIS</b>	<b>136.658 (63%)</b>	<b>81.523 (37%)</b>	<b>218.181</b>

Fonte Revista Ferroviária - Dez/1992

\*Somente Derivados de Petróleo

Atualmente as necessidades econômicas têm impellido as empresas operadoras das ferrovias a incrementar a capacidade deste segmento de transporte através do aumento de sua produtividade.

---

Propostas de novos trechos ferroviários e novas formas operacionais têm sido analisadas sobre diversos aspectos, inclusive sob o ponto de vista técnico operacional. A tendência mundial tem apresentado soluções que apontam no sentido de trens unitários longos, de alta produtividade e operando em corredores prioritários de transporte.

Esta tendência representa, devido ao fato do tamanho do trem atingir comprimentos de até 200 veículos, um aumento considerável de esforços entre veículos. Neste caso os efeitos de ordem dinâmica interna tornam-se mais pronunciados, e menos previsíveis aos comandos do maquinista.

Estas mudanças têm dificultado a condução segura de trens, por ser mais difícil de se controlar os efeitos dinâmicos e contra-golpes produzidos pela condução em perfil de via acidentado, típico nas ferrovias brasileiras. Isto tem acarretado problemas operacionais, como por exemplo, alteração na distância de parada e também nos equipamentos, tais como quebra de engates e rodas.

A movimentação de um trem entre a origem e o destino requer várias operações que incluem acelerações, frenagens e paradas, praticadas sobre diferentes tipos de topografia e sobre diversas condições climáticas. Esta operação resulta em interações dinâmicas entre os veículos no sentido longitudinal e também entre os veículos e a via férrea. As forças longitudinais internas do trem, aquelas transmitidas entre os acoplamentos dos veículos, contribuem significativamente para as condições de segurança da operação ferroviária.

A distribuição do volume de carga transportada entre as principais ferrovias nacionais pode ser observada no Gráfico 2. As maiores contribuições são da Estrada de Ferro Vitória Minas da Companhia Vale do Rio Doce (EFVM-CVRD), que opera basicamente com trens longos de minério de ferro, e da Rede Ferroviária Federal (RFFSA) que se utiliza de trens longos de minério na Seção Regional 3.

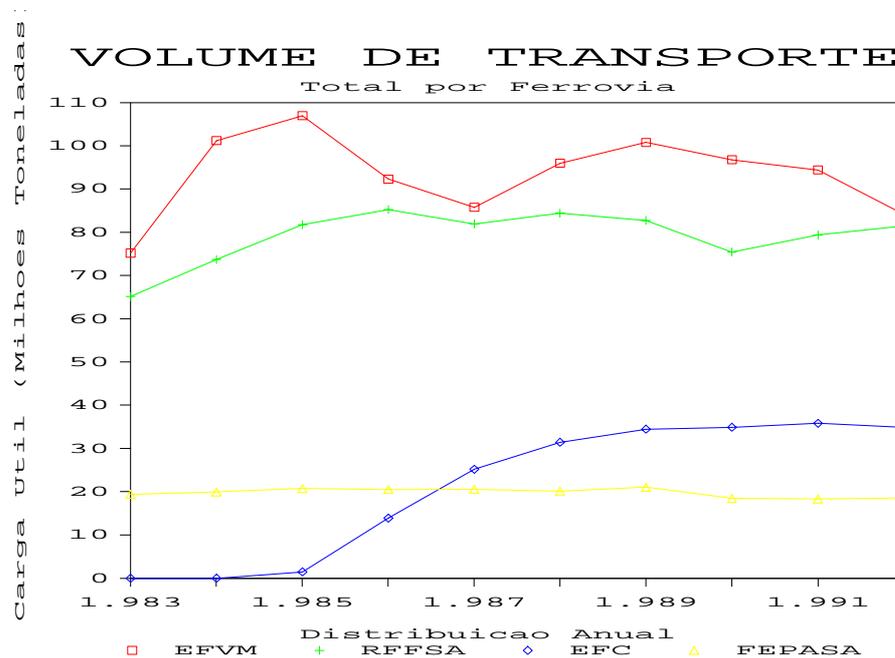


GRÁFICO 1 - Volume de Carga Transportada

O tema Dinâmica Longitudinal do Trem trata primordialmente do estudo dos efeitos dinâmicos na direção longitudinal. Uma vez que a tendência mundial tem sido o aumento do número de veículos nos trens, esta dimensão tem sido objeto de atenção por parte dos técnicos da ferrovia.

As forças longitudinais de compressão desenvolvidas entre os veículos em trens longos são tão expressiva que podem levar ao descarrilhamento. Quando o trem se move em curvas acentuadas podem ocorrer componentes de esforço longitudinal na direção lateral suficientes para deslocar o veículo de sua trajetória sobre a via férrea. Estas questões são preocupações constantes dos engenheiros da ferrovia para as quais deve-se buscar respostas técnicas para garantir uma circulação segura dos trens.

Pode-se listar alguns problemas decorrentes das forças longitudinais elevadas:

- a) risco de descarrilhamento devido às forças de compressão elevadas (efeito "canivete").
- b) risco de descarrilhamento devido às forças de tração elevadas em demarragem nas curvas (tombamento interno).
- c) dificuldades de circulação (elevada distância de parada, inércia de partida, etc.).

- d ) quebra de engates devido a forças longitudinais elevadas.
- e ) dificuldades na operação de carga e descarga.

O fato de se buscar um aumento de velocidade respeitando a mesma distância de parada imposta pelo comprimento físico da instalação da rede de sinalização, força uma aplicação de freio mais intensa o que acarretará efeitos na magnitude e na distribuição das forças longitudinais.

A busca de otimização e aumento de eficiência ferroviária esbarra na comprovação da viabilidade técnico operacional das alternativas propostas para novas configurações e operação dos trens. Esta comprovação pode ser feita basicamente de duas maneiras:

- a ) estudo teórico para previsão do comportamento;
- b ) ensaios de desempenho realizados no campo.

Não há dúvida que os experimentos reais, quando bem realizados, podem ser de grande valia no estudo de desempenho de novas alternativas. Entretanto seus custos e dificuldades de execução são empecilhos de grande monta na obtenção de previsões antecipadas do comportamento do sistema. Estudos teóricos permitem prever o comportamento do trem e estudar as várias combinações de solicitações que estão passíveis de apresentarem problemas.

Nesta circunstância faz-se necessário o desenvolvimento de meios que possam prever o comportamento de trens nas diversas e adversas alternativas de operação. Portanto as inovações identificadas ou propostas a nível do sistema de transporte devem ser verificadas e comprovadas com auxílio de recursos analíticos. Pode-se utilizar das técnicas de modelagem matemática, apoiadas em programas computacionais específicos e dedicados ao assunto, que permitem o estudo das alternativas propostas com maior eficácia.

Neste contexto foi desenvolvido este trabalho visando apresentar, de maneira aplicada, formas de cálculo do comportamento do trem. O cálculo do comportamento dinâmico longitudinal da composição de veículos será realizado, em uma primeira etapa, com auxílio do método de integração numérica. Será utilizada discretização por trechos de cada componente não linear do sistema. Esta etapa foi baseada em trabalho desenvolvido por FELÍCIO [1] no IPT (Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo) em 1984.

Em uma segunda etapa será utilizada a técnica analítica de solução do conjunto de equações diferenciais do sistema dinâmico representativo do trem com auxílio dos autovalores, autovetores e da Matriz Fundamental (ou Matriz de Transferência) em conjunto com a Integral de Convolução. Serão descritos o modelo dos vários equipamentos ferroviários que compõem um trem e determinadas as equações de movimento para o caso do sistema linear com diversos graus de liberdade.

Finalmente será realizado um estudo de caso de um processo de frenagem pelos dois métodos propostos mostrando o potencial de cada uma destas ferramentas no auxílio do estudo do comportamento de trens. Os resultados obtidos serão analisados e comparados buscando apresentar o potencial desta técnica.



FIGURA 1 - Ilustração de Trem Longo de Minério

## 1.2 Histórico

Os primeiros programas para estudo e avaliação do comportamento de trens elaborados até o início da década de 60, foram chamados de Calculadores de Desempenho de Trens [2] (Train Performance Calculator - TPC). Foram programas desenvolvidos com a finalidade de calcular o desempenho da operação de uma composição ferroviária. Estes programas consideravam um modelo bastante simplificado do sistema, sendo processado em computadores analógicos muito rápidos, mas nem sempre precisos.

Outro tipo de programa foi baseado na determinação do consumo de energia para sua movimentação (Train Energy Model-TEM). Este tipo de programa consiste em um simulador concebido para calcular basicamente o consumo de combustível durante a operação.

O programa TEM considerava o trem como uma longa corrente rígida, localizava a posição de cada veículo em relação à via férrea e determinava as forças produzidas pela inclinação da via naquele trecho (grade) e resistência devido à curvatura. Descreviam de maneira simplificada o esforço de tração da locomotiva, a resistência ao rolamento e as forças devido à frenagem.

A ligação entre os veículos produzida pelo aparelho de choque e tração não era modelada, pois os veículos eram considerados como tendo ligação rígida. Entretanto este nível de detalhe foi considerado segundo KLAUSER [2] compatível com a finalidade a que se destinava este tipo de programa como por exemplo os estudos e otimização do consumo de combustível.

Os movimentos do trem foram descritos na época como correspondentes a uma única massa concentrada pontual associada a uma coordenada longitudinal. Dada uma força de tração aplicada à massa total do trem, podiam-se calcular a velocidade e a distância percorrida. Desta forma todas as oscilações e interações internas entre os veículos eram ignoradas.

O modelo investigado em 1969 por HOEVE [3] consistia em uma barra rígida homogênea carregada longitudinalmente por forças de frenagem e permitia obter-se uma ordem de grandeza das forças ao longo da barra. Entretanto esse pesquisador observou que a elasticidade dos acoplamentos desempenhava um papel fundamental no comportamento do sistema.

---

Posteriormente, modelos mais sofisticados passaram a contemplar a discretização individual das massas de cada veículo.

Em 1972, a ORE (Office for Research and Experiments of the International Union of Railways), publicou relatório [3] contendo um extenso estudo sobre forças longitudinais agindo em trens equipados com acoplamentos elásticos convencionais, onde foram utilizados três modelos para cálculo:

- a) Um modelo simplificado considerando o trem como uma barra rígida não tendo portanto nenhum acoplamento nem folga entre dois veículos consecutivos.
- b) Um segundo modelo, mais completo, discretizando cada veículo com massas individuais e idênticas.
- c) Finalmente um terceiro modelo baseado em uma simplificação do segundo com massas agrupadas.

Segundo o autor este trabalho buscou identificar parâmetros que pudessem minimizar as forças longitudinais produzidas nas ligações devidas aos comandos de manobra do trem.

No meio da década de 70 foram implementados modelos com maior grau de sofisticação (Train Operation Simulator - TOS) [4] que incluíam até o cálculo do esforço de interação entre os veículos através do modelamento simplificado do comportamento do acoplamento. Neste caso o modelo discreto finito e homogêneo foi composto por massas concentradas pontuais intercaladas com molas formando uma corrente. Os acoplamentos foram tratados como molas de comportamento linear.

Atualmente países que se valem inteiramente da tecnologia desenvolvida nesta área, são os que utilizam sistemas ferroviários baseados no transporte intenso de carga com trens longos e veículos pesados.

As informações disponíveis no meio ferroviário revelam países como Estados Unidos, União Soviética, Austrália, China e Canadá como possuidores de sistemas de grande capacidade de transporte. O Brasil possui sistemas de elevada capacidade, sendo que algumas de suas linhas possuem eficiência reconhecida mundialmente conforme apresentado na Tabela 4 e Gráfico 2.

TABELA 3 - Principais Ferrovias

Empresa	Setor Regional	Local (Mina - Porto)	Volume de Carga (10 <sup>6</sup> ton)
CVRD	EFVM	Belo Horizonte - Vitória	84,5
RFFSA	SR-3	Belo Horizonte - Rio Janeiro	80,8
CVRD	EFC	Carajás - São Luis	34,6

Por ordem grandeza em volume de carga transportada tem-se a Estrada de Ferro Vitória Minas da Companhia Vale do Rio Doce (EFVM-CVRD), que opera basicamente com trens de minério de ferro, a Rede Ferroviária Federal (RFFSA) que se utiliza de trens longos de minério na Seção Regional 3 e a Estrada de Ferro Carajás (EFC-CVRD) também com trens de minério.

## 1.3 Estado da Arte

O surgimento de modelos para simulação da dinâmica longitudinal de trens aconteceu na década de 60, com o aumento do comprimento dos trens e elevação da velocidade de operação. A partir deste avanço, estudos para o conhecimento do comportamento dinâmico do trem foram intensificados especialmente pelo apoio dos computadores.

A evolução na área de informática popularizou o uso de computadores, expandindo sua utilização nas diversas áreas de engenharia. Atualmente um microcomputador pode ter desempenho superior a um antigo sistema de grande porte. A capacidade de armazenamento de dados também se multiplicou algumas dezenas de vezes e as novas linguagens de programação facilitaram a criação de programas mais elaborados e de fácil utilização.

A AAR (Association of American Railroads) desde a década de 60 vem trabalhando no desenvolvimento de modelos na área ferroviária. Grande impulso foi dado na época do programa americano de conservação de energia quando foi desenvolvido TOES [2] (Train Operation and Energy Simulator). Este programa foi desenvolvido com a finalidade de simular a dinâmica longitudinal de trens.

Pode substituir e estender a funcionabilidade dos primeiros programas desta série (TOS). Foi incorporado a ele um modelo não linear para o aparelho de choque e tração, com amortecimento de atrito seco ou amortecimento hidráulico (dois tipos de amortecimento em uso corrente naquele país), barra de ligação sem folga e modelo fluido-dinâmico do sistema de freio pneumático do trem e o freio da locomotiva (modelo implementado com a cooperação do Research Institute of Transport and Technology ITT).

Durante o processamento dos cálculos são produzidos arquivos de dados contendo os esforços longitudinais nos acoplamentos de cada veículo e seu respectivo ângulo de inclinação em relação a uma linha longitudinal ao longo da via férrea. Com estes dados são verificadas as relações entre as forças lateral e vertical ( $L/V$ ), que podem ser utilizadas como forma de avaliar a tendência ao descarrilhamento. Esta tarefa é realizada com auxílio de outro programa com esta finalidade específica (Pós-processamento).

---

O modelo detalhado do sistema pneumático de freio permite em algumas situações simular falhas ou vazamentos de maneira a verificar acidentes ou funcionamento inadequado de equipamentos. Este programa possui uma arquitetura que permite em linguagem de programação, estabelecer seqüências de instruções temporais para controle de equipamentos e comando da simulação de forma automática.

Uma descrição notável do comportamento do sistema de freio foi abordada pela Office for Research and Experiments da UIC (Union Internationale des Chamin de Fer) [3] em 1972 e também proposta por DUBBELDAM e De PATER [5] em 1975.

Segundo estes autores a propagação da pressão de ar dos cilindros de freio do sistema ferroviário poderia ser representada por um conjunto de retas traçadas no plano cartesiano com ângulos progressivos de inclinação e com polo localizado no terceiro quadrante do sistema de coordenadas.

Assim foi possível descrever em função do tempo o crescimento da pressão do cilindro de freio de cada vagão ao longo do trem, contendo um tempo de atraso a partir do comando do maquinista, propagando-se conforme uma determinada taxa de crescimento (de acordo com a posição do veículo no trem), até atingir o valor máximo estabelecido. Este modelo representa dois efeitos típicos em sistemas pneumáticos quais sejam: o atraso para o sinal de pressão atingir os veículos ao longo do trem e o aumento do tempo de crescimento da pressão do cilindro de freio ao longo do trem.

Um estudo abrangente foi realizado em 1981 pelos técnicos da Japan National Railway-JNR [6] sobre o sistema de transporte ferroviário de minério do complexo de Carajás. Devido às características da CVRD, que optou por trens de 160 veículos com 120 toneladas de peso bruto sobre eixos, foi elaborado um modelo de simulação da dinâmica longitudinal utilizado entre outras finalidades para avaliar os esforços internos desenvolvidos nos acoplamentos, devido ao processo de frenagem. Naquela oportunidade foram identificadas as condições mais críticas para o processo de frenagem.

O Canadá é um dos países que possuem trens de grande comprimento e sabe-se que algumas de suas atividades de pesquisa e desenvolvimento são feitas em conjunto com a AAR, especialmente medidas de campo para obtenção de características de componentes para modelos matemáticos. Entretanto não foi possível a obtenção de publicações deste país com referência ao assunto.

O autor australiano NORMAN [7] em sua tese de mestrado voltada para o tema de frenagem em trens longos, apresentou um modelo matemático para cálculo do comportamento do sistema de freio pneumático utilizado em trens. Este autor fez uma modelagem do comportamento das válvulas de controle e discretizou a tubulação pneumática em sua extensão ao longo do trem. Desta forma pode-se obter a simulação do comportamento do sistema de freio para várias formas de operação.

Na Europa, a União das Ferrovias da Europa (UIC) através do seu Escritório de Pesquisa e Experimentos (Office for Research and Experiments - ORE) como já mencionado no item anterior, também desenvolveu trabalhos sobre o tema. Entretanto não se tem notícia de novas pesquisas sobre o assunto.

No Brasil, em 1984, foi elaborado por FELICIO [1] um estudo completo da Dinâmica Longitudinal do Trem. Foram modelados o sistema de freio e aparelho de choque e tração e escrito o programa para integração numérica. Este trabalho constitui-se na base para a primeira parte deste estudo. Como pode ser observado pela descrição acima, poucos trabalhos foram desenvolvidos sobre o tema. Embora o país disponha de ferrovias de porte comparável mundialmente com as de maior capacidade existentes, que encontram-se em franco processo de aumento de capacidade, poucas ferramentas e tecnologias foram desenvolvidas ou estão disponíveis para aplicação.

Portanto o desenvolvimento de ferramentas de cálculo e estudo da técnica na área da dinâmica longitudinal de trens faz-se oportuno para apoiar avanços na otimização do transporte de cargas.

## 1.4 Motivação e Aplicações

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho está calcada na necessidade de investigação do comportamento dinâmico longitudinal de trens permitindo a otimização do sistema de transporte.

Existe grande carência de conhecimentos e ferramentas de cálculo específicas neste setor e a utilização de técnica apropriada é fundamental para obtenção de resultados para solução dos problemas.

A otimização do transporte nas principais ferrovias do país tem apresentado preferência pela operação com trens longos. Os trens unitários longos, principal contribuição para formar o montante de carga transportada no país, teve ao longo dos anos a evolução do seu comprimento distribuída para as principais ferrovias conforme apresentado na Tabela 6.

TABELA 5 - Evolução do Tamanho dos Trens

Empresa	Regional	Número Vagões	Carga Mil Ton	Data	Observações
CVRD	E.F.V.M.	160	15.6	1966	Início de Operação
		200	19.6	1991	Fase Experimental
RFFSA	SR - 3	86	10.3	1972	Início de Operação
		108	12.9	1987	Implantado
		120	14.4	1992	Fase Experimental
CVRD	E.F.C.	160	19.2	1985	Início de Operação
		180	21.6	1988	-----
		200	24.0	1990	Implantado
		220	26.4	1993	Fase Experimental

Os fatores que, de maneira geral, mais afetam as forças longitudinais produzidas na condução de trens longos, foram agrupadas por GARG [4] da seguinte forma:

- a) número de locomotivas e vagões, seu peso relativo, dimensão, posição e distribuição;
- b) as inclinações verticais, curvaturas ou irregularidades da via férrea na qual o trem trafega;
- c) características do sistema de freio utilizado;

- d ) tipo do aparelho de choque e tração empregado;
- e ) a velocidade de operação do trem e a forma de manipulação do acelerador e do freio.

Os esforços nos engates estão associados com efeitos causados pelo número de veículos do trem. O problema mais frequente causado pelas forças longitudinais excessivas é a quebra de engates.

Dois efeitos importantes devem ser mencionados, vertical e lateral. Devido ao fato do centro de gravidade do veículo estar acima da linha de centro dos acoplamentos, o desenvolvimento de choques internos pode produzir um binário de forças de tal forma a aliviar a carga vertical de um dos truques aumentando o risco de descarrilhamento.

No caso de curvas de raio reduzido, as forças longitudinais de tração podem tombar o veículo para o lado interno das mesmas devido a componentes laterais da força nos acoplamentos. Este tipo de efeito, embora importante, não será abordado neste trabalho.

Para determinação da performance de um trem em um percurso, com objetivo de dimensionar o espaçamento da sinalização na via, pode-se por exemplo, utilizar um programa do tipo Calculador de Desempenho de Trem (TPC). Entretanto, para investigações do comportamento dinâmico do trem deve-se empregar técnicas de maior sofisticação com um custo mais elevado de processamento.

Portanto para o estudo de novas alternativas e configurações, especialmente no que se refere ao aumento da capacidade de transporte, é fundamental a realização de estudo do comportamento dinâmico longitudinal.

O emprego da técnica na previsão de comportamento dinâmico longitudinal de trens está vinculado de maneira geral ao estudo de novas configurações para o sistema ferroviário ou para a análise de problemas específicos.

Relaciona-se à seguir algumas aplicações específicas para utilização desta técnica:

- a ) dimensionamento do peso bruto de trens ou verificação da viabilidade de novos tamanhos de trens.
- b ) investigação na área de conservação de energia.

- 
- c ) identificação de limites de operação (tempo de percurso, velocidade máxima, demarragem, etc).
  - d ) análise de formas de operação de trens.
  - e ) estudo de novas configurações de tração.
  - f ) verificação de desempenho de sistemas de freio.
  - g ) estimativa de distância de parada para regulagem de sistemas automáticos de controle de trens (atc).
  - h ) criar subsídios para dimensionamento de pátios de cruzamento, sinalização e emplacamento.
  - i ) investigação em causas possíveis de acidentes.
  - j ) fornecimento de subsídios para desenvolvimento e projeto de aparelhos de choque e tração.
  - k ) avaliação de novos componentes ou projeto de componentes e subsistemas.
  - l ) treinamento de maquinistas.

Nos itens acima mencionados deve-se ter como finalidade o estudo e análise de situações novas, buscando o aumento de produtividade e eficiência do transporte.

Neste trabalho serão abordados apenas os efeitos de direção longitudinal ao trem. Os demais (vertical e lateral), são avaliados através de um modelo completo do veículo onde os esforços nos acoplamentos produzidos pela dinâmica longitudinal do trem são combinados com os resultados obtidos a partir do estudo da dinâmica completa do veículo.

---

## Capítulo 2

Neste item será feita a descrição dos equipamentos do trem propriamente dito, relevantes sob o ponto de vista da dinâmica longitudinal, que serão utilizados na modelagem do sistema. A abordagem será apenas descritiva, sendo que o detalhamento matemático de cada item será feito mais adiante.

### 2.1 Composição de Veículos

O trem é um conjunto de veículos conectados pelos acoplamentos formando uma corrente. Sua formação é dependente do tipo e finalidade do transporte e da disponibilidade dos veículos a serem agrupados. Seu comprimento pode variar entre pequenos comboios de alguns veículos a serem manobrados em um pátio, até centenas de veículos carregados para transporte de minério. Os comboios para transporte podem ser do tipo unitário, com vagões de mesma espécie e carga e do tipo misto com diversas espécies de vagões intercalados no trem.

Cada veículo possui peso total constituído pelo somatório do peso próprio da estrutura do veículo (tara) e da carga transportada (lotação). Para efeito do modelamento, a inércia correspondente à massa total deve ser acrescida da inércia correspondente às partes girantes do veículo (rodeiros).

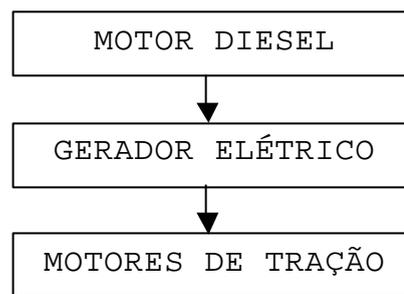
Para se movimentar, o veículo possui uma resistência intrínseca ao rolamento devido aos mancais e ao atrito entre as rodas e os trilhos. À medida em que a velocidade aumenta surgem efeitos de origem aerodinâmica de arraste devido à área frontal e irregularidades laterais.

Pode-se imaginar que o trem forma uma longa corrente cujos elos são os acoplamentos de ligação entre cada veículo. Esta é a imagem figurativa para compreender a modelagem realizada neste trabalho.

## 2.2 Sistema de Tração

A locomotiva é a unidade que produz esforço para movimentar os veículos. Pode ser descrita simplificada como uma unidade motriz que transmite torque para os eixos produzindo o esforço de tração. Este esforço é propagado através da estrutura da locomotiva até o engate onde é transmitido para os vagões acoplados.

O diagrama de blocos abaixo resume simplificada os sistemas contidos na locomotiva responsáveis pela produção do esforço de tração.



Inicialmente tem-se um motor diesel como fonte primária de energia acoplado a um gerador. Este conjunto é controlado pelo "Governador", que faz o controle da injeção de combustível no motor diesel e da excitação da armadura, de forma a produzir no gerador, níveis constantes de energia na saída (produto da tensão pela corrente). Então, cada ponto de aceleração da locomotiva está associado a um nível de potência a ser fornecida para os motores de tração.

Não serão detalhadas neste trabalho as características do motor diesel e do "Governador". Serão apresentadas apenas as curvas de Tensão x Corrente do gerador que acionam os motores de tração.

## GERADOR DA LOCOMOTIVA DE UM PONTO DE ACELERAÇÃO

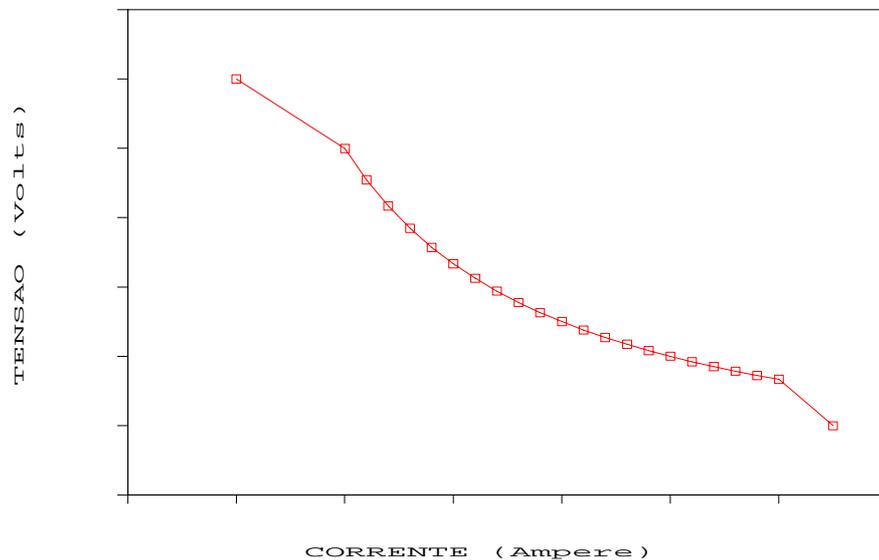


GRÁFICO 3 - Curva do Gerador

Observa-se que no Gráfico 4 a curva de tensão  $\times$  corrente do gerador que produz a potência para acionamento dos motores de tração. Na parte superior a curva muda sua tendência devido ao limite de tensão e na parte inferior devido ao limite de corrente sobre o gerador.

A energia produzida no gerador é enviada aos motores de tração. Em geral cada eixo de locomotiva recebe um motor de tração acoplado através de um conjunto redutor à base de engrenagens. O torque produzido pelo motor de tração é transmitido às rodas produzindo as forças de tração.

Algumas características adicionais das locomotivas devem ser mencionadas pois são fundamentais na elaboração do modelo:

- a) freio dinâmico da locomotiva
- b) freio independente da locomotiva
- c) limite de adesão

O freio dinâmico é um efeito produzido pela reversão dos motores de tração para trabalharem como geradores. A corrente por eles gerada é dissipada geralmente em bancos de resistência.

O freio independente da locomotiva é um sistema pneumático de aplicação de força sobre sapatas de freio, como as dos vagões, operado independentemente do freio dinâmico.

O limite de adesão é aquele no qual as rodas deixam de transmitir esforço de tração e passam a patinar. Este limite é estabelecido pelo produto do peso próprio da locomotiva pelo coeficiente de atrito estático entre a roda e o trilho.

Estes valores podem ser alterados em função da distribuição irregular da carga vertical sobre cada roda devido principalmente às irregularidades verticais da via férrea e ao desbalanceamento de momentos causados pela altura do centro de gravidade da massa do veículo e do ponto onde as forças dos engates e os esforços de tração e frenagem são aplicados, ou seja no ponto de contato entre a roda e o trilho.

Estes três efeitos podem ser adequadamente contemplados na elaboração do modelo para permitir melhor representatividade dos efeitos do acionamento.

## 2.3 Freio Pneumático

Atualmente o sistema de freio pneumático utilizado em trens modernos é composto basicamente de sete subsistemas:

- a ) reservatório principal (Rp)
- b ) válvula manipuladora de controle automático (Vm)
- c ) válvula de controle do freio (Vc)
- d ) reservatório auxiliar combinado com emergência (Ra/Re)
- e ) cilindro de freio (Cil)
- f ) válvula redutora de alívio (Vra)
- g ) válvula de redução  $A_1$  ( $A_1$ )

O reservatório principal, localizado na locomotiva (Rp), é alimentado por compressores de ar. Estes suprem ar para carregar o sistema e principalmente os reservatórios auxiliares e de emergência localizados em cada veículo. Este carregamento é realizado através do encanamento geral, tubulação pneumática que atravessa e interliga cada um dos veículos

Quando o trem inicia a sua operação, ou após o término de uma operação de frenagem, é necessário que os reservatórios de cada veículo sejam recarregados.

O controle de aplicação e alívio do freio é realizado pela válvula manipuladora de controle automático comandada pelo maquinista do trem. Sua função é suprir e liberar ar para o encanamento geral.

A válvula de controle do freio localizada em cada veículo se encarrega de "sentir" as variações de pressão do encanamento geral provocadas pela válvula manipuladora, permitindo o carregamento do reservatório auxiliar quando este estiver com pressão abaixo da nominal.

Quando houver uma redução de pressão no encanamento geral, a válvula de controle libera ar do reservatório auxiliar para o cilindro de freio de forma proporcional à redução de pressão aplicada. Por sua vez, o cilindro de freio aplica força sobre as alavancas de distribuição dos esforços (timoneria) que se encarrega de movimentar as sapatas de freio, produzindo as forças de frenagem.

O sistema de freio com os seus subsistemas pode ser observado esquematicamente na Figura 2.

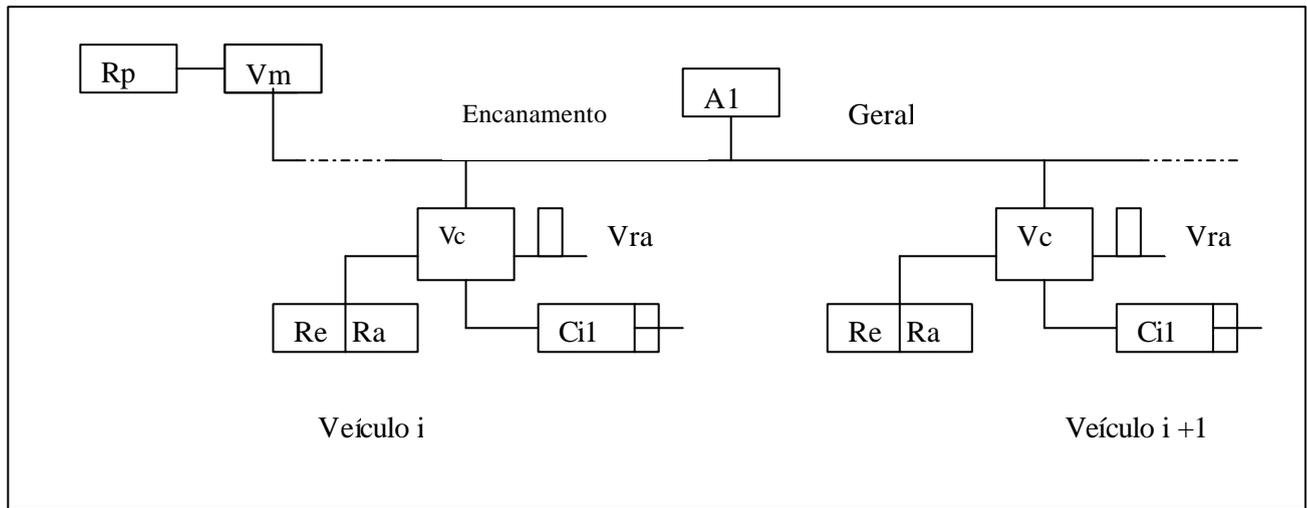


FIGURA 2 - Esquema do Sistema de Freio

## 2.4 Acoplamento

O conjunto **Engate e Aparelho de Choque e Tração** é o responsável pela interligação física entre os veículos. O engate realiza a união entre dois veículos consecutivos e o aparelho de choque e tração, ou simplesmente ACT, fica alojado entre o engate e a estrutura do veículo.

A montagem completa do sistema pode ser visto na Figura 4 que mostra o detalhe de cada componente.

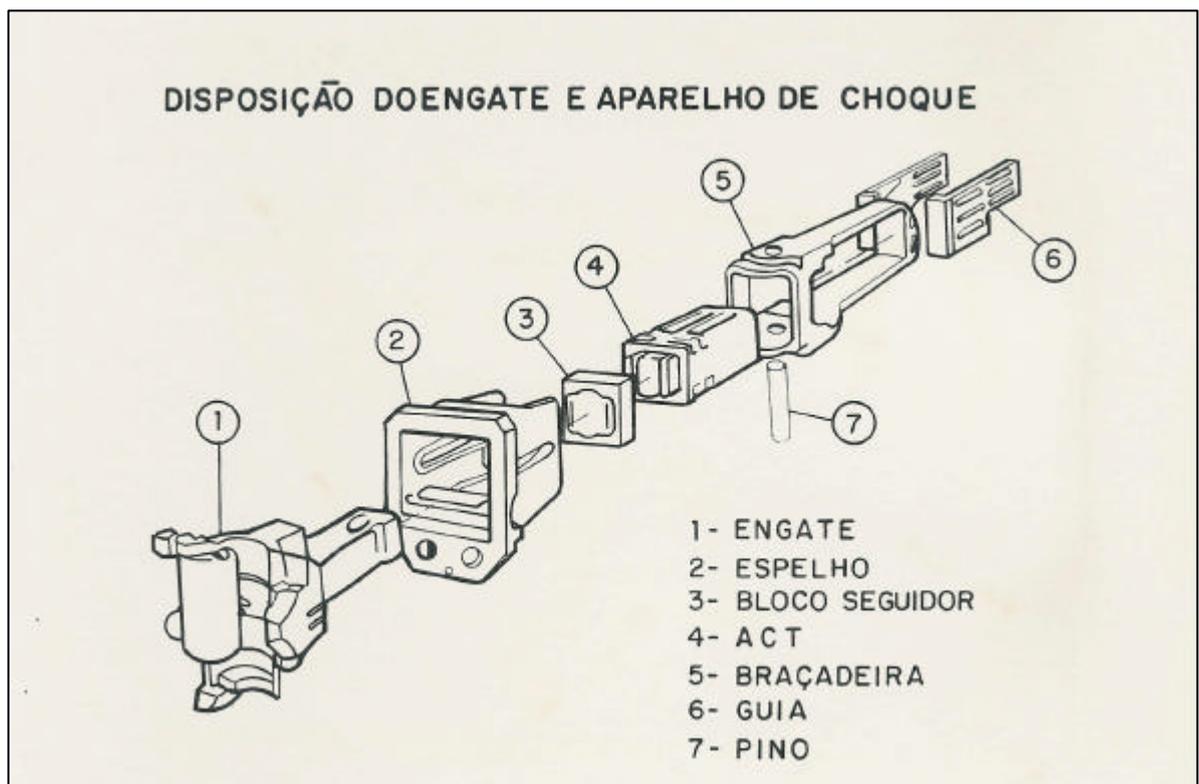


FIGURA 3 - Vista Explodida do Engate e ACT

---

O ACT tem a função básica de absorver a energia dos impactos produzidos pelo movimento relativo entre dois vagões. Este dispositivo permite reduzir picos de força transmitidos através da estrutura do veículo poupando-a de danos.

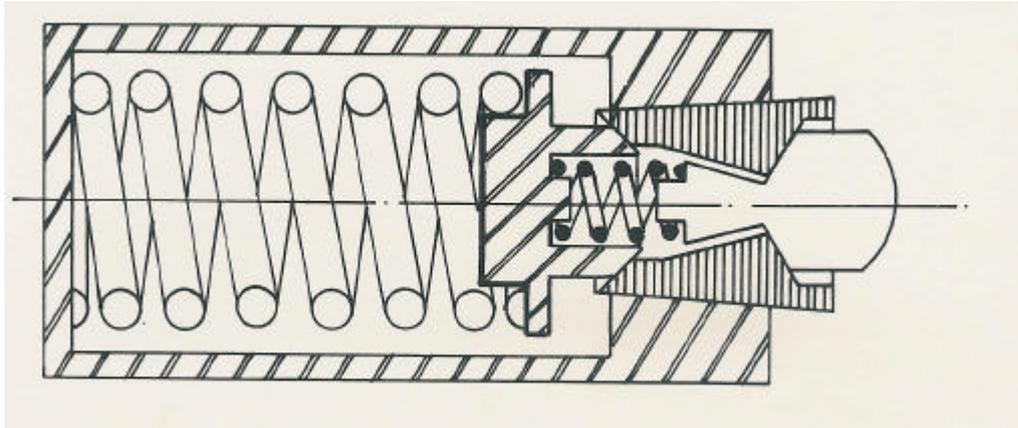
Existem diversos tipos de aparelhos de ACT, entre os quais pode-se citar o tipo baseado em cilindro hidráulico e também o de borracha. Entretanto o mais utilizado no país é o tipo de mola e cunhas de fricção e será o modelo utilizado durante toda a explanação no texto e nos cálculos realizados. Raciocínio análogo poderá ser usado para os outros tipos.

O ACT é essencialmente um dispositivo mecânico composto por molas e cunhas de fricção. Sua montagem é feita dentro de uma carcaça (item 1) metálica retangular, como pode ser vista na Figura 8. Esta Figura apresenta o esquema de um ACT do tipo mola/cunha de fricção nas posições livre (desenho superior) e comprimida (desenho inferior).

A parte frontal composta pelo aplicador (item 6) e assento da mola (item 3), que se apóiam sobre a mola principal, que quando forçada para dentro pelo engate pressiona as cunhas de fricção (item 4) contra as paredes internas laterais da carcaça (item 1) produzindo atrito seco e dissipando a energia do impacto.

As cunhas de fricção (item 4) são elementos bipartidos e pressionados pelas paredes do aplicador (item 6) e assento da mola (item 3). Quando aliviada a força de compressão, a mola de retorno (item 5) tende a separar o aplicador do assento das molas, fazendo aliviar a pressão sobre as cunhas criando o efeito de histerese.

Para efeito de modelagem, o ACT será descrito como um elemento de mola com fricção de **Coulomb, proporcional e unidirecional**.



- 1- CARCAÇA  
 2 - MOLA PRINCIPAL  
 3 - ASSENTO DA MOLA  
 4 - CUNHAS DE FRICÇÃO  
 5 - MOLA DE RETORNO  
 6 - APLICADOR

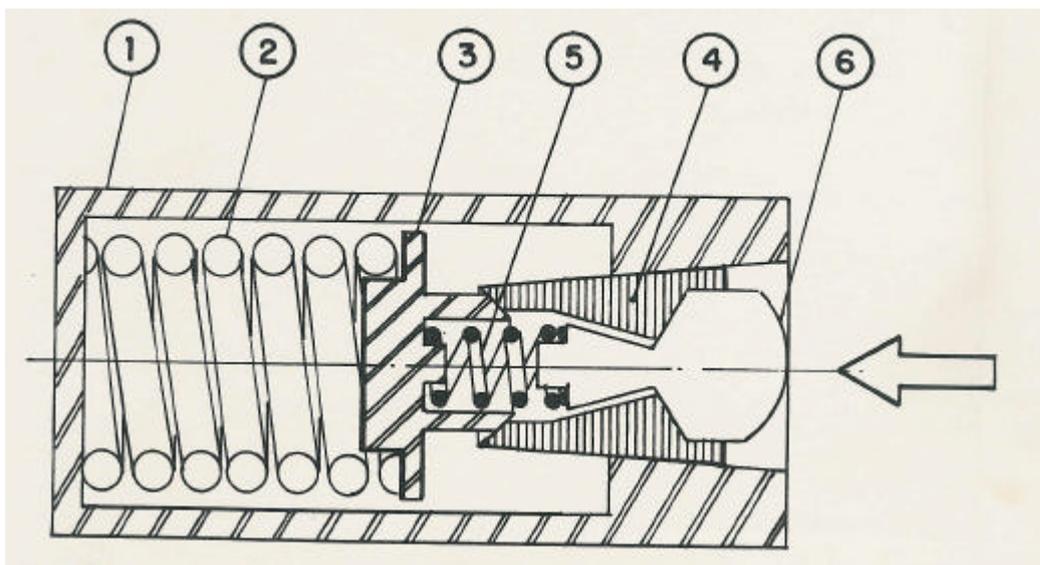


FIGURA 4 – Aparelho de choque e Tração

## 2.5 Via Férrea

A via férrea por onde trafegam os trens é constituída por uma grade estrutural composta por dormentes fixados transversalmente aos trilhos. Esta grade está geralmente assentada sobre pedra britada e solo compactado, que correspondem ao lastro e sublastro respectivamente. Este conjunto forma o leito que dá sustentação às cargas produzidas pela passagem dos veículos.

Neste estudo a interação entre o veículo e a via férrea será considerada apenas na direção longitudinal decorrente do fato da ênfase deste trabalho ser a dinâmica longitudinal. Portanto, as imperfeições verticais, laterais e de bitola, não serão explicitamente levadas em consideração.

Esta simplificação entretanto está minimizada na sua parcela referente aos movimentos longitudinais, através da inclusão das forças correspondentes à força de resistência ao movimento longitudinal dos veículos.

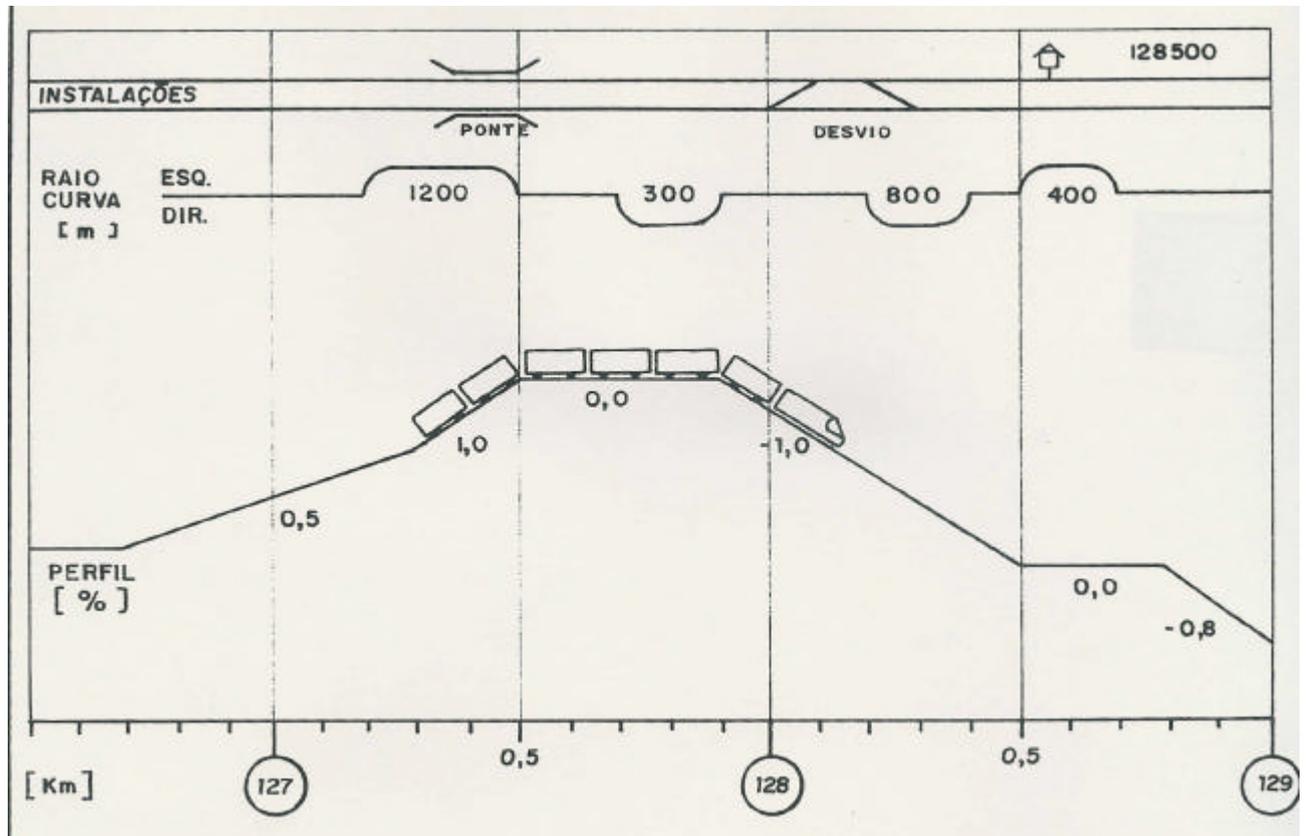
Para a metodologia proposta, devem ser levadas em consideração somente as propriedades da via que afetam direta e intensamente os movimentos longitudinais. Estas propriedades são a rampa e o raio de curva.

Portanto para o estudo de comportamento do trem em circulação por um determinado trecho da via, deve-se ter disponíveis as características da via na posição em que cada veículo está trafegando durante a sua marcha. À semelhança dos mapas topográficos de via, sugere-se uma subdivisão por trechos homogêneos contendo os parâmetros essenciais que caracterizam cada trecho.

Para formar uma base de dados para consulta, sugere-se a montagem de arquivos contendo por trecho, as seguintes informações:

- a ) início do trecho de via;
- b ) final do trecho de via;
- c ) inclinação vertical em porcentagem (rampa);
- d ) raio de curva do trecho de via.

### DIAGRAMA DE INFORMAÇÕES SOBRE O PERFIL DA VIA FÉRREA



### EXEMPLO DE TRECHOS DE VIA

ID	RAMPA	CURVA	INÍCIO	FINAL	OBSERVAÇÃO
49	0,5	$\infty$	126.700	127.200	
50	0,5	-1200	127.200	127.300	
51	1,0	-1200	127.300	127.500	PONTE
52	0,0	$\infty$	127.500	127.700	
53	0,0	300	127.700	127.900	
54	-1,0	$\infty$	127.900	128.200	DESVIO
55	-1,0	800	128.200	128.400	
56	-1,0	$\infty$	128.400	128.500	
57	0,0	-400	128.500	128.700	CABINE
58	0,0	$\infty$	128.700	128.800	
59	-0,8	$\infty$	128.800	130.000	

FIGURA 5 – Perfil Topográfico da Via Férrea

Estes dados podem ser observados na Figura 10 que mostra esquematicamente a posição da composição na via e suas respectivas características topográficas.

Outras informações complementares tais como a cota inicial, restrição de velocidade, nome da estação ou alguma outra informação relevante, podem ser adicionadas para melhor identificação do trecho.

## 2.6 Operação do Trem

A fonte de movimento do trem é a locomotiva. O esforço de tração necessário para a movimentação dos veículos em geral está concentrada no início (cabeceira) do trem. Esta distinção é feita para observação da diferença em relação aos veículos de passageiros (subúrbio ou metropolitano) com vários truques motorizados em cada composição, possuindo portanto esforços de tração distribuídos ao longo do trem.

Esta concentração dos esforços de tração em uma das extremidades do trem provoca uma distribuição não uniforme de esforços durante o processo de aceleração. Os primeiros vagões sofrem maiores esforços internos devido à necessidade de puxar os demais veículos atrás de si. Para trens longos há também a possibilidade de utilizar locomotivas agrupadas em diferentes pontos do trem (chamada no meio ferroviário de tração múltipla).

Para o caso de frenagem a energia cinética total a ser dissipada até a parada do trem é dividida entre os vários veículos que compõem o trem. Entretanto durante o transitório de crescimento da força de frenagem em cada veículo, cria-se um estado de forças de frenagem diferenciado entre um veículo e seus vizinhos.

Devido às folgas existentes no acoplamento que interliga cada par de veículos o trem como um todo pode estar trafegando pela via férrea na condição **comprimido**, **distendido** ou **misto**.

No modo comprimido os acoplamentos estão sujeitos a esforços de compressão ao passo que na condição distendido, os esforços entre os veículos são de tração.

Dependendo da formação do trem (tipo, peso e posição dos veículos) e da topografia da via férrea (variação da inclinação, curvatura, etc.) uma parte do trem pode estar comprimida enquanto outra estará distendida, configurando o modo Misto. Neste caso há possibilidade de ondas de choque produzirem forças longitudinais elevadas.

A condução do trem está intimamente ligada com a seqüência e o intervalo de tempo em que as ações nas locomotivas são aplicadas pelo maquinista. Esses comandos podem ser aceleração ou freio dinâmico, freio independente da locomotiva e freio pneumático do trem.

Como exemplo em algumas situações, é conveniente parar o trem na forma distendida. Isso pode ser obtido através da aplicação de uma pequena força de tração na locomotiva durante o processo de frenagem.

Em outras situações pode ser conveniente manter o trem comprimido durante a frenagem, aplicando inicialmente o freio dinâmico ou independente na locomotiva até que todas as folgas nos acoplamentos tenham sido eliminadas para então aplicar o freio pneumático do trem.

---

## Capítulo 3

Pretende-se neste capítulo descrever a forma utilizada na elaboração do modelo matemático de representação dos sistemas descritos. Este modelamento servirá de base para os cálculos e estudo que formam o escopo deste trabalho.

A técnica de modelamento de sistemas mecânicos tem sido largamente utilizada para a determinação e entendimento do comportamento dinâmico próprio do sistema ou sob as mais diversas condições de perturbação externa.

Para este estudo, é necessária a concepção de um modelo matemático representativo do arranjo físico dos corpos e sistemas que compõem o trem. É necessário portanto que descreva adequadamente as variações e os movimentos do sistema, bem como as forças de interação entre os vários corpos.

Para o desenvolvimento do modelo matemático é conveniente que algumas hipóteses simplificadoras sejam feitas *a priori* para obtenção de um equacionamento simples e objetivo, voltado para atender aos interesses primários que se pretende estudar. Para o estudo mais detalhado de algum aspecto particular do sistema outros modelos mais elaborados podem ser idealizados.

A boa representatividade de um modelo está intimamente ligada à adequada discretização do sistema mecânico e à correta e precisa descrição dos vínculos utilizados (molas, amortecedores, atritos, etc.). A complexidade do modelo está ligada ao número de graus de liberdade a ele associado.

Finalmente, a validade do modelo do sistema deve ser comprovada pela comparação direta dos resultados obtidos através dos resultados dos cálculos com experimentos realizados sob condições controladas.

### 3.1 Modelo do Trem

O trem é composto por uma série de veículos ligados entre si formando uma longa corrente. A massa total de cada veículo será considerada, para efeito deste estudo que tem como objetivo a investigação dos efeitos puramente na direção longitudinal, como sendo concentrada e pontual. Portanto, todos os movimentos laterais ou rotacionais não serão considerados.

O efeito proveniente da inércia rotacional dos corpos girantes será incorporado à massa translacional de cada veículo. Os corpos girantes do veículo são os rodeiros formado pelas rodas, eixos e demais acessórios a ele rigidamente conectados (tais como rolamentos, disco de freio, engrenagens, etc.). Isto é correspondente a criar uma massa translacional equivalente à inércia rotacional do rodeiro dividido pelo quadrado do raio da roda, hipótese válida enquanto não houver deslizamento.

O modelo físico da composição de veículos será representado por um conjunto finito de massas interligadas por acoplamentos de comportamento não linear com histerese. Para permitir boa representatividade das funções do ACT, cuja constituição é de um elemento de mola com fricção de Coulomb, proporcional ao deslocamento e unidirecional, este será modelado a partir de sua curva de ensaio típico realizado por impacto. O desenvolvimento desta modelagem está apresentada no Anexo A.

O sistema de freio produz as forças externas que agem sobre cada veículo durante o processo de frenagem. Constitui por si só um sistema bastante complexo sendo tratado pela dinâmica dos fluidos. Para efeito deste trabalho será representado de forma simplificada por um conjunto de polinômios interpolados a partir de medições de campo do crescimento das pressões nos cilindros de freio. O equacionamento detalhado está apresentado no Anexo B.

## 3.2 Modelo do ACT

Os engates e os ACT são os responsáveis pela ligação entre cada par de veículos. A Figura 7 apresenta um esquema desta ligação onde pode-se observar o caminho das forças transmitidas através do ACT.

Observa-se na parte superior deste desenho que os engates (9) estão submetidos a forças de compressão. Neste caso as forças reagem através do corpo do engate diretamente sobre a parte frontal do ACT (4), que se apóia sobre o batente traseiro (2) da estrutura do veículo.

No caso de tração entre os veículos apresentada no desenho inferior da Figura 7 o engate puxa a braçadeira (3), que reage sobre a parte posterior do ACT, que se apóia sobre o batente dianteiro (6).

Nota-se que o ACT trabalha sempre em compressão devido à braçadeira (3) e à montagem do batentes dianteiro (6). Quando uma força de tração é aplicada, a braçadeira puxa a caixa do ACT, que apóia sua parte frontal sobre o batente dianteiro. Cada união entre veículos possui dois ACT em série e a ligação como um todo possui metade da rigidez de um ACT.

Os modelos físicos de representação do ACT, propostos por diversos autores [1], [6] e [8], consideram como base o resultado apresentado pelas curvas de desempenho do aparelho de choque, quando submetido ao ensaio de impacto para a caracterização de seu desempenho.

Este ensaio consiste na aplicação de um impacto produzido por um martelo de queda livre de 12000 [kg] sobre o ACT a diversas alturas. Estes impactos são realizados com energia de até 50 [kJ] suficiente para produzir a completa retração do ACT. Durante os impactos são medidos a força de reação ao impacto e o correspondente deslocamento.

Os resultados obtidos através destes ensaios são apresentados por diagramas do tipo força  $x$  deslocamento, observados através do Gráfico 4.

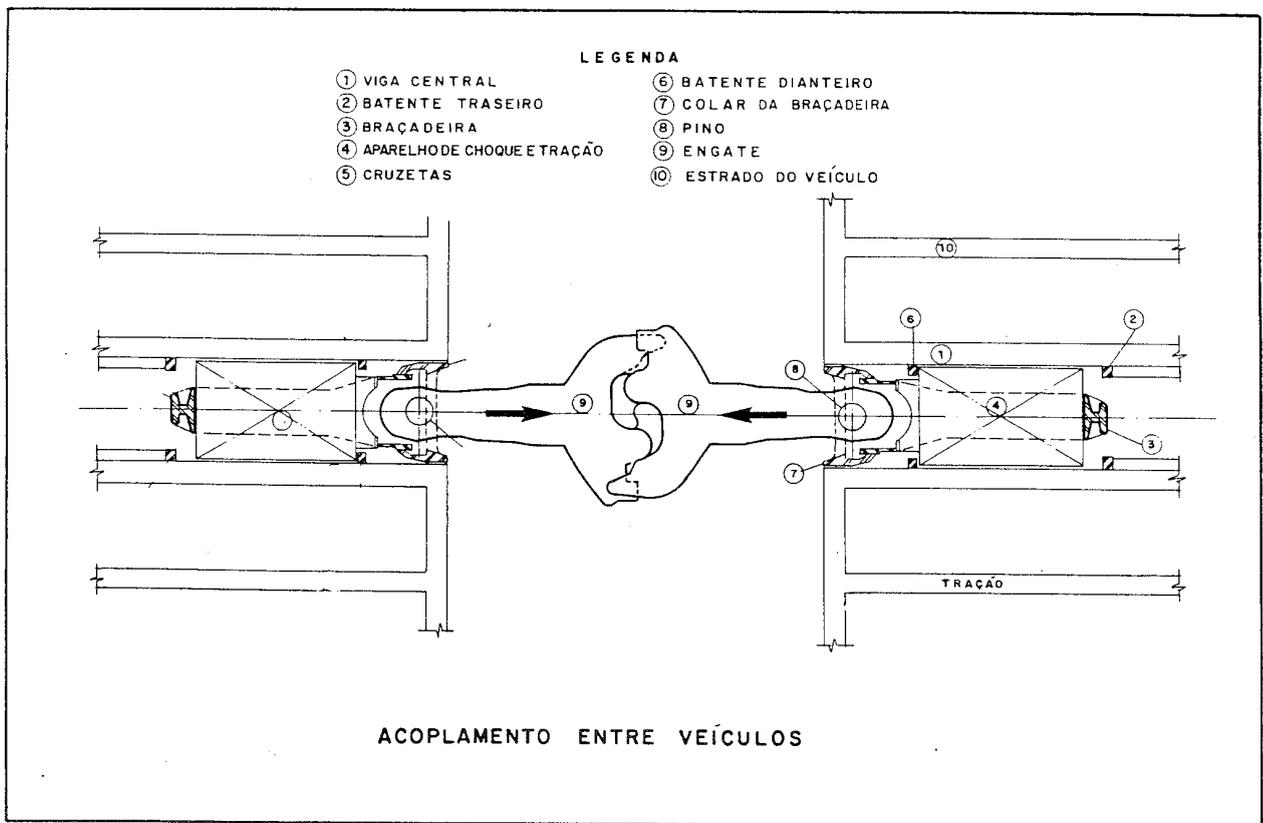
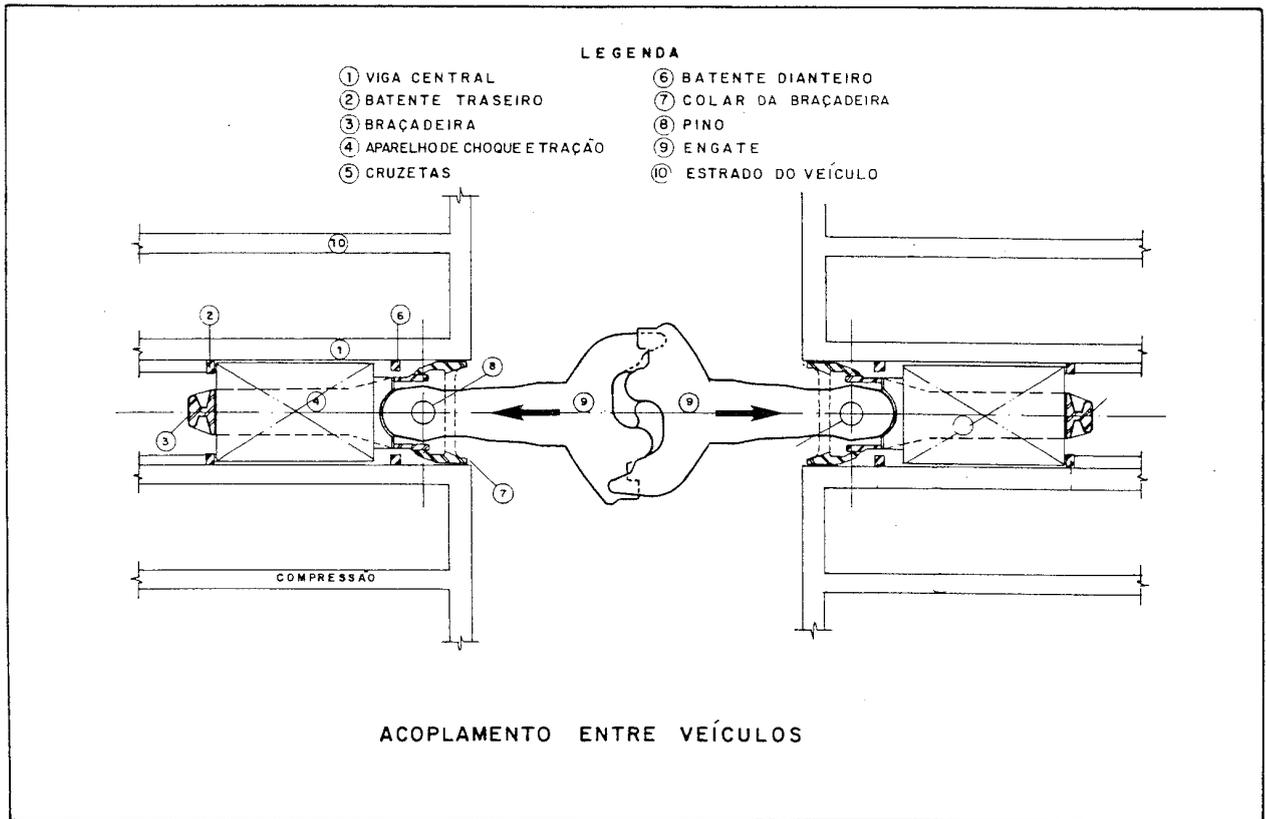


FIGURA 6- Forças de Compressão (Sup.) e Tração (Inf.)

## APARELHO DE CHOQUE E TRACAO

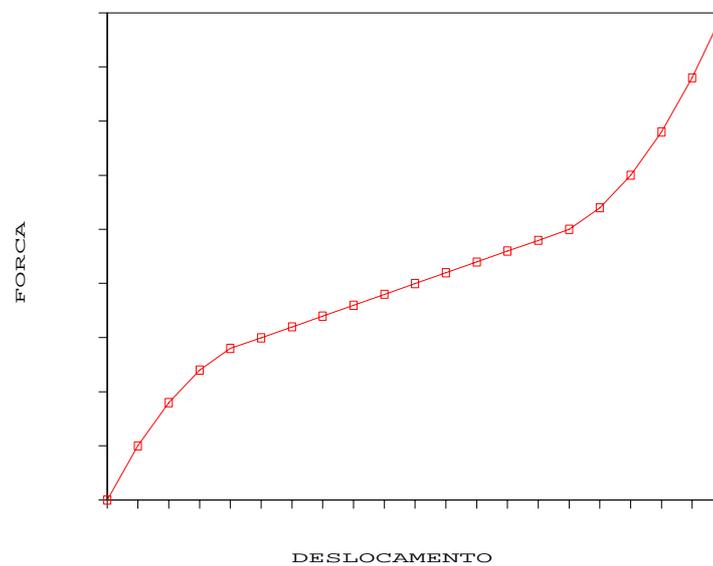


GRÁFICO 3 - Curva característica do ACT

O ACT representado esquematicamente na Figura 9 é constituído fisicamente por uma caixa externa (1), um conjunto de molas (2) e um sistema de cunhas (3). Esta concepção revela que ao se comprimir o ACT duas forças deverão ser vencidas:

- a) a primeira devido à mola principal (2).
- b) a segunda devido à força tangencial produzida pela cunha em fricção (3) com as paredes do ACT.

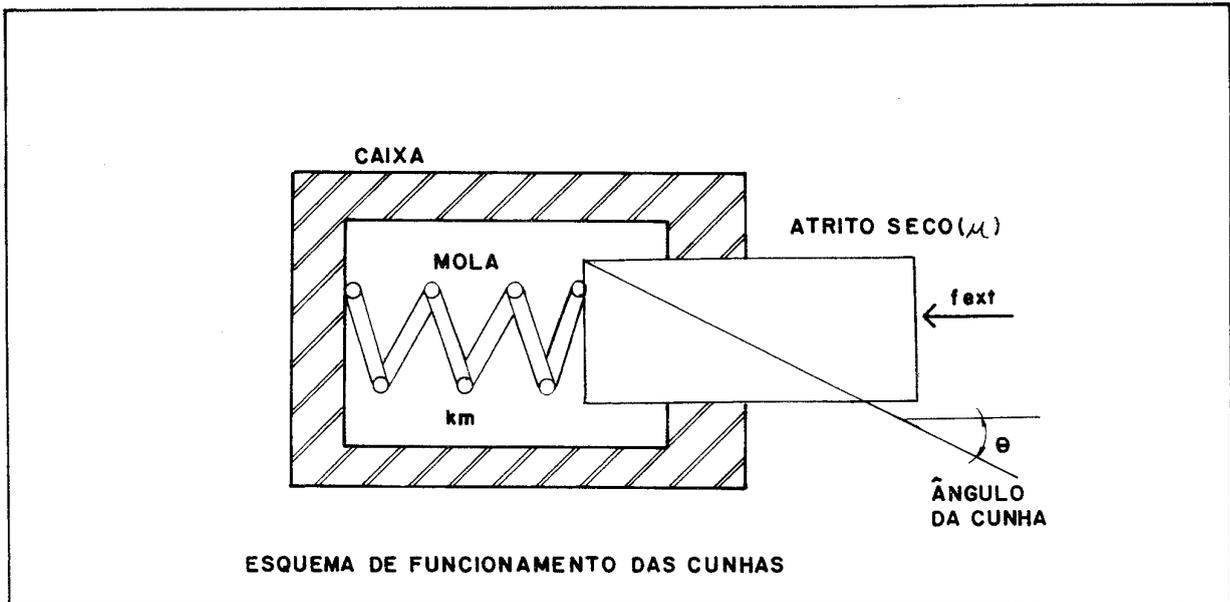


FIGURA 7 - Esquema das Cunhas do ACT

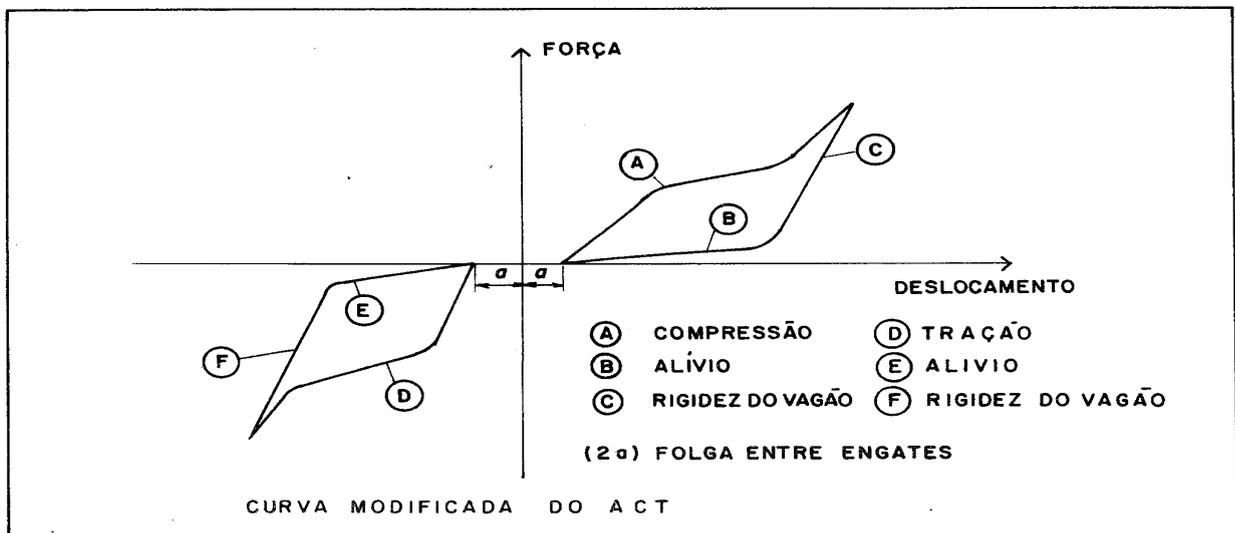


FIGURA 8- Curva do ACT (Modificada)

A força normal aplicada às cunhas aumenta a medida em que o suporte é introduzido no corpo, pois a força na mola principal aumenta. Desta forma a força tangencial de fricção aumenta à medida em que a força externa aumenta, introduzindo as cunhas para dentro da caixa, caracterizando a proporcionalidade da fricção com a posição. Nos ACT de maior capacidade, uma segunda cunha de fricção entra em ação após vencer um certo percurso aumentando a rigidez do ACT.

Quando inicia a redução da força externa sobre o ACT, as cunhas de fricção ficam aliviadas, deixando de atritar sobre as paredes da caixa produzindo, então, simplesmente uma força de alívio correspondente à força da mola principal. Esta é a característica unidirecional do atrito de Coulomb.

Três características devem ser mencionadas em relação ao acoplamento entre dois veículos realizado por um conjunto de engate e ACT:

- a) Como o ACT trabalha em compressão ou tração devido à sua montagem com a braçadeira do veículo, então as características apresentadas no primeiro quadrante do plano cartesiano do gráfico de forças  $x$  deslocamento (curvas "A" e "B"), também valem para o terceiro quadrante com sinal trocado, ou seja, com valores negativos de deslocamento e força (curvas "D" e "E").
- b) O engate possui uma folga intrínseca permitindo movimento relativo entre dois veículos (Valor "a" da Figura 11). Uma pequena ou não existente rigidez na ligação permite variação de velocidade relativa entre dois veículos adjacentes resultando em impactos quando as folgas se fecham ou se abrem.
- c) Cada ligação entre dois veículos possui dois engates e dois ACT montados em série. Portanto, a rigidez equivalente a um acoplamento é correspondente à metade da produzida por um único ACT isoladamente.

Tendo como base estas observações, foi adotada a curva experimental obtida a partir do ensaio de impacto, combinada com as características descritas acima. Então foi definida uma curva modificada que contém uma região morta para deslocamentos em torno de zero, correspondente às folgas "a" do engate, como observado na Figura 11.

Para deslocamentos maiores do que o comprimento sólido do ACT, a força produzida a princípio deveria ir para infinito. Entretanto, este fato não ocorre pois para forças maiores que a capacidade do ACT, a rigidez longitudinal da estrutura do veículo passa a colaborar com as deflexões.

Então foi incorporado na curva característica do ACT prolongamentos "C" e "F" com inclinação idêntica à rigidez do veículo (ver na Figura 11). Desta forma para deslocamentos maiores que o comprimento sólido do ACT, o conjunto continua a responder mas com forças proporcionais a rigidez de veículo.

Para forças oscilantes com valores médios diferentes de zero, o deslocamento produzirá força dentro dos limites estabelecidos pelos trechos "A" e "D" e trechos estabelecidos pela mola de retorno "B" e "E" mostrados na Figura 11 ou seja descrevendo uma curva de histerese.

## **Equacionamento das Forças no ACT**

Com efeito de utilização no processo numérico, a curva característica do ACT foi ajustada com auxílio de polinômios de primeiro e segundo graus independentes para cada trecho. Para alguns tipos de ACT é possível utilizar um único polinômio de terceiro grau para representá-los. Os polinômios utilizados para descrever as características do ACT são descritos no Anexo B.

Quando os veículos estão em movimento as forças de interação entre eles crescem e decrescem. Observa-se na Figura 13 que quando este efeito ocorre os deslocamento correspondentes são diferentes.

Como a curva de crescimento da força é diferente da curva de alívio (efeito de histerese), são necessários cuidados especiais no momento de determinação da força no ACT para deslocamentos que variam sem atingir o extremo das curvas (A) ou (B).

Para tanto, é necessário o conhecimento do deslocamento do ACT produzido pelas forças do instante anterior. Uma vez conhecido o deslocamento do instante anterior e o deslocamento instantâneo atual, pode-se localizar o valor da força dentro do ciclo de histerese.

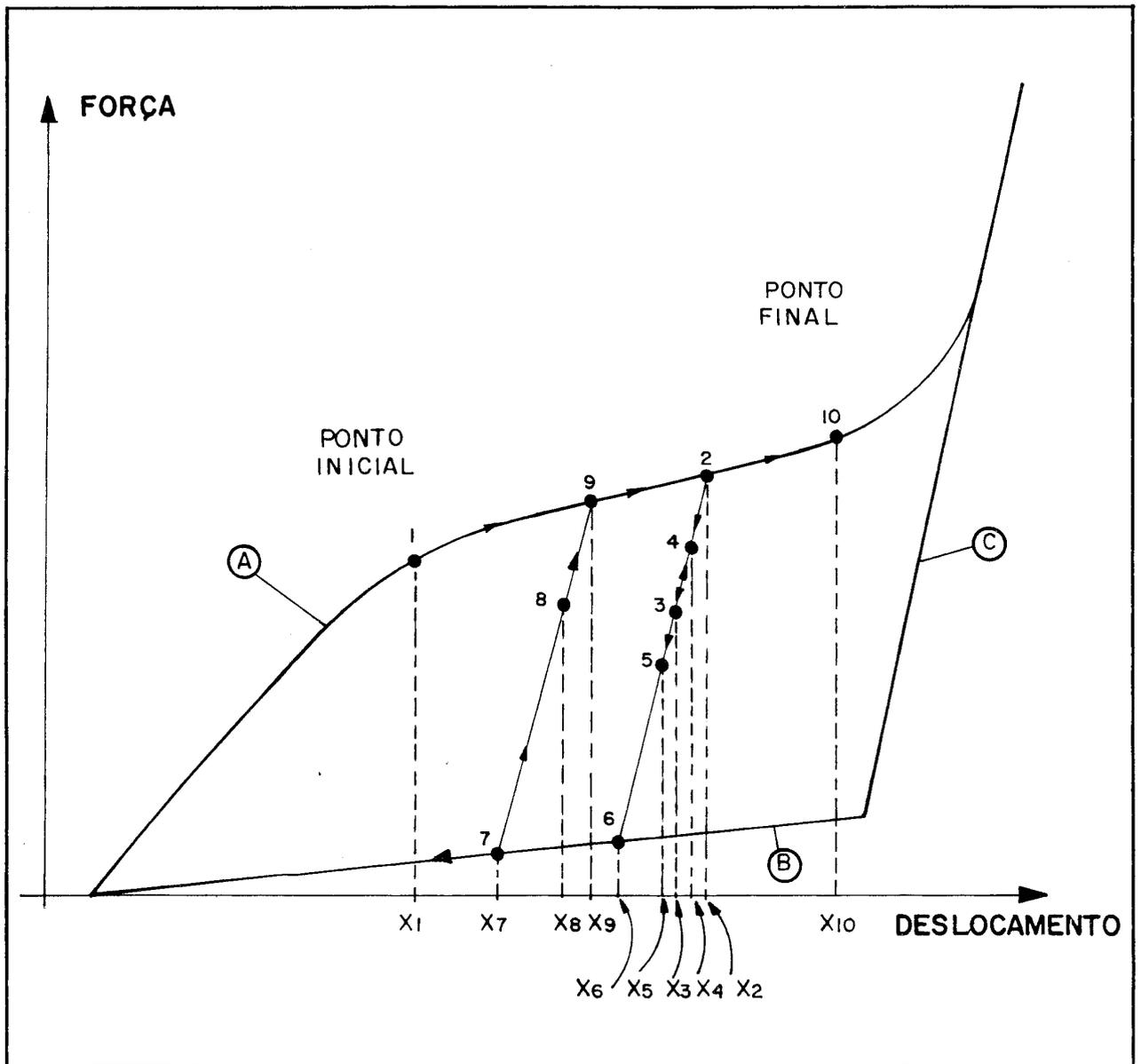


FIGURA 9- Ciclo de Histerese do ACT

Para elaboração da rotina de cálculo do esforço no ACT para toda a extensão do curso, inclusive dentro do ciclo de histerese, foi proposto um roteiro básico apresentado na Figura 15 e descrito a seguir:

- a) dado um ponto da curva correspondente ao instante anterior (força e deslocamento) e o deslocamento atual produzido pela força no instante anterior sobre a massa;
- b) passar uma reta L com inclinação correspondente à rigidez do veículo pelo ponto anterior dado (deslocamento e força no instante anterior);
- c) a partir do deslocamento atual  $x_{ACT}$ , calcular as forças " $F_L$ " sobre a reta L, " $F_s$ " sobre curva de subida e " $F_d$ " sobre a curva de descida;
- d) compara-se os valores obtidos e seleciona-se adequadamente conforme os casos b, c ou d mostrados na Figura 15, de tal forma que:

se $F_L > F_s$	então	$F = F_s$
se $F_d \leq F_L \leq F_s$	então	$F = F_L$
se $F_L < F_d$	então	$F = F_d$

Como exemplo do método descrito de cálculo da força sobre o ACT observa-se os deslocamentos de  $x_1$  a  $x_{10}$  da Figura 13. Entre os deslocamentos  $x_2$  a  $x_6$  os pontos passeiam sobre a reta L. O ciclo de histerese é caracterizado pelos pontos  $x_2$ ,  $x_6$ ,  $x_7$ ,  $x_8$ ,  $x_9$  e  $x_{10}$ .

Para representação da folga "2a" entre os engates foi criado um trecho de deslocamento em que a força seja nula. Este efeito é introduzido no sistema quando se calcula as forças nos ACT utilizando-se da seguinte expressão:

$$x_{ACT} \sim = 0,5 * ( u_{(i)} \sim - u_{(i+1)} \sim - 2a ) \quad (1)$$

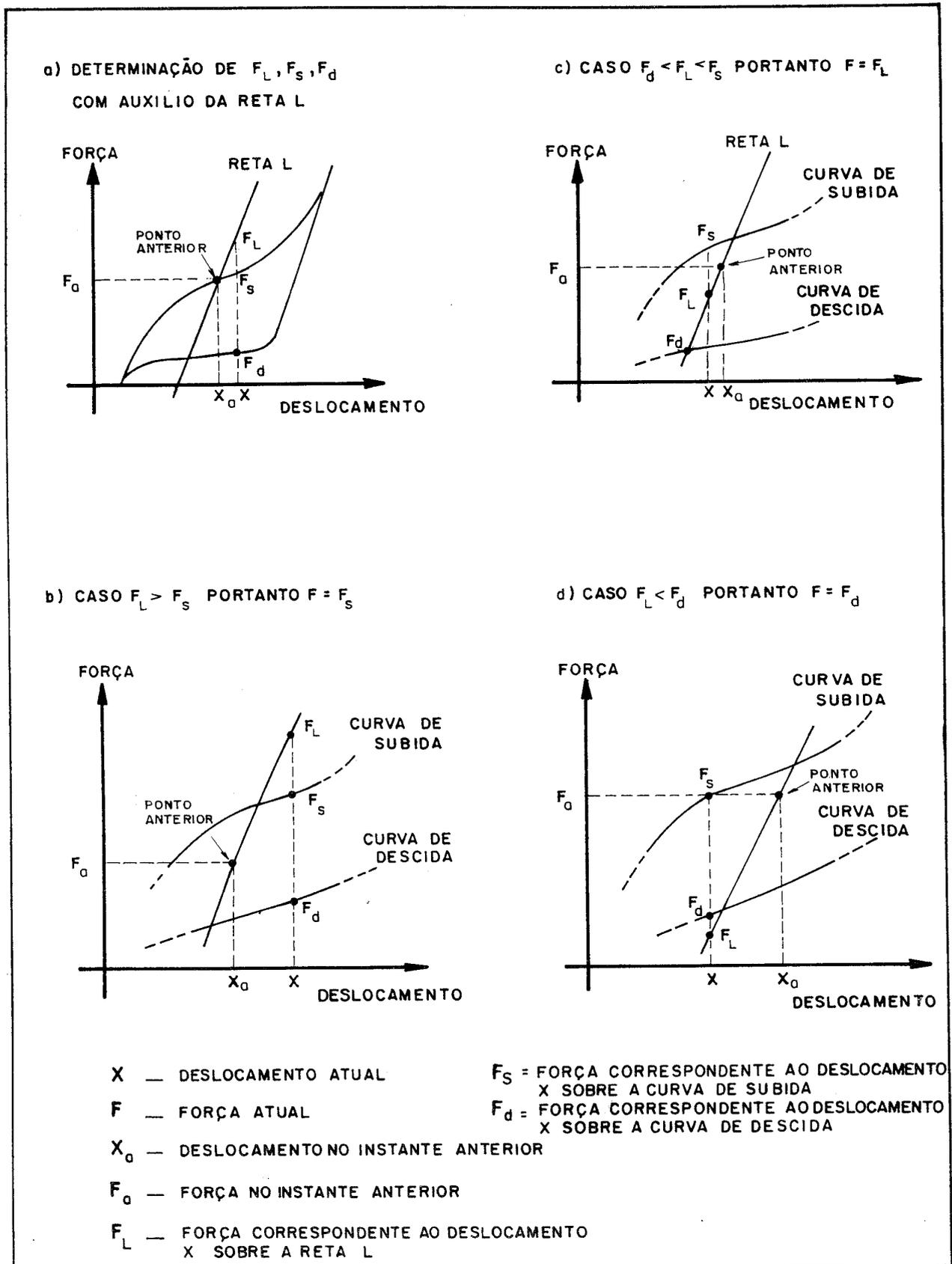


FIGURA 10 – Localização dentro dos Ciclo de Histerese

onde:

$x_{ACT} \sim$  - valor do curso de um ACT;

$u_{(i)} \sim$  - deslocamento absoluto do veículo  $i$ ;

$u_{(i+1)} \sim$  - deslocamento absoluto do veículo  $i+1$ ;

$2a$  - folga total entre dois veículos

que permite calcular o movimento relativo entre dois veículos ( $u_{(i)} \sim - u_{(i+1)} \sim$ ), que quando maior que a folga total entre dois veículos devido aos engates "2a", produzirá deslocamento sobre o ACT. Considera-se neste trabalho que os deslocamentos entre dois veículos consecutivos são igualmente distribuídos entre dois ACT.

### 3.3 Modelo do Sistema de Freio

O sistema de freio pneumático descrito anteriormente será modelado neste trabalho por um conjunto de polinômios que representam a variação da pressão nos cilindros de freio ao longo do tempo para cada veículo do trem. Pode-se destacar a abordagem proposta por FELÍCIO [1] com contribuição na discretização detalhada para o comportamento do sistema freio para as aplicações de serviço máximo e emergência.

A metodologia adotada está baseada na identificação dos termos dos polinômios que melhor descrevem o comportamento do crescimento da pressão para os diversos níveis de aplicação de freio. Este aspecto é inovador e aumenta o potencial do modelamento proposto tendo em vista que os estudos anteriores [1] se restringem a alguns casos específicos de aplicação do freio.

Os termos dos polinômios são função das características do trem e do sistema de freio conforme exposto por GARG [4]. Os termos são calculados para cada veículo e são dependentes da distância do veículo à locomotiva líder. Entende-se por locomotiva líder aquela que detém o comando do sistema de freio e a fonte geradora das pressões necessária para os comandos.

O procedimento para determinação destes termos está baseado no conhecimento de diversas características do comportamento de um sistema pneumático, dentre eles:

- a) a velocidade de propagação da onda de variação de pressão ao longo da tubulação pneumática até atingir a respectiva válvula de controle no veículo. Este valor é da ordem de 280 m/s conforme mencionado em [3]. Tão logo a informação de que o freio deva ser aplicado, seja detectada pela válvula de controle de freio do veículo através da variação da pressão, a válvula de controle abre uma passagem para liberar ar do reservatório auxiliar para o cilindro. Isso ocorre até que seja atingido o equilíbrio ditado pelo nível de redução de pressão aplicado ao encanamento geral.
- b) o tempo de enchimento do cilindro é praticamente o mesmo para qualquer veículo (considerando-se o mesmo tipo de válvula e relação de volume entre o reservatório e o cilindro). Entretanto, como o gradiente de redução de pressão vai atenuando ao longo do trem, o tempo de enchimento vai aumentando para cada veículo consecutivo.

---

Duas variáveis utilizadas em [3] e [5] podem ser definidas, a partir do exposto acima, para identificar os parâmetros de representação da variação da pressão no cilindro de freio, quais sejam:

- a ) fator de posição do veículo no trem;
- b ) coeficiente para o tempo final de enchimento do cilindro de freio.

O primeiro correlaciona o início de crescimento da pressão com a posição do veículo no trem; o segundo caracteriza o atraso no enchimento do cilindro para cada veículo ao longo do trem.

O ajuste dos termos das curvas de comportamento da pressão no cilindro de freio em relação ao tempo foi obtido a partir de observação extensiva de resultados de publicações especializadas e medidas experimentais realizadas em sistemas de freio ferroviário. A forma típica do comportamento da pressão medida no cilindro de freio para uma aplicação de freio pode ser vista na Figura 17, que apresenta ao longo do tempo a pressão no cilindro de freio para o primeiro veículo, veículo intermediário e último veículo do trem.

A aplicação do freio é caracterizada pela queda da pressão produzida com a descarga de ar do encanamento geral dentro do manipulador operado pelo maquinista. Esta queda de pressão se propaga ao longo do encanamento geral até o final de trem. Quando a válvula de controle de um veículo identifica a queda de pressão abre-se, dando passagem ao ar para o cilindro, produzindo a aplicação de freio.

Com efeito de produzir um equacionamento representativo da pressão no cilindro de freio, foi adotada uma curva de pressão dividida em quatro trechos como podem ser vistos na Figura 19.

O trecho I, caracterizado pelo fator de posição (tempo de atraso até início da aplicação), vai do tempo inicial  $t_0$ , onde a aplicação do freio é realizada pelo maquinista, até o início do crescimento da pressão (tempo  $t_1$ ). Durante este trecho a pressão permanece igual a zero (trecho I).

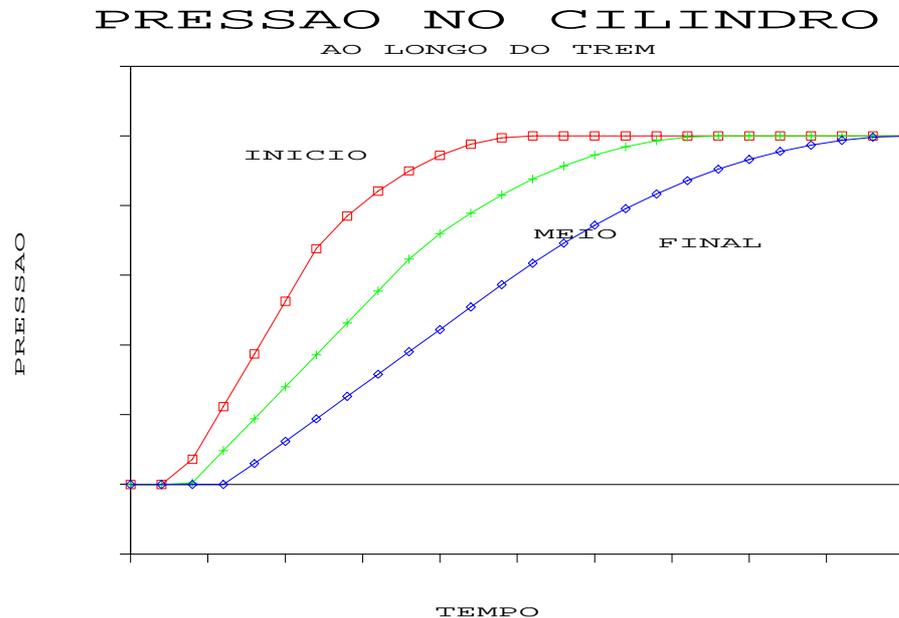


FIGURA 16 - Curva de Pressão no Cilindro de Freio

A pressão final  $P_3$  é obtida a partir de uma relação linear dependente da pressão de redução do encanamento geral (termo denominado  $Prd$ ).

O trecho IV, no qual a pressão final é constante, inicia-se após o enchimento total do cilindro (coeficiente para enchimento total  $t_3$ ). Este ponto caracteriza-se pelo lugar geométrico da intersecção da pressão final  $P_3$  com as retas geradas a partir do eixo dos tempos num instante de tempo  $t_k$ ) com um coeficiente angular  $Af_2$  função do número do veículo.

Dois trechos intermediários foram introduzidos para ajustar melhor, empiricamente, as curvas de crescimento. O trecho II, de crescimento da pressão linear, envolve a maior parte da aplicação da pressão. O seu coeficiente angular ( $Af_1$ ) é dependente do número do veículo.

O trecho III é ajustado por um polinômio de segundo grau que liga os trechos II e IV com derivada contínua (tangente no ponto  $P_3$ ).

A Figura 19 apresenta a localização dos quatro trechos da curva de pressão em função do tempo.

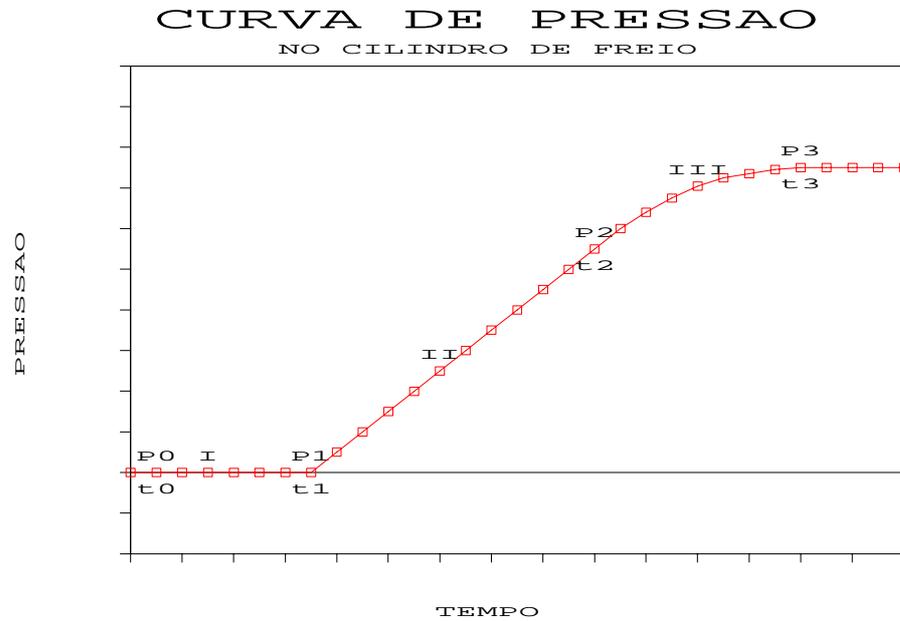


FIGURA 18 - Representação dos Trechos

## Cálculo das Forças de Retardamento

A força de retardamento do veículo produzida pela aplicação do sistema de freio pode ser obtida para qualquer veículo da composição com auxílio das equações obtidas pelo método descrito no item anterior.

Então para o  $i$ -ésimo veículo ter-se-á a força de retardamento dada pela seguinte expressão:

$$ff_{(i)} = \mu fn_{(i)} \quad (2)$$

$$fn_{(i)} = (Pcf_{(i)} - Pm) n_c r_t r_m (Pi D^2 / 4) \quad (3)$$

onde:

- $ff_{(i)}$  - força de retardamento do  $i$ -ésimo veículo,
- $fn_{(i)}$  - força normal de aplicação da sapata de freio,

---

$\mu$	- coeficiente de atrito entre a roda e a sapata de freio,
$D$	- diâmetro útil do cilindro de freio,
$P_{cf(i)}$	- pressão no cilindro de freio do i-ésimo veículo,
$P_m$	- pressão equivalente da mola de retorno,
$n_c$	- quantidade de cilindros de freio no veículo,
$r_t$	- relação de redução do movimento na timoneria,
$r_m$	- rendimento mecânico do timoneria (função da pressão no cilindro).

A força normal aplicada à sapata de freio é minorada devido à resistência passiva da timoneria (eficiência). A expressão que calcula este valor é função da pressão de aplicação do freio.

Essas equações serão utilizadas para cálculo somente nas seguintes condições:

- a) Se  $(P_{cf(i)} - P_m)$  for positivo,
- b) Se  $ff_{(i)}$  for menor ou igual à máxima força de atrito entre a roda e o trilho,
- c) Se a velocidade do i-ésimo veículo for positiva.

### 3.4 Resistência ao Movimento

Neste item serão descritas as forças que contribuem para causar resistência ao movimento longitudinal dos veículos. É conveniente salientar que estas forças são sempre contrárias à direção do movimento devendo receber um tratamento adequado para serem introduzidas com as demais forças aplicadas sobre os veículos.

A força total de resistência ao movimento do  $i$ -ésimo veículo é dada pela somatória de três tipos de resistências:

- a ) Resistência ao Rolamento;
- b ) Resistência Devido à Inclinação da Via;
- c ) Resistência de Curvas.

$$fr_{m(i)} = fr_{r(i)} + fr_{g(i)} + fr_{c(i)} \quad (4)$$

#### Resistência ao Rolamento

As forças de resistência ao rolamento dos veículos, proporcionais à carga transportada, são formadas basicamente de três parcelas distintas que compõem um polinômio de segunda ordem dependente da velocidade do tipo:

$$fr_{r(i)} = A + B V_{(i)} + C V_{(i)}^2 \quad (5)$$

Os termos do polinômio podem ser descritos e quantificados da seguinte forma:

- a ) O termo constante "A" do polinômio correspondente à resistência ao rolamento da roda sobre o trilho ferroviário e depende basicamente do peso sobre roda, do rolamento (ou deslizamento), do número de eixos no veículo e desalinhamento entre rodeiros do veículo e a via;

- b) O termo linear "B" dependente da velocidade  $V_{(i)}$  corresponde à energia dissipada nos movimentos laterais da suspensão do veículo e da rigidez estrutural da via segundo GARG [4];
- c) O termo quadrático "C" do polinômio correspondente ao arraste aerodinâmico dependente da velocidade elevada ao quadrado. É produzido pelo formato e área frontal da locomotiva, pelo arraste devido à rugosidade lateral dos vagões e da interface entre dois veículos consecutivos.

Portanto, a composição destes três fatores resulta em uma equação polinomial de segundo grau, dependente da velocidade da composição, que permite calcular a força de resistência ao movimento longitudinal do trem.

## Resistência Devido à Via

Para uma composição ferroviária subindo um trecho de via inclinado, a componente da força gravitacional na direção longitudinal é dada pela expressão:

$$fr_{g(i)} = g m_{(i)} \text{ seno } (\beta) \quad (6)$$

onde:

- $fr_{g(i)}$  - força de resistência devido à inclinação,
- $g$  - aceleração da gravidade
- $m_{(i)}$  - massa do i-ésimo veículo.
- $\beta$  - ângulo de inclinação da via

## Resistência de Curvas

Durante a inscrição de curvas, um bom veículo ferroviário, deve ajustar-se de maneira a oferecer a menor resistência possível. Como o truque, que é a estrutura metálica que suporta o veículo sobre a suspensão, são geralmente compostos de peças rígidas ou de difícil articulação, o alinhamento entre os rodízios e o centro da curvatura torna-se restrito e difícil.

Isto provoca atritos entre o friso da roda e o boleto do trilho, produzindo forças de resistência ao movimento. Truques de projeto moderno possuem adequada concepção da suspensão primária, especialmente na direção longitudinal, o que proporciona melhores condições de alinhamento dos rodeiros em relação ao raio da curva da via, reduzindo assim as forças de resistência. Portanto a força de resistência de curva fica:

$$fr_{c(i)} = m_{(i)} g k / R \quad (7)$$

onde

$fr_{c(i)}$  - Força de Resistência de Curva;

$m_{(i)}$  - Peso do i-ésimo Veículo;

$g$  - Aceleração da Gravidade;

$R$  - Raio da Curva;

$k$  - Constante de Proporcionalidade.

Estas forças sempre foram tratadas como proporcionais ao raio de curvatura. Estudos mais recentes mostram formulações que contemplam também o tipo do truque e condições de contaminação dos trilhos (seco ou lubrificado).

## Resistência à Partida

Os valores de resistência ao rolamento para velocidades nulas apresentam valores maiores do que os apresentados na equação 5 pela necessidade de vencer os atritos estáticos dos mancais. No instante em que a composição tenta sair do repouso, existe uma parcela adicional da resistência ao movimento que é chamada de resistência de partida.

Portanto, para velocidades nulas as forças de resistência ao rolamento são substituídas por uma equação onde a força de resistência à partida é exclusivamente proporcional à massa do veículo:

$$fr_{p(i)} = m_{(i)} r_p \quad (8)$$

onde

$f_{r_{p(i)}}$  - força de resistência de partida do i-ésimo veículo;

$m_{(i)}$  - massa do i-ésimo veículo;

$r_p$  - constante de proporcionalidade.

Este valor deve cair abruptamente para o valor de regime tão logo o veículo abandone o repouso e inicie o movimento. Estes valor é fornecidos pela fórmula de DAVIS de resistência ao movimento da equação 5.

## Capítulo 4

Neste capítulo será apresentado o modelo físico adotado para o sistema contendo não linearidades e o equacionamento detalhado do método de integração numérica utilizado para a solução do sistema.

Vários componentes do sistema ferroviário apresentam, como foi mencionado na descrição dos equipamentos, características não lineares. A inclusão das propriedades não lineares no equacionamento do sistema requer que a solução seja realizada através de um processo de integração numérica.

Um exemplo típico de não linearidade pode ser observado no comportamento do ACT que apresenta histerese durante um ciclo de carga e descarga. Esta propriedade é adequada para dissipar energia sendo característica intrínseca deste equipamento.

No equacionamento será isolado o esforço transferido através dos ACT o que permite o uso direto da curva característica de força  $\times$  deslocamento. Serão obtidas as equações de movimento aplicando-se as leis de Newton e descrito o processo de integração numérica.

### 4.1 Equações de Movimento

Para compreensão da constituição do acoplamento entre dois veículos consecutivos, é necessário observar a Figura 14. São mostrados dois engates conectados entre si, cercados por dois ACT instalados um em cada veículo. Esta disposição apresenta uma massa intermediária ( $m_{e_j}$ ) entre dois ACT correspondente aos engates desta ligação e mais as partes móveis do ACT.

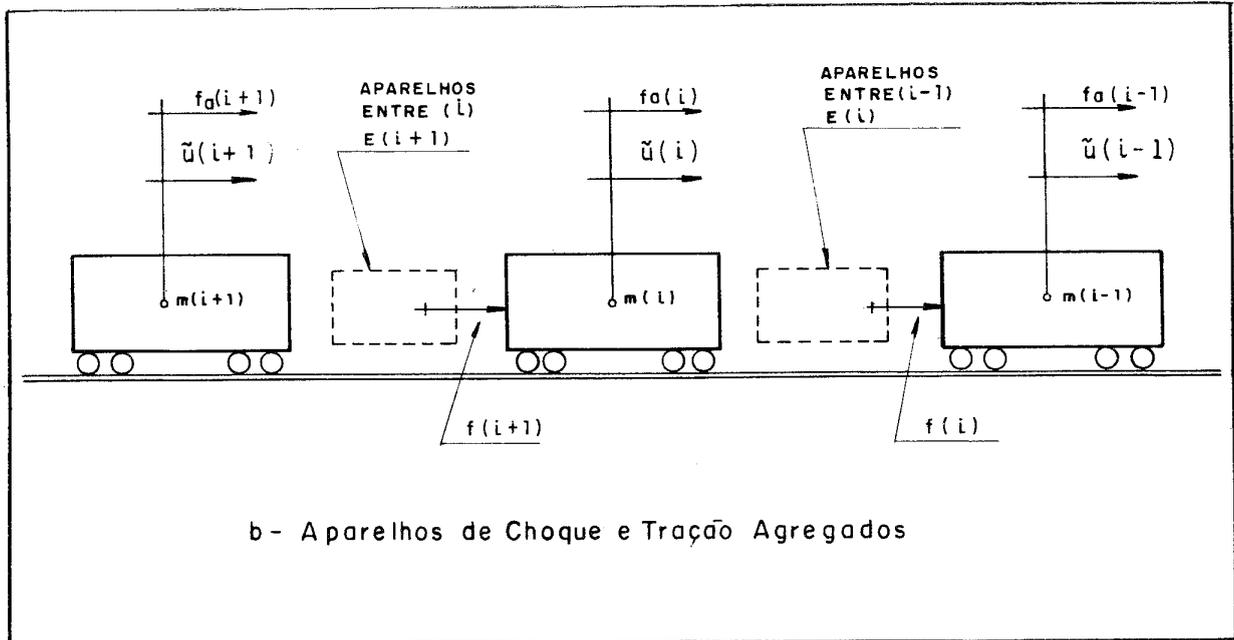


FIGURA 13 - Detalhe da Força nos Engates

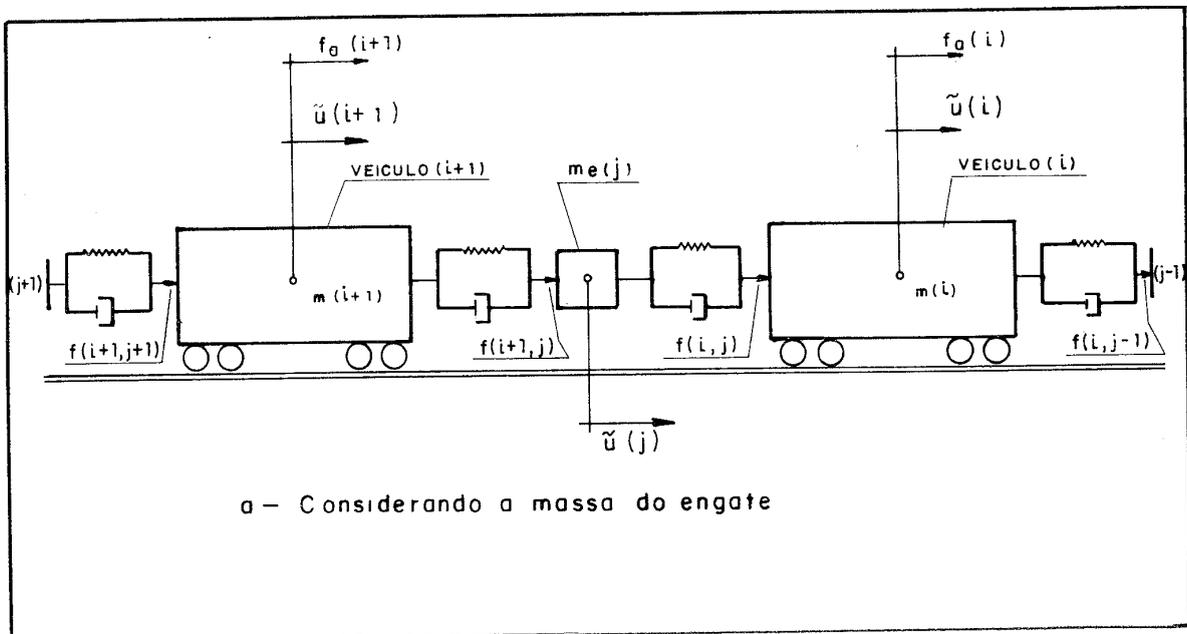


FIGURA 14 - Forças Agrupadas dos Engates

A força entre o veículo "i+1" até o engate "j" é identificada por  $f_{(i+1,j)}$ . Para o i-ésimo veículo e o engate "j" a força é  $f_{(i,j)}$ .

Fazendo a aplicação da 2ª lei de Newton ao veículo "i" e ao engate "j", conforme proposto por FELÍCIO [1], obtém-se as equações:

$$(m_{(i)} + m_r) \ddot{u}_{(i)} \sim = f_{(i,j)} \sim - f_{(i,j-1)} \sim + f_{e_{(i)}} \sim \quad (9)$$

$$m_{e_{(j)}} \ddot{u}_{(j)} \sim = f_{(i+1,j)} \sim - f_{(i,j)} \sim \quad (10)$$

onde:

- i - índice do veículo (vagão ou locomotiva 1..n);
- j - índice dos engates (n+1..2\*n-1);
- n - número total de veículos no trem;
- $m_{(i)}$  - massa do i-ésimo veículo;
- $m_r$  - massa translacional equivalente às inércias de rotação dos rodeiros do veículo;
- $m_{e_{(j)}}$  - massa móvel do engate j;
- $\ddot{u}_{(i)} \sim$  - aceleração do veículo i;
- $\ddot{u}_{(j)} \sim$  - aceleração do engate j;
- $f_{(i,j)} \sim$  - força aplicada veículo i devido ao engate j;
- $f_{e_{(i)}} \sim$  - somatório das forças externas sobre o i-ésimo veículo.

A força externa  $f_{e_{(i)}} \sim$  como mostrado na Figura 14 tem valor positivo para o sentido da esquerda para direita e corresponde ao somatório de todas as forças externas aplicadas ao veículo (i) (força de acionamento da locomotiva, resistência ao rolamento, forças de frenagem, força gravitacional, etc.).

As inércias das massas girantes dos rodeiros são transformadas em valores equivalentes de massa de translação obtidas pela divisão da inercia rotacional do rodeiro pelo quadrado do raio da roda.

Como a massa dos engates é pequena quando comparada com a massa do veículo (entre 200 e 300 vezes menor), seus efeitos de ordem dinâmica são desprezíveis em relação aos movimentos do veículo.

Portanto o modelo detalhado descrito acima, permite algumas simplificações sem prejuízo da representatividade do sistema mecânico. Então migrando-se massa do engate para junto da massa do respectivo veículo obtém-se a massa total do veículo  $mt_{(i)}$ :

$$mt_{(i)} = m_{(i)} + m_r + me_{(i)} \quad (11)$$

Considerando que a massa intermediária entre os ACT passa a ser nula, a equação 10 fica reduzida a:

$$f_{(i+1,j)} \sim = f_{(i,j)} \sim \quad (12)$$

Considerando que os ACT dispostos em série ligando dois veículos sejam todos idênticos, os ACT entre os veículos "i" e "i+1" podem ser agrupados como se fossem um só mas com a metade da rigidez. Portanto pode-se definir a força  $f_{(i+1)}$  entre os veículos "i" e "i+1" como sendo:

$$f_{(i+1)} \sim \quad - \quad \text{Força agente sobre o veículo "i", na direção positiva de } u_{(i)} \sim, \text{ causada pelos ACT entre os veículos "i" e o veículo "i+1".}$$

Observando-se as condições de contorno para a equação 12 pode-se escrever que para o primeiro veículo:  $f_{(1)} = 0$  devido ao fato deste acoplamento ser a extremidade do trem, portanto sem esforço por ele transmitido.

Assim conforme mostrado pela Figura 16 onde se visualiza o sentido das forças, a equação 9 pode ser rescrita de forma reduzida considerando o aglutinamento da massa dos engates à do veículo:

$$mt_{(i)} \ddot{u}_{(i)} \sim = f_{(i+1)} \sim - f_{(i)} \sim + fe_{(i)} \sim \quad (13)$$

onde:

- $mt_{(i)}$  - massa total do veículo i;
- $f_{(i)} \sim$  - força entre os veículos (i-1) e (i);
- $f_{(i+1)} \sim$  - força entre os veículos (i) e (i+1);
- $fe_{(i)}$  - somatório das forças externas agindo sobre o i-ésimo veículo.

Obs: O sentido das forças e deslocamentos é considerado positivo para a direita como pode ser observando na Figura 16.

Detalhando a equação para os vários veículos tem-se:

$$\begin{aligned}
 mt_{(1)} \ddot{u}_{(1)} \sim &= f_{(2)} - f_{(1)} + fe_{(1)} \\
 mt_{(2)} \ddot{u}_{(2)} \sim &= f_{(3)} - f_{(2)} + fe_{(2)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 mt_{(i)} \ddot{u}_{(i)} \sim &= f_{(i+1)} - f_{(i)} + fe_{(i)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 mt_{(n)} \ddot{u}_{(n)} \sim &= f_{(n+1)} - f_{(n)} + fe_{(n)}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Considerando que todas as forças agentes sobre o veículo (i) como sendo  $ft_{(i)} = f_{(i+1)} - f_{(i)} + fe_{(i)}$  e rearranjando na forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
 mt_1 & 0 & : & 0 & : & 0 \\
 0 & mt_2 & : & 0 & : & 0 \\
 \dots & \dots & : & \dots & : & \dots \\
 0 & 0 & : & mt_1 & : & 0 \\
 \dots & \dots & : & \dots & : & \dots \\
 0 & 0 & : & 0 & : & mt_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \ddot{u}_1 \sim \\
 \ddot{u}_2 \sim \\
 \dots \\
 \ddot{u}_i \sim \\
 \dots \\
 \ddot{u}_n \sim
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 ft_1 \\
 ft_2 \\
 \dots \\
 ft_i \\
 \dots \\
 ft_n
 \end{bmatrix}
 \tag{15}$$

ou simplesmente:

$$[M] \{\ddot{u} \sim\} = \{ft\}
 \tag{16}$$

As forças externas que agem sobre cada veículo ou seja as componentes do termo " $fe_{(i)}$ " da equação 9 podem ser resumidos da seguinte lista:

- a ) força devido à resistência ao rolamento;
- b ) força devido à rampas (força gravitacional);
- c ) força devido à resistência de inscrição em curvas;
- d ) força de acionamento produzida pela locomotiva;
- e ) força de frenagem.

## 4.2 Processo de Integração Numérica

Em linhas gerais um método de integração numérica é realizado passo-a-passo com pequeno intervalo de tempo entre cada integração, sendo que a solução da equação no passo "i+1", é obtida a partir do conhecimento das condições das variáveis de estado do passo "i". Neste caso particular as variáveis de estado são a velocidade e deslocamento de cada veículo.

Portanto é necessário o conhecimento da curva característica dos elementos não lineares e das condições iniciais de estado do sistema para iniciar o processo de integração.

Como já foi mencionado anteriormente o comportamento dinâmico dos veículos que compõem um trem possui uma parcela de não linearidade devido à característica própria dos elementos de ligação entre cada veículo. O equacionamento deste tipo de característica (mola com fricção de Coulomb proporcional e unidirecional) pode ser feita através da linearização por trechos.

O tamanho do intervalo de tempo entre cada passo de integração, depende do método utilizado. Em geral o intervalo de tempo entre cada passo é fixo, exceto para os métodos onde é feita uma avaliação do erro cometido e o intervalo é reduzido até que o erro seja confinado à limites pré-estabelecidos.

A sistemática básica para a solução do sistema de equações de movimento do sistema, é a transformação do conjunto de equações diferenciais em um conjunto de equações algébricas simultâneas, acompanhadas de uma relação entre o deslocamento, velocidade e aceleração.

Para a solução das equações de movimento não lineares foi adotado o método de integração numérica do tipo Runge-Kutta de 4ª ordem, preciso e de boa estabilidade, que permite fácil implementação computacional.

O diagrama de bloco apresentado a seguir descreve os passos realizados pelo programa de cálculo:

## DIAGRAMA DE BLOCO DO PROGRAMA

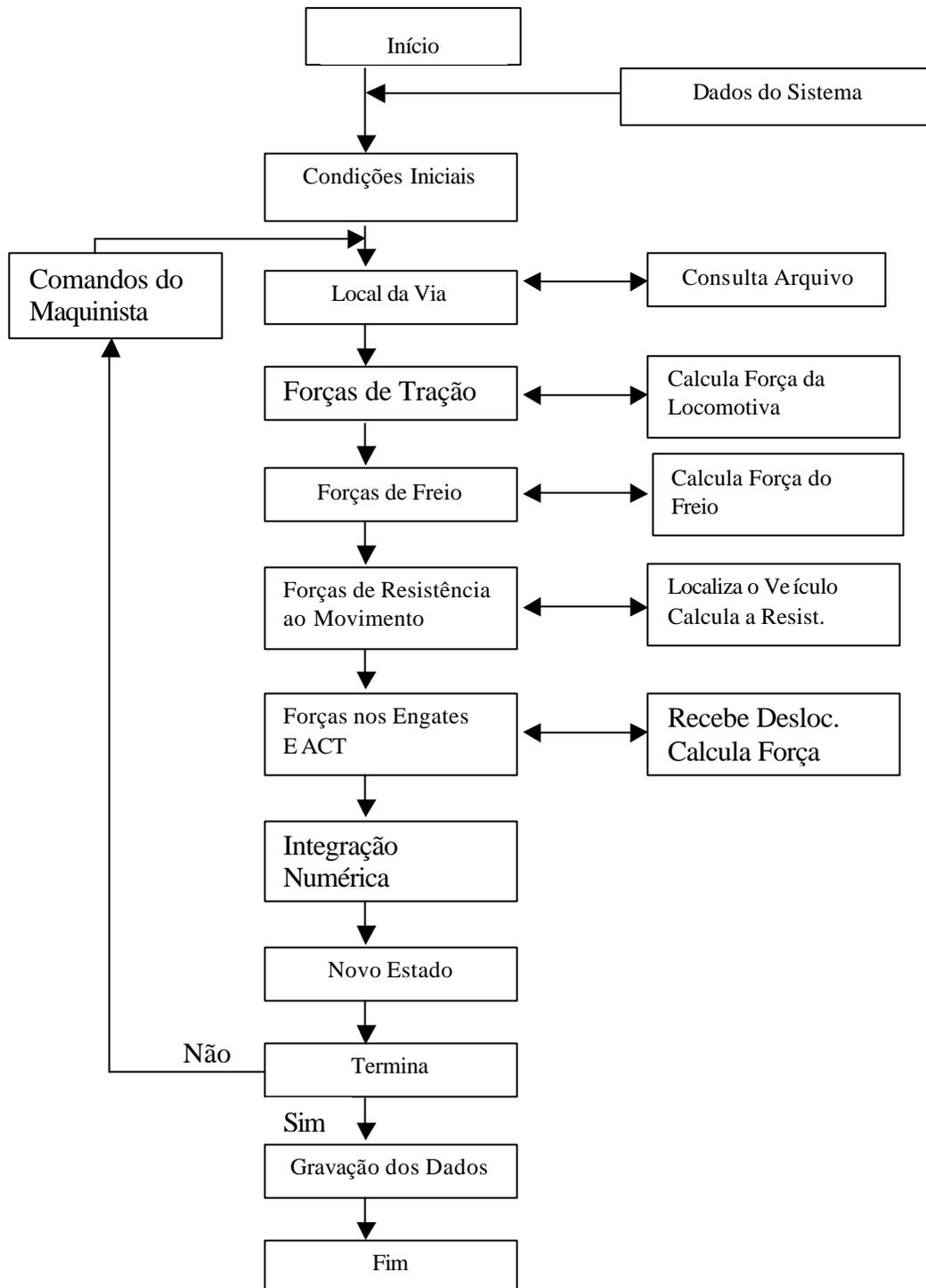


FIGURA 15 –Diagrama de Bloco do Programa

## 4.3 Condições Iniciais

Para que seja possível iniciar o processo de integração numérica, é necessário o conhecimento de variáveis de estado nas condições iniciais, permitindo a solução do sistema de equações diferenciais. As condições iniciais podem ser classificadas em duas categorias:

- a ) condições iniciais fundamentais,
- b ) condições iniciais secundárias.

As condições iniciais fundamentais são aquelas exigidas pelas equações diferenciais, ou sejam, posição e velocidade iniciais de cada veículo.

As condições iniciais secundárias são todas as demais condições necessárias para a inicialização, tais como: força de acionamento, força nos engates e forças de resistência ao movimento (forças de resistência ao rolamento, força devido à inclinação da via e forças devido as curvas).

### Determinação das Condições de Estado

Para a determinação das variáveis de estado (deslocamento e velocidade) é necessário o estabelecimento de uma situação típica para o início dos cálculos. Pode-se caracterizar duas situações típicas como:

- a ) trem em equilíbrio com aceleração nula;
- b ) trem em equilíbrio com aceleração constante.

Para o caso dos veículos com aceleração nula é necessário que as forças atuantes sobre estes sejam iguais a zero. Neste caso é necessário que a força total de tração desenvolvida pela locomotiva seja suficiente para contrabalançar as forças de resistência ao movimento de todos os veículos da composição. Então, voltando às equações fundamentais deduzidas no item anterior, tem-se para o  $i$ -ésimo veículo:

$$f_{(i+1)} - f_{(i)} + fe_{(i)} = 0 \quad (17)$$

onde:

- $f_{(i+1)}$  - força aplicadas no i-ésimo veículo pelo (i+1)-ésimo;  
 $f_{(i)}$  - força aplicadas no (i-1)-ésimo veículo pelo i-ésimo;  
 $fe_{(i)}$  - forças externas aplicadas no i-ésimo veículo.

A determinação da força total de acionamento das locomotivas "fl" para produzir aceleração nula no trem contrabalançando as resistências produzidas pela resistência ao rolamento " $fr_{r(i)}$ ", forças devido a inclinação da via " $fr_{g(i)}$ ", forças de resistência de curva " $fr_{c(i)}$ ", é expressa por:

$$fl = \frac{fr_{r(i)} + fr_{g(i)} + fr_{c(i)}}{nl} \quad (18)$$

onde:

- fl - força total da locomotiva necessária para manter o equilíbrio do trem (aceleração nula);  
 $fr_{r(i)}$  - força de resistência ao rolamento do i-ésimo veículo;  
 $fr_{g(i)}$  - força gravitacional devido à rampa do i-ésimo veículo;  
 $fr_{c(i)}$  - força de resistência de curva do i-ésimo veículo;  
nl - número de locomotivas da composição.

Assim pode-se determinar as forças de todos os engates a partir do último veículo considerando que  $f_{(n+1)}$  é nula. Em ambas as condições de equilíbrio é necessário estabelecer o valor inicial da velocidade que pode assumir duas situações:

- a ) Velocidade nula (trem em repouso)
- b ) Velocidade diferente de zero (trem em movimento)

A tabela 34 permite visualizar as várias combinações de condições iniciais.

TABELA 33 - Condições Iniciais

aceleração	velocidade	estado dos veículos	força resist.	locomotiva	freio pneum.	folgas engates
$\ddot{u}=0$	$\dot{u}=0$	Repouso	$fr_r = 0$ $fr_r < > 0$	$fl = 0$ $fl = 0$	Aliv. Aplic.	A/F A/F
	$\dot{u} > 0$	Equilíbrio	$fr_r > 0$ $fr_r < 0$	$fl = frr$ $fl = 0$	Aliv. Apli=frr	Calc Calc
$\ddot{u} > 0$	$\dot{u}=0$	Demarragem	$fr_r = 0$ $fr_g > frr$	$fl > frr$ $fl = 0$	Aliv. Aliv.	Calc A/F
	$\dot{u} > 0$	Acelerando	$fr_r > 0$ $fr_g > frr$	$fl > frr$ $fl = 0$	Aliv. Aliv.	Calc Calc
$\ddot{u} < 0$	$\dot{u}=0$	Reversão	$fr_r = 0$ $fr_g < frr$	$fl < frr$ $fl = 0$	Aliv. Aliv.	Calc A/F
	$\dot{u} > 0$	Frenagem	$fr_r < > 0$ $fr_g > 0$ $fr_r > frg$	$fdin > frg$ $fdin = 0$ $fdin = 0$	Aliv. Apli > frg Aliv.	Calc Calc Calc

onde:

- $\ddot{u}$  - Aceleração inicial dos veículos;
- $\dot{u}$  - Velocidade inicial dos veículos;
- $fr_r$  - Forças de resistência ao movimento dos veículos;
- $fr_g$  - Força gravitacional devido a via dos veículos;
- $fl$  - Força de tração das locomotivas;
- $fdin$  - Força do freio dinâmico das locomotivas;
- Aliv - Freio pneumático aliviado;
- Apli - Freio pneumático aplicado;
- A/F - Folga dos engates estabelecida aberta ou fechada;
- Calc - Folga dos engates e posição dos ACT calculada.

Deve-se considerar que nesta análise supõe-se que todos os veículos estejam sujeitos às mesmas condições de freio pneumático (força estabilizada).

No caso dos veículos em repouso a folga dos engates entre os vagões fica indeterminada e pode ser definida como condição inicial. Neste caso podem ocorrer duas situações conhecidas como "trem esticado", onde todos os veículos estão afastados entre si no máximo da folga, ou "trem comprimido" onde os veículos estão com as folgas entre os engates totalmente comprimidas.

---

## Capítulo 5

Neste capítulo é descrita a formulação para solução analítica do sistema linearizado onde foram adotadas as técnicas descritas a baixo:

- a ) Determinação das Equações do Movimento;
- b ) Desacoplamento das Equações com Auxílio dos Autovalores e Autovetores;
- c ) Introdução do Amortecimento no Sistema Linear;
- d ) Verificação da Ortogonalidade do Sistema
- f ) Determinação da Matriz Fundamental;
- g ) Determinação da Matriz Fundamental do Sistema com Amortecimento;
- h ) Integral de Convolução e Matriz Dinâmica do Sistema;
- i ) Determinação da Resposta no Tempo do Sistema Linear com Auxílio da Matriz Fundamental e Integral de Convolução;

Para a determinação das equações de movimento foi utilizada a equação de D'Alembert combinada com o princípio dos Trabalhos Virtuais.

O cálculo dos autovalores e autovetores obtidos a partir da solução do polinômio característico do sistema, permite realizar o desacoplamento das equações diferenciais. Também fornecem informações para construção da Matriz Fundamental e para determinação das frequências naturais e modos de vibração do sistema.

A complexidade das deduções apresentadas foram crescendo gradualmente, partindo-se do sistema homogêneo não amortecido até o sistema amortecido com excitação externa solucionado com a Integral de Convolução implementada com auxílio da Matriz Dinâmica do sistema.

## 5.1 Modelo Físico

Para uma análise inicial do comportamento dinâmico do trem, adotou-se um modelo simplificado, linear sem amortecimento, com múltiplos graus de liberdade, massas concentradas pontuais, junções elásticas lineares e sem amortecimento.

A Figura 16 apresenta a distribuição das massas puntiformes dos "n" veículos com a localização das molas e índices utilizados no equacionamento.

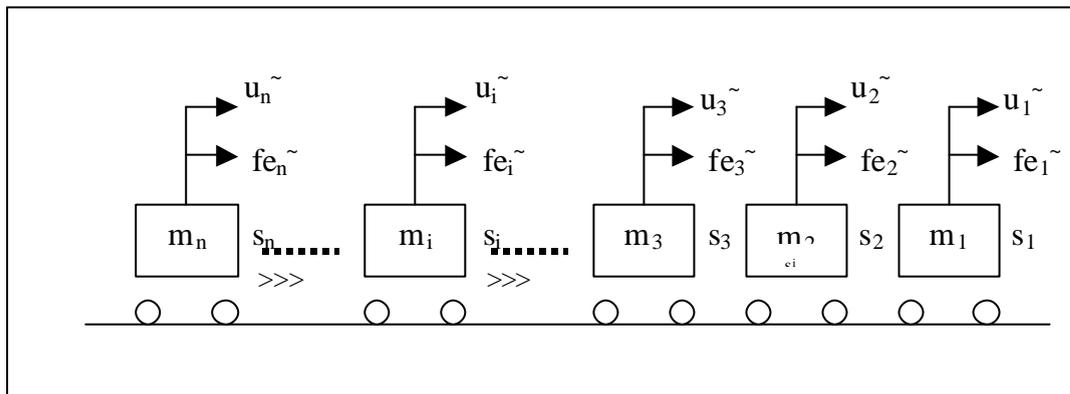


Figura 16 – Modelo do Conjunto de Veículos

sendo que os termos da Figura 16 são definidos como:

- $s_i$  - representa a rigidez do acoplamento ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).
- $m_i$  - representa a massa pontual de cada veículo ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).
- $u_i \sim$  - deslocamento longitudinal, associado à massa  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).
- $fe_i \sim$  - somatório das forças externas aplicada à massa pontual do veículo  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

## 5.2 Equações de Movimento

Para a determinação das equações de movimento do sistema será utilizada a Equação de D'Alembert combinada com o Princípio de Trabalho Virtual.

Para esta formulação, classificou-se as forças agentes sobre os corpos do sistema em três tipos:

- a ) Forças Aplicadas (cargas, forças de molas, forças de amortecimento).
- b ) Forças de Vínculos (forças que aparecem devido à vínculos geométricos).
- c ) Forças de Inércia (Forças devido à aceleração de massas ou inércias).

Do enunciado da formulação de D'Alembert tem-se que

"Para um estado de deslocamento virtual, deve ser nula a soma de todos os trabalhos virtuais devido a forças aplicadas, forças de vínculos e forças de inércia que agem sobre os corpos do sistema".

Para a obtenção das equações do movimento, dá-se um deslocamento arbitrário pequeno,  $dv_i$  no corpo  $i$  e deixa-se que as forças agentes sobre o corpo realizem o trabalho.

Os deslocamentos virtuais aplicados devem ser de forma a satisfazer as restrições geométricas ou cinemáticas do sistema.

Como as forças devido aos vínculos não realizam trabalho devido ao fato destes não permitirem deslocamentos, a expressão para o trabalho das demais forças fica reduzido à:

$$dv_i (-m_i \ddot{u}_i + f_{(i+1)} - f_{(i)} + fe_i) = 0 \quad (19)$$

Como pode ser observado no diagrama de corpo livre da Figura 19 com a introdução da propriedade de inércia correspondente à massas  $m_i$ , das forças das molas  $f_{(i)}$  e  $f_{(i+1)}$  e das forças externas  $fe_i$ .

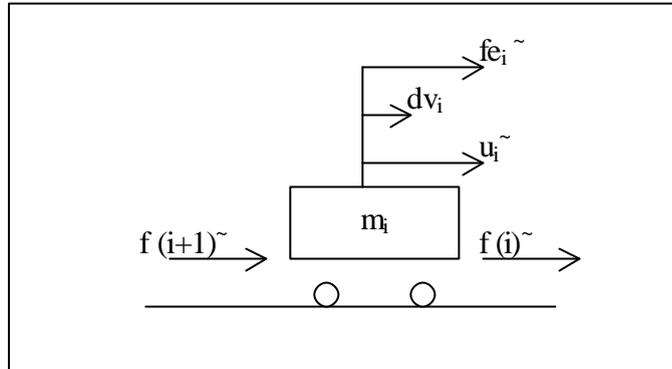


FIGURA 16 - Diagrama de Corpo Livre

Como o deslocamento virtual não é nulo, o termo entre parênteses da equação 19 deve ser nulo para que a equação seja satisfeita.

Então baseado no enunciado de D'Alembert tem-se que o somatório dos deslocamentos virtuais aplicados adequadamente a cada veículo de forma a produzir um deslocamento unitário sobre as molas, deve ser igual ao trabalho produzido pelas forças de inércia ( $\ddot{u}_i \sim$ ) mais as forças de vínculo ( $f_{e_i} \sim$ ).

Desta maneira, obtêm-se as seguintes relações:

$$\sum_{m=1}^n dv_m f_m = du_1 m_1 \ddot{u}_1 \sim + du_1 f_{e_1} \sim + du_2 m_2 \ddot{u}_2 \sim + du_2 f_{e_2} \sim + du_3 m_3 \ddot{u}_3 \sim + du_3 f_{e_3} \sim + \dots + du_i m_i \ddot{u}_i \sim + du_i f_{e_i} \sim + \dots + du_n m_n \ddot{u}_n \sim + du_n f_{e_n} \sim \quad (20)$$

Obs: o índice "m" é utilizado para indicar deslocamento ou força sobre as molas correspondente ao deslocamento relativo entre o primeiro e o segundo grau de liberdade, sendo que o valor inicial é igual a dois.

As relações geométricas que correlacionam os deslocamentos  $v_m \sim$  nas molas, com os deslocamentos  $u_i \sim$  dos corpos são:

$$\begin{array}{lll} v_2 \sim = u_1 \sim - u_2 \sim e & dv_2 = du_1 - du_2 e & f_2 = v_2 s_2 \\ v_3 \sim = u_2 \sim - u_3 \sim e & dv_3 = du_2 - du_3 e & f_3 = v_3 s_3 \\ \dots\dots\dots & & \\ v_i \sim = u_{i-1} \sim - u_i \sim e & dv_i = du_{i-1} - du_i \sim e & f_i = v_i s_i \end{array}$$

$$v_n \sim = u_{n-1} \sim - u_n \text{ e } \quad dv_n = du_{n-1} - du_n \text{ e } \quad f_n = v_n s_n \quad (21)$$

Aplicando-se estas relações na equação 20 tem-se:

$$\begin{aligned} (du_1 - du_2)(u_1 \sim - u_2 \sim) s_2 + (du_{i-1} - du_i)(u_{i-1} \sim - u_i \sim) s_i + (du_{n-1} - du_n)(u_{n-1} \sim - u_n \sim) s_n = \\ du_1 m_1 \ddot{u}_1 \sim + du_1 fe_1 + du_2 m_2 \ddot{u}_2 \sim + du_2 fe_2 + \dots + du_i m_i \ddot{u}_i \sim + du_i fe_i + \dots \\ + du_n m_n \ddot{u}_n \sim + du_n fe_n \end{aligned} \quad (22)$$

Fazendo o deslocamento  $du_1 = 1$  (unitário) e os demais deslocamentos iguais a zero tem-se as seguintes expressões:

para  $du_1 = 1$  demais iguais a zero vem:

$$\begin{aligned} du_1 (u_1 \sim - u_2 \sim) s_2 = du_1 m_1 \ddot{u}_1 \sim + du_1 fe_1 \sim \\ u_1 \sim s_2 - u_2 \sim s_2 = m_1 \ddot{u}_1 \sim + fe_1 \sim \end{aligned} \quad (23)$$

para  $du_2 = 1$  demais iguais a zero vem:

$$\begin{aligned} -du_2 (u_1 \sim - u_2 \sim) s_2 + du_2 (u_2 \sim - u_3 \sim) s_3 = du_2 m_2 \ddot{u}_2 \sim + du_2 fe_2 \sim \\ -u_1 \sim s_2 + u_2 \sim s_2 + u_2 \sim s_3 + u_3 \sim s_3 = m_2 \ddot{u}_2 \sim + fe_2 \sim \\ u_1 \sim (-s_2) + u_2 \sim (s_2 + s_3) + u_3 \sim (-s_3) = m_2 \ddot{u}_2 \sim + fe_2 \sim \end{aligned} \quad (24)$$

para  $du_i = 1$  demais iguais a zero vem:

$$\begin{aligned} -du_i (u_{i-1} \sim - u_i \sim) s_i + du_i (u_i \sim - u_{i+1} \sim) s_{i+1} = du_i m_i \ddot{u}_i \sim + du_i fe_i \sim \\ -u_{i-1} \sim s_i + u_i \sim s_i + u_i \sim s_{i+1} + u_{i+1} \sim s_{i+1} = m_i \ddot{u}_i \sim + fe_i \sim \\ u_{i-1} \sim (-s_i) + u_i \sim (s_i + s_{i+1}) + u_{i+1} \sim (-s_{i+1}) = m_i \ddot{u}_i \sim + fe_i \sim \end{aligned} \quad (25)$$

para  $du_n = 1$  demais iguais a zero vem:

$$\begin{aligned} -du_n (u_{n-1} \sim - u_n \sim) s_n + du_n (u_n \sim - u_{n+1} \sim) s_{n+1} = du_n m_n \ddot{u}_n \sim + du_n fe_n \sim \\ -u_{n-1} \sim s_n + u_n \sim s_n + u_n \sim s_{n+1} + u_{n+1} \sim s_{n+1} = m_n \ddot{u}_n \sim + fe_n \sim \\ u_{n-1} \sim (-s_n) + u_n \sim (s_n + s_{n+1}) + u_{n+1} \sim (-s_{n+1}) = m_n \ddot{u}_n \sim + fe_n \sim \end{aligned} \quad (26)$$

Rearranjando as equações e escrevendo na forma matricial obtém-se o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ 0 & 0 & 0 & : & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \dots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2 & -s_2 & 0 & : & 0 \\ -s_2 & s_2 + s_3 & -s_3 & : & 0 \\ 0 & -s_3 & s_3 + s_4 & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -s_n & : & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fe_1 \\ fe_2 \\ fe_3 \\ \dots \\ fe_n \end{bmatrix}$$

que podem ser resumidas simplesmente na forma:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\} \quad (27)$$

onde  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{S}]$  são matrizes de ordem  $n \times n$  e  $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ ,  $\{\mathbf{u}\}$  e  $\{\mathbf{p}\}$  são vetores coluna de ordem  $n \times 1$  com a seguinte constituição:

$[\mathbf{M}] = (m_{ij})$ , para  $i$  diferente de  $j$  tem-se que  $(m_{ij})=0$ , característico de uma matriz diagonal;

$[\mathbf{S}] = (s_{ij})$ , sendo que  $(s_{ij}) = (s_{ji})$  caracterizando uma matriz simétrica;

$\{\mathbf{u}\}^T = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n)$ ;

$\{\ddot{\mathbf{u}}\}^T = (\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots, \ddot{u}_i, \dots, \ddot{u}_n)$ ;

$\{\mathbf{p}\}^T = (fe_1, fe_2, \dots, fe_i, \dots, fe_n)$ .

## 5.3 Equações Diferenciais

Considerando-se primeiramente que o sistema não está submetido às forças externas ou seja  $\{\tilde{p}\}^T = (0,0,\dots,0)$ , sua vibração será livre e o conjunto de equações diferenciais do sistema assume a forma homogênea expressa por:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\tilde{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\tilde{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (28)$$

A solução da equação 28 segundo GASH [9] pode ser escrita como uma combinação de senos e cossenos que pode ser representada pela fórmula de Euler:

$$\{\tilde{u}\} = \{\mathbf{u}\} e^{i\omega t} \quad (29)$$

onde " $\omega$ " é uma frequência natural e  $\{\mathbf{u}\}$  a amplitude modal correspondente ao modo de vibrar.

Para um sistema não amortecido segundo BOYCE *et alii* [10] os autovalores não contêm parte real, portanto podem ser escritos como  $\lambda = i\omega$ . Tomando a primeira e segunda derivada, obtém-se:

$$\{\dot{\tilde{u}}\} = \lambda \{\mathbf{u}\} e^{\lambda t} \quad (30)$$

$$\{\ddot{\tilde{u}}\} = \lambda^2 \{\mathbf{u}\} e^{\lambda t} \quad (31)$$

e substituindo na equação 28, tem-se:

$$([\mathbf{S}] + \lambda^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{u}\} = \mathbf{0} \quad (32)$$

que é um autoproblema típico [10]. Se  $\{\mathbf{u}\} = \mathbf{0}$ , tem-se uma solução trivial, que não traz informação sobre o sistema. A solução não trivial é obtida para o sistema, segundo ANTON [11], quando:

$$\text{Det}([\mathbf{S}] + \lambda^2 [\mathbf{M}]) = 0 \quad (33)$$

A expressão resultante do determinante acima corresponde a um polinômio de ordem " $n$ ",  $P_n(\lambda)$ , chamado de **polinômio característico**, de maneira que:

$$P_n(\lambda) = 0 \quad (34)$$

As "n" raízes deste polinômio são números imaginários com seus pares conjugados da forma  $(+ iw_r)$  e  $(- iw_r)$  para  $r = 1, \dots, n$  onde  $w_r$  é o autovalor associado ao modo  $r$ .

Substituindo os autovalores encontrados na solução do polinômio característico na expressão 32, obtém-se um conjunto de autovetores  $\{X_r\}$  dados pela expressão:

$$([\mathbf{S}] - w_r^2 [\mathbf{M}]) \{X_r\} = \{0\} \quad (35)$$

para  $r = 1, \dots, n$ .

Tomando-se arbitrariamente dois modos distintos, "j" e "k", pode-se escrever a partir da equação 32:

$$[\mathbf{S}] \{X_j\} - w_j^2 [\mathbf{M}] \{X_j\} = \{0\} \quad (36)$$

$$[\mathbf{S}] \{X_k\} - w_k^2 [\mathbf{M}] \{X_k\} = \{0\} \quad (37)$$

Fazendo uma pré-multiplicação de cada termo das expressões acima por autovetores transpostos distintos,  $\{X_j\}^T$  e  $\{X_k\}^T$  respectivamente, obtêm-se:

$$\{X_k\}^T [\mathbf{S}] \{X_j\} - w_j^2 \{X_k\}^T [\mathbf{M}] \{X_j\} = \{0\} \quad (38)$$

$$\{X_j\}^T [\mathbf{S}] \{X_k\} - w_k^2 \{X_j\}^T [\mathbf{M}] \{X_k\} = \{0\} \quad (39)$$

da propriedade de matrizes simétricas, tem-se que:

$$\{X_k\}^T [\mathbf{M}] \{X_j\} = \{X_j\}^T [\mathbf{M}] \{X_k\} \text{ e} \quad (40)$$

$$\{X_k\}^T [\mathbf{S}] \{X_j\} = \{X_j\}^T [\mathbf{S}] \{X_k\} \quad (41)$$

o que permite subtrair a equação 38 da equação 39, produzindo:

$$(w_j^2 - w_k^2) \{X_j\}^T [\mathbf{M}] \{X_k\} = \{0\} \quad (42)$$

portanto para  $j$  diferente de  $k$ , tem-se que  $w_j \neq w_k$  o que quando aplicado à equação 42 requer:

$$\{X_j\}^T [\mathbf{M}] \{X_k\} = \{X_k\}^T [\mathbf{M}] \{X_j\} = \{0\} \quad (43)$$

então se  $j$  for igual a  $k$ , tem-se que  $w_j = w_k$ , o que implica em:

$$\{X_k\}^T [M] \{X_k\} = m_{\text{gen}(k)} \quad (44)$$

onde  $m_{\text{gen } k}$  é a massa generalizada associada ao modo de vibrar  $k$ .

Realizando-se a substituição da equação 43 em 38, e pela propriedade de simetria da matriz  $[S]$ , obtém-se para  $j$  diferente de  $k$ :

$$\{X_j\}^T [S] \{X_k\} = \{X_k\}^T [S] \{X_j\} = \{0\} \quad (45)$$

entretanto, para  $j = k$ , a equação 45 não será obrigatoriamente igual a zero. Então, atribui-se ao valor deste termo o nome de Rigidez Generalizada associada ao modo  $k$ :

$$\{X_k\}^T [S] \{X_k\} = s_{\text{gen}(k)} \quad (46)$$

Deve-se notar que as equações 43 e 45 expressam o caráter ortogonal dos autovetores  $\{X_r\}$  em relação às matrizes  $[M]$  e  $[S]$ .

Finalmente fazendo-se a aplicação das expressões generalizadas da massa 44 e da rigidez 46 na equação 38, tem-se:

$$s_{\text{gen}(r)} - w_{(r)}^2 m_{\text{gen}(r)} = 0 \text{ ou} \quad (47)$$

$$w_{(r)}^2 = s_{\text{gen}(r)} / m_{\text{gen}(r)} \quad (48)$$

para  $r = 1, \dots, n$ .

## 5.4 Desacoplamento das Equações

Será implementada a solução apresentada para o sistema de forma matricial. Para tanto é definida uma transformação linear do tipo:

$$\{\mathbf{u}\sim\} = [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\} \quad (49)$$

que relaciona o vetor de deslocamentos  $\{\mathbf{u}\sim\}$ , constituído pelos  $u_{r\sim}$  termos correspondentes aos  $n$  graus de liberdade, com o vetor  $\{\mathbf{q}\sim\}$  de coordenadas generalizadas.

A matriz  $[\mathbf{U}]$ , chamada de matriz modal, será então definida como sendo a junção dos " $n$ " autovetores do sistema obtidos pela solução do sistema homogêneo da seguinte maneira:

$$[\mathbf{U}] = [\{\mathbf{X}_1\}, \{\mathbf{X}_2\}, \dots, \{\mathbf{X}_n\}] \quad (50)$$

Fazendo então a substituição das coordenadas locais para as coordenadas generalizadas no sistema descrito na expressão 27, tem-se que  $\{\mathbf{u}\sim\} = [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\}$  e a 2ª derivada  $\{\ddot{\mathbf{u}}\sim\} = [\mathbf{U}] \{\ddot{\mathbf{q}}\sim\}$  e:

$$[\mathbf{M}] [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\} + [\mathbf{S}] [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\} = \{\mathbf{p}\sim\} \quad (51)$$

realizando uma pré-multiplicação da equação 51 pela transposta da matriz modal, tem-se:

$$[\mathbf{U}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\} + [\mathbf{U}]^T [\mathbf{S}] [\mathbf{U}] \{\mathbf{q}\sim\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{p}\sim\} \quad (52)$$

fazendo uso das propriedades de ortogonalidade dos autovetores que permite a diagonalização das matrizes simétricas, obtém-se da equação 52 o que segue:

$$[\mathbf{M}_{diag}] \{\mathbf{q}\sim\} + [\mathbf{S}_{diag}] \{\mathbf{q}\sim\} = \{\mathbf{R}\sim\} \quad (53)$$

onde  $\{\mathbf{R}\sim\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{p}\sim\}$ , a matriz  $[\mathbf{M}_{diag}]$  possui em sua diagonal os termos de massa generalizadas  $m_{gen(r)}$  e a matriz  $[\mathbf{S}_{diag}]$  possui em sua diagonal os termos de rigidez generalizada  $s_{gen(r)}$  para  $r = 1, \dots, n$  e zero nos demais termos. Desta maneira obtém-se um sistema de equações desacopladas que podem ser resolvidas independentemente.

## 5.5 Sistema com Amortecimento

Seja considerado um sistema linear com amortecimento viscoso, descrito por uma equação de movimento do tipo:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{D}] \{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\} \quad (54)$$

onde as matrizes de massas  $[\mathbf{M}]$ , amortecimento  $[\mathbf{D}]$  e rigidez  $[\mathbf{S}]$  são todas simétricas.

O sistema mecânico proposto na Figura 17 acrescido de amortecedores do tipo viscoso e linear conectados entre dois veículos, e em paralelo com as molas constitui um sistema linear amortecido. A obtenção da matriz de amortecimento  $[\mathbf{D}]$  da equação de movimento pode ser realizada de forma similar ao procedimento descrito no item anterior. A matriz  $[\mathbf{D}]$  é da forma apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} d_2 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 & 0 & : & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & -d_i & d_i + d_{i+1} & -d_{i+1} & : & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & -d_n & d_n \end{bmatrix} \quad (55)$$

O procedimento para solucionar o sistema de equações inicia-se, realizando a transformação do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, para um sistema de equações diferenciais simultâneas de primeira ordem. Considerando o sistema de equações diferenciais de segunda ordem original:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{D}] \{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\} \quad (56)$$

e a seguinte identidade:

$$[\mathbf{S}] \{\dot{\tilde{u}}\} - [\mathbf{S}] \{\tilde{u}\} = \{0\} \quad (57)$$

Então, realizando o agrupamento das equações na seguinte forma matricial, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

É importante observar que foram agrupados de forma vetorial os graus de liberdade e suas respectivas derivadas, em vetores que são chamados de vetores de estado  $\{\tilde{r}\}$  e  $\{\dot{\tilde{r}}\}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \{\dot{\tilde{r}}\} \quad \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{u}} \end{bmatrix} = \{\ddot{\tilde{r}}\} \quad (59)$$

Assim a expressão matricial 58 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$[\mathbf{B}] \{\dot{\tilde{r}}\} - [\mathbf{C}] \{\tilde{r}\} = \{\tilde{f}\} \quad (60)$$

onde as matrizes  $[\mathbf{B}]$  e  $[\mathbf{C}]$  de ordem  $2n \times 2n$  são dadas por:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \{\tilde{f}\} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Considerando o sistema de equações homogêneas, ou seja,  $\{\tilde{f}\} = 0$ , pode-se esperar que a solução da equação diferencial seja do tipo:

$$\{\tilde{r}\} = \{\mathbf{r}\} e^{kt} \quad (62)$$

o que leva à equação dos autovalores:

$$([\mathbf{B}] - \lambda [\mathbf{C}]) \{\mathbf{r}\} = \{0\} \quad (63)$$

então a solução não trivial do conjunto de equações diferenciais fornecerá  $2n$  raízes complexas " $\lambda$ " em pares conjugados. Estes, por sua vez, quando substituídos na equação 63 produzirão  $2n$  autovetores  $\{r\}$  que podem ser dispostos lado a lado de forma a produzir a Matriz Modal  $[R]$ :

$$[R] = [\{r_1\} \quad \{r_2\} \quad \dots \quad \{r_{2n}\}] = \begin{bmatrix} I_1 u_1 & I_2 u_2 & \dots & I_{2n} u_{2n} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{2n} \end{bmatrix} \quad (64)$$

considerando que o sistema é linear, então a solução é dada pela sobreposição ponderada de cada modo de vibrar:

$$\{r\sim\} = r_1 \{q_1\sim\} + r_2 \{q_2\sim\} + \dots + r_{2n} \{q_{2n}\sim\} \quad (65)$$

$$\{r\sim\} = \sum_{i=1}^{2n} r_i \{q_i\sim\} \quad (66)$$

ou simplesmente:

$$\{r\sim\} = [R] \{q\sim\} \quad (67)$$

onde  $[R]$  é a matriz Modal e  $\{q\sim\}^T = \{q_1\sim \quad q_2\sim \dots q_{2n}\sim\}$  o vetor de coordenadas generalizadas.

Fazendo a substituição de  $\{r\sim\}$  na equação 60 e pré-multiplicando pela transposta da Matriz Modal  $[R]^T$ , tem-se:

$$([R]^T [B] [R]) \{q\sim\} - ([R]^T [C] [R]) \dot{\{q\sim\}} = [R]^T \{f\sim\} \quad (68)$$

como as matrizes  $[B]$  e  $[C]$  são simétricas, portanto,  $[B] = [B]^T$  e  $[C] = [C]^T$ , e devido ao caráter ortogonal conseqüente dos autovetores, o resultado do produto das matrizes entre os parênteses são diagonais, portanto, o sistema de equações transforma-se em  $2n$  equações independentes (desacopladas), expressas por:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & b_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1\sim \\ q_j\sim \\ q_{2n}\sim \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & c_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1\sim \\ \dot{q}_j\sim \\ \dot{q}_{2n}\sim \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1\sim \\ h_j\sim \\ h_{2n}\sim \end{Bmatrix}$$

(69)

onde  $\{\tilde{\mathbf{h}}\} = [\mathbf{R}]^T \{\tilde{\mathbf{f}}\}$  e a representação das matrizes diagonal. Pode-se então escrever simplesmente  $2n$  equações independentes do tipo:

$$[b_j] \{q_j\} - [c_j] \{q_j\} = \{\tilde{h}_j\} \quad (70)$$

para  $j = 1 \dots 2n$ .

## 5.6 Verificação da Ortogonalidade

Para a verificação da ortogonalidade do sistema amortecido, sejam considerados os autovetores  $\{r_j\}$  e  $\{r_k\}$  correspondentes aos autovalores  $\lambda_j$  e  $\lambda_k$  dos modos de vibrar  $j$  e  $k$ , respectivamente. Aplicando ambos os valores à equação homogênea 63, vem:

$$[\mathbf{B}] \{r_j\} - \lambda_j [\mathbf{C}] \{r_j\} = 0 \quad (71)$$

$$[\mathbf{B}] \{r_k\} - \lambda_k [\mathbf{C}] \{r_k\} = 0 \quad (72)$$

Fazendo a multiplicação da primeira equação pelo autovetor  $\{r_k\}^T$  e a segunda equação pelo autovetor  $\{r_j\}^T$ , tem-se:

$$(\{r_k\}^T [\mathbf{B}] \{r_j\}) - \lambda_j (\{r_k\}^T [\mathbf{C}] \{r_j\}) = 0 \quad (73)$$

$$(\{r_j\}^T [\mathbf{B}] \{r_k\}) - \lambda_k (\{r_j\}^T [\mathbf{C}] \{r_k\}) = 0 \quad (74)$$

mas devido ao fato das matrizes  $[\mathbf{B}]$  e  $[\mathbf{C}]$  serem simétricas, tem-se que:

$$\{r_j\}^T [\mathbf{B}] \{r_k\} = \{r_k\}^T [\mathbf{B}] \{r_j\} \text{ e} \quad (75)$$

$$\{r_j\}^T [\mathbf{C}] \{r_k\} = \{r_k\}^T [\mathbf{C}] \{r_j\} \quad (76)$$

Fazendo a subtração da equação 73 por 74 obtém-se:

$$(\lambda_j - \lambda_k) \{r_k\}^T [\mathbf{C}] \{r_j\} = 0 \quad (77)$$

supondo que o modo  $j$  escolhido seja diferente do modo  $k$ , então o termo  $(\lambda_j - \lambda_k)$  é diferente de zero. Portanto, para que a equação acima seja nula é necessário que:

$$\{r_k\}^T [C] \{r_j\} = 0 \quad (78)$$

Entretanto se o modo  $j$  for o mesmo que  $k$ , pode-se impor uma condição de normalização para os autovetores de tal forma que:

$$\{r_k\}^T [C] \{r_j\} = 1 \quad (79)$$

(para  $j = k$ ) esta normalização pode ser obtida com:

$$\{r'_k\}^T [C] \{r'_j\} = \{p_j\} \quad (80)$$

onde  $\{r_j\} = \{r'_j\} / (p_j)^{1/2}$  então a expressão abaixo é nula:

$$\{r_k\}^T [C] \{r_j\} = 0 \quad (81)$$

para  $j \neq k$  e igual à unidade para  $j = k$  e na forma matricial fica:

$$[R]^T [C] [R] = [I] \quad (82)$$

Fazendo uso da equação 73, lançando mão das características deduzidas em 81 e considerando o caráter de ortogonalidade dos autovetores, tem-se que:

$$(\{r_k\}^T [B] \{r_j\}) - \lambda_j (\{r_k\}^T [C] \{r_j\}) = 0 \quad (83)$$

$$\{r_k\}^T [B] \{r_j\} = 0 \quad (84)$$

para  $j$  diferente de  $k$  e igual a  $a_j$  para  $j = k$  portanto

$$[R]^T [B] [R] = [a_j] \quad (85)$$

onde  $[a_j]$  é matriz diagonal e substituindo esta expressão em 73, tem-se  $a_j - \lambda_j = 0$  e portanto  $a_j = \lambda_j$ .

Então substituindo as expressões 85 e 81 e reescrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & & \\ & \mathbf{I}_j & \\ & & \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \sim \\ q_j \sim \\ q_{2n} \sim \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \sim \\ \dot{q}_j \sim \\ \dot{q}_{2n} \sim \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1 \sim \\ h_j \sim \\ h_{2n} \sim \end{Bmatrix}$$

(86)

ou simplesmente:

$$[\lambda_j] \{\dot{q}_j \sim\} - \{\dot{q}_j \sim\} = \{h_j \sim\}$$

(87)

## 5.7 Conteúdo da Matriz Fundamental

Neste item será apresentada a formulação da Matriz Fundamental para cálculo do comportamento do sistema homogêneo no tempo a partir das condições iniciais.

A matriz fundamental permite correlacionar o vetor de estado das condições iniciais (velocidade e posição iniciais) de um sistema mecânico representado por um conjunto de equações diferenciais homogêneas, com o vetor de estado em um instante de tempo qualquer.

A matriz fundamental pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{F}]_{(t)} \{\mathbf{u}_0\} \quad (88)$$

onde  $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$  é o vetor de estado composto pela velocidade e posição correspondente aos graus de liberdade do sistema e  $\{\mathbf{u}_0\}$  é o vetor de estado nas respectivas condições iniciais. A matriz fundamental  $[\mathbf{F}]_{(t)}$  possui ordem  $2n \times 2n$ , sendo "n" o número de graus de liberdade do sistema.

A constituição da Matriz Fundamental será demonstrada a partir do equacionamento e solução de um sistema de dois graus de liberdade, embora, isto seja possível para sistema de qualquer número de graus de liberdade.

Seja considerado o sistema dinâmico sem amortecimento descrito pelo sistema de equações diferenciais homogêneas como segue:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}\} + [\mathbf{S}] \{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (89)$$

onde  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{S}]$  são respectivamente as matrizes de ordem  $n \times n$  (neste caso particular  $n = 2$ ) simétricas de massa e rigidez,  $\{\mathbf{0}\}$  o vetor nulo de ordem  $n \times 1$ ,  $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$  e  $\{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}\}$  o vetor deslocamento e aceleração em relação ao tempo para cada grau de liberdade, com as seguintes condições iniciais:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\}_{(t=0)} = \{\mathbf{u}_0\} \quad (90)$$

$$\{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}\}_{(t=0)} = \{\ddot{\mathbf{u}}_0\} \quad (91)$$

A solução de um sistema de equações diferenciais lineares e homogêneas pode ser expressa por uma combinação linear de senos e cossenos ou através da fórmula de Euler, que tem a forma de uma exponencial do tipo

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}_k\} e^{\lambda_k t} \quad (92)$$

onde  $\lambda_k$  representa o autovalor, associado ao modo  $k$  do sistema. Esta expressão e sua segunda derivada quando aplicadas na equação 89 obtém:

$$(\lambda^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{S}]) \{\mathbf{u}\} = \{0\} \quad (93)$$

cuja solução não trivial é obtida igualando-se o determinante a zero. Desta maneira obtém-se o polinômio característico cujas raízes são os autovalores do sistema

$$\text{Det} (\lambda^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{S}]) = \{0\} \quad (94)$$

Pela substituição, na equação 93, dos autovalores " $\lambda_k$ " determinados em 94 obtém-se autovetores  $\{\mathbf{u}_k\}$ , que no caso de um sistema com 2 graus de liberdade, com matriz de rigidez simétrica, produz um polinômio característico biquadrado com raízes imaginárias conjugadas aos pares ou seja  $\lambda_3 = -\lambda_1$ ,  $\lambda_4 = -\lambda_2$ . havendo portanto apenas dois autovetores distintos ( $\{\mathbf{u}_1\}$ ,  $\{\mathbf{u}_2\}$ ).

Considerando que a solução do sistema é uma combinação linear dos vários modos de vibrar, tem-se da equação 92, ponderando cada termo por  $q_k$ :

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} q_k e^{\lambda_k t} \quad (95)$$

Como  $\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{u}_3\}$  e  $\{\mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{u}_4\}$ , tem-se que:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}_1\}(q_1 e^{i\omega_1 t} + q_3 e^{-i\omega_1 t}) + \{\mathbf{u}_2\}(q_2 e^{i\omega_2 t} + q_4 e^{-i\omega_2 t}) \quad (96)$$

utilizando a fórmula de Euler ( $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ ) pode-se reduzir a equação acima para:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (97)$$

onde  $a_1 = q_1 + q_3$ ,  $a_2 = q_2 + q_4$ ,  $b_1 = i(q_1 - q_3)$ ,  $b_2 = i(q_2 - q_4)$ .

Portanto, em notação matricial tem-se a partir da equação 97 e sua derivada:

$$\{\tilde{u}\} = [u_1; u_2] \begin{Bmatrix} a_1 \cos w_1 t + b_1 \sin w_1 t \\ a_2 \cos w_2 t + b_2 \sin w_2 t \end{Bmatrix} \quad (98)$$

$$\{\dot{\tilde{u}}\} = [u_1; u_2] \begin{Bmatrix} -w_1 a_1 \sin w_1 t + w_1 b_1 \cos w_1 t \\ -w_2 a_2 \sin w_2 t + w_2 b_2 \cos w_2 t \end{Bmatrix} \quad (99)$$

Introduzindo a matriz modal  $[U]$  composta pelos autovetores do sistema dispostos lado a lado, tem-se:

$$[U] = [\{u_1\}; \{u_2\}; \dots \{u_n\}] \quad (100)$$

Agora, fazendo a representação na forma matricial da equação 98, tem-se:

$$\{\tilde{u}\} = [U] \begin{bmatrix} \cos w_1 t & 0 \\ 0 & \cos w_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + [U] \begin{bmatrix} \sin w_1 t & 0 \\ 0 & \sin w_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Similarmente para a equação 99, tem-se:

$$\{\dot{\tilde{u}}\} = [U] \begin{bmatrix} -w_1 & 0 \\ 0 & -w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin w_1 t & 0 \\ 0 & \sin w_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + [U] \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w_1 t & 0 \\ 0 & \cos w_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Fazendo a aplicação das condições iniciais para  $t=0$  na expressão 101, tem-se que  $\{\tilde{u}\}_{(t=0)} = \{u_0\}$  e:

$$[U] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \{u_0\} \quad (103)$$

ou simplesmente:

$$\{a_k\} = [\mathbf{U}]^{-1} \{\mathbf{u}_0\} \quad (104)$$

similarmente para a expressão 102, tem-se:

$$\{\hat{u}^{\sim}\}_{(t=0)} = \{\hat{u}_0\} \quad (105)$$

$$[\mathbf{U}]^{-1} \begin{bmatrix} w^1 & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \{\hat{u}_0\}, \text{ ou } \{b_k\} = [wk^{-1}] [\mathbf{U}]^{-1} \{\hat{u}_0\} \quad (106)$$

onde a matriz com colchetes abertos na extremidade representa matriz diagonal com termos  $1/w_k$  somente na diagonal e demais igual a zero.

Fazendo uso das equações 101 e 103 com representação matricial, tem-se:

$$\{\hat{u}^{\sim}\} = [\mathbf{U}] [\cos w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} \{\mathbf{u}_0\} + [\mathbf{U}] \begin{bmatrix} 1 & \\ & \cos w_k t \end{bmatrix} [\mathbf{U}]^{-1} \{\mathbf{u}_0\} \quad (107)$$

Fazendo uso das equações 102 e 104 com representação matricial, tem-se:

$$\{\hat{u}^{\sim}\} = [\mathbf{U}] [-w_k \quad \text{sen } w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} \{\mathbf{u}_0\} + [\mathbf{U}] [\cos w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} \{\mathbf{u}_0\} \quad (108)$$

Rearranjando na forma matricial as expressões 108 e 107, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}^{\sim} \\ u^{\sim} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{U}] [\cos w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} & [\mathbf{U}] [-w_k \text{ sen } w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} \\ [\mathbf{U}] [w_k t^{-1} \text{ sen } w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} & [\mathbf{U}] [\cos w_k t] [\mathbf{U}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (109)$$

ou simplesmente:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{F}]_{(t)} \{\mathbf{u}_0\} \quad (110)$$

Esta expressão, conhecida como Matriz Fundamental ou Matriz de Transferência, permite correlacionar o vetor de estado de um instante inicial  $t_0$  para um instante  $t$  qualquer.

## 5.8 M.F. para Sistema com Amortecimento

A dedução da matriz fundamental para o sistema linear com amortecimento viscoso segue um roteiro semelhante ao do sistema sem amortecimento e sua formulação será apresentada a seguir.

Seja considerado um sistema com amortecimento viscoso, descrito pela equação homogênea do seguinte tipo:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{D}] \{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (111)$$

onde  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  e  $[\mathbf{S}]$  são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez,  $\{\mathbf{u}\}$  o deslocamento em relação ao tempo de cada grau de liberdade com as seguintes condições iniciais para  $t=0$   $\{\mathbf{u}\}_{(t=0)} = \{\mathbf{u}_0\}$  e  $\{\dot{\mathbf{u}}\}_{(t=0)} = \{\dot{\mathbf{u}}_0\}$ .

A solução de um sistema de equações diferenciais lineares e homogêneas pode ser expressa por uma combinação linear de senos e cossenos ou através da fórmula de EULER, que tem a forma de uma exponencial do tipo:

$$\{\mathbf{u}\}(t) = \{u_k\} e^{I k t} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} e^{I k t} \quad (112)$$

para sistemas de dois graus de liberdade ( $n=2$ ) esta expressão e sua segunda derivada quando aplicadas na equação 111, obtém:

$$(\lambda^2 [\mathbf{M}] + \lambda [\mathbf{D}] + [\mathbf{S}]) \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (113)$$

cuja solução não trivial é obtida igualando-se o determinante a zero. Desta maneira obtém-se o polinômio característico cujas raízes são os autovalores do sistema:

$$\text{Det} (\lambda^2 [\mathbf{M}] + \lambda [\mathbf{D}] + [\mathbf{S}]) = \{0\} \quad (114)$$

Pela substituição na equação 113 dos autovalores determinados em 114, obtém-se

autovetores  $\{\mathbf{u}\}$  que no caso de um sistema de 2 graus de liberdade com amortecimento viscoso, com matriz de amortecimento e de rigidez simétricas, produz um polinômio característico com raízes complexas conjugadas aos pares ( $\lambda_3 = -\lambda_1$ ,  $\lambda_4 = -\lambda_2$ ). Existirão portanto  $2 \times n$  autovetores distintos complexos e conjugados ( $\{\mathbf{u}_1\}\{\mathbf{u}_1\}^*$  e  $\{\mathbf{u}_2\}\{\mathbf{u}_2\}^*$ ).

A solução será dada pela combinação linear de cada modo, sendo representada por 115 e sua derivada 116:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} \{q_k\} e^{\lambda_k t} \quad (115)$$

$$\{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} \{q_k\} \lambda_k e^{\lambda_k t} \quad (116)$$

Agrupando as expressões 115 e 116 em notação matricial, tem-se a expressão 117 e de forma reduzida 118:

$$\begin{bmatrix} \{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\} \\ \{\tilde{\mathbf{u}}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \{\mathbf{u}_1\} & \mathbf{g}_2 \{\mathbf{u}_2\} & \mathbf{g}_3 \{\mathbf{u}_3\} & \mathbf{g}_4 \{\mathbf{u}_4\} \\ \{\mathbf{u}_1\} & \{\mathbf{u}_2\} & \{\mathbf{u}_3\} & \{\mathbf{u}_4\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

(117)

$$\begin{bmatrix} \{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}\} \\ \{\tilde{\mathbf{u}}\} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] [e^{\mathbf{I} t}] \{\mathbf{q}\}$$

(118)

Observando a expressão 118 para as condições iniciais onde o tempo  $t=0$ , ter-se-á uma matriz identidade pois a diagonal da matriz das exponenciais  $e^{\lambda_k t} = 1$ . Portanto para as condições iniciais  $\{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{u}}_0\}$  a expressão 118 fica:

$$\begin{bmatrix} \{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0\} \\ \{\tilde{\mathbf{u}}_0\} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \{\mathbf{q}\} \quad \text{portanto} \quad \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} \{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0\} \\ \{\tilde{\mathbf{u}}_0\} \end{bmatrix}$$

(119)

Substituindo a expressão de  $\{\mathbf{q}\}$  da equação 119 em 118, tem-se finalmente a forma da Matriz Fundamental para sistemas com amortecimento viscoso, que correlaciona o estado do sistema em um tempo qualquer com seu estado inicial:

---

$$\begin{bmatrix} \{\dot{u}^{\sim}\} \\ \{u^{\sim}\} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] [eI^{kt}] [\mathbf{R}]^{-1} \begin{bmatrix} \{\dot{u}_0\} \\ \{u_0\} \end{bmatrix} \quad (120)$$

Portanto, a Matriz Fundamental para o sistema com amortecimento viscoso tem a seguinte forma:

$$[\Phi](t) = [\mathbf{R}] [eI^{kt}] [\mathbf{R}]^{-1} \quad (121)$$

## 5.9 Integral de Convolução

Considerando que o sistema mecânico, representado pelas equações de movimento deduzidas anteriormente, seja excitado por uma força externa  $\{\tilde{f}\}$ , variável no tempo a solução é obtida com auxílio da Integral de Convolução.

Este sistema é representado matematicamente por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem do tipo

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\tilde{u}}\} + [\mathbf{D}] \{\dot{\tilde{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\tilde{u}\} = \{\tilde{f}\} \quad (122)$$

A representação por equação de estado pode ser obtida pela solução do sistema:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\tilde{u}}\} + [\mathbf{D}] \{\dot{\tilde{u}}\} + [\mathbf{S}] \{\tilde{u}\} = \{\tilde{f}\} \quad (123)$$

$$[\mathbf{S}] \dot{\tilde{u}} - [\mathbf{S}] \tilde{u} = \{0\} \quad (124)$$

Fazendo com que o vetor de estado seja a composição de velocidades e deslocamentos  $\{\tilde{r}\} = \{\dot{\tilde{u}} \ \tilde{u}\}^T$  e que o vetor de forçamento externo seja  $\{\tilde{F}\} = \{\tilde{f} \ 0\}^T$ , o sistema acima fica descrito por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

onde:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (126)$$

ou simplesmente:

$$[\mathbf{B}] \{\tilde{r}\} - [\mathbf{C}] \{\tilde{r}\} = \{\tilde{F}\} \quad (127)$$

Rearranjando a expressão acima:

$$[\mathbf{C}] \{\tilde{\mathbf{r}}\} = [\mathbf{B}] \{\tilde{\mathbf{r}}\} - \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (127)$$

ou seja:

$$\{\mathbf{r}\} = [\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{B}] \{\mathbf{r}\} - [\mathbf{C}]^{-1} \{\mathbf{F}\} \quad (128)$$

como a matriz  $[\mathbf{C}]$  é diagonal, a sua inversa é igual a inversa de cada termo, segue que:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

que é a chamada de Matriz Dinâmica do sistema, onde também:

$$[\mathbf{C}]^{-1} \{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ 0 \end{bmatrix} = [-\mathbf{M}^{-1} : 0] \{\tilde{\mathbf{F}}\}$$

$$\{\mathbf{r}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{r}\} - [-\mathbf{M}^{-1} : 0] \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (129)$$

A equação 129 descreve o comportamento dinâmico do sistema de forma contínua no tempo. Para efeito de utilização em um algoritmo de cálculo com auxílio de computador, é necessário, uma expressão em tempo discreto.

A solução da equação 129 é conhecida e dada por GASH [9] do tipo:

$$\{\mathbf{r}\}_{(t)} = [\mathbf{I}]_{(t,t_0)} \{\mathbf{r}\}_{(t_0)} + \int_{t_0}^t [\mathbf{I}]_{(t,p)} \{\mathbf{E}\} \{\mathbf{u}\}_{(p)} dp \quad (130)$$

onde  $[\mathbf{I}]_{(t,t_0)}$  é a Matriz Fundamental deduzida no item anterior.

No caso de se utilizar parâmetros constantes no tempo segundo PEDERIVA [12] é possível mostrar que:

$$\{\mathbf{r}\}_{(t)} = [\mathbf{I}]_{(t,t_0)} \{\mathbf{r}\}_{(t_0)} \quad (131)$$

$$[\mathbf{I}]_{(t,t_0)} = e^{[\mathbf{A}](t-t_0)} \quad (132)$$

Como há interesse no sistema discreto no tempo, será considerado que a excitação externa  $\{f\}$  é constante por partes, dentro do intervalo de tempo considerado.

A Figura 19.a mostra um elemento da função  $\{f\}$  contínuo no tempo. Para cada intervalo de tempo  $T$  ter-se-á que a função discreta não muda até que uma nova observação seja feita. A Figura 19.b mostra a função discreta no tempo.

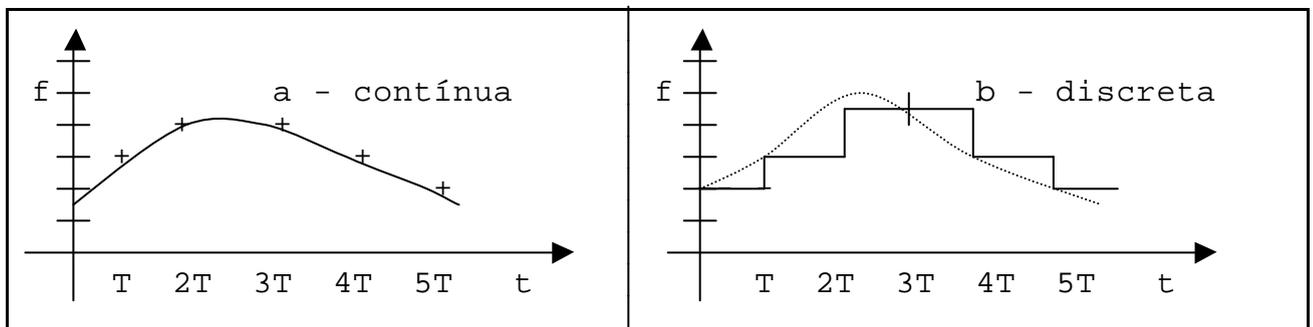


FIGURA 18 - Representação da Função Força Externa

Desta forma tem-se que para um instante "t" a função de força  $\{f\}$  fica:  $f(t) = f(nT) \sim f(n)$  para  $nT \leq t < (n+1)T$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

O comportamento do sistema submetido a força externa  $\{f\}$  constante, calculada entre os intervalos de tempo  $t_k = kT$  e  $t_{k+1} = (k+1)T$  é dado segundo SCHWARZ [13], pela expressão abaixo:

$$\{r\}_{(tk+1)} = [F]_{(T)} \{r\}_{(tk)} + \int e^{[A](tk+1-P)} \{E\} \{u\}_{(P)} dP \quad (133)$$

Como há interesse somente no comportamento do sistema para os instantes discretos de tempo  $0, T, 2T, 3T, \dots$  a equação acima pode ser expressa por:

$$\{r\}_{(tk+1)} = [F]_{(T)} \{r\}_{(tk)} + [G]_{(tk)} \{u\}_{(tk)} \quad (134)$$

onde:

$$[G]_{(tk+1)} = \int e^{[A](tk+1-P)} \{E\} dP \quad (135)$$

mas como:  $T = t_{(k+1)} - t_{(k)}$  então  $t_{(k)} = kT$ .

Fazendo  $f = (k+1)T - t$  a expressão 135 fica:

$$[\mathbf{G}]_{(T)} = \int_0^T e^{[\mathbf{A}](f)} \{\mathbf{E}\} df \quad (136)$$

Como a integral de uma exponencial deste tipo tem a seguinte solução:

$$\int_0^T e^{cf} df = 1/c (e^{cT} - 1) \quad (137)$$

a equação 136 fica reduzida à:

$$[\mathbf{G}]_{(T)} = [\mathbf{A}]^{-1} (e^{[\mathbf{A}](T)} - [\mathbf{I}]) \{\mathbf{E}\} \quad (138)$$

onde  $[\mathbf{I}]$  é matriz identidade de ordem  $2n \times 2n$  e substituindo a expressão acima na equação 134, tem-se finalmente:

$$\{\mathbf{r}\}_{(tk+1)} = [\mathbf{O}]_{(T)} \{\mathbf{r}\}_{(tk)} + [\mathbf{A}]^{-1} ( [\mathbf{O}]_{(T)} - [\mathbf{I}] ) \{\mathbf{E}\}_{(tk)} \{\mathbf{u}\}_{(tk)} \quad (139)$$

Esta é a expressão utilizada para implementação do programa de computador para realizar o cálculo do comportamento do sistema dinâmico submetido a forças externas a partir de suas condições iniciais.

---

# Capítulo 6

## 6.1 Estudo de Caso

Com o objetivo de verificar a capacidade de cálculo e de comparar os dois métodos desenvolvidos, foi proposto o estudo de caso específico utilizando, a teoria apresentada neste trabalho.

Foi adotada como tema a simulação do processo de frenagem de uma composição de 20 veículos com aplicação de freio pneumático. Os resultados calculados pelos dois métodos serão apresentados e comparados, especialmente as forças geradas entre os veículos.

O primeiro método utiliza processo de integração numérica, onde só é possível simular os movimentos de forma seqüencial no tempo a partir de uma condição inicial fornecida ao programa. As características não lineares do ACT e do sistema de freio são contempladas neste processo.

O segundo método, baseado na Matriz Fundamental, foi desenvolvido com auxílio de programa de computador dedicado para cálculo matricial e números complexos, que possui funções específicas para solução de sistemas dinâmicos tais como determinação de autovalores e autovetores. A aplicação deste segundo método depende da linearização dos elementos do sistema. Esta forma de solução apresenta as frequências naturais do sistema e seus modos de vibrar.

## 6.2 Condições da Simulação

As condições adotadas para realização da simulação pelo primeiro método são as seguintes:

- Vinte veículos com massas idênticas de 120.000 [kg];
- Ligação entre veículos ACT não linear (Tipo Mark-50);
- Velocidade Inicial de 16,7 [m/s] (60 [km/h]);
- Sistema de Freio ABD;

Para o segundo método os dados são idênticos, exceto para os casos onde a linearização é necessária:

- Rigidez do par de ACT: 10,5 E+06 [N/m].
- Amortecimento do par de ACT: 80,0 E+03 [Ns/m].
- Sistema de Freio: ABD.

## 6.3 Simulação por Integração Numérica

Para o estudo de frenagem será utilizado o modelo não linear, cuja solução é obtida com processo de integração numérica do tipo Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração de 0,002 segundos. Esta atividade foi realizada com auxílio de programa dedicado desenvolvido pela equipe do Agrupamento de Desenvolvimento Ferroviário do IPT, e desenvolvida pelo autor a rotina de controle e aplicação do sistema de freio ferroviário. Esta rotina tem a propriedade de permitir o cálculo das pressões no cilindro de freio para qualquer magnitude de aplicação inclusive com acionamentos sobrepostos com intensidade crescente.

Foi simulada uma frenagem com aplicação de freio de serviço máximo que corresponde a uma redução de 20 [Psi] no encanamento geral. Neste caso a valor da força de frenagem é multiplicada pela eficiência da timoneria de freio que reduz os valores nominais da força para o início da aplicação do freio. Durante a simulação, os veículos ficam livres até que se inicie a aplicação das forças de frenagem. A partir deste instante as folgas nos engates começam a se fechar devido as forças de compressão entre os veículos.

Os resultados desta simulação são apresentados a seguir, da seguinte forma:

- a ) velocidade do primeiro veículo - Gráfico 2;
- b ) aceleração média do primeiro veículo - Gráfico 4;
- c ) força no 1º acoplamento;
- d ) força no 5º acoplamento;
- e ) força no 9º acoplamento;
- f ) força no 13º acoplamento;
- g ) força no 19º acoplamento;
- h ) gráfico da pressão no cilindro de freio - Gráfico 16

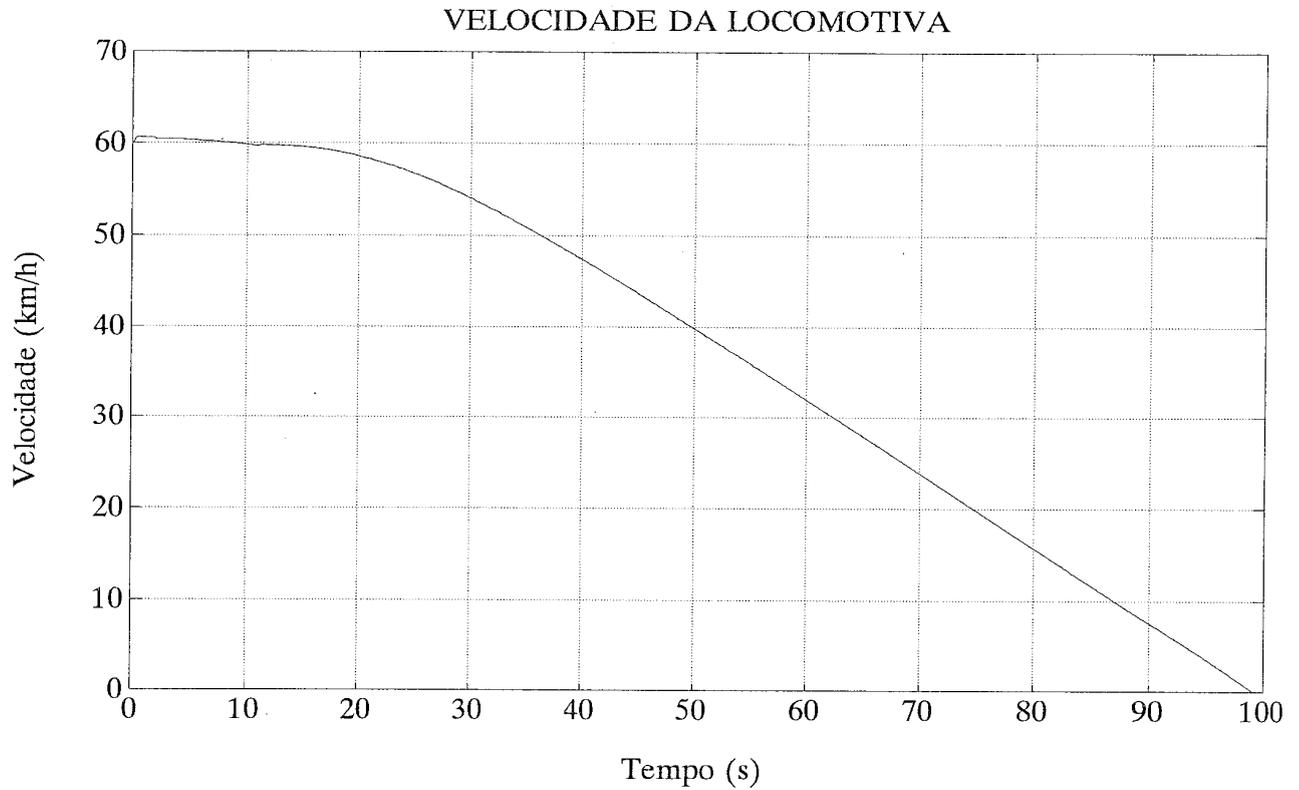


GRÁFICO 4 – Registro da Velocidade (1° Veículo)

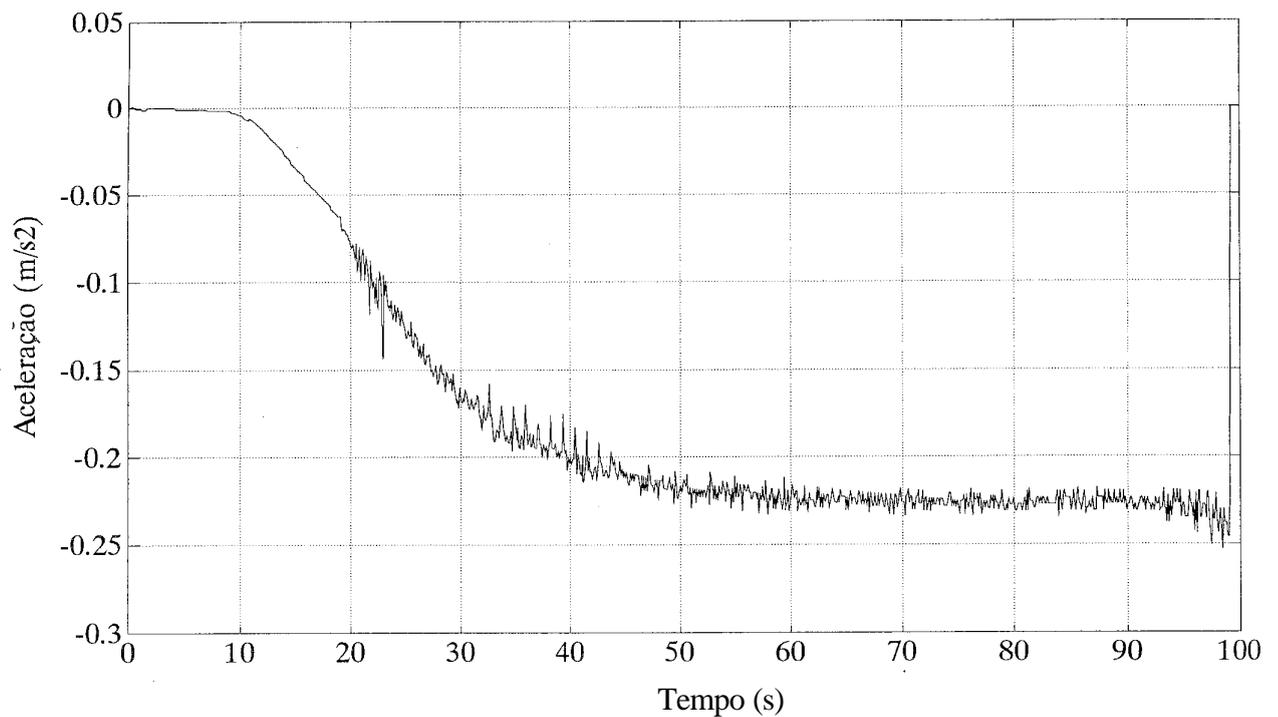


GRÁFICO 5 – Registro da Aceleração (1° Veículo)

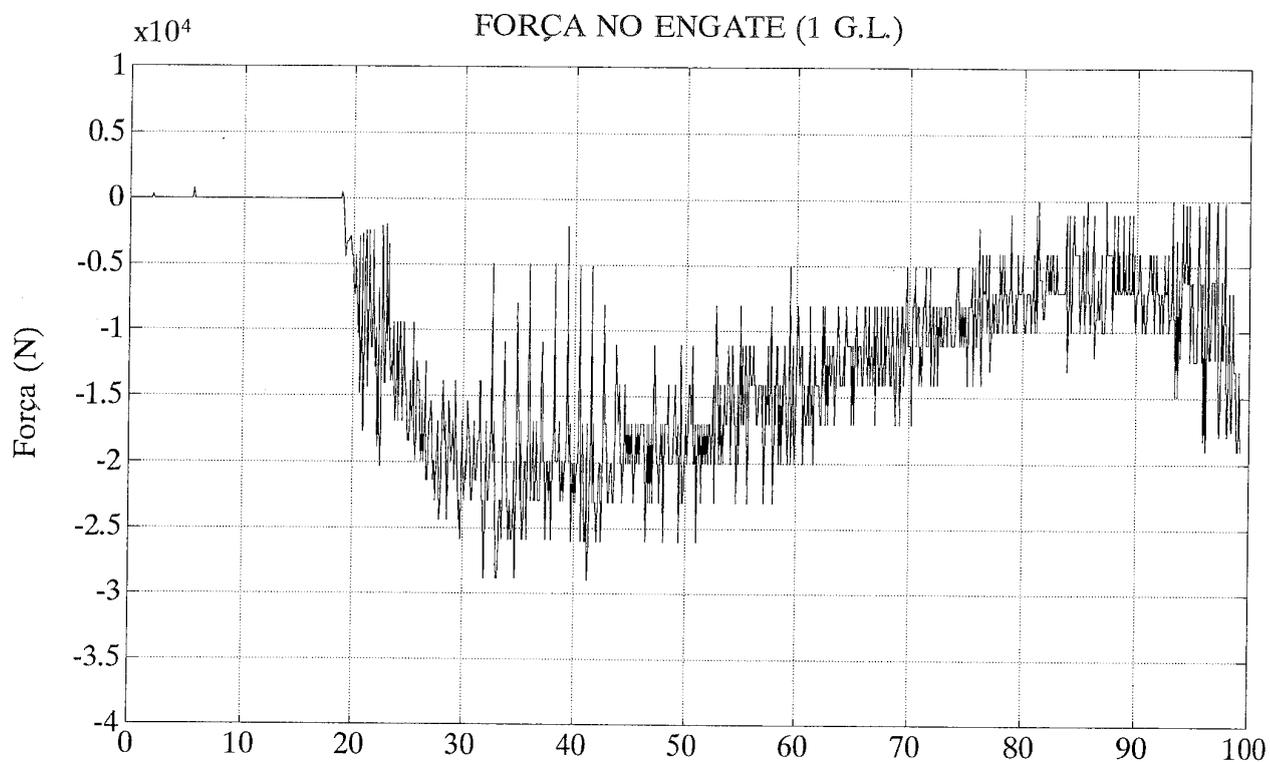


GRÁFICO 6 – Registro das Forças (1º Acoplamento)

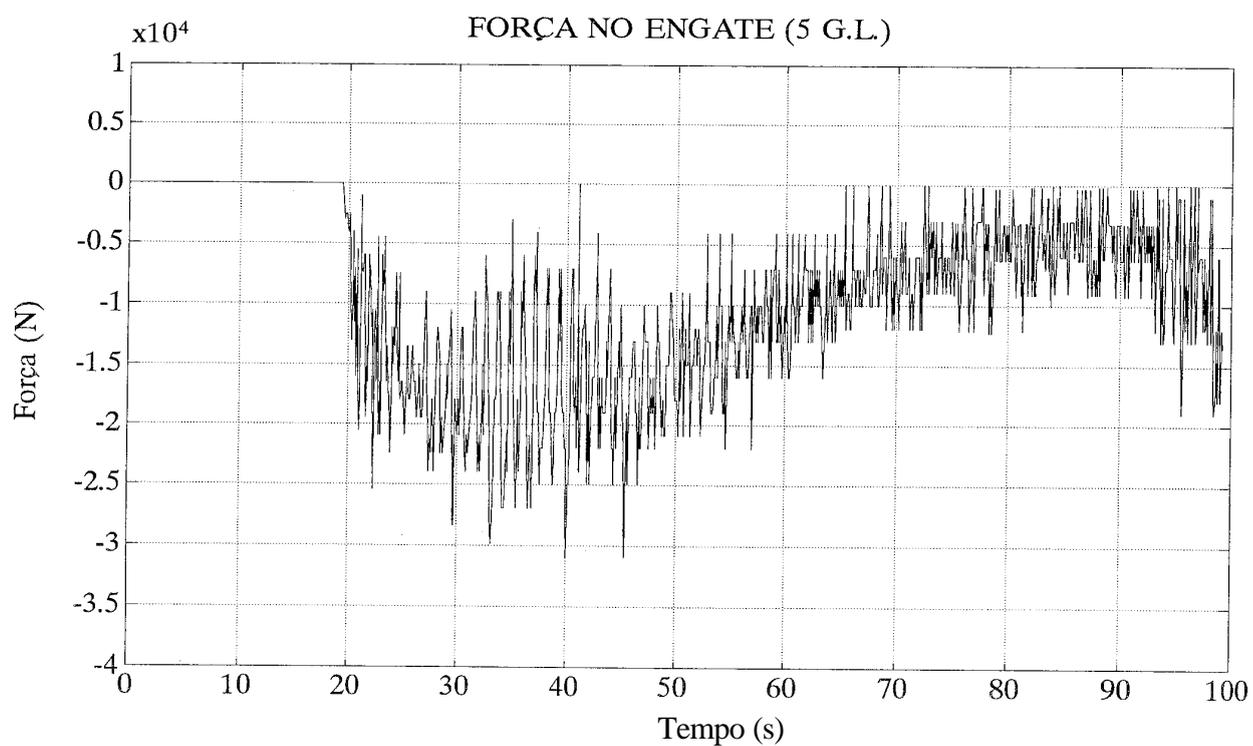


GRÁFICO 7 – Registro das Forças (5º Acoplamento)

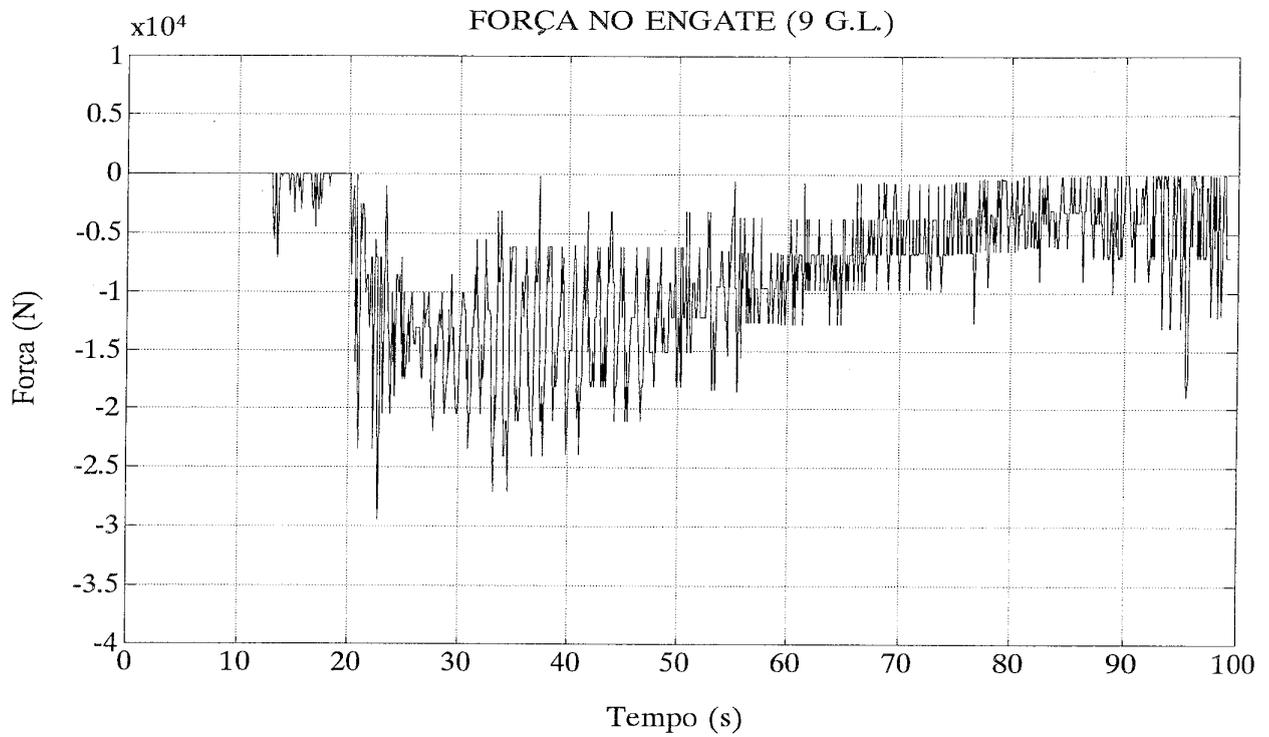


GRÁFICO 8 – Registro das Forças (9º Acoplamento)

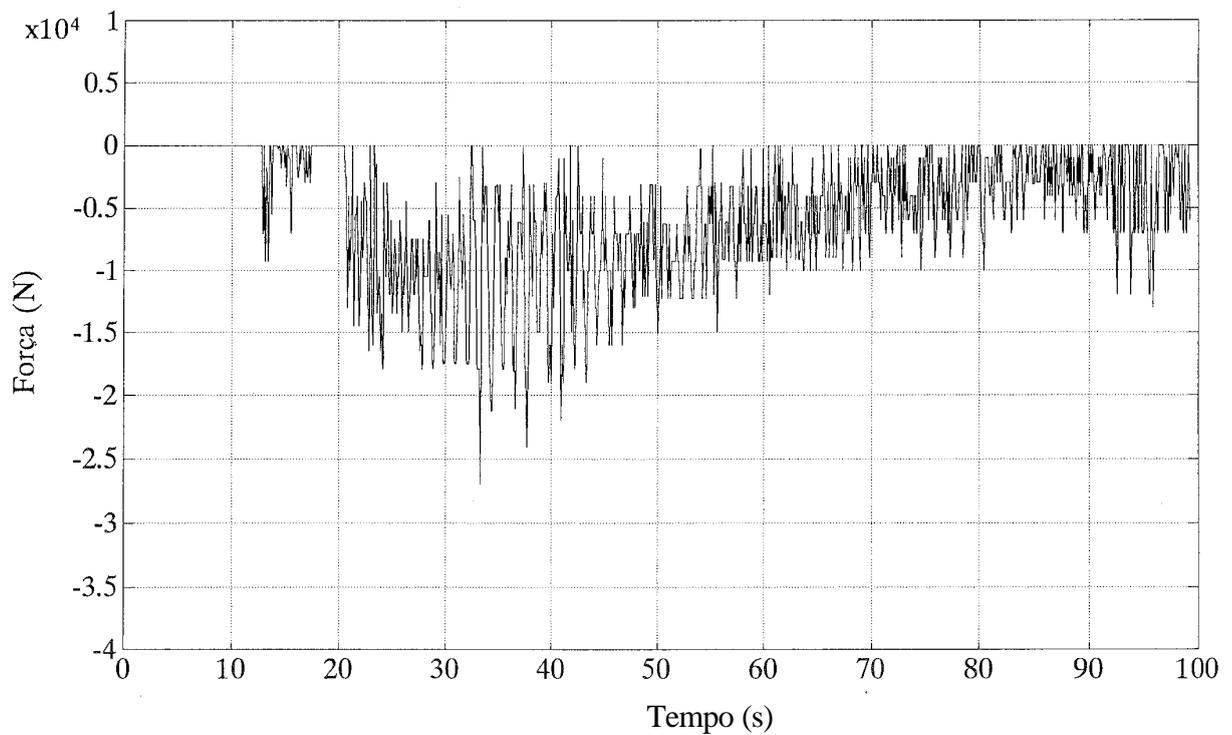


GRÁFICO 9 – Registro das Forças (13º Acoplamento)

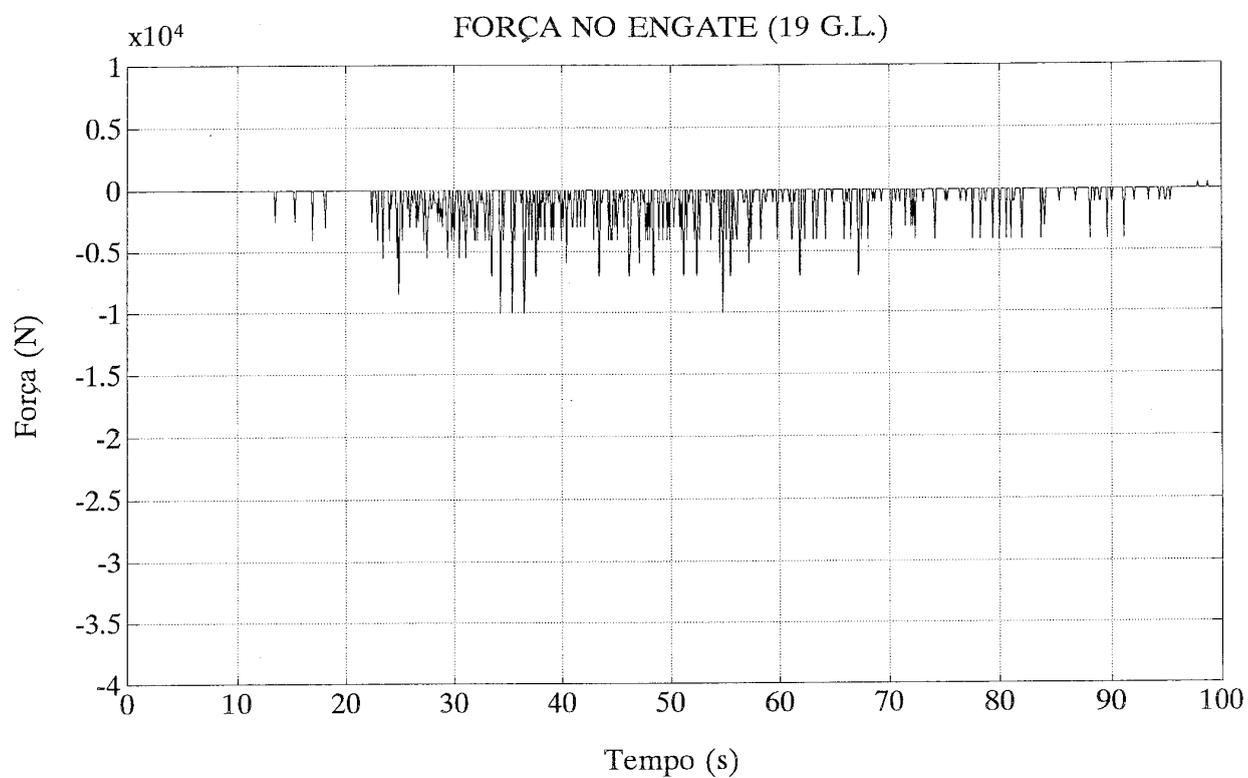


GRÁFICO 10 – Registro das Forças (19° Acoplamento)

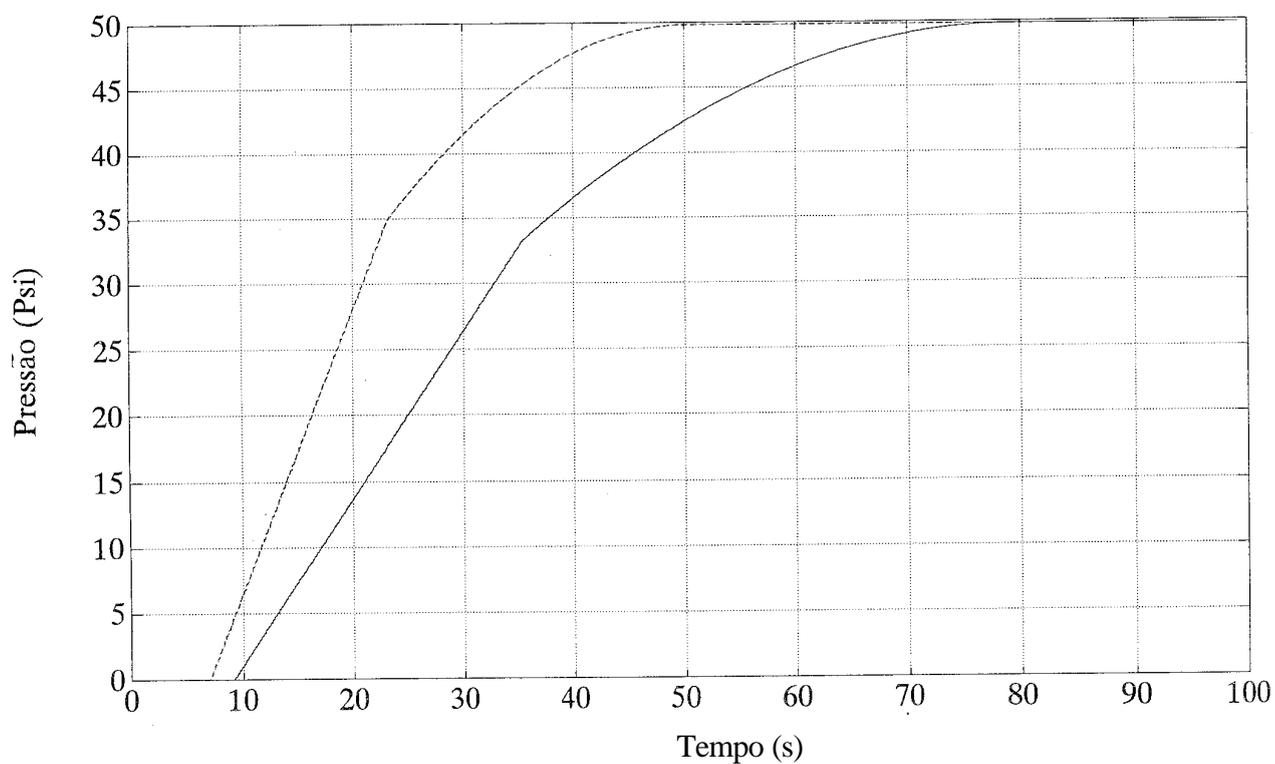


GRÁFICO 11 – Pressão do Cilindro de Freio (1° e 20° Veículos)

## 6.4 Resultados do Método Analítico

Para o sistema linear amortecido serão utilizadas a equação de movimento e a Matriz Fundamental  $O_{(t)}$  para sistemas amortecidos viscosos deduzidos no Capítulo 5. O cálculo do vetor de estado para um tempo qualquer "t" é feito a partir de condições iniciais definidas pelo vetor de estado inicial "t<sub>0</sub>". Com auxílio das Matriz Fundamental e Integral de Convolução são computados os valores de força externa aplicada no sistema.

Os valores adotados de rigidez e amortecimento equivalentes são  $k_{ACT} = 10,5 \text{ E}+06$  [N/m] e  $D_e = 80,0 \text{ E}+03$  [Ns/m] respectivamente para cada par conforme apresentado no Anexo C.

A partir da solução do sistema foram obtidos os autovalores apresentados no Gráfico 18. Os autovalores foram ordenados de forma crescente sendo agrupados em pares complexos conjugados. Observa-se que a primeira frequência natural (parte imaginária) é nula e corresponde ao movimento de corpo rígido. A frequência correspondente ao 10º modo de vibrar é de 11,93 [rd/s] (1.9 [Hz]). Este valor é idêntico à frequência natural do par de veículos como apresentado no ANEXO C.

Os demais modos sucessivos com frequência crescente, têm o valor de amortecimento (parte real negativa dos autovalores) crescente de maneira aproximadamente quadrática em relação ao eixo real. Então os modos de maior frequência possuem amortecimento exponencialmente maior. Autovalores com parte real negativa corresponde a modos amortecidos e portanto estáveis.

Os autovetores correspondentes são apresentados no Gráfico 20 de forma normalizada (máximo valor igual a unidade) sem apresentar os modos conjugados. São apresentados apenas os cinco primeiros modos, sendo que o primeiro (valor nulo) corresponde ao modo rígido.

O segundo modo apresenta um nó na parte central dos graus de liberdade. Os demais modos apresentam o número de nós equivalentes ao número do modo de vibrar menos um (ou seja, para o modo "r" o número de nós é igual a "r-1"). Os valores das extremidades do modo de vibrar são sempre diferentes de zero (extremidades livres).

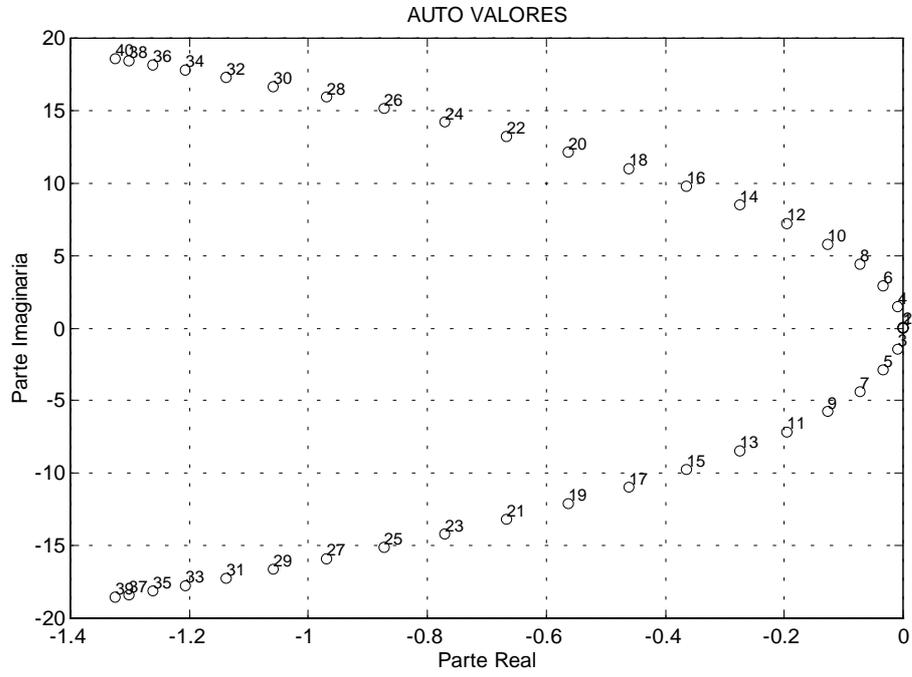


GRÁFICO 17 - Autovalores do Sistema

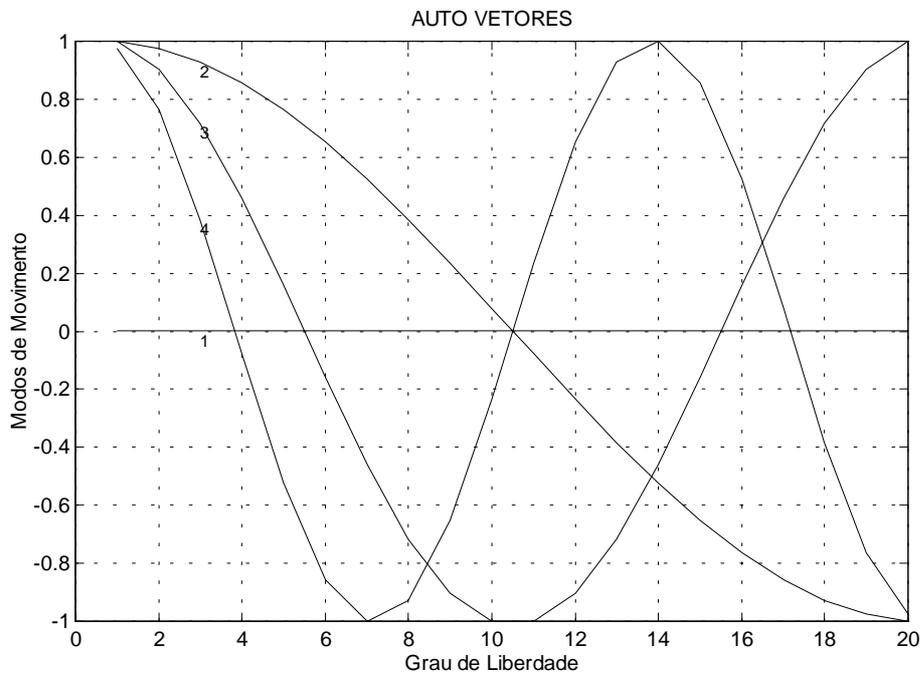


GRÁFICO 19 - Autovetores do Sistema

## Tratamento do Modo Rígido

Na forma que o sistema foi modelado, os dois primeiros autovalores (complexos conjugados) possuem frequência nula, o que corresponde ao modo rígido do sistema. Isto leva a um sistema **semi-definido** com duas raízes do polinômio característico nulas. Para permitir a continuidade dos cálculos com auxílio da Matriz Fundamental segundo GASH [9] é necessário tratamento especial para estas raízes.

Para um sistema linear pode-se admitir que o comportamento seja expresso por uma combinação linear dos seus modos de vibrar conforme apresentado no Capítulo 5. Então, tem-se que:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{u}_k q_k e^{kt} \quad (140)$$

com sua derivada igual à:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \sum \mathbf{u}_k k e^{kt} \quad (141)$$

As duas expressões acima, quando unidas de forma a produzir o vetor de estado e rearranjando as equações de forma matricial, produzem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^u & \mathbf{I}_2^u & \mathbf{I}_k^u & \mathbf{I}_{2n}^u \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{1_{2n} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_k \\ q_{2n} \end{bmatrix} \quad (142)$$

ou simplesmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \left[ e^{\mathbf{I}^{kt}} \right] \{ \mathbf{q} \} \quad (143)$$

para tempo igual a zero, tem-se que:  $\dot{\tilde{u}} = \dot{u}_0$ ,  $\tilde{u} = u_0$  e que  $e^{kt} = 1$ , levando a expressão acima a:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{q} \text{ portanto } \mathbf{q} = \mathbf{R}^{-1} \quad (144)$$

Para o caso do sistema com um modo rígido, existirão dois autovalores complexos conjugados nulos ( $\lambda_1 = \lambda_1^* = 0$ ), então, aquele modo deve ser retirado e substituído pela equação de movimento uniforme à ela correspondente. Impondo-se que o deslocamento deste grau de liberdade seja expresso por um valor independente inicial acrescido de um valor dependente do tempo e independente dos demais modos do sistema, tem-se que:

$$u_1 \sim = \{\mathbf{u}_1 \sim\} q_1 + \{\mathbf{u}_2 \sim\} t q_2 \quad (145)$$

e fazendo a derivada em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{u}_1 \sim = \{\mathbf{u}_2 \sim\} q_2 \quad (146)$$

Agora fazendo atribuição de um número para os autovalores do modo rígido  $\lambda_1 = \lambda_1^* = \beta$ , tem-se que:

$$u_1 \sim = u_{11} q_1 + u_{11} t q_2 \quad (147)$$

para os demais graus de liberdade vale:

$$\{\mathbf{u} \sim\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} q_k e^{\lambda_k t} \quad (148)$$

e para as derivadas em relação ao tempo:

$$\dot{u}_1 \sim = u_{11} t q_2 \quad (149)$$

para os demais graus de liberdade vale:

$$\{\dot{\mathbf{u}} \sim\} = \sum \{\mathbf{u}_k\} \lambda_k e^{\lambda_k t} \quad (150)$$

recolocando na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^{\sim} \\ u^{\sim} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\mathbf{u}_1} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{I}_k^{\mathbf{u}_k} & \mathbf{I}_{2n}^{\mathbf{u}_{2n}} \\ \mathbf{u}_1 & 0 & \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{bt} & te^{bt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{bt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{1kt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{12nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^k \\ q^{2n} \end{bmatrix} \quad (151)$$

Agora impondo que a frequência natural do primeiro modo seja nula  $\lambda_1 = \lambda_1^* = \beta = 0$ , tem-se  $\beta \mathbf{u}_1 = 0$  e  $e^{\beta t} = 1$  e:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^{\sim} \\ u^{\sim} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & e^{1kt} & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ 0 & 0 & 0 & : & e^{12nt} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Uma vez realizado este tratamento é possível continuar os cálculos para a obtenção do comportamento do sistema. Como a força externa foi discretizada por intervalo, foi utilizado um passo de cálculo de 0,25 segundos com apresentação a cada 2 segundos. Os resultados são apresentados da seguinte maneira:

- deslocamento do sistema - Gráfico 22;
- velocidade do sistema - Gráfico 24;
- força entre graus de liberdade do sistema - Gráfico 26;
- força do sistema (visão tridimensional) - Gráfico 28. Nos Gráficos deste tipo, convencionou-se a direção positiva dos eixos conforme as horas do relógio na seguinte direção: força na direção de 12 horas, tempo na direção 2 horas e grau de liberdade (ou veículo) na direção de 4 horas do primeiro ao último.

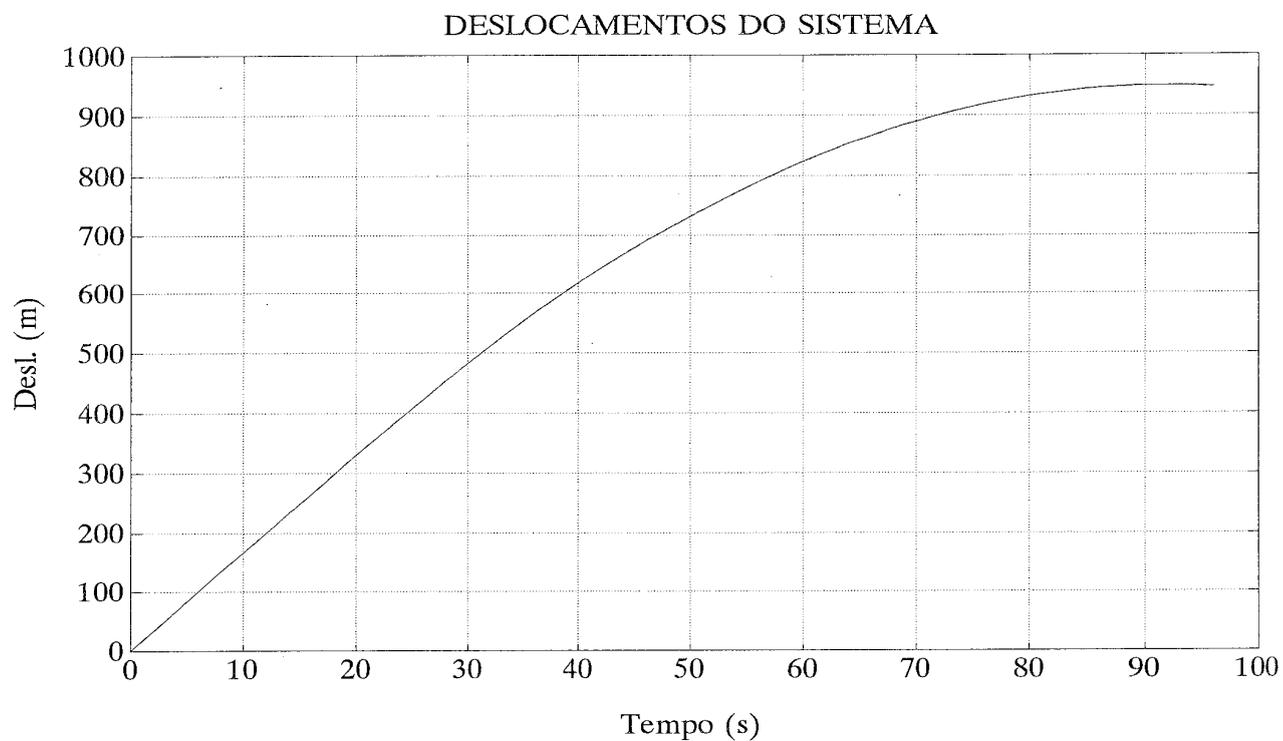


GRÁFICO 14 – Deslocamentos dos G.L. do Sistema

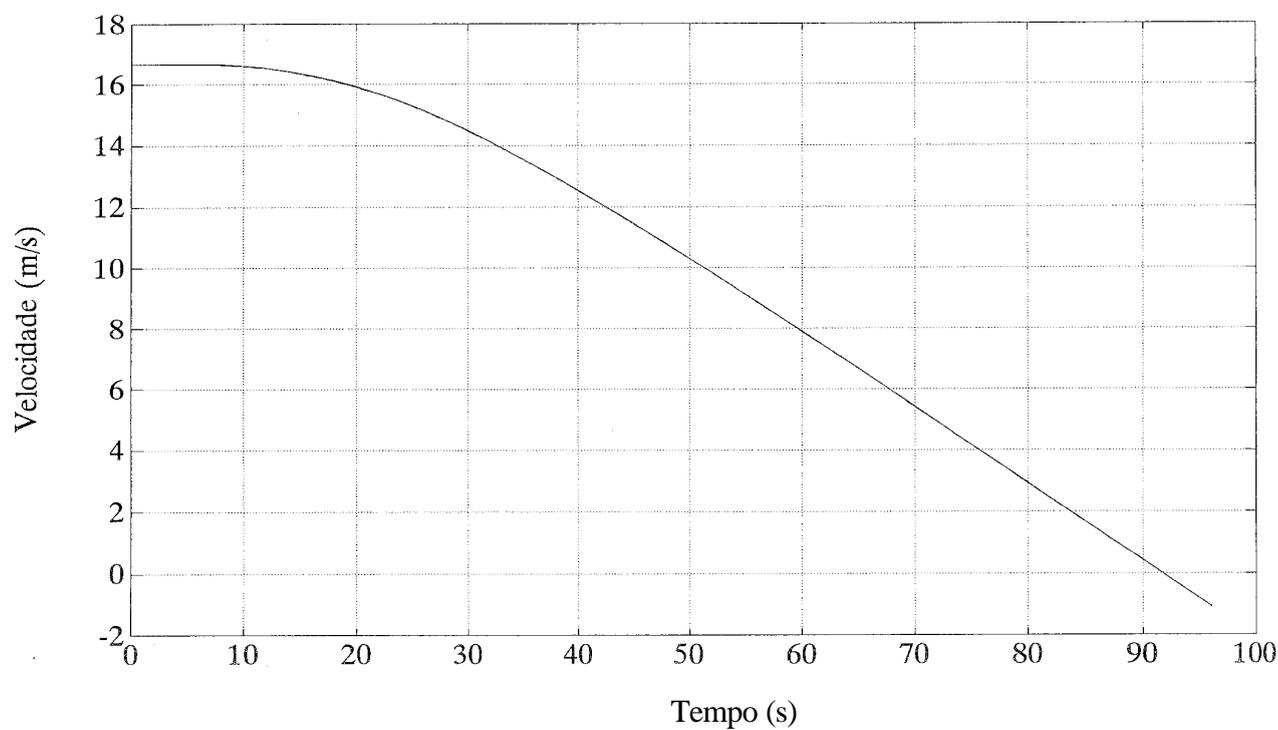


GRÁFICO 15 – Velocidade dos G.L. do Sistema

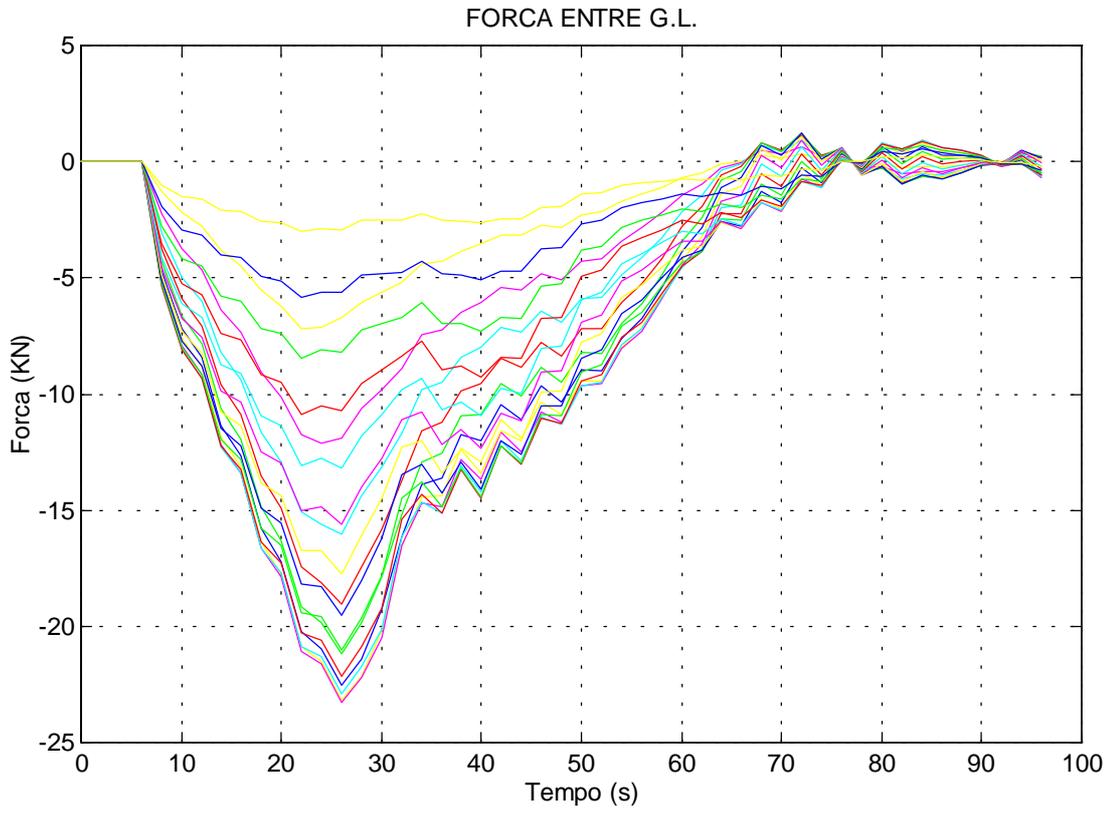


GRÁFICO 25 - Força entre Graus de Liberdade

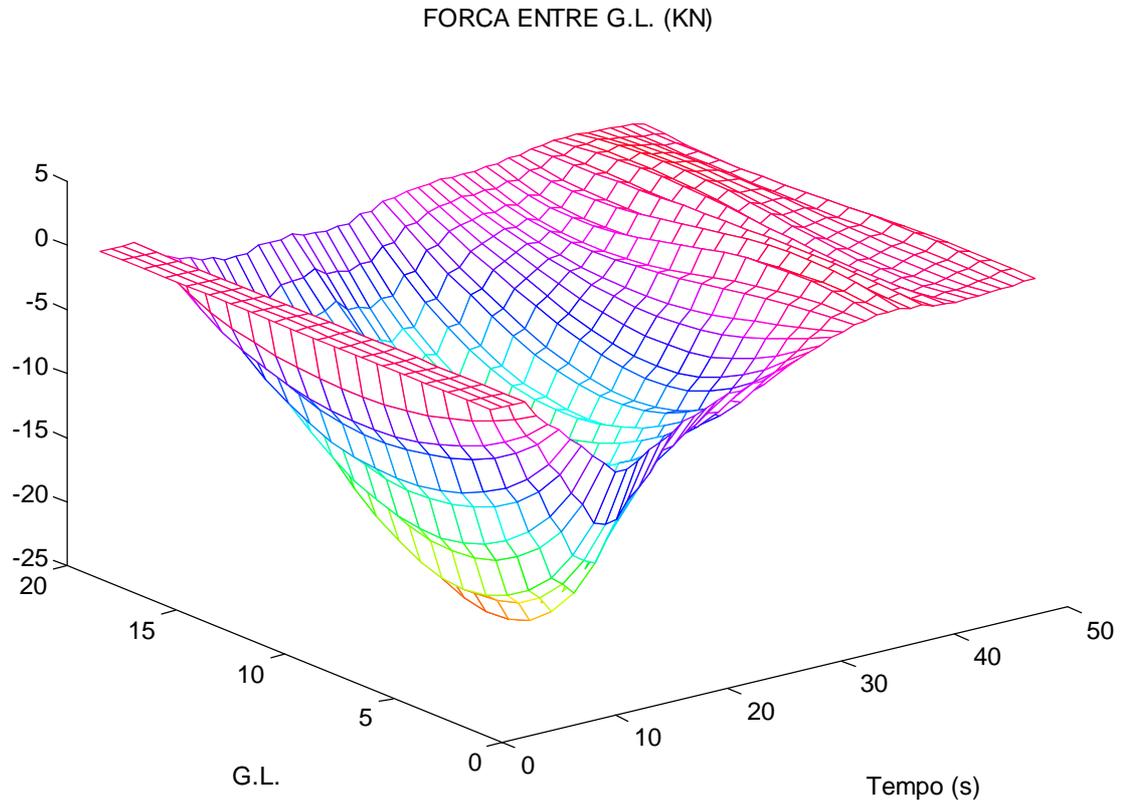


GRÁFICO 27 - Força do Sistema

# Capítulo 7

## 7.1 Análise dos Resultados

Foram obtidos resultados para o comportamento do trem durante o processo de frenagem para os dois métodos em estudo.

Os valores calculados apresentam os seguintes resultados típicos para o 1º e 2º métodos respectivamente:

- a) tempo de parada: 98 e 92 [s];
- b) distância de parada: 950 [m] (2º método);
- c) desaceleração média típica: 0,23 [m/s<sup>2</sup>] (1º método);
- d) tempo de aplicação do sistema de freio: entre 50 e 75 [s] para o 1º e 2º veículos respectivamente;
- e) força máxima entre acoplamentos: entre 23.000 e 31.000 [N].

### 1º Método

As forças de frenagem utilizadas no 1º método calculadas a partir das pressões apresentadas no Gráfico 16 são minoradas pela eficiência da timoneria. Isto acarreta valores menores de força de frenagem no início da aplicação das pressões pois a eficiência é função exponencial da pressão do cilindro (ver ANEXO B).

No início da simulação as folgas entre os veículos ficam livres até o início da aplicação das forças de frenagem. Neste instante os esforços de frenagem, que se iniciam pelo primeiro veículo, fazem com que as folgas se fechem. Desta forma há um retardamento no crescimento das forças quando comparado com o 2º método.

---

As forças nos acoplamentos calculadas pelo 1º método apresentam resultados com oscilação em torno do valor médio. Esta oscilação pode ser atribuída à movimentação natural dos veículos devido aos modos de vibrar associados ao modelo adotado para o ACT que contém não linearidades. A rigidez do ACT apresenta valores distintos para compressão e alívio e depende do sentido do crescimento das forças (crescente ou decrescente).

## 2º Método

Os resultados das forças calculadas no 2º método apresentam oscilações menos intensas e moduladas pelos modos naturais dominantes do sistema.

É possível visualizar nitidamente no Gráfico 28 a forma de propagação das forças nos acoplamentos durante o processo de frenagem que apresenta valores extremos no meio do trem cerca de 28 segundos após a aplicação do freio.

Nota-se na curva de resposta do sistema de freio do Gráfico 16, que para um determinado instante de tempo durante a aplicação, há bastante discrepância entre as pressões do 1º e o 20º veículos. Isto acarreta produção de esforços internos no trem devido a não simultaneidade na aplicação das forças de freio.

A comparação entre as forças obtidas pelo 1º e 2º métodos são apresentadas nos Gráficos a seguir. Os valores com linha pontilhada são para o 1º método e linha cheia com círculos intercalados correspondem ao 2º método.

Apesar das diferenças entre os veículos da parte frontal do trem, especialmente no início da frenagem, a comparação dos valores de força obtidos entre os dois métodos apresenta boa concordância em relação aos valores médios, como pode ser observados nos Gráficos 30 em diante.

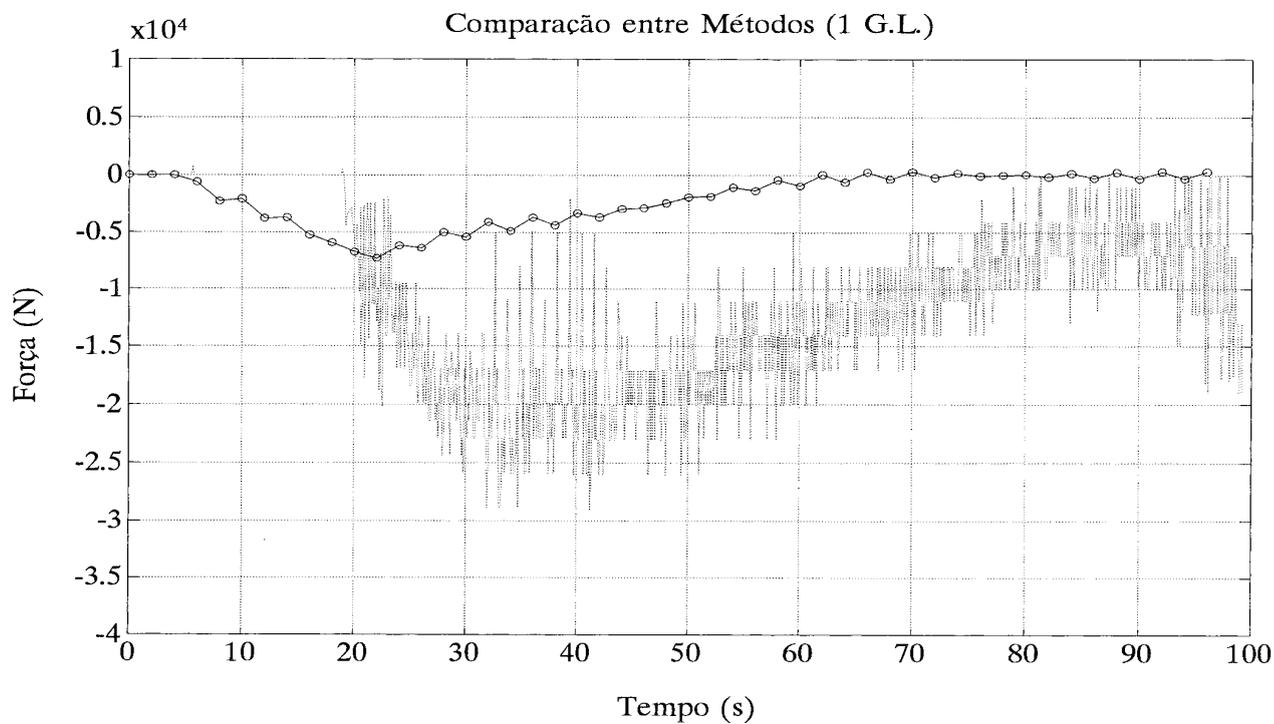


GRÁFICO 18 – Comparação das Forças (1 G.L.)

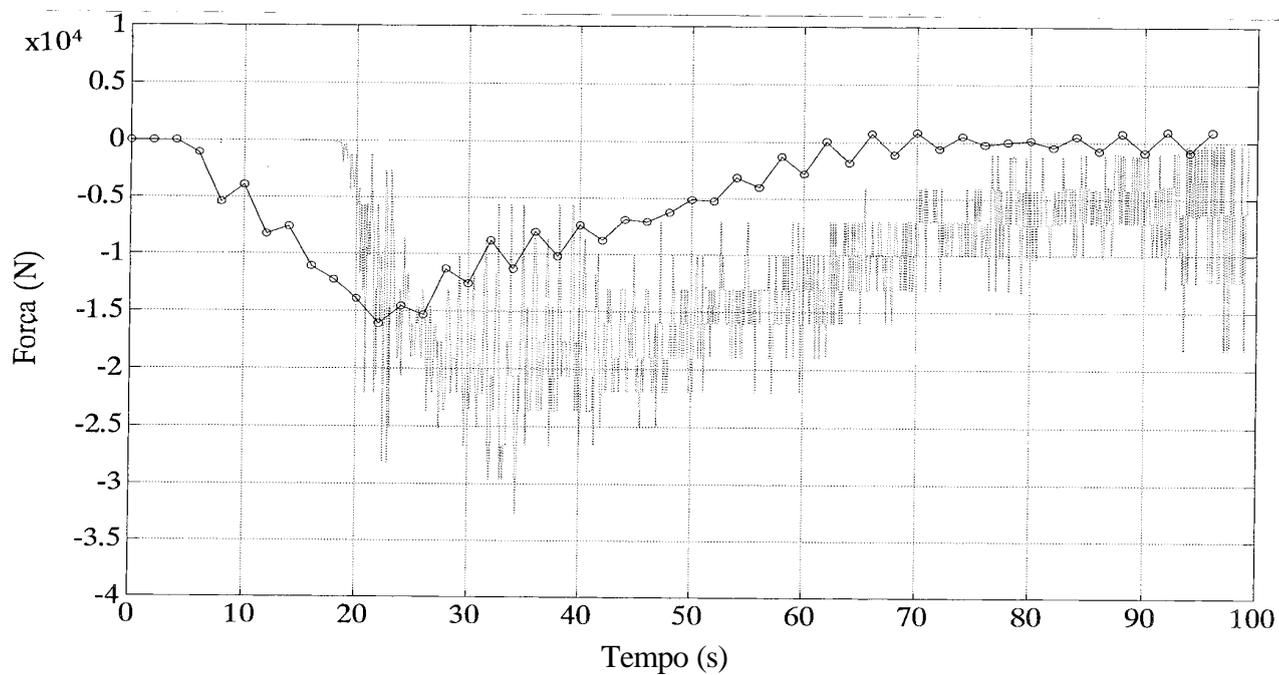


GRÁFICO 19 – Comparação das Forças (3 G.L.)

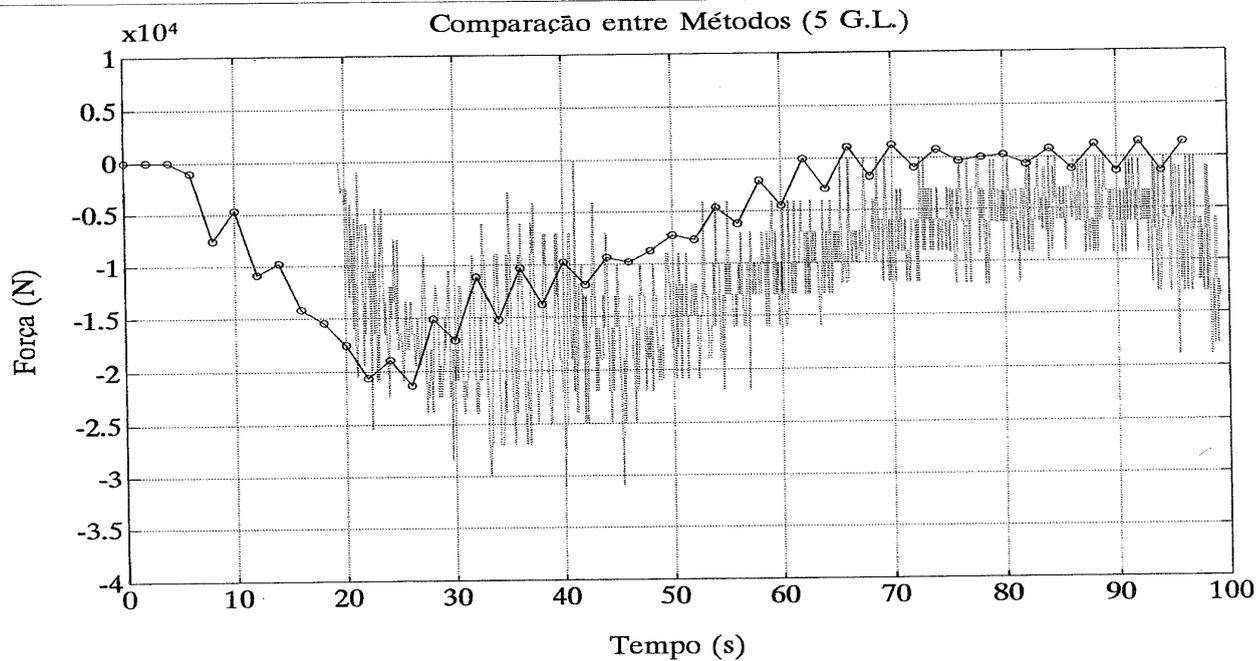


GRÁFICO 20 – Comparação das Forças (5 G.L.)

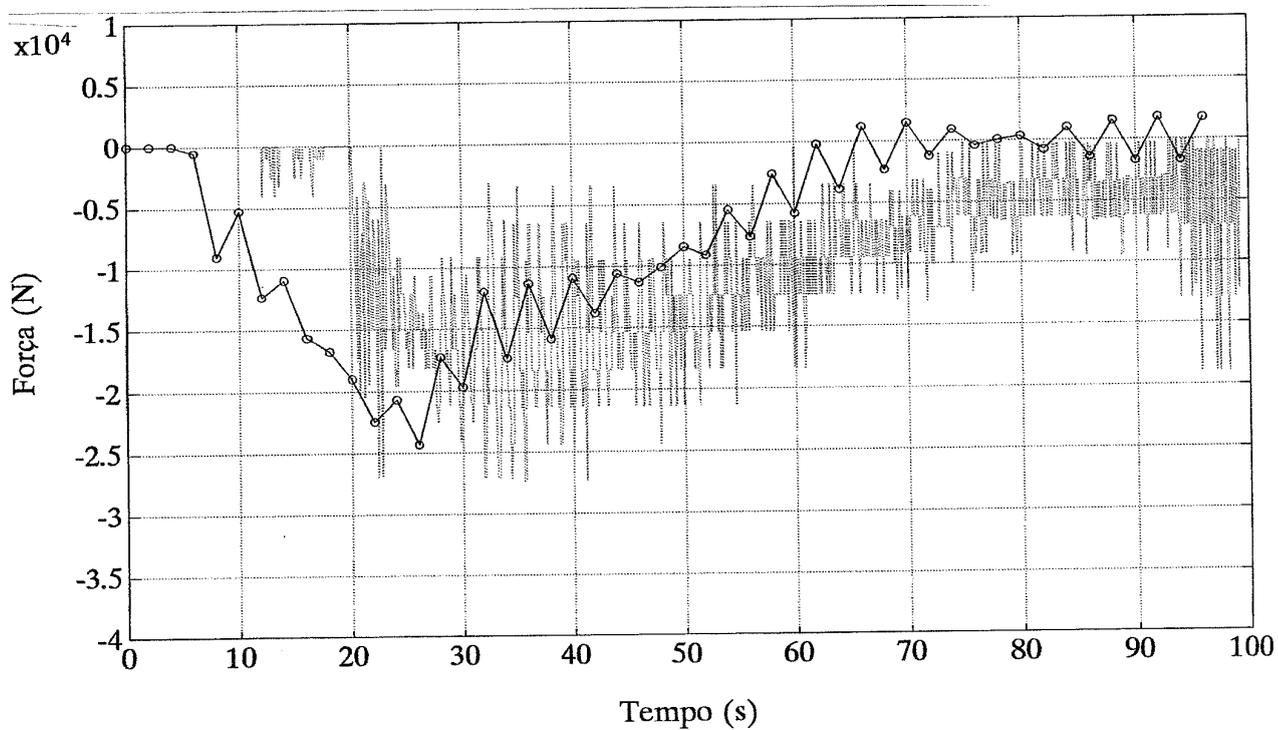


GRÁFICO 21 – Comparação das Forças (7 G.L.)

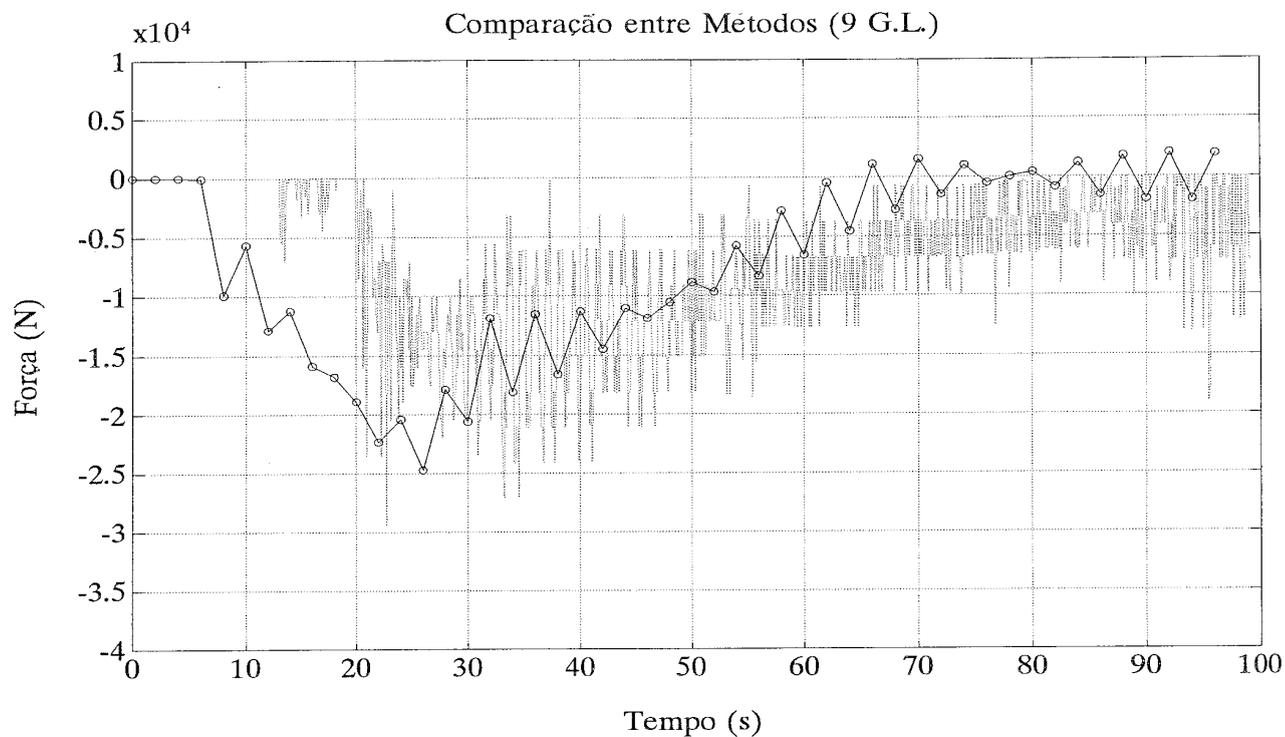


GRÁFICO 22 – Comparação das Forças (9 G.L)

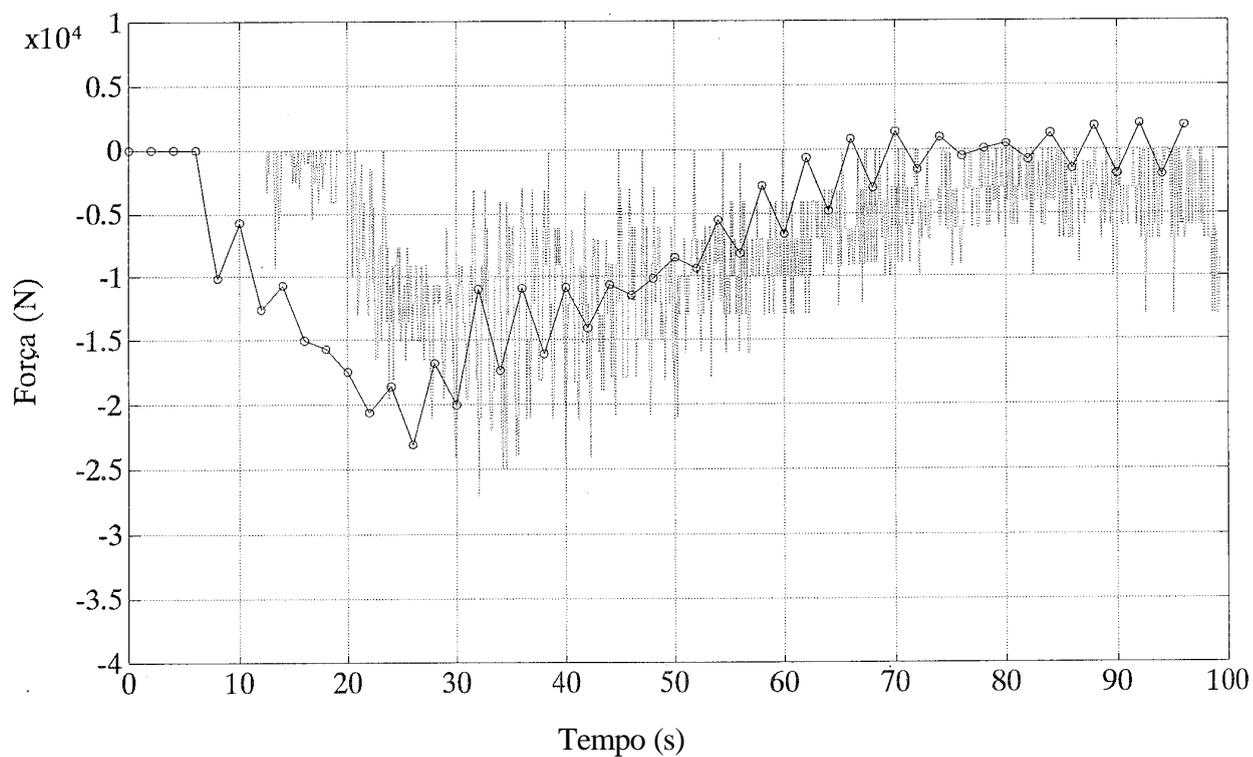


GRÁFICO 23 – Comparação das Forças (11 G.L)

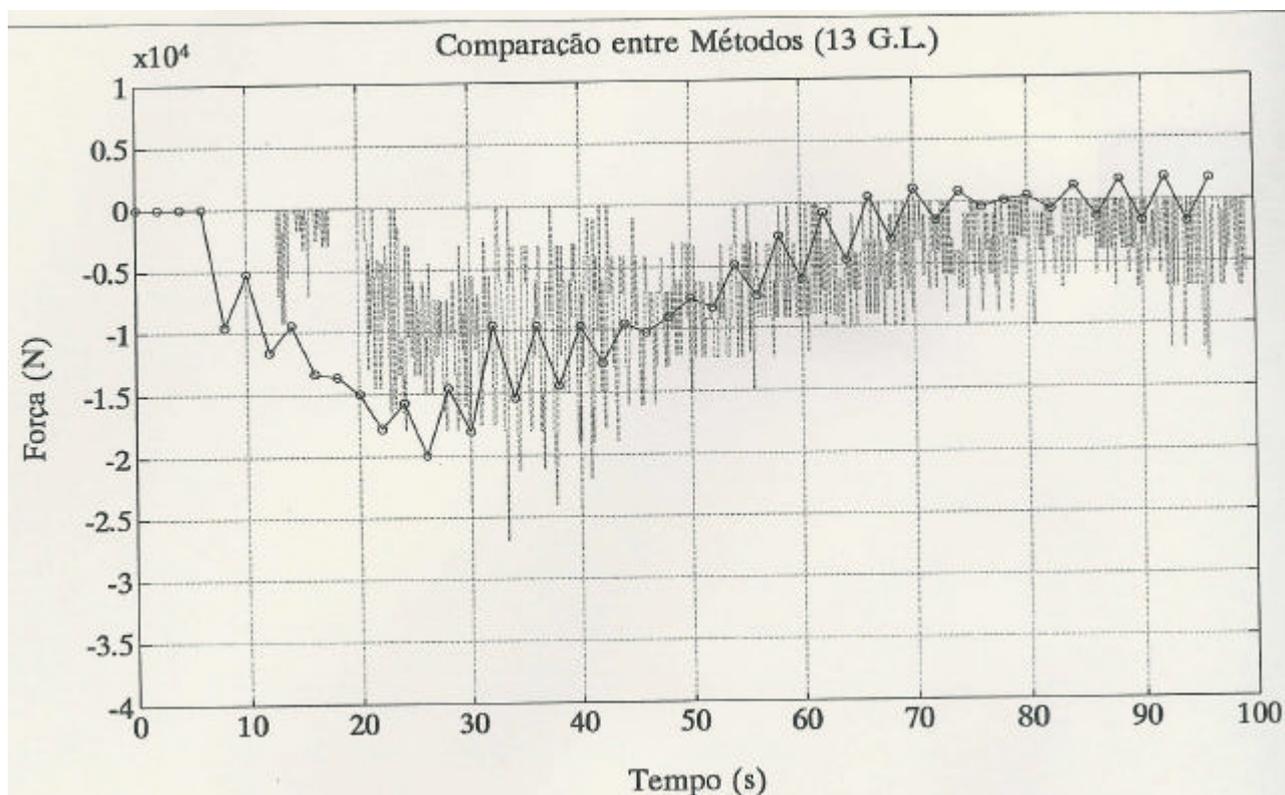


GRÁFICO 24 – Comparação das Forças (13 G.L.)

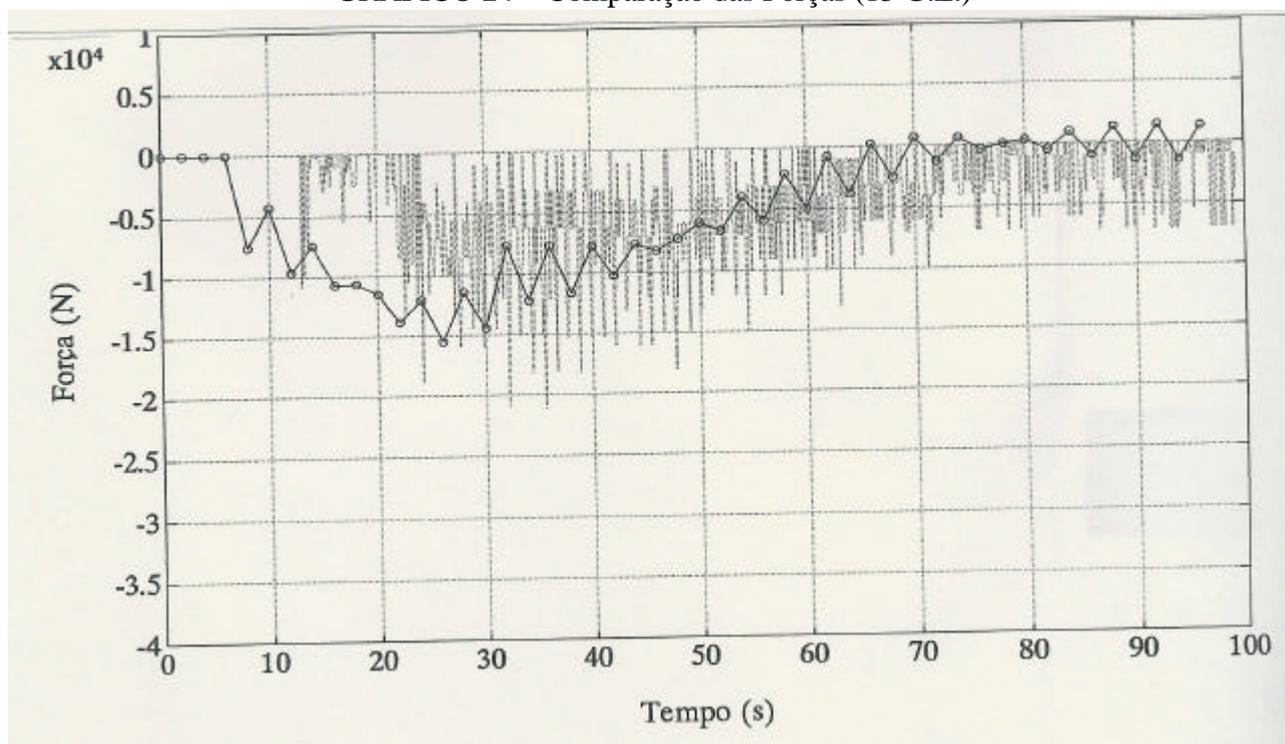


GRÁFICO 25 – Comparação das Forças (15 G.L.)

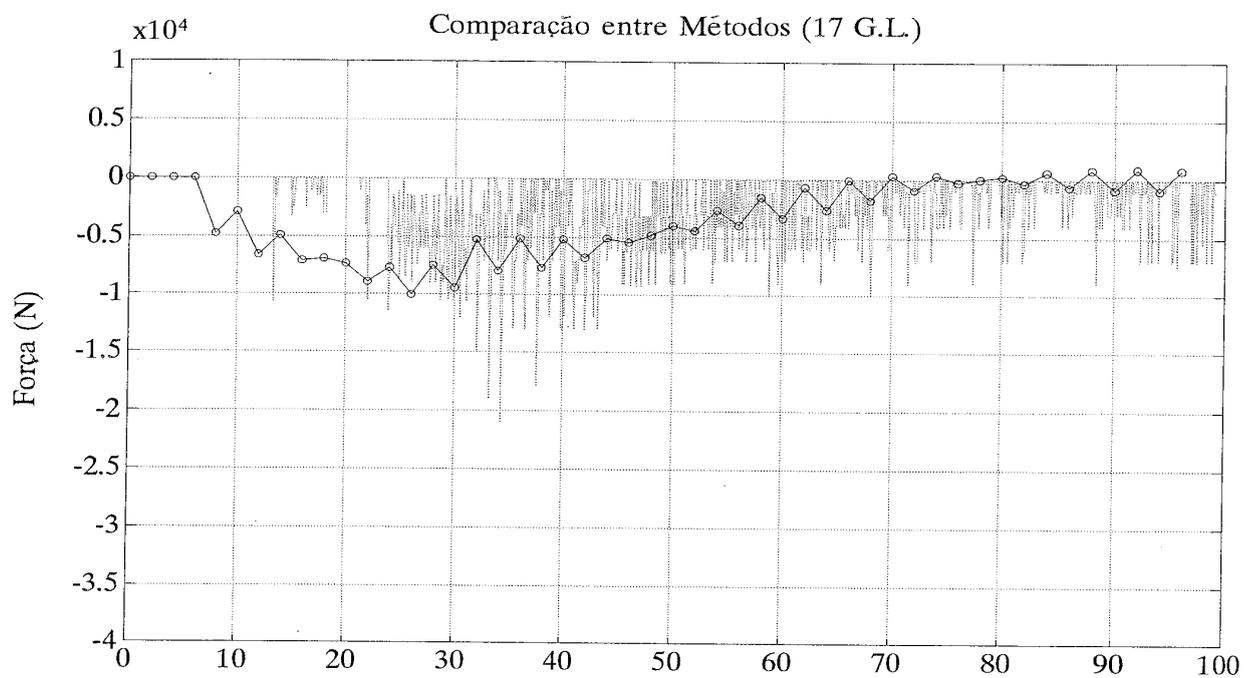


GRÁFICO 26 – Comparação das Forças (17 G.L)

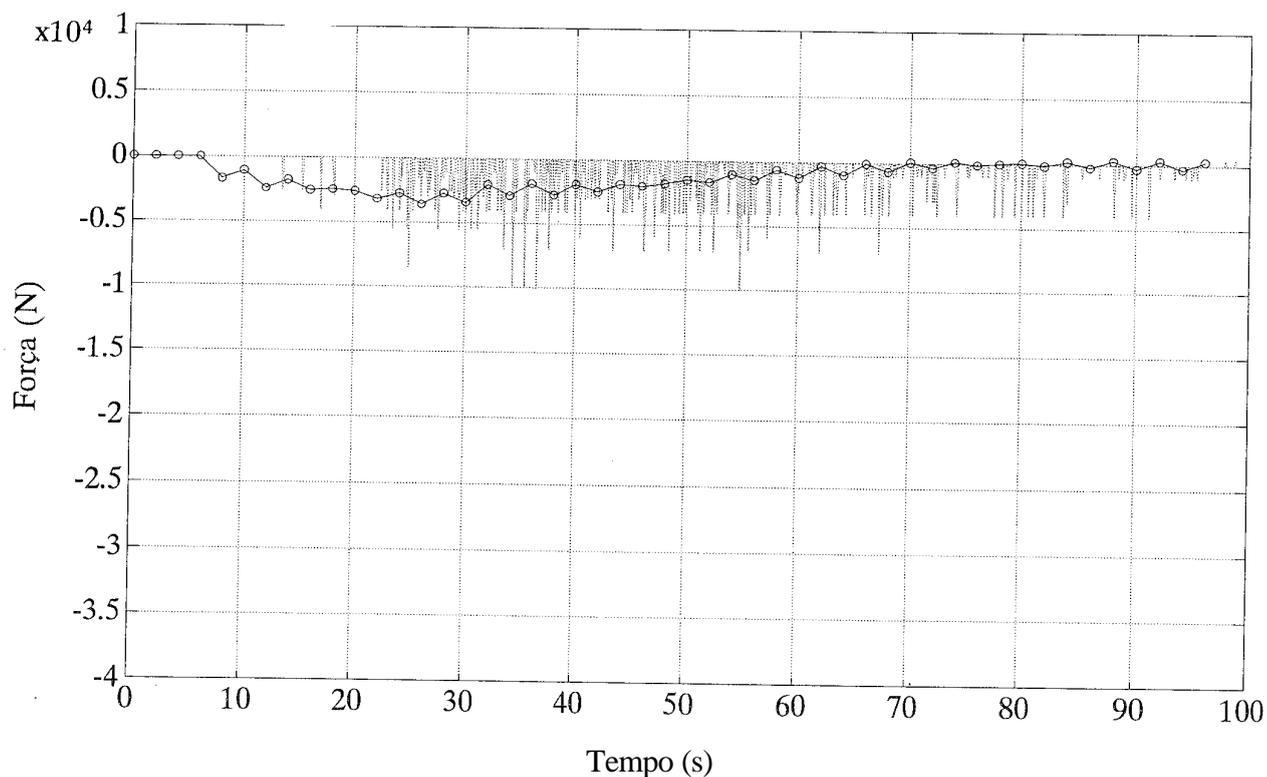


GRÁFICO 27 – Comparação das Forças (19 G.L)

Com o objetivo de verificar causas para as diferenças obtidas entre os resultados calculados pelos dois métodos, buscou-se analisar a influência da folga entre os acoplamentos sobre o modelo linearizado. Para tanto, foi assumido como hipótese que em um determinado instante a ligação entre dois veículos deixa de transmitir esforço (situação onde a folga dos engates está mudando de posição), mas ainda recebe forças do veículo seguinte.

A força máxima desenvolvida durante o processo de frenagem descrito no item anterior gira em torno de 24.000 [N], que divididos pela massa fornecem uma aceleração de 0,2 [m/s<sup>2</sup>] ao veículo. Assumindo uma folga total entre dois veículos de aproximadamente 0,15 [m], esta aceleração, aplicada à massa do veículo, produz uma velocidade final de 0,25 [m/s] até vencer a folga estipulada.

Esta situação foi reproduzida no cálculo pelo 2º método após um valor arbitrário de tempo (45 [s]), onde foi aplicada uma nova condição inicial de velocidade para os graus de liberdade 10 e 11 (meio do trem) com velocidades iniciais majoradas de 0,125 e -0,125 [m/s], respectivamente. Os resultados podem ser observados no Gráfico 50.

Observa-se que a nova condição inicial provoca uma oscilação local que apresenta um comportamento similar ao cálculo obtido pelo processo não linear (1º método).

A determinação das características equivalentes do ACT (rigidez e amortecimento equivalentes) apresentou resultados que dependem do método utilizado como mostrado no ANEXO C. Embora os valores encontrados apresentem bastante similaridade, não se pode afirmar qual o melhor método.

Com efeito de analisar a sua influência, foi estudada a resposta do sistema para a variação das características do ACT para o mesmo processo de frenagem. Foram variados em 50% para mais e para menos os valores de rigidez e amortecimento equivalentes e submetidos às mesmas condições de cálculo.

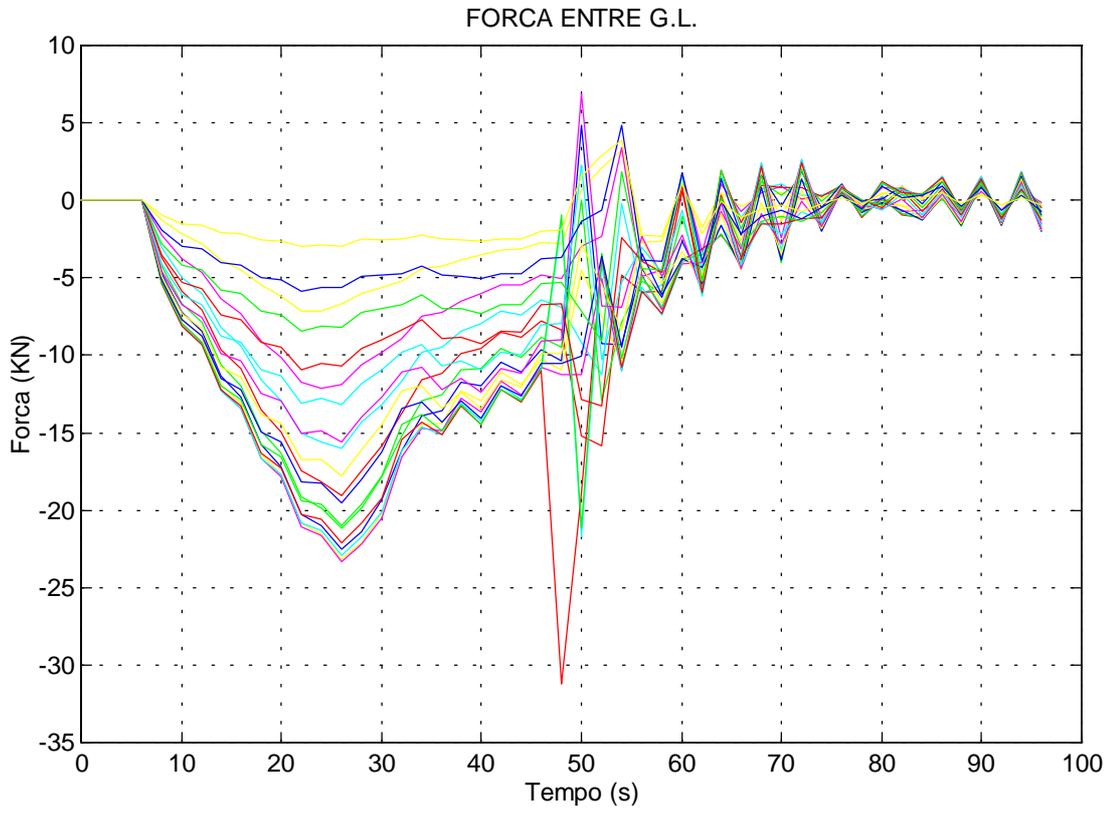


GRÁFICO 49 - Impulso entre Dois Veículos

Os resultados encontram-se no ANEXO D, e nota-se as diferenças de modulação para os esforços nos engates. Entretanto para este caso específico (frenagem) os valores máximos das forças não apresentaram diferenças expressivas.

Finalmente, com efeito de verificar a capacidade de visualizar o comportamento do sistema, foi estudada pelo 2º método a resposta do sistema quando submetido a um deslocamento inicial unitário e uma velocidade inicial unitária, aplicadas no primeiro veículo do trem.

Os resultados estão apresentados do Gráfico 52 em diante e permitem visualizar a forma de propagação das ondas de choque ao longo do trem para os dois casos. Deve-se mencionar que para este tipo de excitação a resposta depende dos valores de rigidez e amortecimento adotados. Os resultados em Gráficos de tempo contendo as unidades são apresentados no ANEXO F.

## DESLOCAMENTOS DO SISTEMA

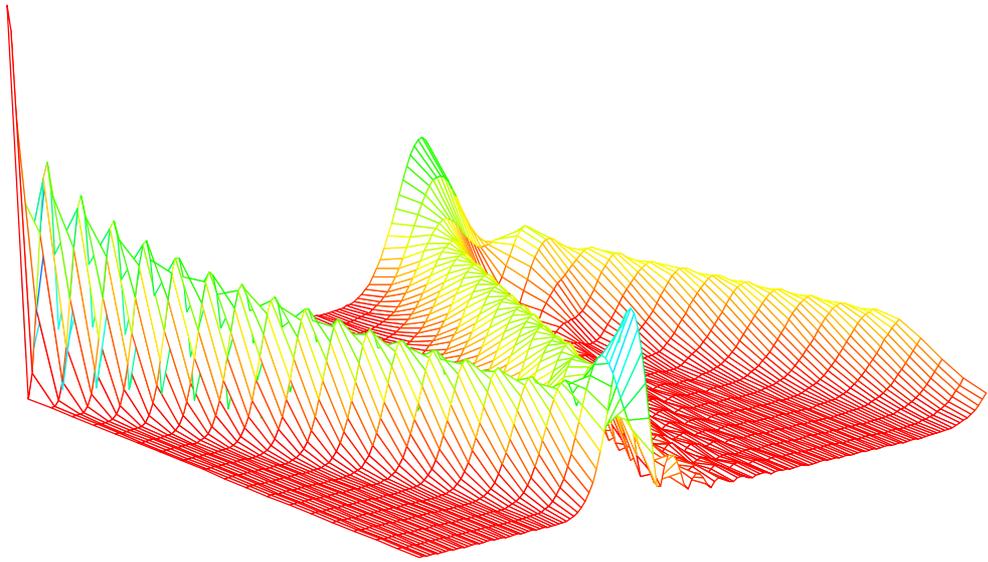


GRÁFICO 51 - Deslocamento (Desloc Unitário 1° G.L)

FORÇA ENTRE G.L.

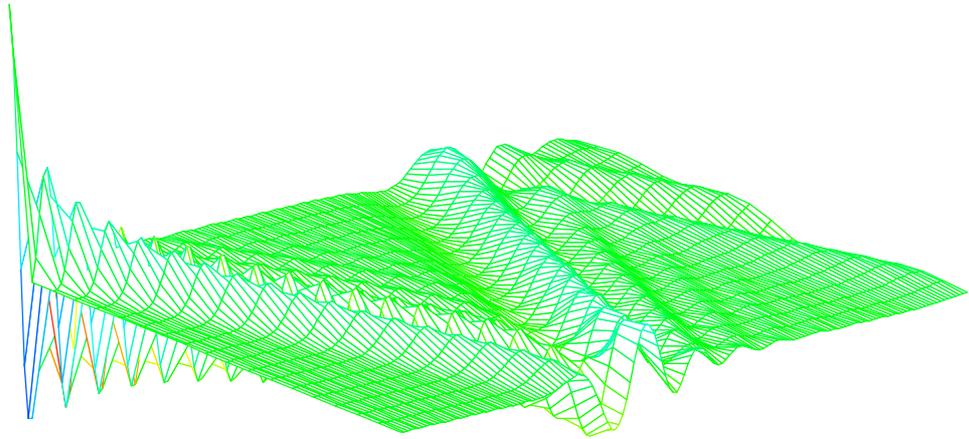


GRÁFICO 53 - Força (Desloc Unitário 1º G.L)

## VELOCIDADES DO SISTEMA

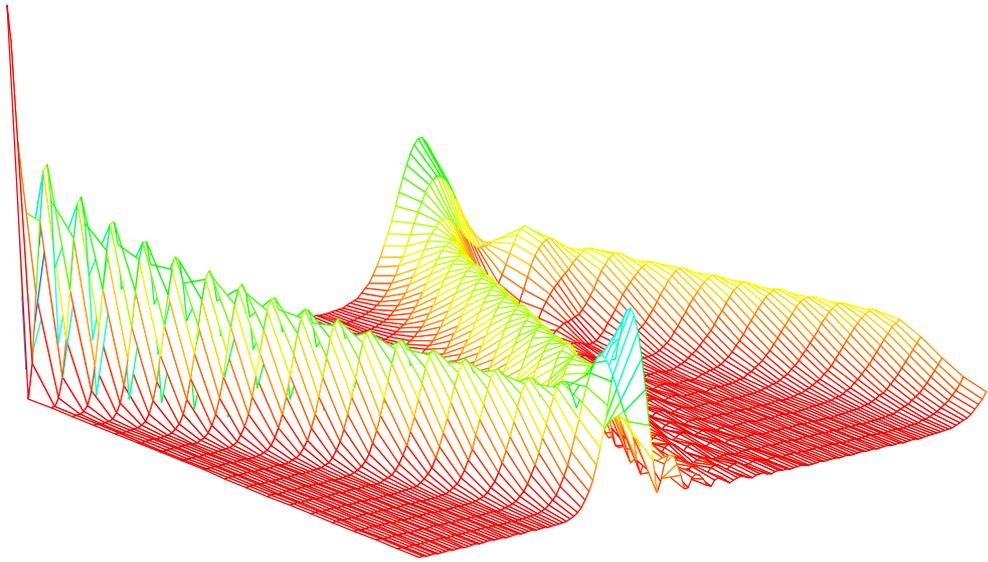


GRÁFICO 55 - Velocidade (Vel. Unitária 1° G.L)

FORÇA ENTRE G.L.

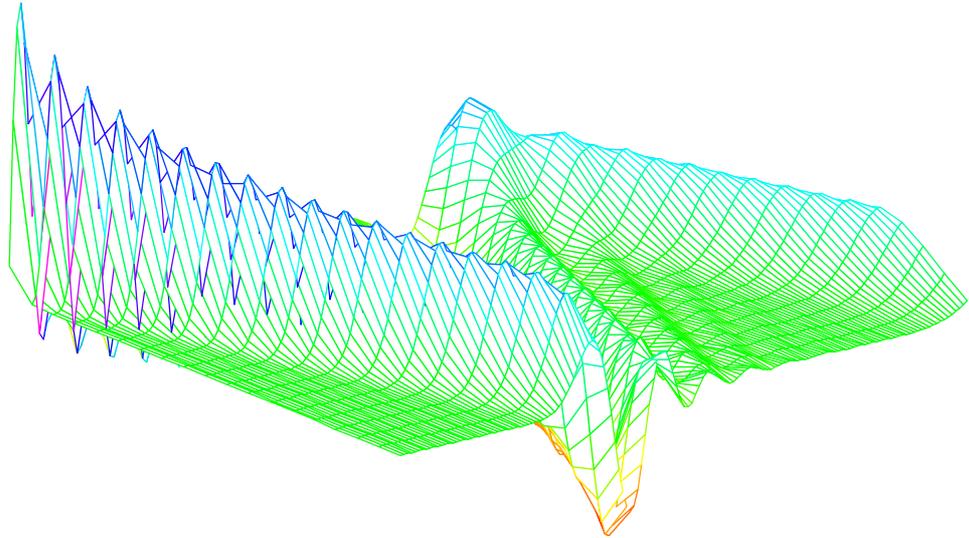


GRÁFICO 57 - Força (Vel. Unitária 1° G.L)

## 7.2 Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de ferramentas de cálculo para determinar o comportamento longitudinal do trem.

Foram descritos e modelados todos os componentes relevantes do sistema físico com objetivo de obter as equações de movimento e as equações diferenciais do sistema.

Foi apresentado o modelo do sistema pneumático de freio que permite o cálculo das forças de frenagem para qualquer nível de aplicação do freio e para todos os veículos do trem.

Foram desenvolvidos dois métodos para a determinação das características equivalentes do Aparelho de Choque e Tração. Os dois métodos propostos apresentaram resultados similares, entretanto é importante sua validação com ensaios experimentais.

O cálculo do comportamento do trem durante um processo de frenagem foi realizado pelos dois métodos desenvolvidos neste trabalho. O cálculo pelo método de integração numérica (1º método) apresentou valores médios de forças similares ao 2º método.

O método analítico (2º método) apresentou resultados encorajadores apesar das linearizações assumidas. Este método permite visualizar de forma explícita as tendências de comportamento do sistema, como descrito na análise, o que torna a sua aplicação bastante poderosa.

Ambos os métodos dependem da boa descrição dos componentes do sistema. Desta forma é importante que se tenha conhecimento mais completo possível de cada elemento do sistema. A forma de discretização e linearização merece especial atenção pois ela governa a boa representatividade do modelo. É necessário a realização de investigações com medidas experimentais para a comparação e validação dos cálculos apresentados.

Como recomendação para estudos futuros pode-se destacar os seguintes tópicos:

- a) Extensão deste Estudo para número maior de Graus de Liberdade e com Diferentes Excitações Externas.
- b) Investigação do Comportamento do Sistema para diferentes condições de frenagem.
- c) Elaboração de Modelo Fluido-Dinâmico do Sistema de Freio.
- d) Investigação das Características do Aparelho de Choque e Tração.

---

# **ANEXO A**

## A. Características do Aparelho de Choque e Tração

Neste anexo são apresentadas as características do Aparelho de Choque e Tração. Também são interpolados polinômios para sua representação matemática e desenvolvida a equação estática de esforços.

### Característica do ACT

O ACT é caracterizado pela curva de resposta do ensaio de impacto no martelo de queda livre (Drop Hammer). Os dados utilizados para descrever as curvas de força  $\times$  deslocamento apresentadas no Gráfico A1 foram retirados de modelos desenvolvidos pela AAR [15] e os valores de energia absorvida durante o ensaio de impacto calculados pela integração desta curva ao longo do deslocamento (Gráfico A2).

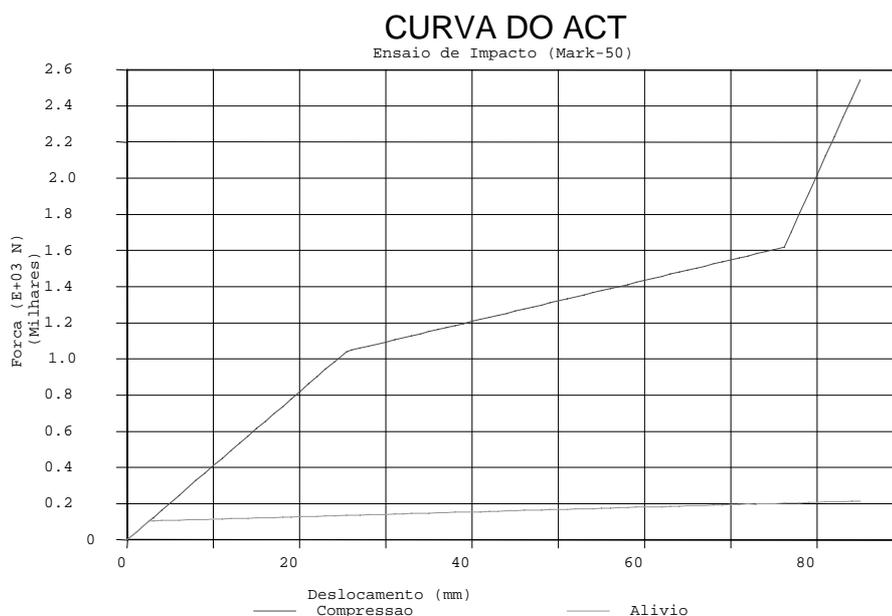


Gráfico A1 - Curva Típica do ACT (Mark-50)

Observa-se no Gráfico A1 que os valores de rigidez foram linearizados por trecho de forma a aproximarem o melhor possível da curva real de ensaio fornecida pelo fabricante. Os valores de rigidez são:

- a)  $K_{ACT} = 41,0 \text{ E}+06 \text{ [N/m]}$  (Primeiro Trecho)
- b)  $K_{ACT} = 11,0 \text{ E}+06 \text{ [N/m]}$  (Segundo Trecho)
- c)  $K_{ACT} = 107,0 \text{ E}+06 \text{ [N/m]}$  (Terceiro Trecho)
- d)  $K_{mr} = 1,33 \text{ E}+06 \text{ [N/m]}$  (Rigidez da Mola de Retorno)

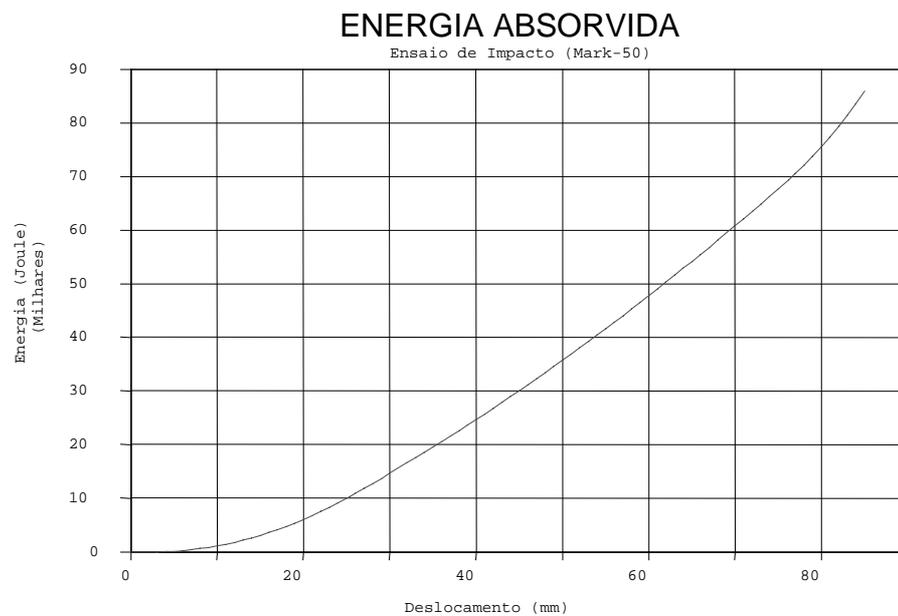


Gráfico A2 - Curva de Dissipação de Energia do Act

Obs: Os valores apresentados são de um ACT do tipo Mark-50 com cunha de fricção.

## Ajuste de Polinômio

Para a utilização no processo numérico, a curva característica (modificada) do ACT foi ajustada com auxílio de polinômios de primeiro e segundo graus independentes para cada trecho. Para alguns tipos de ACT é possível utilizar um único polinômio de terceiro grau para representá-los.

Os polinômios que descrevem as características do ACT de alta capacidade e normalmente utilizados em trens longos são da seguinte forma:

Os trechos da curva (A) de subida para deslocamento  $u_{ACT}$  são os seguintes:

Trecho 1 (linear) para  $0 < (u_{ACT}-a) < 0,02159$

$$F_1 = 39,1E+06 (u_{ACT}-a) \quad (A.1)$$

Trecho 2 (parabólico) para  $0,02159 < (u_{ACT}-a) < 0,04064$

$$F_2 = 0,845E+6 + 38,119E+6((u_{ACT}-a)-0,02159) - 909,760E+6((u_{ACT}-a)-0,02159)^2 \quad (A.2)$$

Trecho 3 (linear) para  $0,04064 < (u_{ACT}-a) < 0,07048$

$$F_3 = 1,241E+6 + 8,796E+6 ((u_{ACT}-a) - 0,04064) \quad (A.3)$$

Trecho 4 (parabólico) para  $0,07048 < (u_{ACT}-a) < 0,08001$

$$F_4 = 0,845E+6 + 38,119E+6((u_{ACT}-a)-0,07048) - 909,760E+6((u_{ACT}-a)-0,07048)^2 \quad (A.4)$$

Trecho 5 (linear) para  $0,08001 < (u_{ACT}-a) < 0,08255$

$$F_5 = 1,913E+6 + 131,389E+6 ((u_{ACT}-a) - 0,08001) \quad (A.5)$$

Trecho 6 (correspondente à rigidez do veículo) para  $(u_{ACT}-a) > 0,08255$

$$F_6 = 2,247E+6 + 196,200E+6 ((u_{ACT}-a) - 0,08255) \quad (A.6)$$

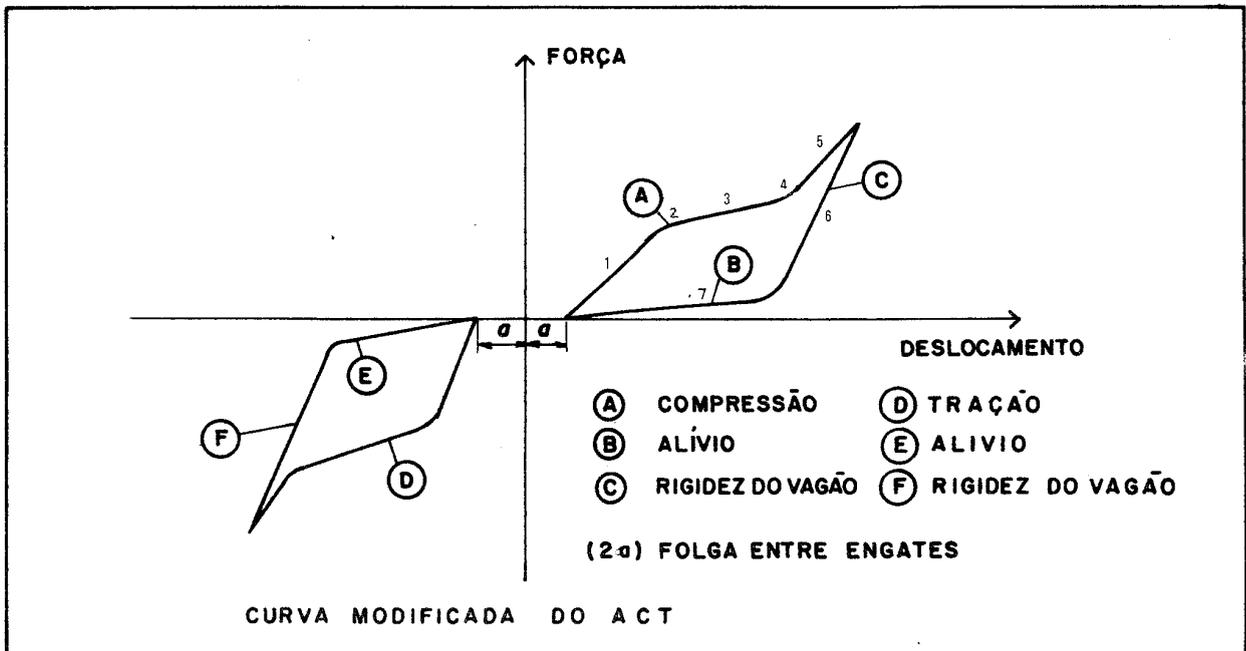
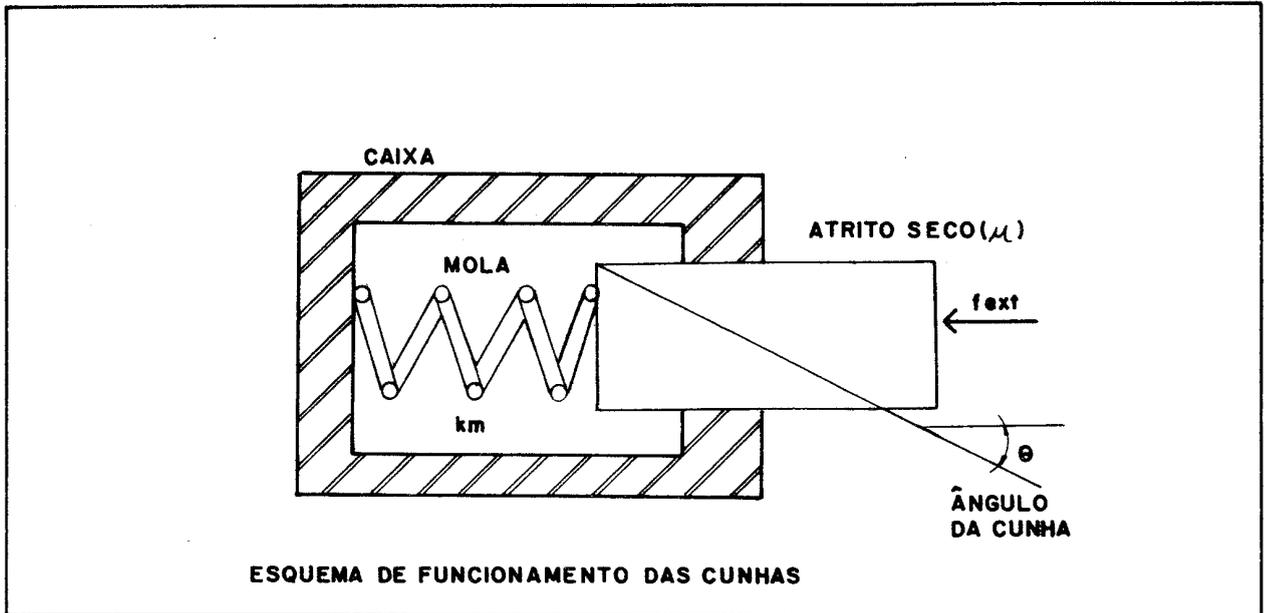


FIGURA A.4 – Curva do ACT

A equação utilizada para descrever o trecho (C) correspondente à rigidez do veículo é a seguinte:

Curva (C) - para  $(u_{ACT}-a) > 0.08255$

$$F_6 = 2,247E+6 + 196,200E+6 ((u_{ACT}-a) - 0.08255) \quad (A.7)$$

A equação utilizada para descrever a curva (B) correspondente ao retorno produzido pela rigidez da mola principal é a seguinte:

Curva (B) para  $0 < (u_{ACT}-a) < 0.08255$

$$F_7 = 4,41E+06 (u_{ACT}-a) \quad (A.8)$$

Obs.: A letra  $u_{ACT}$  corresponde ao deslocamento do ACT identificado no gráfico no eixo das ordenadas. Os deslocamentos são em metros e as forças em Newton.

Então, para um choque intenso entre veículos a força será calculada com auxílio da curva (A) em seus respectivos trechos e quando o esforço for aliviado será calculado com auxílio da curva (C) correspondente a rigidez do veículo e depois com a curva (B) correspondente a mola principal.

Como a curva de crescimento da força é diferente da curva de alívio (efeito de histerese), são necessários cuidados especiais no momento de determinação da força no ACT para deslocamentos que variam sem atingir o extremo das curvas (A), (B) ou (C).

## Dedução das Equação Cinemática

A dedução da equação cinemáticas que representa a resposta do ACT em função da força externa a ele aplicada, é expressa abaixo:

$$f_{ext} = f_{mola} + f_{cunha} \quad (A.9)$$

$$f_{mola} = K_m u_{ACT} \quad (A.10)$$

$$f_{normal} = f_{ext} \tan \theta \quad (A.11)$$

$$f_{cunha} = f_{normal} \mu \quad (A.12)$$

$$f_{ext} = K_m u_{ACT} + f_{ext} \tan \theta \mu \quad (A.13)$$

$$f_{\text{ext}} (1 - \tan \theta \mu) = K_m u_{\text{ACT}} \quad (\text{A.14})$$

$$f_{\text{ext}} = K_m u_{\text{ACT}} / (1 - \tan \theta \mu) \quad (\text{A.15})$$

que resulta em

$$f_{\text{ext}} = k_m (1 + \mu (\tan \theta + \mu / (1 + \mu \tan \theta))) u_{\text{ACT}} \quad (\text{A.16})$$

onde:

- $u_{\text{ACT}}$  - Deslocamento da cunha de fricção do ACT;
- $f_{\text{ext}}$  - Força externa aplicada no ACT;
- $f_{\text{mola}}$  - Força na mola principal (ou mola de retorno);
- $f_{\text{cunha}}$  - Força produzida pela cunha;
- $f_{\text{normal}}$  - Força transversal, normal à caixa do ACT;
- $k_m$  - Rigidez da mola principal do ACT (ou mola de retorno);
- $\mu$  - Coeficiente de atrito entre as superfícies das cunhas;
- $\tan$  - Tangente do ângulo;
- $\theta$  - Ângulo de inclinação das cunhas de fricção.

---

## **ANEXO B**

## B. Sistema de Freio

O sistema de freio como modelado neste trabalho pode ser utilizado para a simulação de aplicações individuais de freio de serviço ou freio de emergência. Há possibilidade de aplicação sucessiva de freio desde que a aplicação anterior tenha sido completamente terminada. Os casos intermediários ou sobrepostos de aplicação de freio só podem ser analisados com auxílio da modelagem fluido dinâmica do sistema pneumático do freio.

O instante inicial de aplicação da força de frenagem é ligeiramente defasado no tempo em relação à pressão. Isto se deve à necessidade de se produzir um deslocamento do cilindro suficiente para vencer as folgas das alavancas de transmissão de força (timoneria) e a distância entre a sapata de freio e a roda.

Com efeito de produzir um equacionamento representativo da pressão no cilindro de freio, foi adotada uma curva de pressão dividida em quatro trechos. A Figura B.2 apresenta a pressão em função do tempo e os quatro trechos adotados.

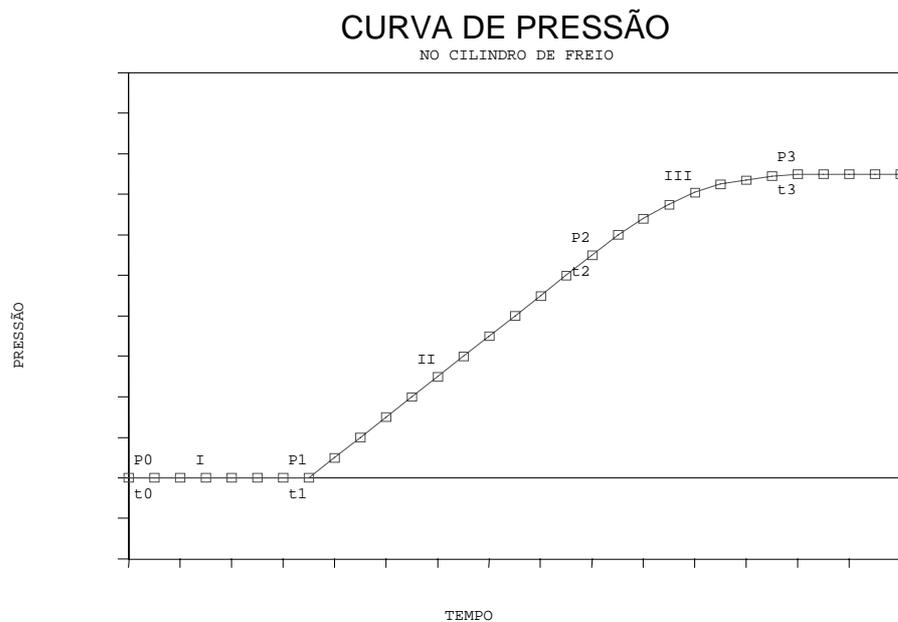


FIGURA B.1 - Representação dos Trechos

Diversas evoluções foram introduzidas nas válvulas de freio com o intuito de aprimorar seu funcionamento. Por exemplo, as válvulas tradicionais mais utilizadas, chamadas AB, foram aprimoradas para permitir um alívio mais rápido e foram denominadas válvulas ABD.

As equações para determinação dos pontos de cada uma das curvas para o  $i$ -ésimo veículo (válvulas do tipo ABD) são:

$$t_1 = 2,5 + 0,003 * Leg_i + 2,25 E-08 * Leg_i^2$$

$$t_2 = (P_3 * \%t_2 / Af_1) + t_1$$

$$t_3 = (P_3 / Af_2) + k$$

$$\%t_2 = 80 - 0,00435 * Leg_i$$

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = P_3 * \%t_2$$

$$P_3 = 0,8 * Prd + 4$$

$$Af_1 = -0,1316 * Ln (Leg_i) + 7,659$$

$$Af_2 = -0,3300 * Ln (Leg_i) + 6,945$$

$$Teta = (P_3 - P_2) / (t_3 - t_2)^2$$

$$A = P_3 - (Teta * t_3^2)$$

$$B = Teta * 2 * t_3$$

$$C = -Teta$$

$$Pcf_i = 0 \quad \text{para } t < t_1$$

$$Pcf_i = Af_1 (t - t_1) \quad \text{para } t_1 < t < t_2$$

$$Pcf_i = A + Bt + Ct^2 \quad \text{para } t_2 < t < t_3$$

$$Pcf_i = P_3 = \text{cte} \quad \text{para } t > t_3$$

Obs.: Os valores aqui apresentados correspondem à válvula ABD para aplicação de serviço, caso que será estudado neste trabalho. Estes termos utilizados são definidos abaixo:

- $i$  - número do veículo;
- $t$  - tempo;
- $t_0$  - instante da aplicação da redução de pressão pelo maquinista;
- $t_1$  - tempo em que a pressão do  $i$ -ésimo veículo inicia o crescimento;
- $t_2$  - tempo intermediário durante o qual a pressão cresce aproximadamente linear;
- $t_3$  - tempo em que a pressão do  $i$ -ésimo veículo termina o crescimento;

- 
- $\%t_2$  - proporção da pressão  $P_2$  em relação à  $P_3$ ;
- $P_1$  - pressão até o tempo  $t_1$  (valor nulo);
- $P_2$  - pressão no tempo intermediário  $t_2$ ;
- $P_3$  - pressão final que o cilindro dos veículos deve atingir (todas são idênticas);
- $P_{no}$  - pressão nominal do encanamento geral;
- $P_{rd}$  - pressão de redução a ser aplicada na pressão nominal;
- $P_{cf_i}$  - pressão no cilindro de freio do  $i$ -ésimo veículo;
- $Leg_i$  - comprimento do encanamento geral até o  $i$ -ésimo veículo;
- $Af_1$  - coeficiente angular da equação do trecho II;
- $Af_2$  - coeficiente angular da equação que localiza o ponto  $t_3$ ;
- $k$  - constante auxiliar (valor estimado em 12 segundos);
- Teta - constante auxiliar;
- A - constante auxiliar;
- B - constante auxiliar;
- C - constante auxiliar.

A conveniência da colocação desta estrutura está na facilidade de alteração dos parâmetros para representação de diferentes tipos de válvulas de freio (AB, ABD, ABDW) e também no fato dos termos das equações serem parametrizados em função da pressão final " $P_3$ ", do comprimento do veículo "Leg" e da quantidade "n" de veículos do trem. Isto permite fácil geração das curvas e que estas se auto ajustem para qualquer nível de aplicação de pressão do sistema de freio.

No caso deste estudo o controle e alimentação do sistema pneumático de freio serão realizados pela locomotiva líder embora isto possa ser feito em trens longos com unidade remota (grupo de locomotivas posicionadas em outro ponto do trem) no meio ou final do trem.

O trecho II foi modelado linearmente em toda sua extensão. Observa-se, entretanto, que nos dados experimentais no início da aplicação a existência de um degrau no crescimento da pressão. Se for feita uma análise detalhada do funcionamento do sistema de freio, poderá ser observado que nesta região a pressão cresce até atingir o valor suficiente para vencer duas resistências internas devido à:

- a ) os atritos internos dos mancais de suporte da timoneria de freio;
- b ) força da mola de retorno existente dentro do cilindro de freio.

Somente após superar o somatório destas duas forças é que o êmbolo inicia o seu deslocamento. Então a pressão permanece estável por tempo suficiente para movimentar as sapatas de freio até que entrem em contato com as rodas. Neste instante a timoneria enrijece e a pressão volta a crescer. Portanto a linearização adotada para o trecho II de curva de pressão é representativa quando vista sob o aspecto do cálculo da efetiva força de frenagem.

O Gráfico 2 apresenta a cálculo das forças de frenagem baseadas neste método e que foram utilizadas nos cálculos pelo 2º método

Para o 1º método o processo é idêntico mas no cálculo da força de frenagem foi considerado a curva completa de eficiência do conjunto de alavancas de aplicação do freio (timoneria) que é função exponencial da pressão do cilindro.

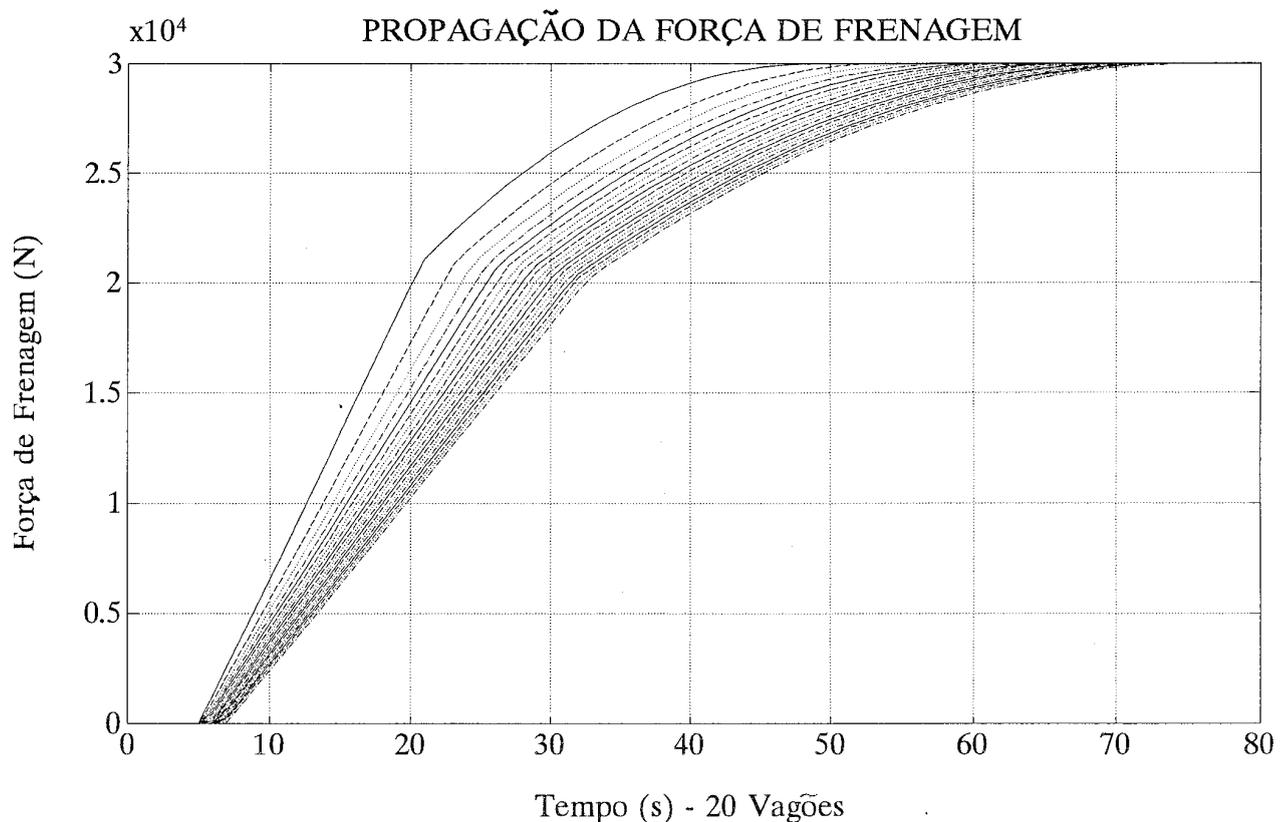


GRÁFICO B.1 - Valor da Força de Frenagem

---

## **ANEXO C**

## C. Determinação das Características Equivalentes do ACT

Dois métodos foram utilizados para determinação da Rigidez e Amortecimento equivalentes do Aparelho de Choque e Tração (ACT).

O primeiro consiste na determinação da frequência natural decorrente do movimento relativo entre uma locomotiva e um vagão calculada a partir do programa de integração numérica. Associado a esta rigidez, obtém-se um amortecimento equivalente pelo método da energia.

O segundo método consiste na aproximação da rigidez e amortecimento equivalentes à curva de resposta do ensaio de impacto realizado com martelo de queda (Drop-Hammer) sobre o ACT.

### C.1. Determinação das Características do ACT (1º Método)

#### Rigidez Equivalente

Para a determinação da rigidez equivalente foi utilizado o programa de integração numérica para calcular os movimentos relativos entre dois veículos ligados por um ACT. Com os resultados da força de interação entre os veículos, foi calculada a frequência natural com análise no domínio da frequência, baseada na Transformada Discreta de Fourier (DFT) e algoritmo para cálculo da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Estes resultados podem ser observados nos Gráfico C1 (a, b, c, d) que apresentam, para uma excitação externa aplicada através de uma aceleração no primeiro veículo, respectivamente, Velocidade, Aceleração, Pressão do Sistema de Freio e Força no Acoplamento. O Gráfico C2 mostra o detalhe da Força no Acoplamento (C2.a) e Densidade do Espectro em Frequência da Força no Acoplamento (C2.b).

Observa-se no Gráfico C2.b a existência de uma frequência dominante em torno de 1,9 Hz (11,94 rd/s). A Figura C1 apresenta a disposição utilizada nesta simulação.

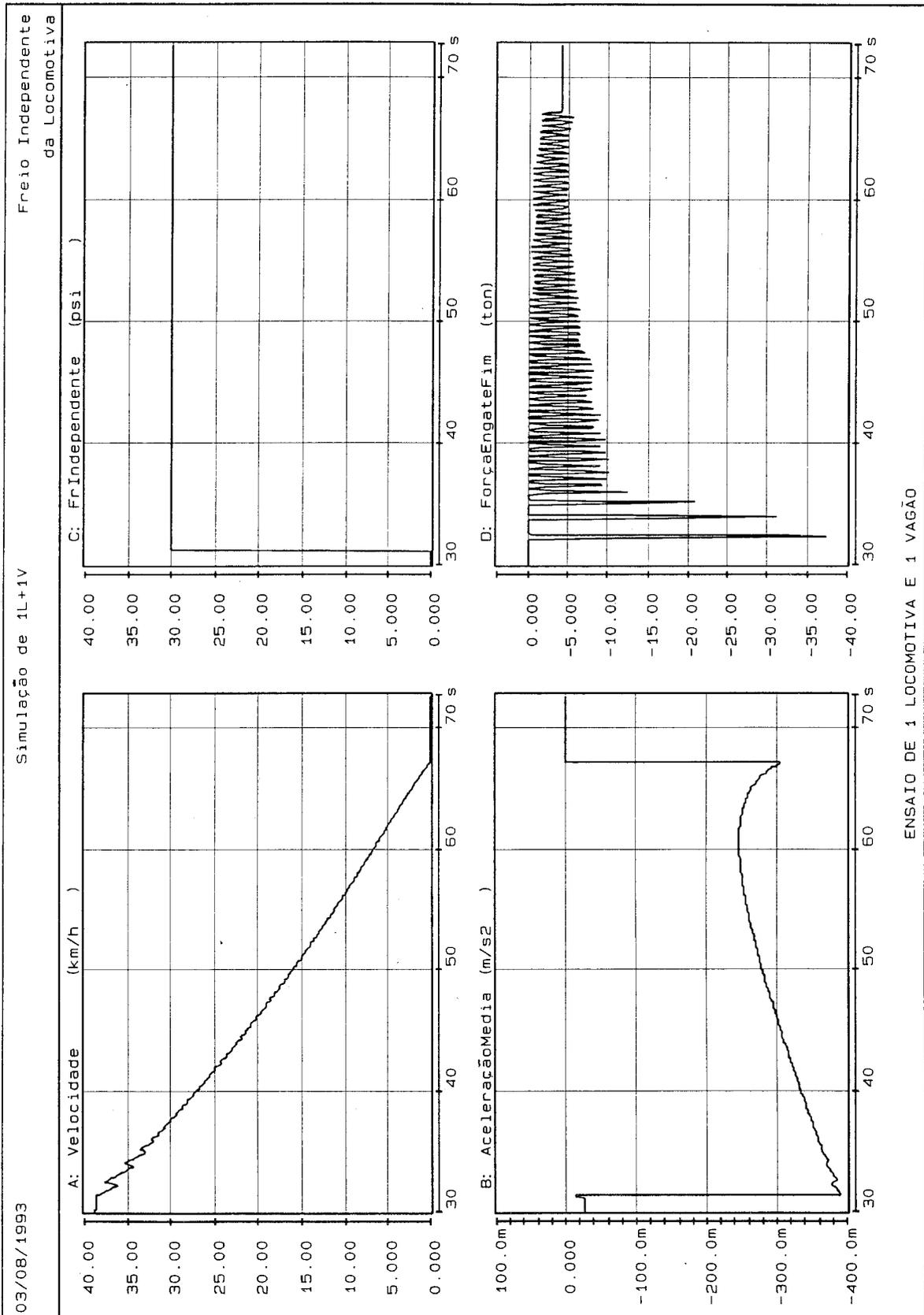


GRÁFICO C1 - Simulação de Dois Veículos

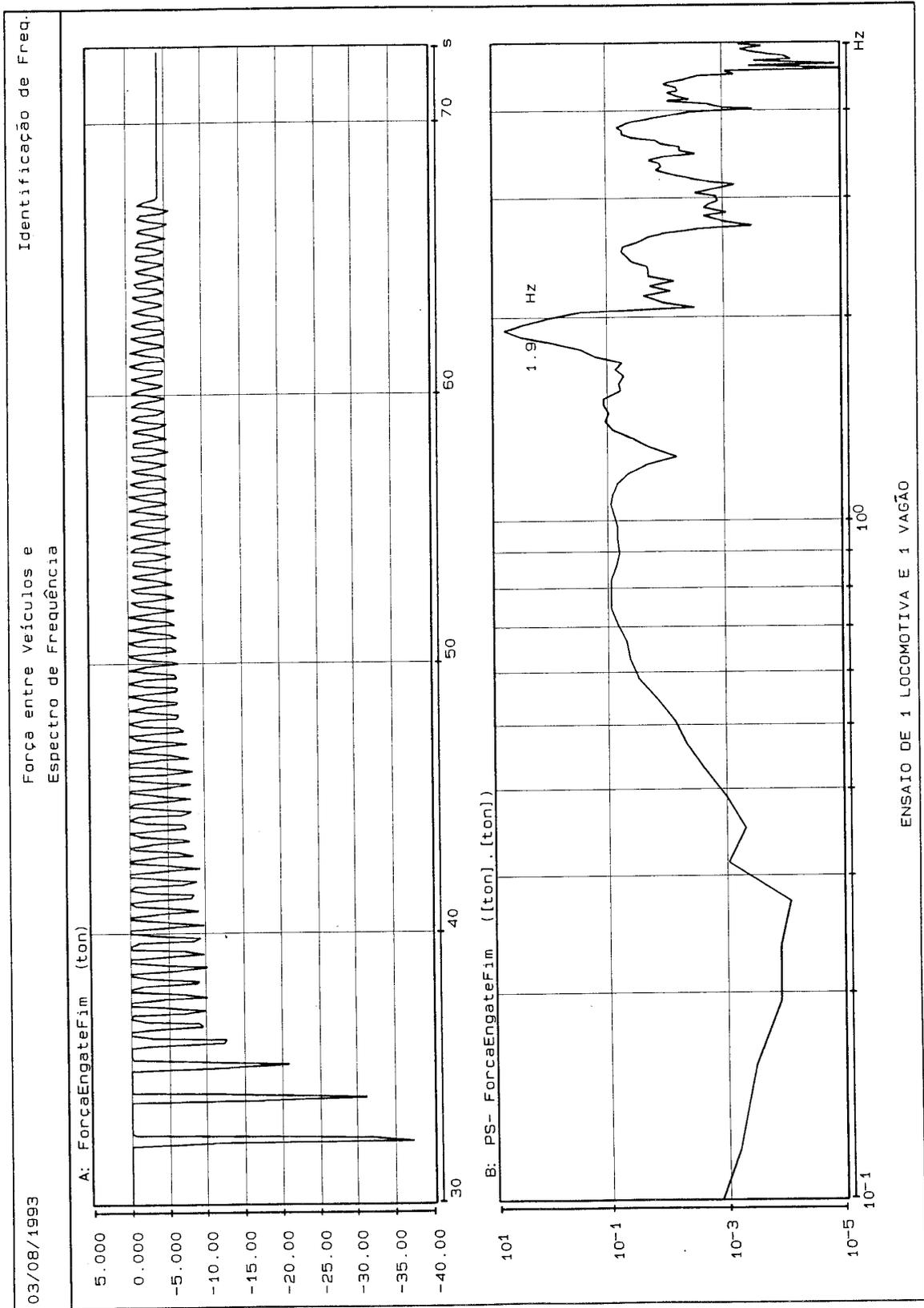


GRÁFICO C2 - Espectro de Frequência da Força entre Veículos

O sistema esquematizado na Figura C1 com dois graus de liberdade apresenta duas frequências naturais. Uma correspondente ao modo rígido ou movimento de translação e outra frequência natural amortecida ( $w_d$ ). Considerando que o sistema é simétrico, a frequência pode ser expressa por:

$$w_d^2 = k/m - (d/2m)^2 \quad (C.1)$$

$$k = (w_d^2 + (d/2m)^2) m \quad (C.2)$$

que corresponde a metade do sistema descrito.

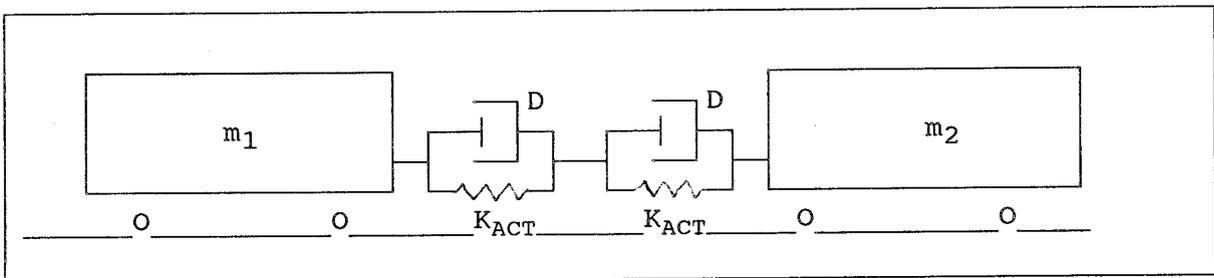


FIGURA C1 - Disposição do Sistema de Dois Graus de Liberdade

Portanto para o caso em questão, considerando como valor de amortecimento ( $d$ ) de 210.000 [Ns/m], frequência natural amortecida ( $w_d$ ) de 11,94 [rd/s] e massa ( $m$ ) de 120.000 [kg], tem-se um valor da rigidez equivalente para um ACT da ordem de:

$$K_{act} = 17,2 \text{ E}+06 \text{ [N/m]}$$

## Amortecimento Equivalente

O amortecedor do tipo viscoso geralmente utilizado na composição de modelos matemáticos de representação de sistemas mecânicos produz força, proporcional à velocidade, oposta ao movimento e expressa por:

$$f_{visc} = D \dot{u} \quad (C.3)$$

O Aparelho de Choque e Tração do tipo cunha de fricção possui amortecimento do tipo atrito seco (ou atrito de Coulomb), proporcional e unidirecional (ou seja, o amortecimento aumenta em função do seu curso e só atua no sentido de compressão).

Adotando o processo de Equivalência por Energia, buscar-se-á determinar o grau de amortecimento viscoso equivalente que possa absorver a mesma energia por ciclo de atuação que o ACT.

Desta maneira, buscando preservar o mesmo comportamento do equipamento original, será identificado um amortecimento viscoso equivalente do ACT para utilização nos cálculos com o modelo linearizado.

A solução de uma equação de movimento de um sistema linear em geral resulta em movimentos harmônicos de frequência "w" que pode ser simplificada expresso por:

$$u \sim = u_0 \cos wt \quad (C.4)$$

A energia absorvida por um sistema mecânico com amortecimento viscoso, considerando as simplificações da equação C.3, é dada por:

$$E_v = \int_0^t f_{visc} du = \int_0^t D \dot{u} \sim du = \int_0^t D (\dot{u} \sim)^2 dt \quad (C.5)$$

onde  $du$  foi substituído por  $du = \dot{u} dt$ .

Derivando a equação C.4 e substituindo em C.5 e integrando, obtém-se:

$$E_v = 0.5 D u_0^2 w (wt - \text{sen } wt \cos wt) \quad (C.6)$$

Considerando um intervalo de tempo idêntico a um ciclo de excitação, ou seja,  $t = T$  e portanto  $wt = wT = 2 \text{ Pi}$ , obtém-se que a energia em um ciclo é dada pela expressão:

$$E_v = D u_0^2 w \text{ Pi} \quad (C.7)$$

O ACT, como descrito anteriormente, possui uma curva característica com elevada histerese. No ANEXO A foi apresentada a curva completa do ACT. Considerando rigidez

linearizada para o trecho de até 76 [mm], pode-se escrever para compressão que:

$$f_{ACT} = k_{ACT} u \quad (C.8)$$

Entretanto para alívio a força é proporcional à mola de retorno então  $f_{ACT} = k_{mr} u$  e a curva simplificada do ciclo de histerese, desprezando as folgas dos engates, é representado por:

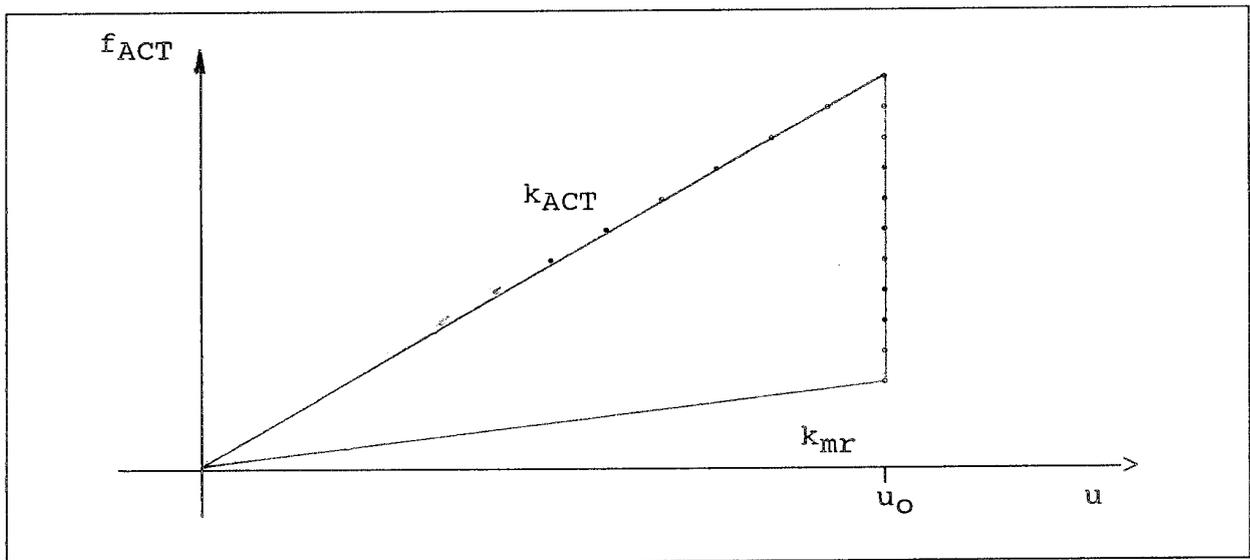


FIGURA C2 - Diagrama Força x Deslocamento

Portanto, a energia absorvida durante 1 ciclo completo de compressão entre dois veículos é dada por:

$$E_{ACT} = \int f_{ACT} du - \int f_{mr} du \quad (C.9)$$

onde  $f_{mr}$  é a força da mola de retorno igual a  $k_{mr} u$  substituindo fica:

$$E_{ACT} = \int k_{ACT} u du - \int k_{mr} u du \quad (C.10)$$

$$E_{ACT} = 0.5 k_{ACT} u_0^2 - 0.5 k_{mr} u_0^2 \quad (C.11)$$

$$E_{ACT} = 0.5 (k_{ACT} - k_{mr}) u_0^2 \quad (C.12)$$

Considerando que a energia absorvida pelo amortecimento viscoso ideal seja igual ao amortecimento real aproximado do ACT pode-se igualar as expressões C.5 e C.12, tendo-se  $E_v = E_{ACT}$ , o que resulta em:

$$\pi D u_o^2 w = 0.5 (k_{ACT} - k_{mr}) u_o^2 \quad (C.13)$$

de onde se pode tirar o amortecimento equivalente para o ACT. Lembrando-se que  $w = 2\pi f_d$ , tem-se:

$$D_e = (k_{ACT} - k_{mr}) / 4 \pi^2 f_d \quad (C.14)$$

Observa-se na expressão acima que o amortecimento equivalente " $D_e$ ", depende basicamente da frequência do movimento. Na análise realizada no item anterior identificou-se a frequência dominante dos movimentos entre dois veículos que será utilizada neste cálculo.

Os valores necessários para o cálculo do amortecimento equivalente são:

- a)  $f_d = 1,9$  [Hz] (frequência amortecida  $w = 11,94$  [rd/s])
- b)  $K_{ACT} = 8,55 E+06$  [N/m] (rigidez do par de ACT)
- c)  $K_{mr} = 0,665 E+06$  [N/m] (rigidez da mola de retorno do par de ACT)
- d)  $D_e = 105,1 E+03$  [N s/m] (amortecimento equivalente do par)

## C.2. Determinação das Características do ACT (2º Método)

O ACT é caracterizado pela curva do ensaio de impacto realizado com um martelo de queda livre com massa de 12.000 [kg], liberado a diferentes alturas sobre o ACT. O segundo método consiste na aproximação da rigidez e amortecimento equivalentes à curva de resposta do ensaio realizado com martelo de queda (Drop-Hammer) sobre o ACT.

## Modelo do Ensaio de Impacto do ACT

Com efeito de calcular o comportamento linear equivalente do ACT, a curva original apresentada no ANEXO A foi linearizada nas faixas de uso deste trabalho (deslocamentos de até 76 [mm]). O valor considerado foi de 21,0 [N/m]. Então o conjunto mecânico foi modelado como uma Massa+Mola+Amortecedor sendo a massa considerada como o martelo de choque de 12.000 [kg].

Este sistema teve condições iniciais (velocidade inicial da massa) ajustadas para fornecer uma energia cinética correspondente à 48 [kJ] (volume de energia correspondente a esta faixa de curso do ACT). A resposta do sistema foi calculada para uma velocidade inicial da massa de 2,828 [m/s] e os registros de deslocamento, velocidade e força apresentados nos Gráficos C5, C6 e C7. Foram adotados valores de rigidez de 21,0 E+06 [N/m] e amortecimento de 160,0 E+03 [Ns/m].

## Comparação da Rigidez e Amortecimento Equivalentes

O Gráfico C8 mostra a força em função do deslocamento do sistema adotado para vários valores de condições iniciais (10 impactos de 4,8 [kJ] até 48 [kJ]). Este Gráfico permite determinar as forças e os deslocamentos máximos para cada impacto, permitindo o cálculo da rigidez equivalente. O Gráfico C9 apresenta a comparação da rigidez do ACT obtida pela simulação de impacto e a curva linearizada do fabricante no trecho até 76,2 mm.

A área contida dentro da excursão da força  $x$  deslocamento corresponde à energia absorvida durante o impacto e pode ser comparada com a energia obtida pelo ensaio do fabricante (Gráfico C10).

GRÁFICO C6 VELOCIDADE ACT (Impacto 48 kJ)

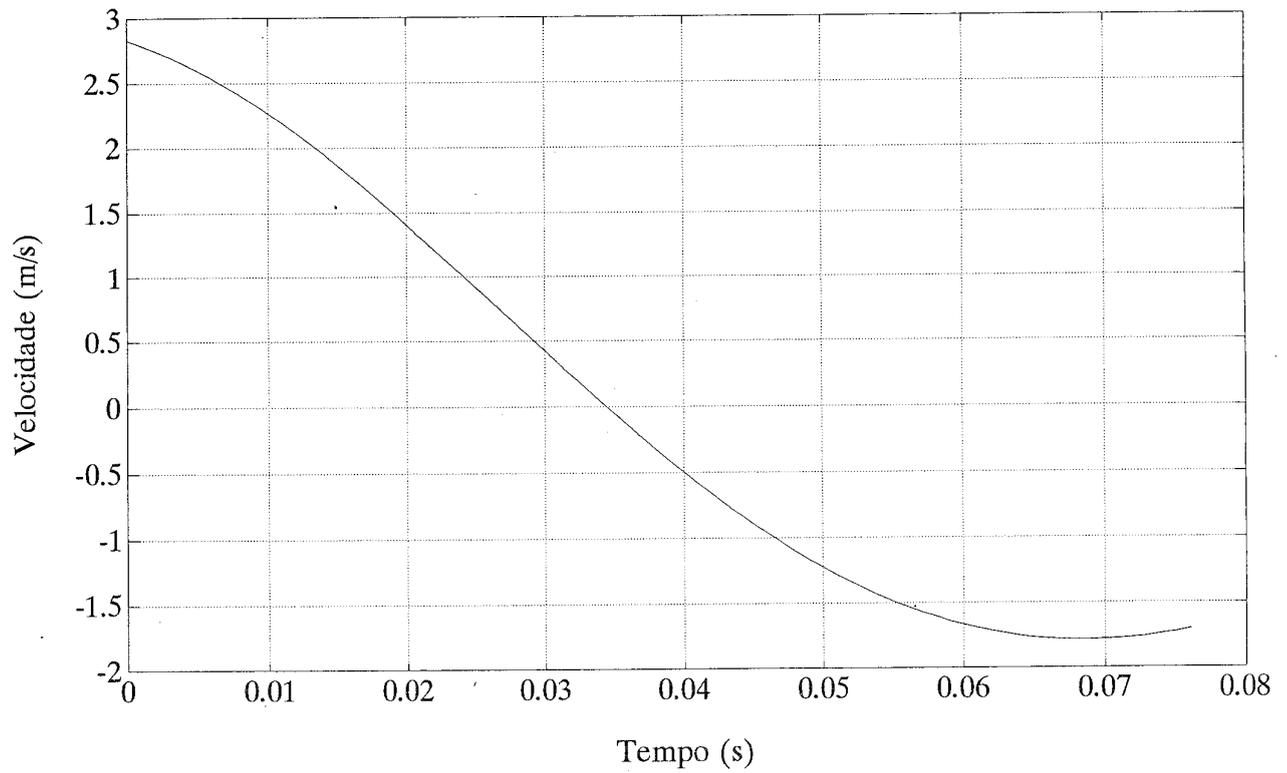


GRÁFICO C5- Deslocamento do ACT

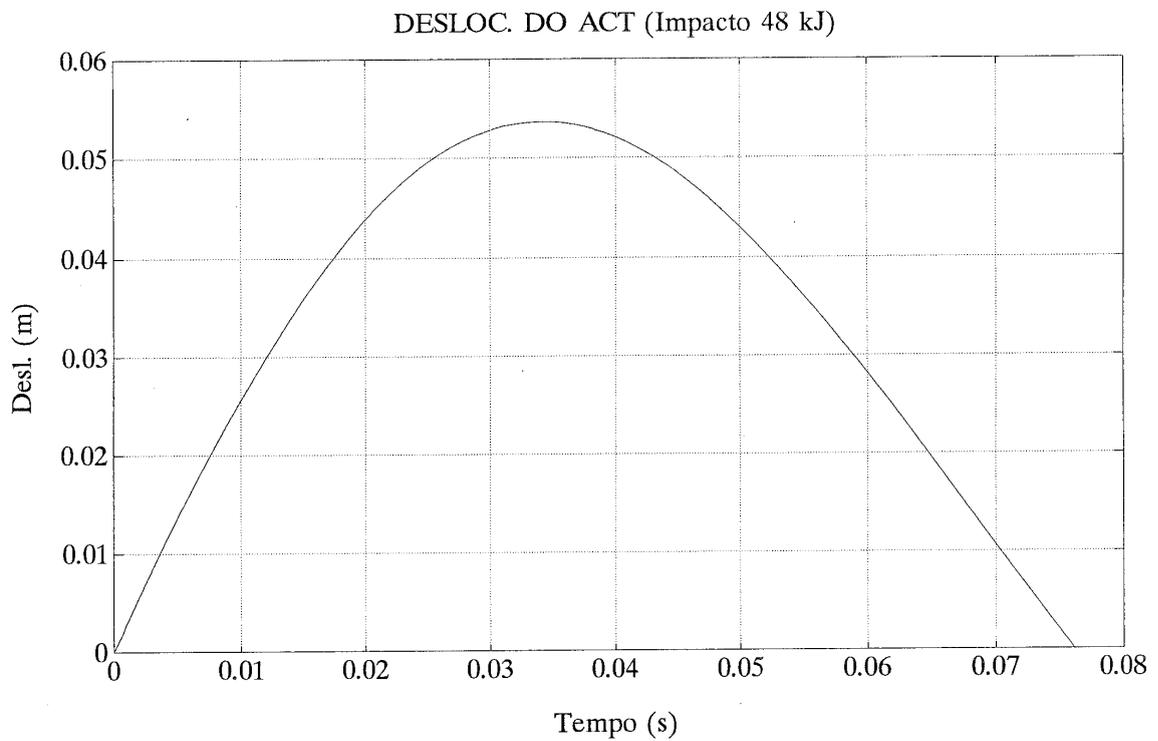


Gráfico C6 VELOCIDADE ACT (Impacto 48 kJ)

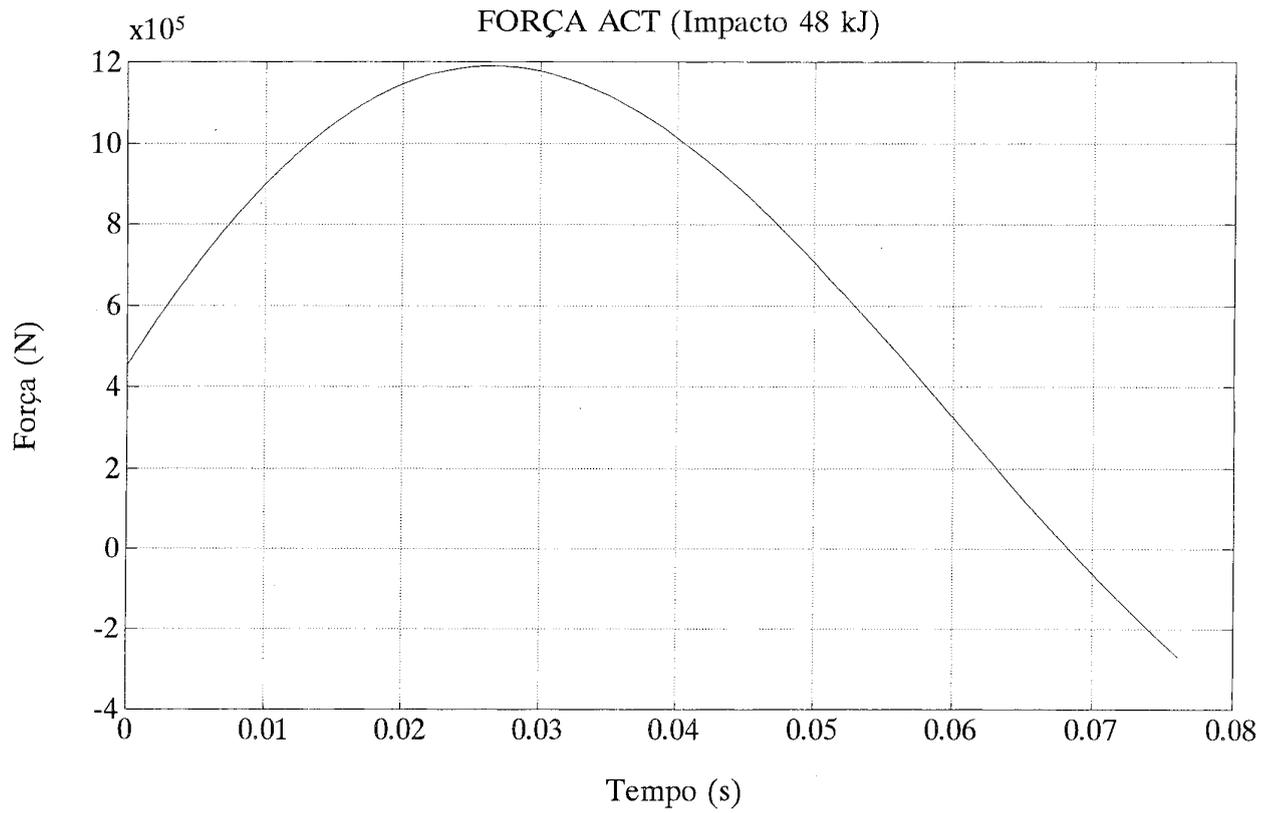
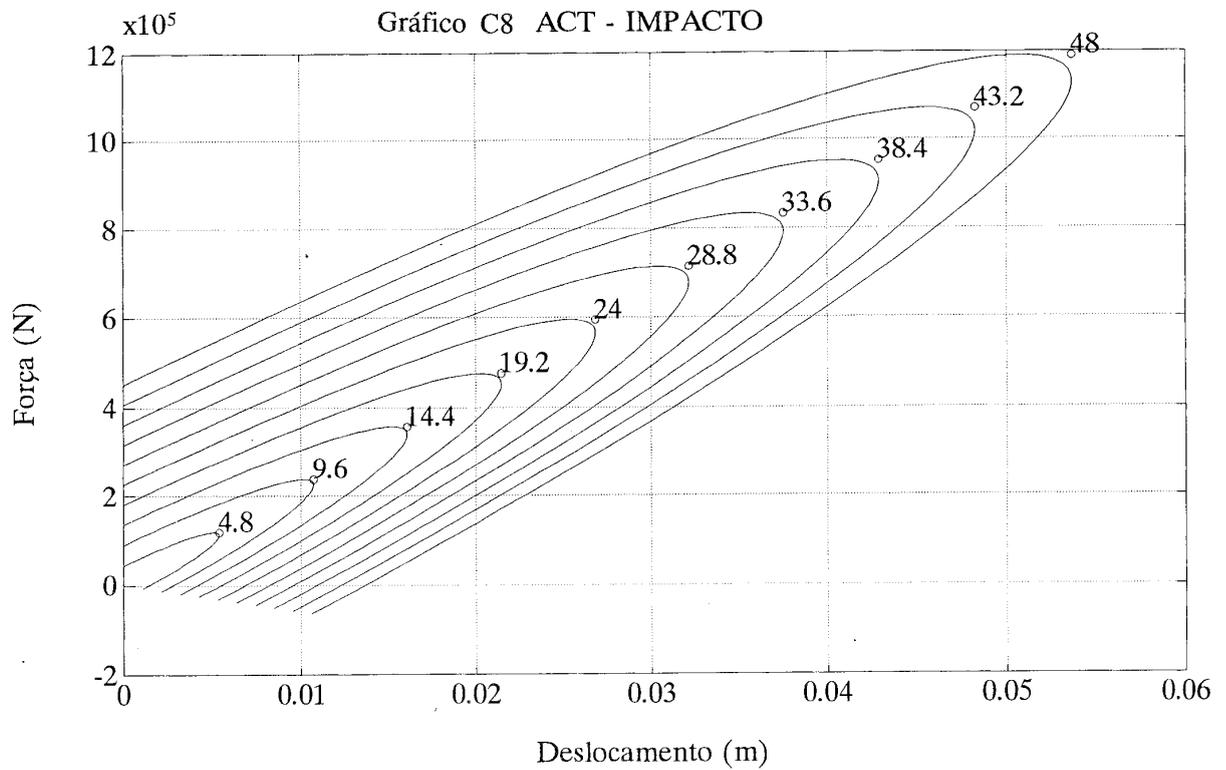


GRÁFICO C7 - Força do ACT



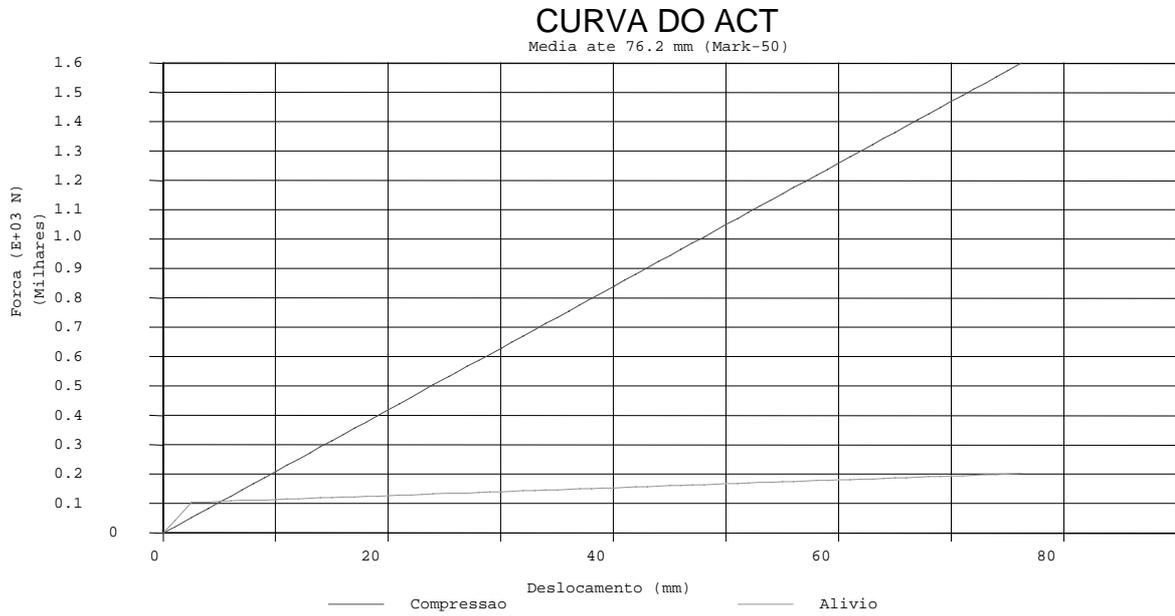


GRÁFICO C9 - Comparação da Rigidez do ACT

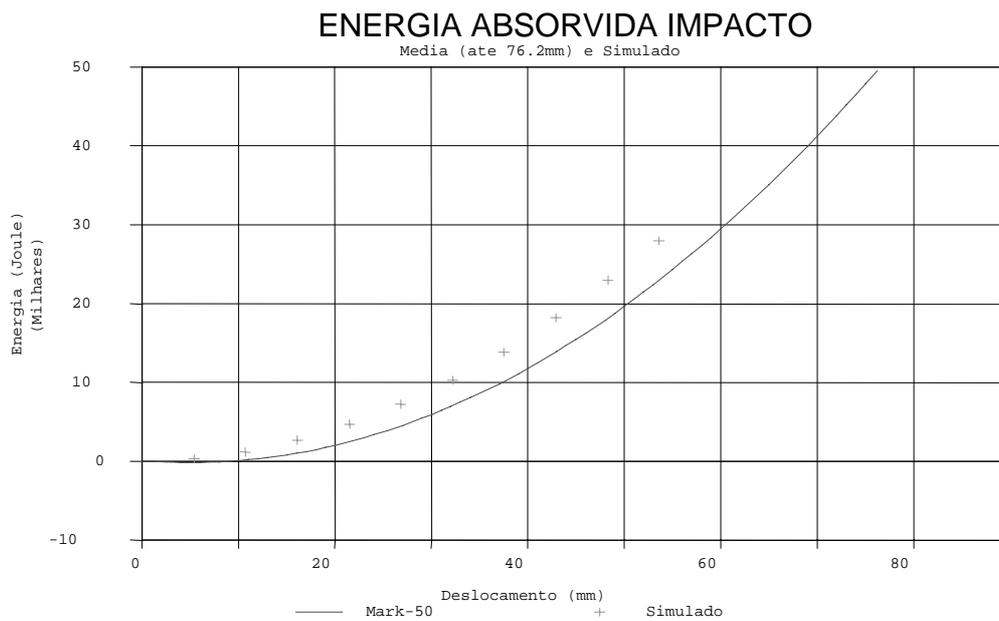


GRÁFICO C10 - Comparação da Energia Absorvida no Impacto

---

## **ANEXO D**

## D. Estudo da Variação da Rigidez e Amortecimento

Com efeito de verificar a influência da variação da rigidez e amortecimentos equivalentes no comportamento do sistema, foram calculadas as forças de frenagem do trem para um caso similar ao apresentado no corpo deste trabalho.

Para esta verificação, os valores de rigidez e amortecimento equivalentes, foram variados em torno de 50% do valor nominal adotado.

Os resultados dos cálculos encontram-se nos Gráficos D.1 a D.5 que mostram na parte superior os autovalores correspondentes à condição calculada e na parte inferior os valores das forças entre os graus de liberdade.

Os Gráficos são apresentados na seguinte seqüência:

- a ) Gráfico D.1 - Condição Nominal;
- b ) Gráfico D.2 - Rigidez Majorada em 50%;
- c ) Gráfico D.3 - Rigidez Minorada em 50%;
- d ) Gráfico D.4 - Amortecimento Majorado em 50%;
- e ) Gráfico D.5 - Amortecimento Minorado em 50%.

Os resultados permitem observar a modulação das vibrações produzidas pelos modos próprios. Entretanto os valores de máximo da força não apresentaram variação substancial.

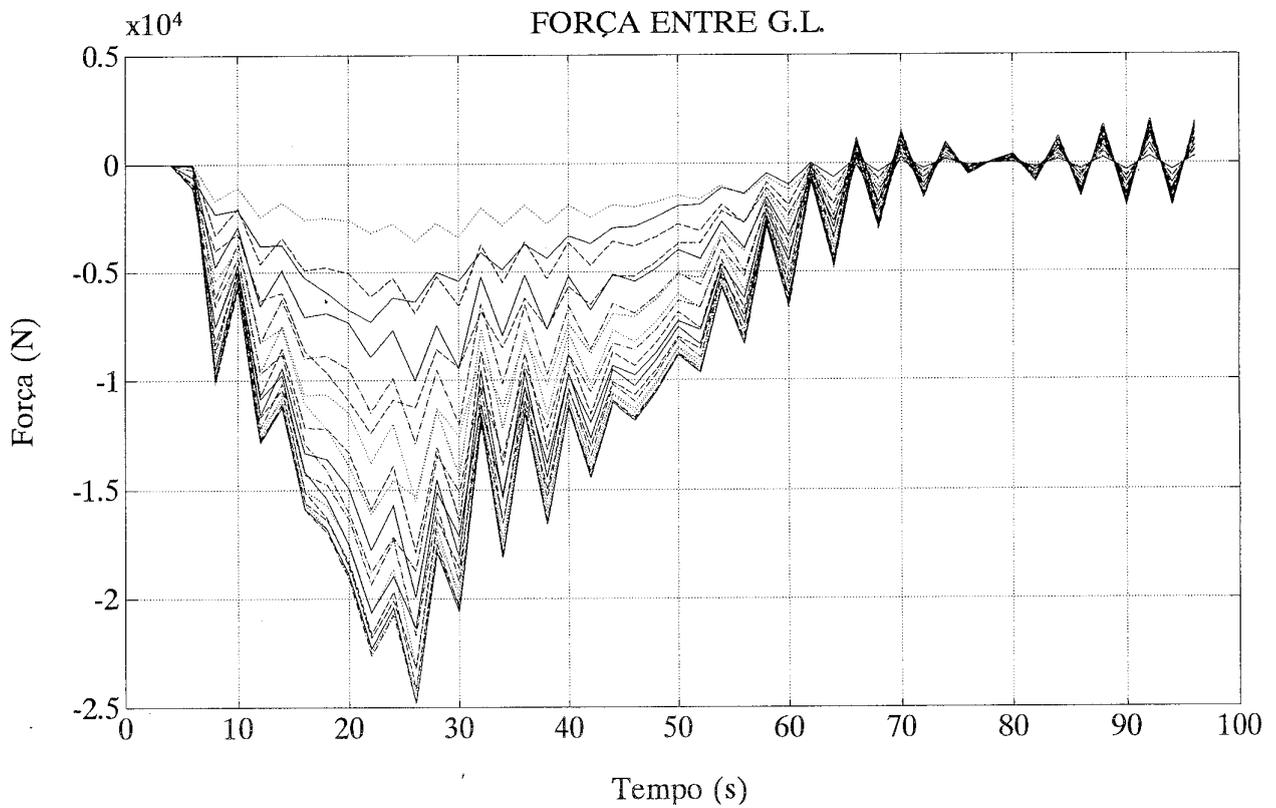
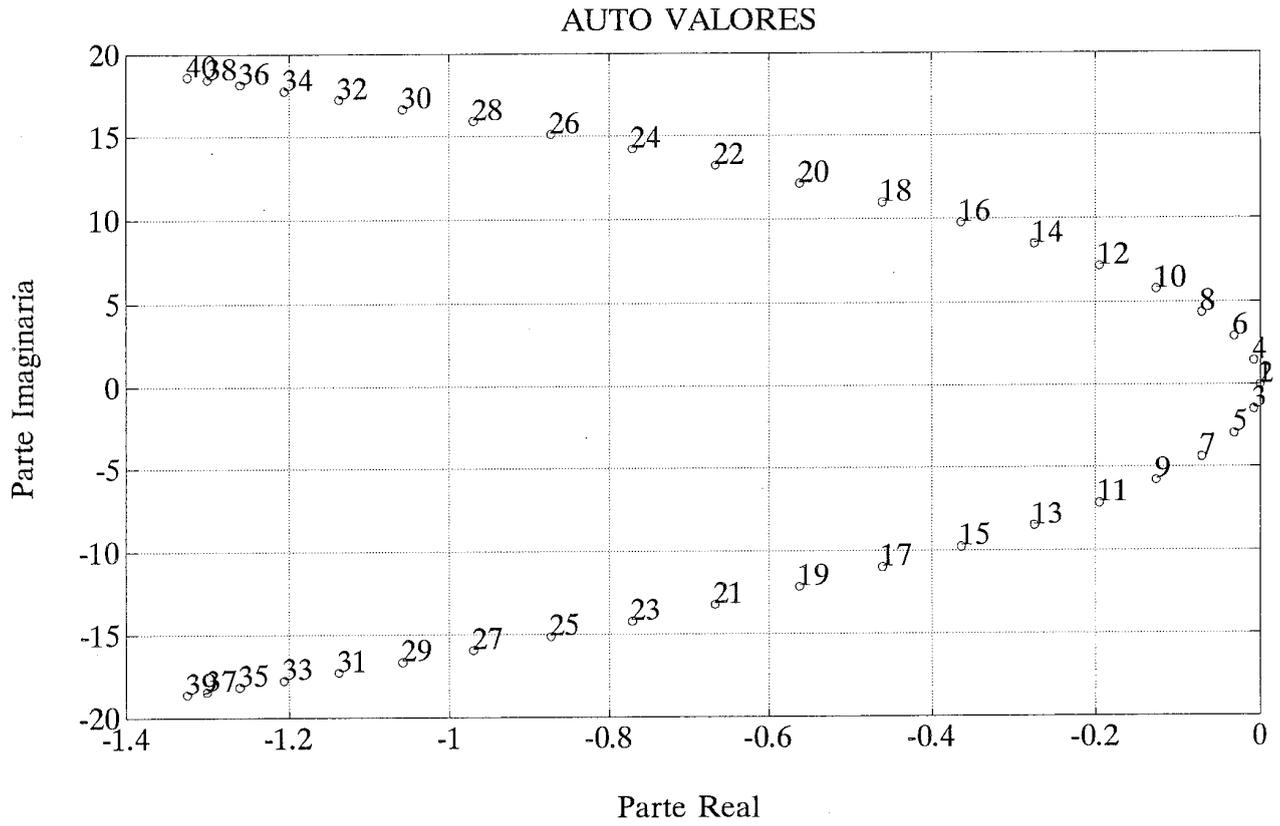


GRÁFICO D.1 - Condição Nominal;

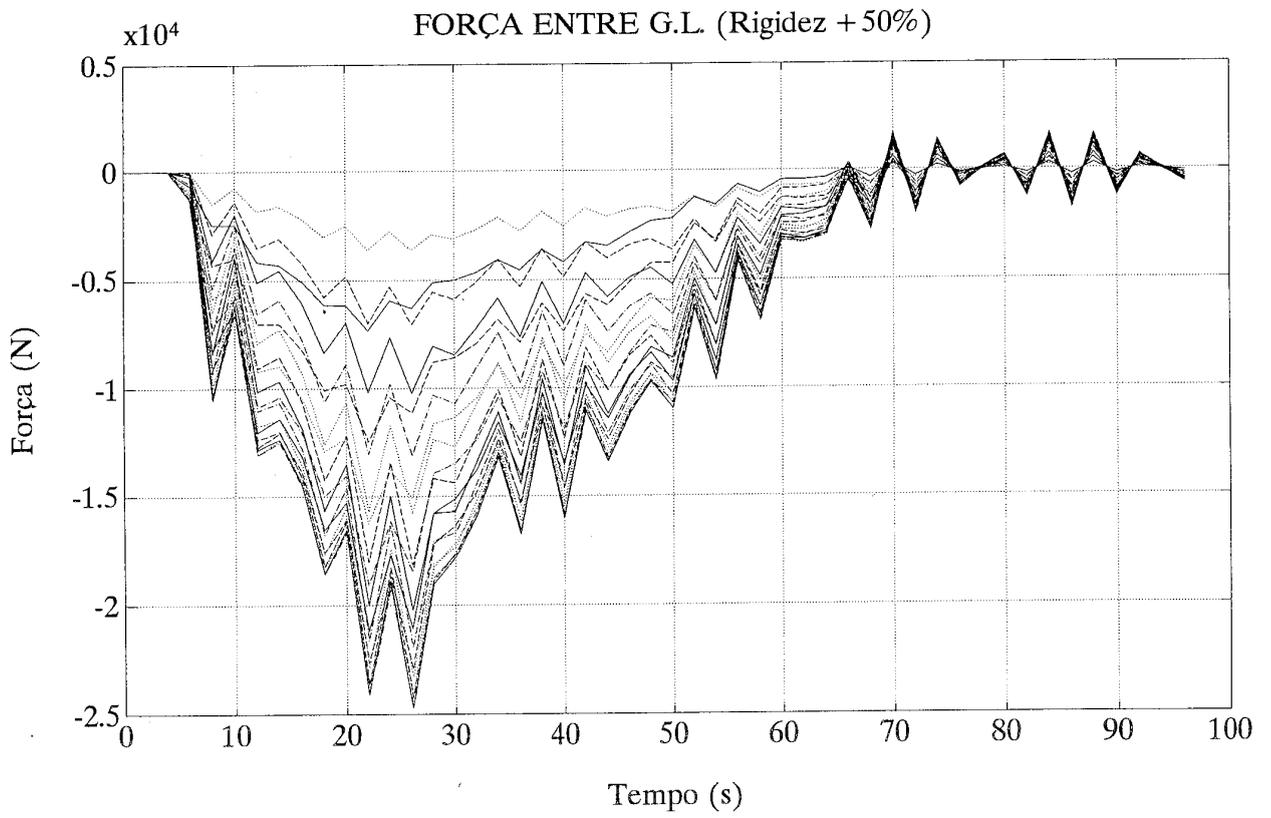
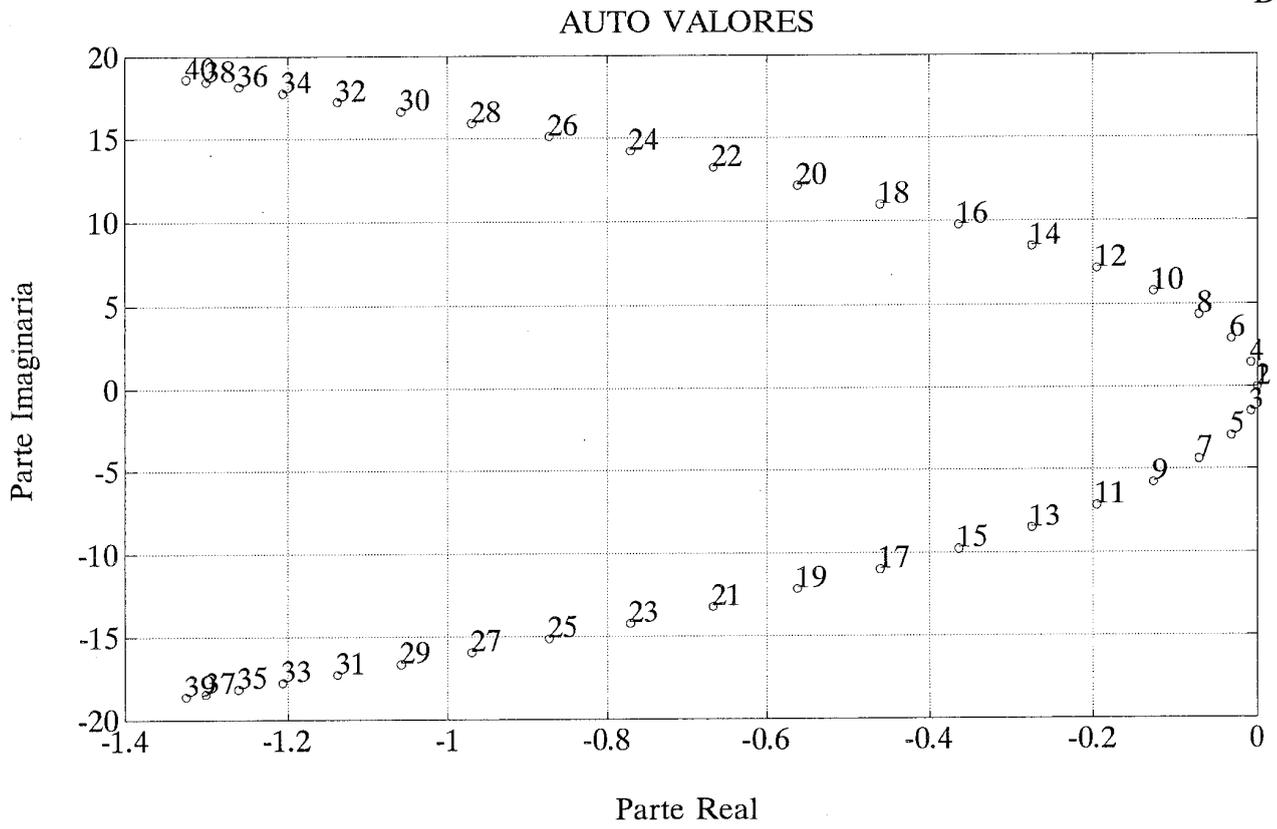


GRÁFICO D.2 - Rigidez Majorada em 50%;

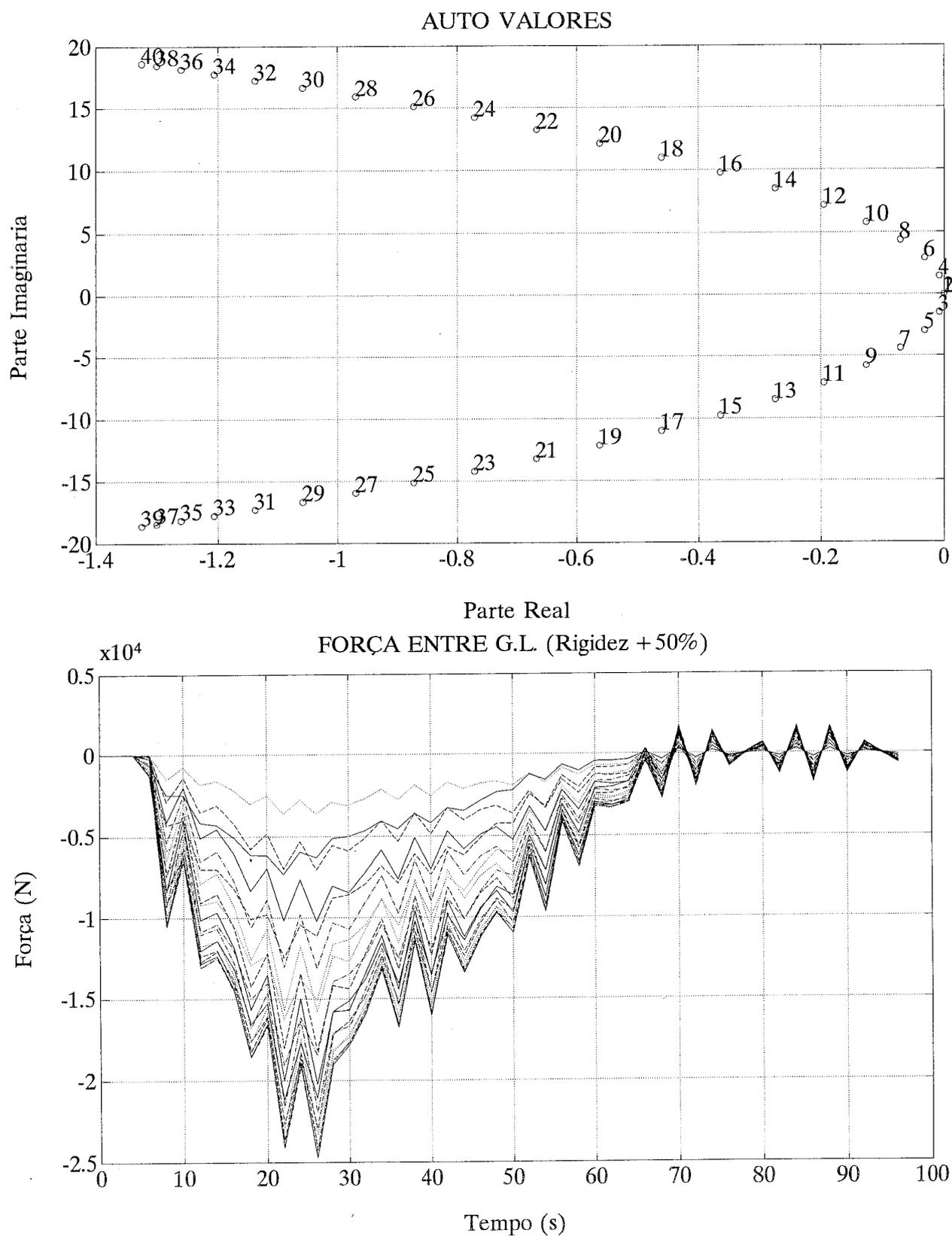


GRÁFICO D.3 – Rigidez Minorada em 50%

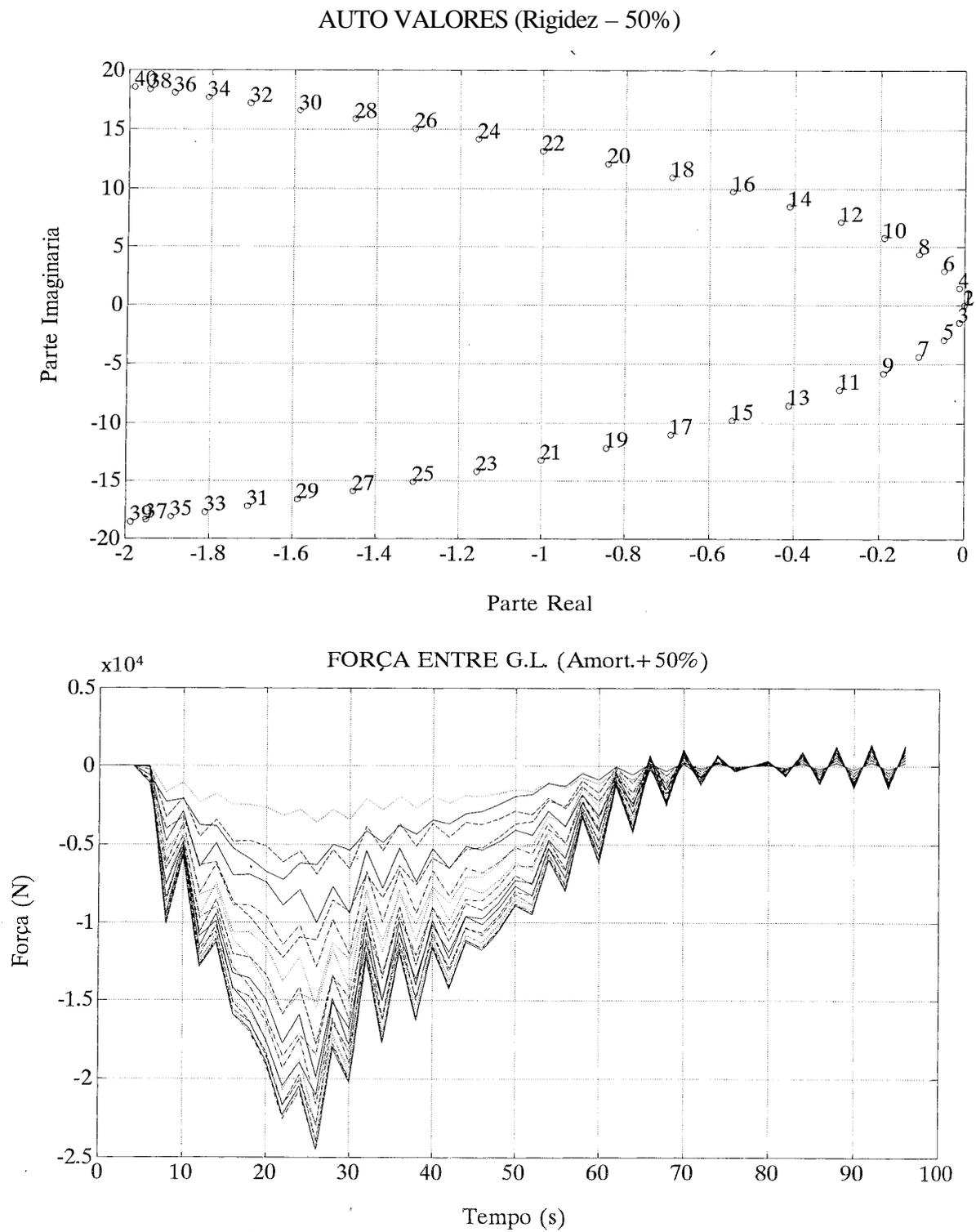


GRÁFICO D.4 - Amortecimento Majorado em 50%;

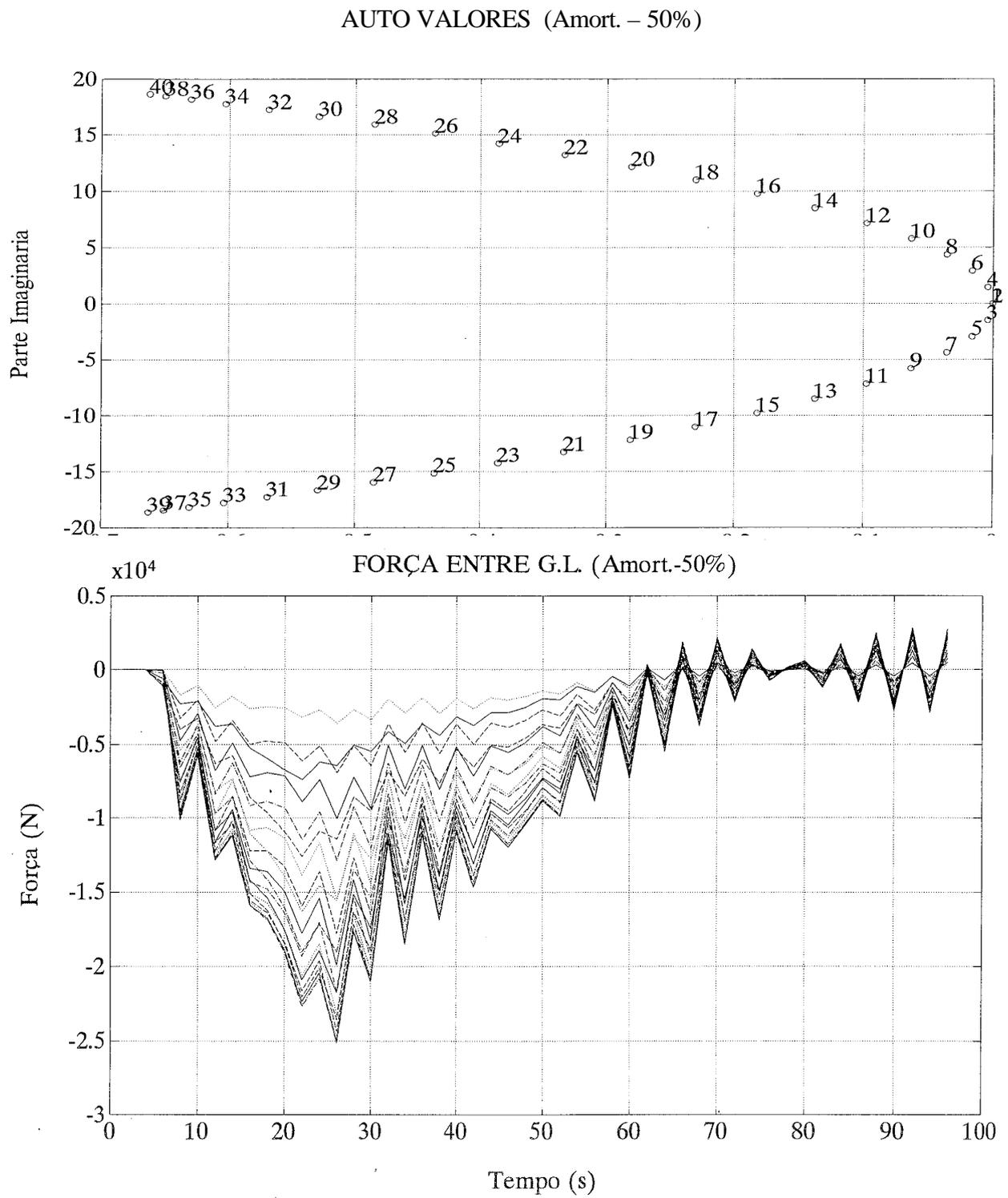


GRÁFICO D.5 - Amortecimento Minorado em 50%.

---

## **ANEXO E**

## E. Métodos de Integração Numérica

Existem diversos grupos de métodos de integração numérica. Entre eles pode-se citar os métodos de estágio único, métodos de múltiplos estágios, métodos de passo variável, etc..

Os métodos de um estágio utilizam informação sobre a função no ponto inicial e não há iteração na solução. A solução por série de Taylor fornece um método fundamentalmente deste tipo. Entretanto, este método não é usualmente prático.

Há muitas técnicas deste tipo inclusive os métodos de Runge-Kutta, que são métodos diretos (sem iteração). A séria desvantagem deste grupo é a dificuldade em estimar o erro além de exigir cálculos mais frequentes do valor da função.

Os métodos de multiestágios são aqueles onde o próximo ponto da curva pode ser estimado com menor número de cálculos do valor da função, mas que exigem iterações para chegar a valor suficientemente preciso. Muitos métodos deste tipo são chamados de previsão-correção. Neste grupo de métodos a estimativa do erro é obtida como um subproduto do cálculo tendo, entretanto, alguma dificuldade para iniciar a solução pois necessitam de mais informações além daquelas disponíveis para iniciar o processo.

Existem diversos métodos disponíveis de integração numérica. Serão descritos alguns dos tipos principais:

- a ) Método de Euler;
- b ) Método de Runge-Kutta;
- c ) Método Adams-Bashforth.

## E.1. Método de Euler

É um método elementar de integração direta que considera aceleração linear no trecho e pode ser representado pela seguinte equação:

Seja uma equação diferencial de primeira ordem, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{E.1})$$

e deseja-se obter a solução de  $y(x)$ , num intervalo  $[a, b]$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (\text{E.2})$$

que projeta a solução da função  $f$  do ponto  $x_n$  para  $x_{n+1} = x_n + h$ , onde  $h = (b - a)/n$  e  $x_i = x_0 + ih$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Esta fórmula é assimétrica pois projeta a solução através do intervalo "h", mas usa informação da derivada somente no início do intervalo. Isto significa que o erro obtido em cada intervalo é somente uma ordem menor de  $h$  que o valor correto (por exemplo  $O(h^2)$  onde o símbolo  $O$  representa *da ordem de*).

Entretanto esta formulação pode ser melhorada com a aplicação da derivada num ponto intermediário do intervalo. Este método é chamado de ponto médio (*mid point*) sendo expresso pela formulação:

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (\text{E.3})$$

$$k_2 = h f(x_n + 0.5 h, y_n + 0.5 k_1) \quad (\text{E.4})$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3) \quad (\text{E.5})$$

Como pode ser visto no termo do erro, essa simetrização faz o cancelamento do erro na primeira ordem, fazendo com que o método passe a ser de segunda ordem. De fato este método também é chamado de Runge-Kutta de segunda ordem.

## E.2. Método Runge-Kutta

A solução de uma equação diferencial por expansão direta através da série de Taylor da função objeto geralmente não é prático se as derivadas de ordem superior e as primeiras forem necessárias.

É possível utilizar métodos de primeiro grau que necessitam apenas de derivadas de primeira ordem e que produzem resultados de precisão equivalente às formulas de Taylor.

Estes métodos são conhecidos como métodos Runge-Kutta. O mais conhecido e largamente utilizado é método Runge-Kutta de quarta ordem para a solução de equações diferenciais, cujas expressões são apresentadas a seguir:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (\text{E.6})$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1 h/2) \quad (\text{E.7})$$

$$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2 h/2) \quad (\text{E.8})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \quad (\text{E.9})$$

$$y_{i+1} = y_i + h/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{E.10})$$

### E.3. Método Adams-Bashforth

O método Adams-Bashforth aproxima a solução da equação diferencial pela substituição de  $f(t,y(t))$  por uma interpolação polinomial para obter os valores da derivada,  $f_j$ , e então realizar a integração do polinômio.

Este método pode ser tão efetivo como qualquer um em uso atualmente e tem a vantagem de ser suficientemente simples na sua forma o que permite ser bem compreendido.

A formulação do método Adams-Bashforth de ordem  $k$  em  $x_n$  usa o polinômio  $p_{k,n}(x)$  para interpolar as derivadas da função nos  $k$  pontos anteriores:

$$p_{k,n}(x_{n+1-j}) = f_{n+1-j} \quad (\text{E.11})$$

para  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Estas derivadas e  $y_n$  dos passos anteriores são então armazenadas. Uma aproximação da solução em  $x_{n+1}$  é obtida a partir de:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{k,n}(t) dt \quad (\text{E.12})$$

---

## **ANEXO F**

## F. Gráficos do Impulso

Neste anexo são apresentados os complementos dos resultados gráficos apresentados no corpo do trabalho para os casos de condições iniciais de deslocamento e velocidade unitárias aplicadas ao primeiro veículo do trem.

Os complementos são apresentados da seguinte maneira:

- a ) Gráfico dos Deslocamentos do Sistema para um deslocamento inicial unitário aplicado ao 1º Grau de Liberdade (Gráfico F.1).
- b ) Gráfico das Forças do Sistema para um deslocamento inicial unitário aplicado ao 1º Grau de Liberdade (Gráfico F.2).
- c ) Gráfico das Velocidades do Sistema para uma velocidade inicial unitária aplicado ao 1º Grau de Liberdade (Gráfico F.3).
- d ) Gráfico das Forças do Sistema para uma velocidade inicial unitária aplicado ao 1º Grau de Liberdade (Gráfico F.4).

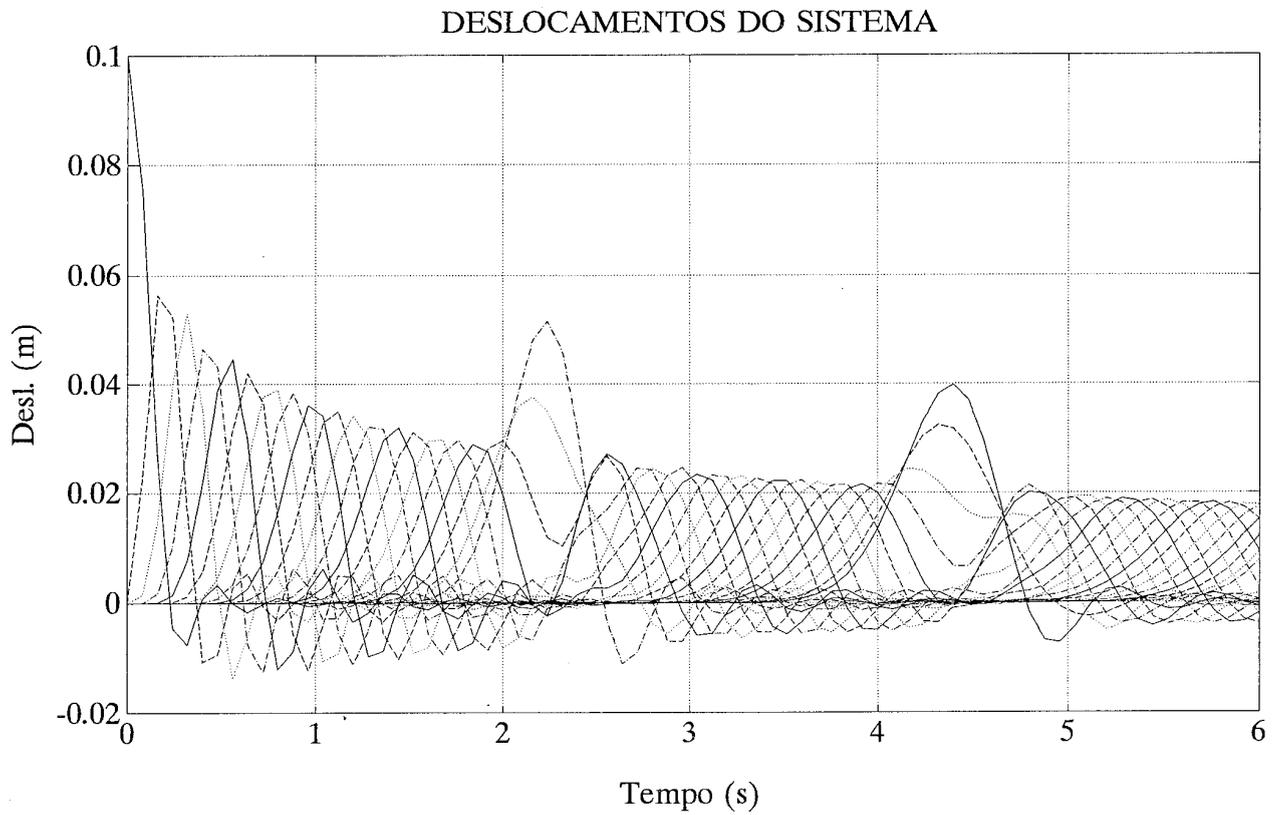


GRÁFICO F.1 - Deslocamentos do Sistema (Deslocamento Unitário Inicial Aplicado ao 1º G.L.)

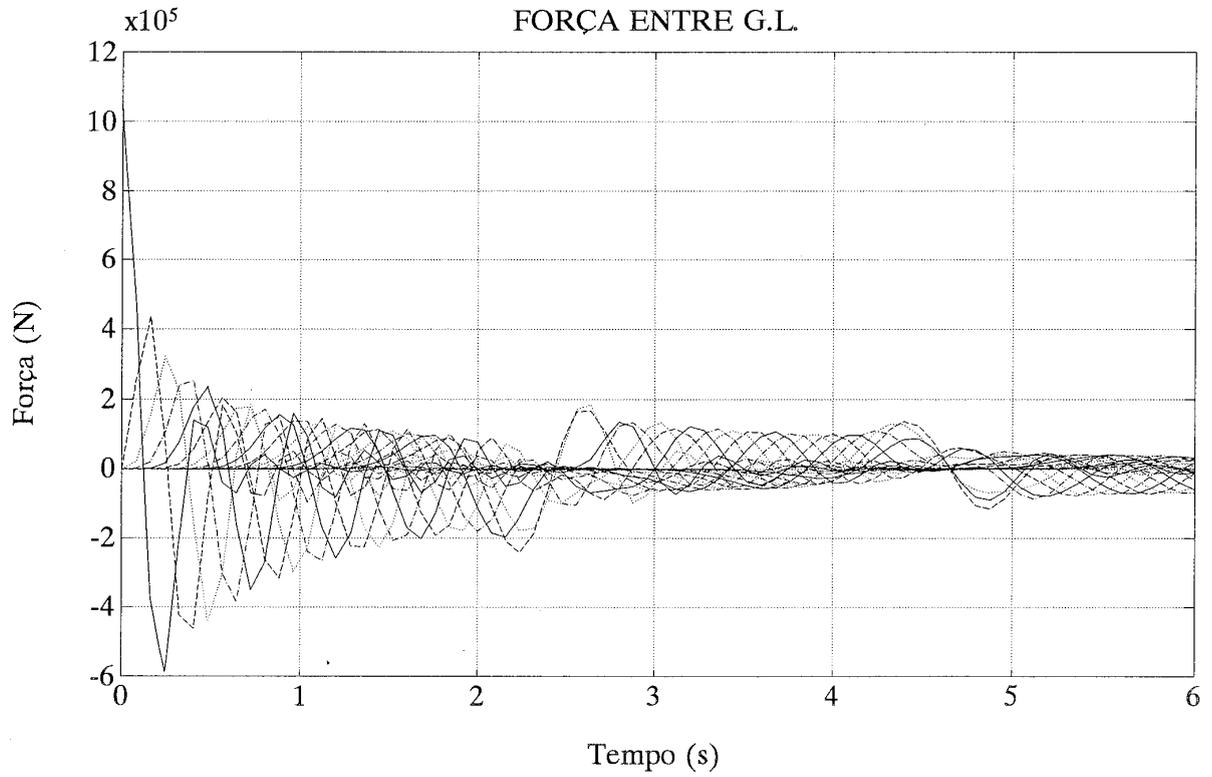


GRÁFICO F.2 - Forças do Sistema (Deslocamento Unitário Inicial Aplicado ao 1º G.L.)

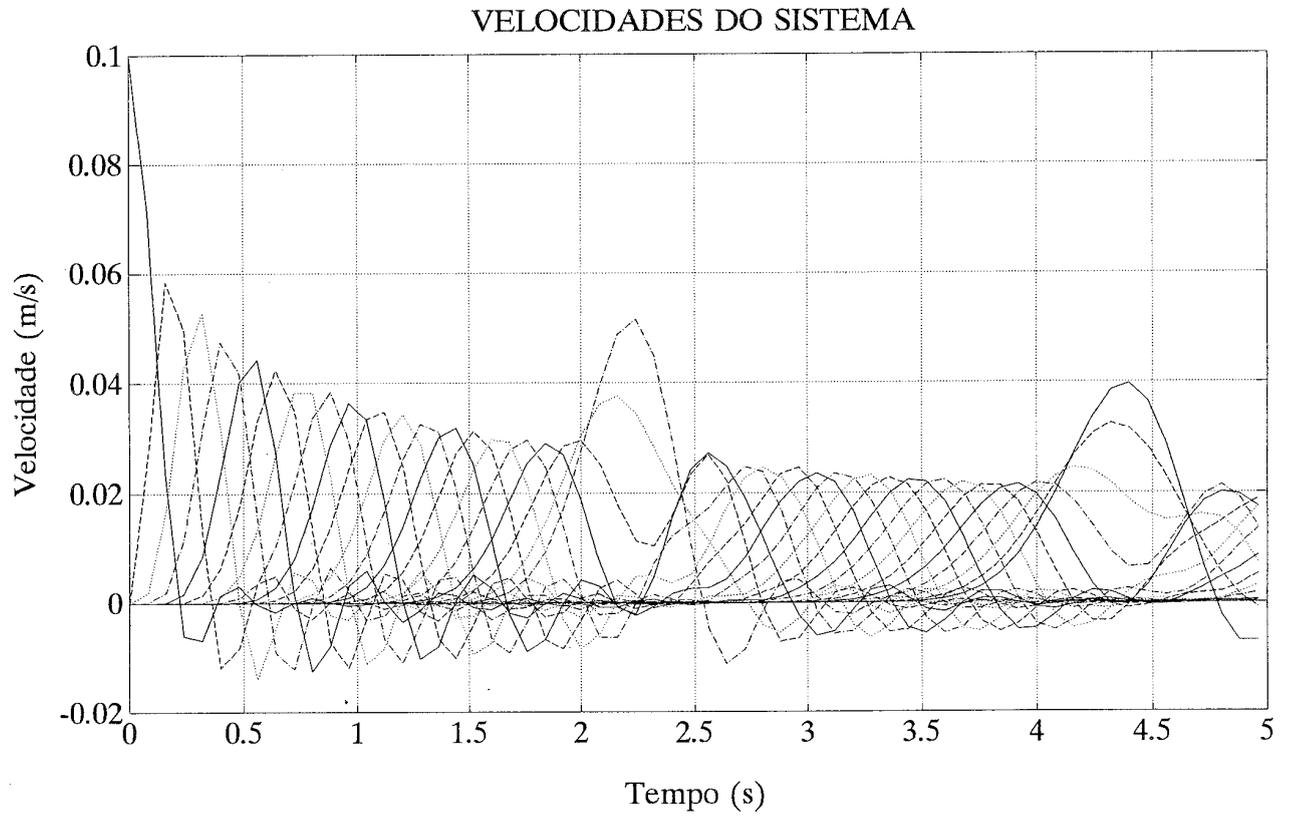


GRÁFICO F.3 - Velocidades do Sistema (Velocidade Inicial Unitária Aplicada 1º G.L.)

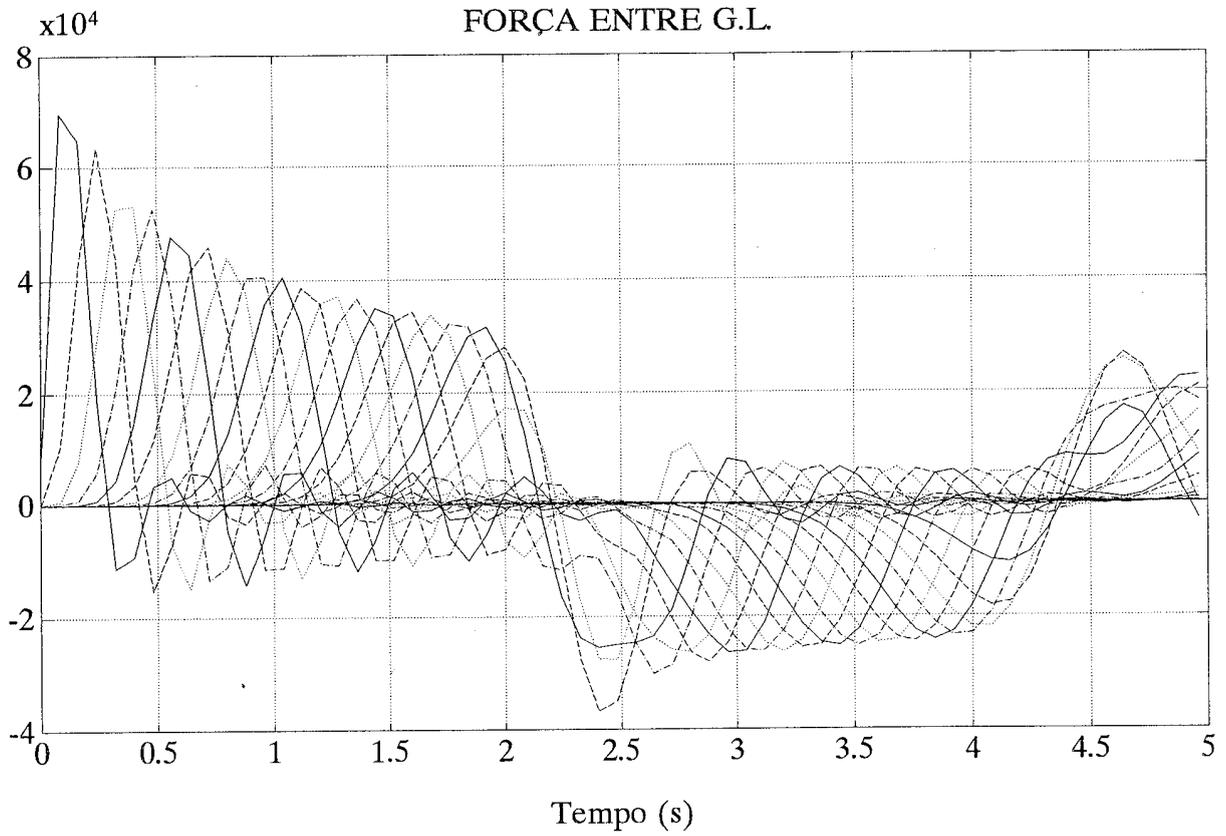


GRÁFICO F.4 - Forças do Sistema (Velocidade Inicial Unitária Aplicada ao 1º G.L.)

---

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

---

## Referências Bibliográficas

- [1] Felício, L. C. Modelagem e Simulação do Comportamento Dinâmico de uma Composição Ferroviária. Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo S/A IPT, Centro de Desenvolvimento Ferroviário; Relatório Técnico nº 20.311, Agosto, 1984.
- [2] Klauser, P. E. et alii Train Operation and Energy Simulator (TOES). Association of American Railroad (AAR). User Manual Report, R-735, USA, Junho 1990.
- [3] Hoeve, G. T. et alii Theoretical Studies of the Development of Longitudinal Forces in Goods Trains Equipped with Convencional Elastic Elements (Force a function of stroke only). Office for Research and Experiments of the International Union of Railways (ORE). Question B-36 Report 9, Bélgica, April 1972.
- [4] Garg, V. K. & Dukkipati, R. V., Dynamics of Railway Vehicle Systems. USA, Academic Press, 1984.
- [5] Dubbeldam, J. W. & Pater, A. D. The Longitudinal Vibrations of Long Trains Composed of Identical Cars, Caused by Braking Forces. In: IUTAM Symposium, The Dynamics of Vehicles on Roads and Railway Tracks. Holanda, Agosto 1975, Proceedings.
- [6] JARTS Report on Special Technical Services for Carajás Railway Wagon Project. Companhia Vale do Rio Doce / Japan Railway Technical Service, Japan, 1983.
- [7] Norman, R. R. The Braking of Long Trains. Dissertação de Mestrado, University of Western Australia, Nedlands, novembro 1980.
- [8] Klauser, P. E. & Mattoon, D. W. The Train Energy and Operations Simulator (TOES). In: Winter Annual Meeting, USA, ASME, Dezembro 1986.
- [9] Gasch, R. & Knothe, K. Strukturodynamik Diskrete Systeme. Springer-Verlag, Vol. 1, 1987.

- [10] Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. Elementary Diferencial Equations and Boundary Value Problems. USA, John Wiley & Sons, 1986.
- [11] Anton, H. Elementary Linear Algebra. USA, John Wiley & Sons, 1987.
- [12] Pederiva, R. Identificação de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo: Alguns Aspectos Práticos. Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, Setembro, 1983.
- [13] Schwarz, R. Identifikation Mechanischer. Fortschrift Berichte der VDI, Reihe 8 (30), 1980.
- [14] Zampieri, D. E. Estudo Analítico de um Veículo sobre Trilhos. Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 1975.
- [15] MORELLA N. A. et alii Draft Gear/Cushioning Unit Optimazation for Train Action. A.A.R. Interim Report - Track Train Dynamics, Phase II Task-5, R-308, Novembro 1978.