

RELATÓRIO PARCIAL
INICIAÇÃO CIENTÍFICA – RUSP



TÍTULO:
MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE UM BICICLO

ORIENTADOR: Roberto Spinola Barbosa

ORIENTADO: Lucas Franceschini

ÍNDICE

Introdução	1
Objetivos	2
Metodologia	3
Resultados Parciais	4
Análises	8
Conclusões	10
Referências Bibliográficas	11
Anexos	12

SUMÁRIO TÉCNICO

No presente trabalho consta uma descrição de dois tipos de veículos: um “modelo bicicleta” (utilizado como uma simplificação de um modelo de um automóvel completo, porém achatado, que contém todos os graus de liberdade de um biciclo, porém não tem a inclinação do mesmo) e um biciclo completo (aquele com todos os graus de liberdade, incluindo a inclinação). Exemplos de tais veículos são as bicicletas e as motocicletas.

A modelagem matemática do primeiro veículo foi feita através da mecânica Newtoniana (Teorema do Movimento do Baricentro e Teorema do Momento Angular), seguida de um tratamento das equações de forma a isolar cada variável necessária utilizando o Matlab. A simulação deste modelo foi também feita no Matlab.

Finalmente, a modelagem matemática do último veículo (biciclo completo) foi feita pelo método de Lagrange. A simulação deste último não foi feita ainda. Após a simulação deste veículo, iremos comprovar o modelo experimentalmente através da utilização de um sensor que possui três medidores de velocidade angular e três medidores de aceleração linear. Como o primeiro modelo é uma simplificação de um automóvel achatado, é impossível observar tal modelo na realidade, já que não há biciclo sem tombamento, sem inclinação.

1. Introdução

Este estudo irá mostrar a geometria, a cinemática e a dinâmica de veículos do tipo biciclo. Inicialmente iremos tratar de um veículo mais simples chamado “modelo de bicicleta”. Ele tem esse nome pois ele é comumente utilizado como uma aproximação de um modelo de automóvel, já que se trata de um automóvel “achatado”, sem o ângulo de tombamento característico de, por exemplo bicicletas e motos.

Após esse primeiro estudo, iremos tratar do caso mais geral, ou seja, o biciclo com o ângulo de tombamento (também chamado de rolagem, na literatura automobilística).

Apesar de se achar que a análise desse tipo de veículo é simples por ter menos rodas que um automóvel por exemplo, a sua geometria complexa, caracterizada exatamente por esse ângulo de tombamento, faz com que seja difícil determinar o “caminho” correto para a análise.

Por fim, o modelo completo resultou num conjunto de equações diferenciais com mais uma equação algébrica. Esta última equação algébrica é a equação que mantém as duas rodas no chão, ou seja, é a condição em que o veículo é analisado e “amarra” as possibilidades dos ângulos de tombamento e de esterçamento do guidão.

2. Objetivo

O objetivo deste projeto é tentar descrever a dinâmica de um biciclo da melhor forma possível, através de uma cadeia multicorpos, ou seja, uma sucessão de referenciais, cada um solidário a um corpo e, ao final, “amarrar” esses referenciais com uma equação algébrica (as duas rodas no chão). Isso produz uma cadeia fechada, semelhante àquela formada pelo mecanismo das quatro barras.

É importante realizar a dinâmica da melhor forma possível pois, após a obtenção das equações e a construção de um programa para simulá-las que seja funcional, iremos verificar experimentalmente (com um conjunto de acelerômetros acoplados a um biciclo) se o modelo teórico é compatível com os dados experimentais. Isso é de extrema importância, dado que não há muita literatura relacionada à dinâmica de biciclos e, portanto é interessante verificar se esta está de acordo ou não.

3. Metodologia

Antes de mais nada, o que foi feito foi uma pesquisa na literatura sobre modelos de bicíclós mais utilizados. Foram encontrados modelos como o “modelo de bicicleta” para carros, modelos como o equacionado por Hans B. Pacejka no seu livro Tyre and Vehicle Dynamics. Porém este último modelo contém muito dos termos linearizados e alguns fenômenos (que começam a ser relevantes para velocidades maiores, como a composição dos ângulos de tombamento e de esterçamento do guidão) deixados de lado.

Portanto, foram feitas as deduções das equações desses dois modelos. No mais simples deles (o modelo bicicleta), foi utilizado o formalismo Newtoniano para a dedução das equações (teorema do movimento do baricentro e teorema do momento angular) e no modelo completo, foi utilizado o formalismo Lagrangeano, pois se tratar de um formalismo mais fácil para sistemas mais complexos e/ou com múltiplos corpos.

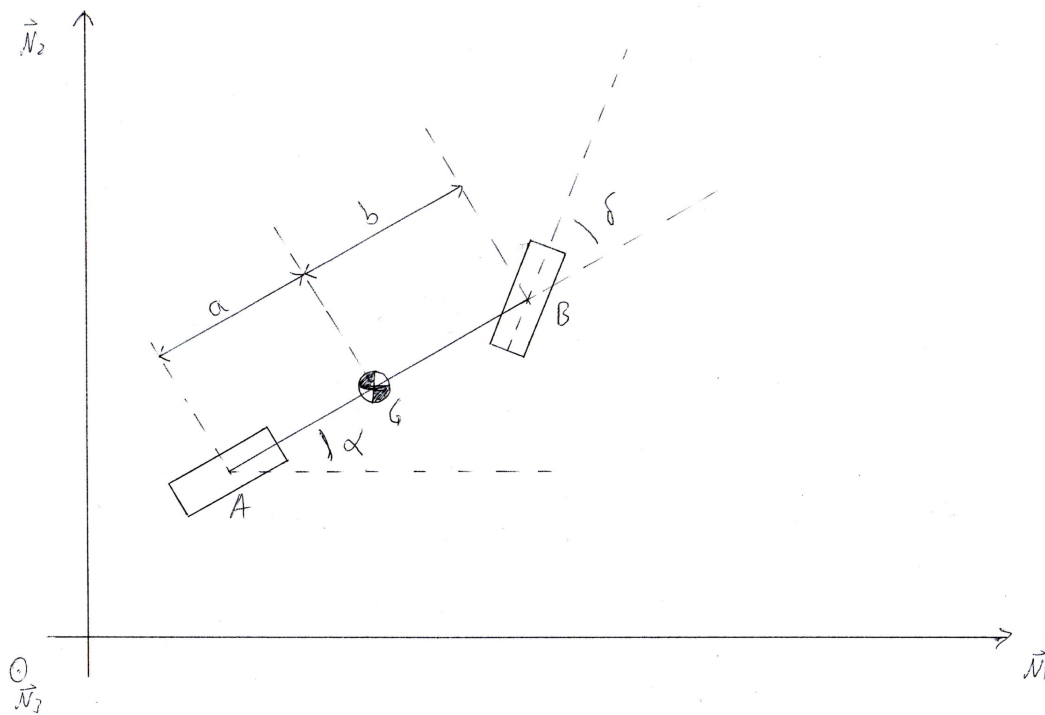
Após a dedução desses dois modelos, haverá a simulação numérica destes. Como o primeiro caso é mais difícil de se comprovar pois não existe tal veículo na realidade, a comprovação experimental não será feita, porém haverá um teste experimental do último modelo, verificando assim se ele é confiável ou não. Esta verificação será feita com um conjunto de acelerômetros e medidores de velocidades angulares, seguidos de posterior integração ou derivação numérica e métodos de eliminação de ruídos das medições.

É importante ressaltar que após a simulação numérica foi utilizado o software Matlab para isolar as variáveis do sistema de equações diferenciais para um melhor desempenho computacional. Além disso, todas as simulações foram feitas utilizando este mesmo software, em linhas de comando.

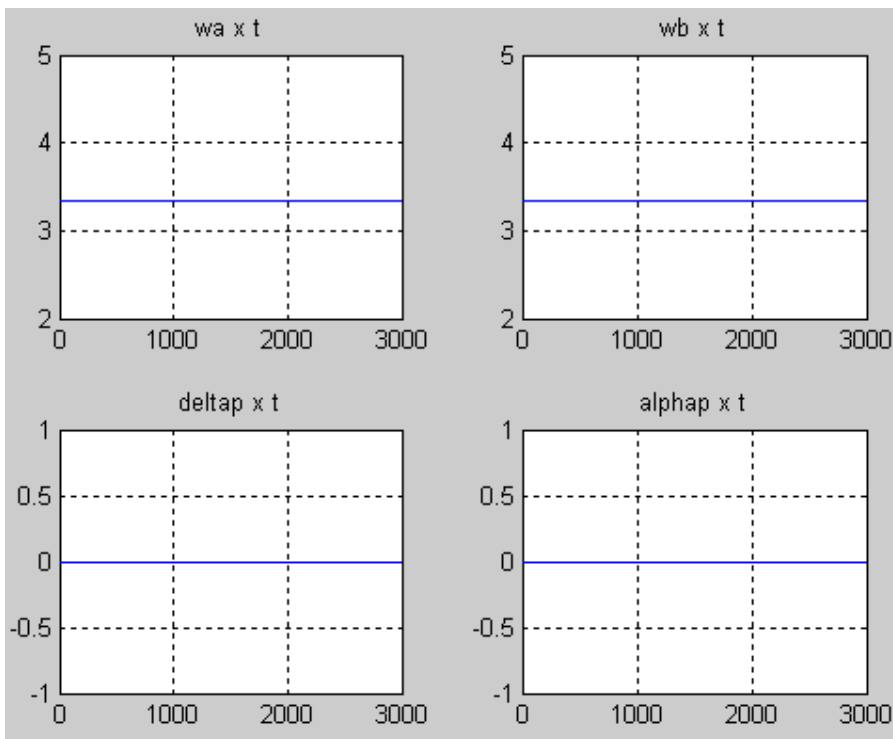
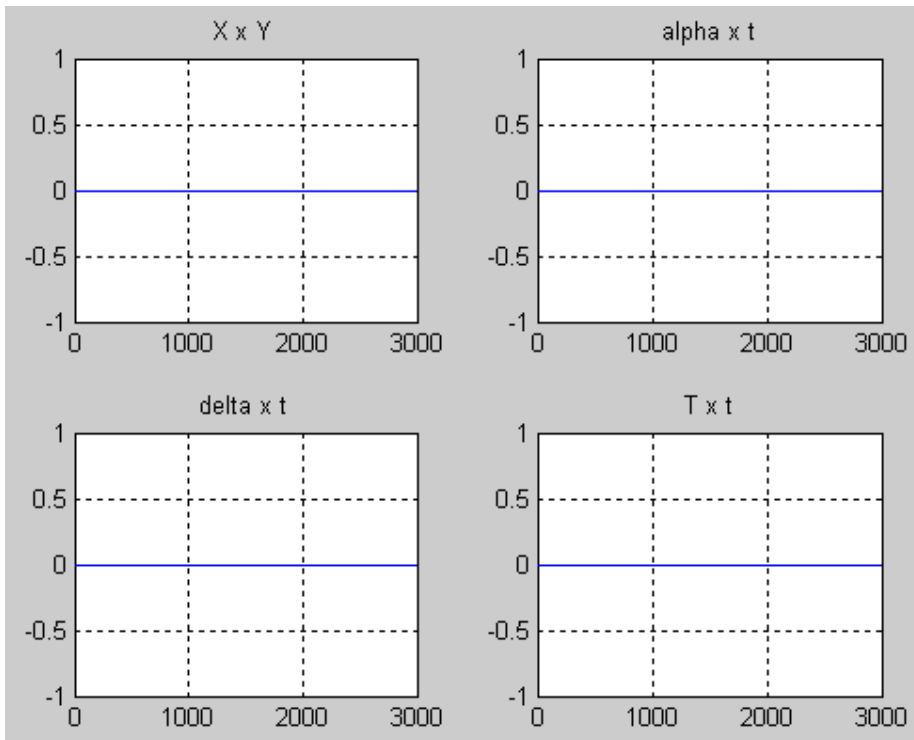
4. Resultados Parciais

As equações de movimento foram obtidas para os dois casos, porém somente foi simulado o primeiro. Algumas situações para as simulações foram propostas para a verificação do modelo. Tais situações geraram alguns gráficos, como segue (Cada caso foi simulado até 3000 segundos, pois só podemos observar algumas respostas dinâmicas tendo passado este tempo).

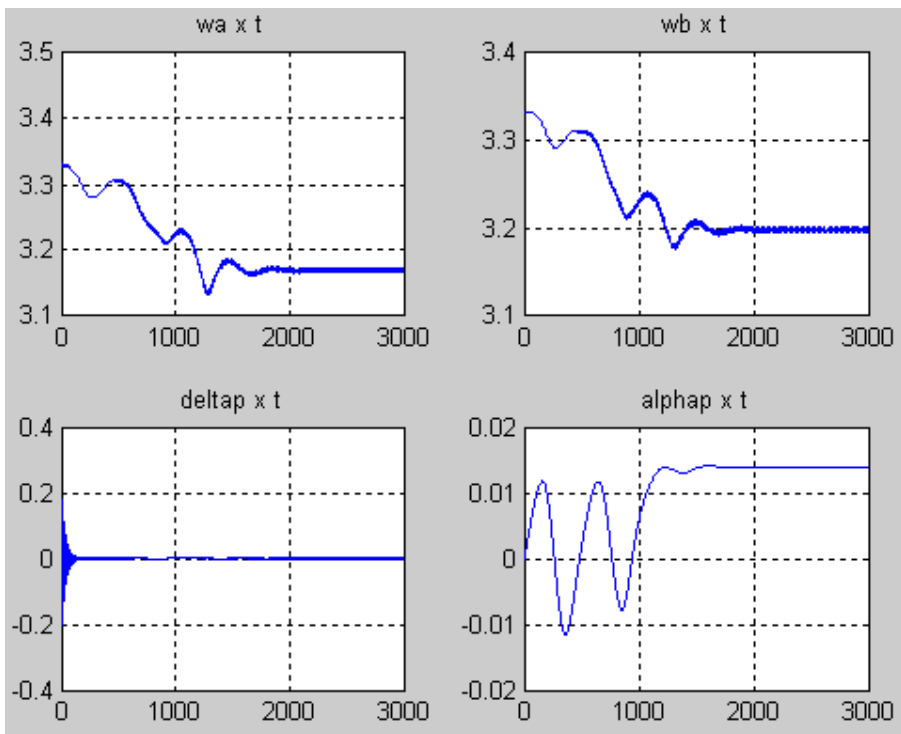
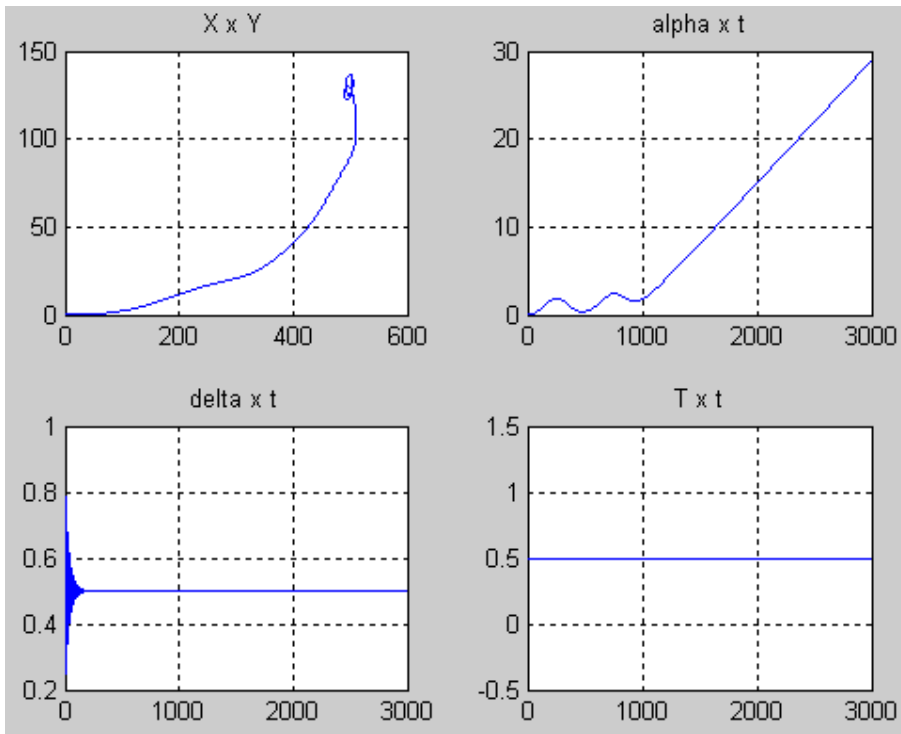
Para o leitor poder identificar as grandezas de cada gráfico com o que ela significa, apresentamos primeiramente uma figura:



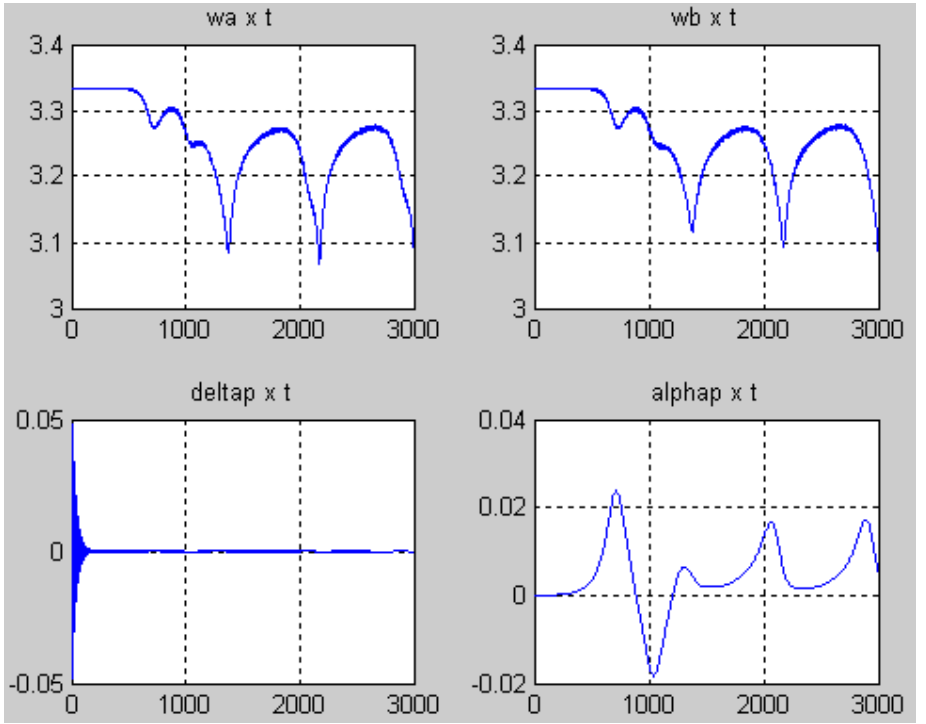
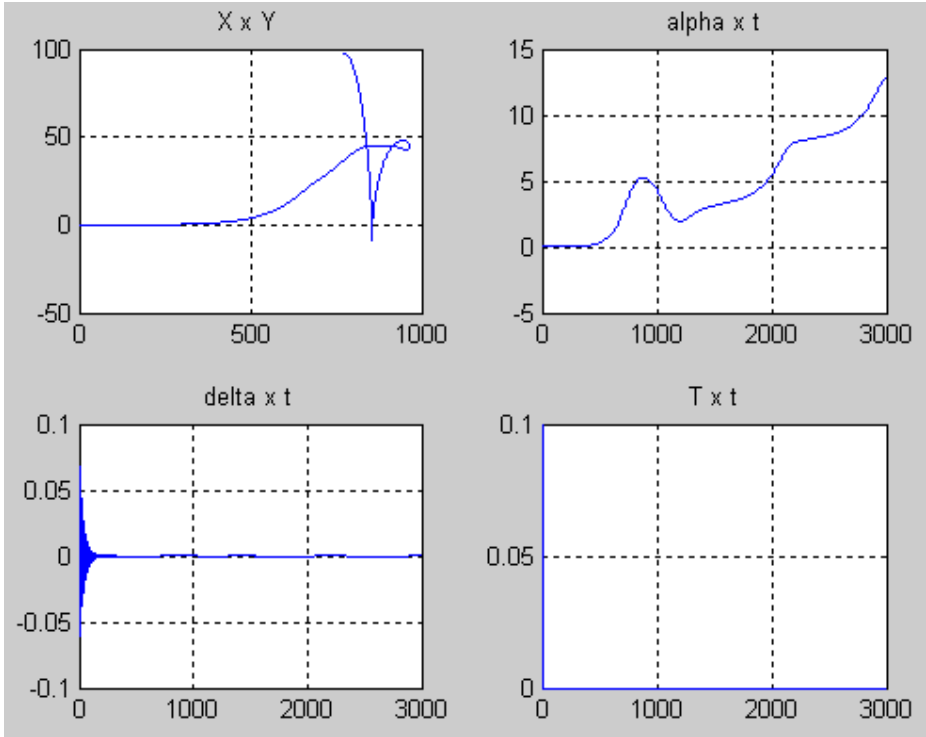
a) Nenhum esforço por parte do motorista:



b) Ângulo de esterçamento do guidão não nulo ($\pi/8$) e torque do motorista constante, no mesmo sentido do ângulo:



c) Torque dado pelo motorista durante 1 segundo:

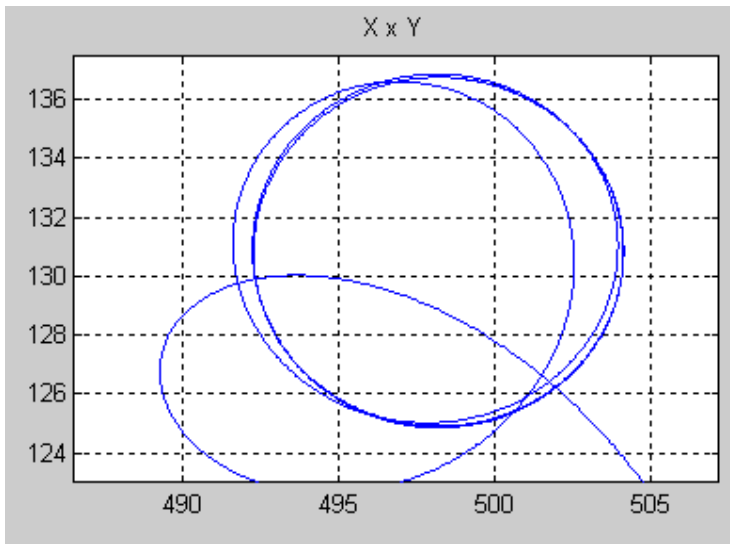


5. Análises

Para a análise, iremos tratar de cada caso mostrado anteriormente:

a) Neste caso, Como os esforços dados pelo piloto são nulos, então o veículo deve permanecer no mesmo estado que estava anteriormente, o que foi observado.

b) Aqui, além do ângulo inicial do guidão ser diferente de zero, foi aplicado um torque no sentido de aumentar este ângulo. Como existe o momento restituidor, que faz com que a roda dianteira tenda a ficar com ângulo de esterçamento nulo, este momento se equilibra com o torque dado pelo motorista e, a grandes intervalos de tempo, faz com que este ângulo de esterçamento permaneça diferente de zero e constante. É nesta condição que o veículo começa a descrever uma curva circular. Ampliando o gráfico X x Y nesta região, temos:



É claro que o ângulo de esterçamento nunca se estabiliza, pois ele decai exponencialmente, o que faz com que suas pequenas alterações fazem com que o raio da curva não seja exatamente constante, como podemos perceber na figura acima.

c) Neste caso, podemos perceber que um pequeno torque durante um intervalo de tempo de 1 segundo, logo no início da simulação pode desestabilizar o veículo, a pesar do ângulo de esterçamento do guidão estar estabilizado. Isso acontece pois um torque na roda dianteira gera uma reação na estrutura, o que

faz com que ela tome uma atitude não nula logo no início, fazendo com que ela rode. Esta rotação “descontrolada” somente poderia ser eliminada por um torque dado pelo piloto.

6. Conclusões

Podemos concluir que o modelo do “carro achatado” foi bem sucedido, pois seus resultados teóricos são compatíveis com a realidade e com a nossa intuição. Falta ainda simular o segundo caso, que é o biciclo completo, que já foi equacionado, devendo ser simulado e comparado experimentalmente com o real.

7. Referências Bibliográficas

- Pacejka, H. B. *Tire and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- Corteline, Carlos Henrique, *Estudo de sistemas de direção para veículos*, São Paulo : EPUSP, 2005, orientador: Professor Doutor Roberto Spínola Barbosa.
- França, L. N. F. Matsumura, A. Z. *Mecânica Geral*. Edgard Blücher, 2001, 235 p.
- Beer, F. P. Johnston, E. R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, vols I e II. 5ª Edição Revisada, Makron Books, 1991, 982 p.

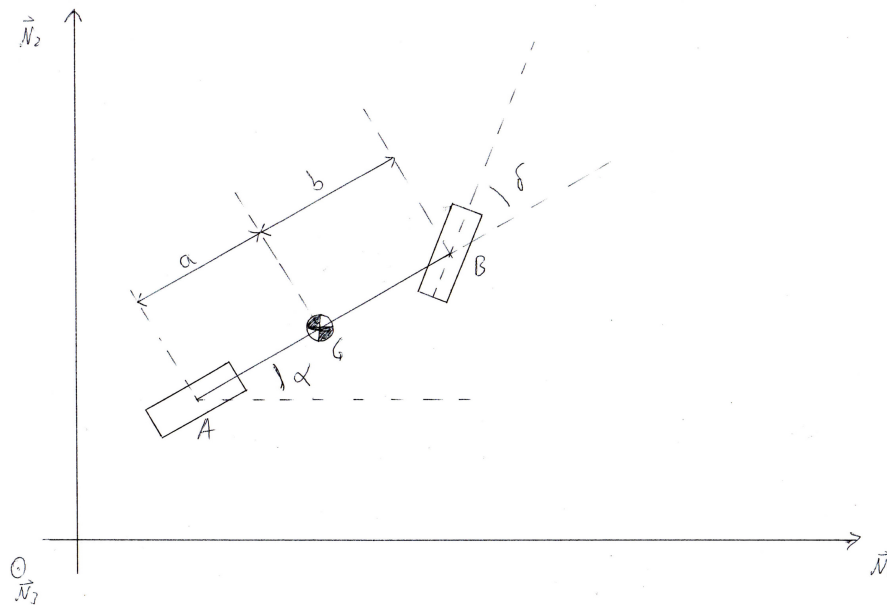
8. Anexos

Neste anexo, serão encontradas as equações pertinentes ao primeiro caso, bem como suas deduções. A dedução das equações será dividida em duas partes: cinemática e dinâmica. O sistema será dividido em três corpos e serão utilizados os teoremas de Newton.

CINEMÁTICA

Este modelo, por não ter inclinação, pode ser tratado como um problema plano. O plano considerado é o plano do chão. Portanto, garantimos a existência de um vetor rotação e sua derivada Temporal que são ortogonais ao plano do chão:

$$\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{N}_3, \quad \dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega} \cdot \vec{N}_3$$



É importante criar um referencial auxiliar que seja solidário ao veículo. Este referencial tem os versores $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ aplicados ao baricentro da estrutura (G). O versor \vec{g}_1 realiza um ângulo α com o versor \vec{N}_1 . Esta é a chamada atitude do veículo.

O baricentro da estrutura pode ter uma velocidade, que é arbitrária e descrita totalmente como tendo uma componente na direção \vec{N}_1 e outra na direção \vec{N}_2 .

Porém, é mais conveniente escrevermos a velocidade do baricentro na base do referencial do carro. Portanto a velocidade do baricentro fica:

$$\vec{V}_G = V_X \vec{g}_1 + V_Y \cdot \vec{g}_2$$

Derivando esta expressão no tempo, temos:

$$\vec{a}_G = \dot{V}_X \cdot \vec{g}_1 + \dot{V}_Y \cdot \vec{g}_2 + V_X \cdot \dot{\vec{g}}_1 + V_Y \cdot \dot{\vec{g}}_2$$

$$\dot{\vec{g}}_1 = \Omega \cdot \vec{g}_3 \wedge \vec{g}_1 = \Omega \cdot \vec{g}_2, \quad \dot{\vec{g}}_2 = \Omega \cdot \vec{g}_3 \wedge \vec{g}_2 = -\Omega \cdot \vec{g}_1, \quad \dot{\vec{g}}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{a}_G = (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y) \cdot \vec{g}_1 + (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X) \cdot \vec{g}_2$$

Logo, as velocidades e acelerações dos pontos A e B são:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (A-G) = V_X \cdot \vec{g}_1 + (V_Y - a \cdot \Omega) \cdot \vec{g}_2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A-G) + \vec{\Omega} \wedge \{\vec{\Omega} \wedge (A-G)\} = (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y + a \cdot \Omega^2) \vec{g}_1 + (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X - a \cdot \dot{\Omega}) \vec{g}_2$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge (B-G) = V_X \cdot \vec{g}_1 + (V_Y + b \cdot \Omega) \cdot \vec{g}_2$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (B-G) + \vec{\Omega} \wedge \{\vec{\Omega} \wedge (B-G)\} = (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y - b \cdot \Omega^2) \vec{g}_1 + (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X + b \cdot \dot{\Omega}) \vec{g}_2$$

DINÂMICA

Nesta seção, iremos aplicar os teoremas da mecânica vetorial aos três corpos considerados. Será considerado que cada roda tem raio R e massa m e que a estrutura tem massa M.

Roda A:

TMB:

$$N_A + A_3 = m \cdot g$$

$$A_1 + A'_1 = m(\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y + a \cdot \Omega^2)$$

$$A_2 + A'_2 = m(\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X - a \cdot \dot{\Omega})$$

TMA:

Como a roda A é simétrica por qualquer eixo passando pelo seu centro, ela não possui produtos de inércia. Portanto, não há necessidade de adotarmos um referencial solidário à roda para escrevermos o TMA. Para podermos escrever o TMA, necessitamos do termo:

$$\frac{d}{dt}\{(\vec{g}_1 \quad \vec{g}_2 \quad \vec{g}_3) \cdot [J_A] \cdot [\omega]\}$$

Para o caso considerado, a matriz de inércia da roda tem todos os produtos de inércia nulos:

$$[J_A] = \begin{bmatrix} J_{g_1g_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{g_2g_2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{g_3g_3} \end{bmatrix}$$

Como a “dificuldade” de girar uma roda por um eixo passando pelo centro e contido no plano da roda é a mesma independente do eixo, então: $J_{g_1g_1} = J_{g_3g_3} = I$, Além disso, $J_{g_2g_2} = J$. Portanto a matriz de inércia fica:

$$[J_A] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\frac{d}{dt}\{(\vec{g}_1 \quad \vec{g}_2 \quad \vec{g}_3) \cdot \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_A \\ \Omega \end{bmatrix}\} = \frac{d}{dt}(J \cdot \omega_A \cdot \vec{g}_2 + I \cdot \Omega \cdot \vec{g}_3) = J \cdot \dot{\omega}_A \cdot \vec{g}_2 + J \cdot \omega_A \cdot \dot{\vec{g}}_2 + I \cdot \dot{\Omega} \cdot \vec{g}_3 + I \cdot \Omega \cdot \dot{\vec{g}}_3$$

Como os versores estão sendo arrastados apenas com $\vec{\Omega}$, as derivadas dos versores ficam:

$$\dot{\vec{g}}_2 = \vec{\Omega} \cdot \vec{g}_3 \wedge \vec{g}_2 = -\vec{\Omega} \cdot \vec{g}_1 \quad \dot{\vec{g}}_3 = \vec{\Omega} \cdot \vec{g}_3 \wedge \vec{g}_3 = \vec{0}$$

Portanto:

$$\sum \vec{M}_A^{EXT} = m \cdot \underbrace{(A - A)}_0 \wedge \vec{a}_A - J \cdot \omega_A \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{g}_1 + J \cdot \dot{\omega}_A \cdot \vec{g}_2 + I \cdot \dot{\Omega} \cdot \vec{g}_3$$

Resta ainda calcular a soma dos momentos externos em relação ao pólo G:

$$\sum \vec{M}_A^{EXT} = -A'_1 \cdot R \cdot \vec{g}_2 + M_{A'} \cdot \vec{g}_3 + M_{A1} \cdot \vec{g}_1 + M_{A2} \cdot \vec{g}_2 + M_{A3} \cdot \vec{g}_3 + A'_2 \cdot R \cdot \vec{g}_1$$

Tomando cada equação nas três direções, passando todos os vetores para o referencial solidário à estrutura do veículo, temos:

$$I \cdot \dot{\Omega} = M_{A'} + M_{A3}$$

$$-J \cdot \Omega \cdot \omega_A = M_{A1} + A'_2 \cdot R$$

$$J \cdot \dot{\omega}_A = -A'_1 \cdot R + M_{A2}$$

Roda B:

É importante notar que a distribuição de forças e momentos da roda B é muito similar à da roda A. Portanto, podemos utilizar as mesmas equações, segundo o diagrama de corpo livre da roda:

Devemos tomar cuidado, porém, pois o plano da roda B realiza um ângulo com o plano do resto do veículo, portanto é necessário introduzir uma um referencial, com uma base acoplada ao ponto B $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$, que obedece à matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vec{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \text{sen} \delta & 0 \\ -\text{sen} \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{bmatrix}$$

Portanto a aceleração de B escrita nesse novo referencial fica:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = & \vec{d}_1 \cdot \{ \cos \delta \cdot (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y - b \cdot \Omega^2) + \text{sen} \delta \cdot (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X + b \cdot \dot{\Omega}) \} + \\ & + \vec{d}_2 \cdot \{ -\text{sen} \delta \cdot (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y - b \cdot \Omega^2) + \cos \delta \cdot (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X + b \cdot \dot{\Omega}) \} \end{aligned}$$

As equações provenientes do TMB e do TMA são totalmente análogas às da roda A, a não ser pela aceleração do baricentro que precisou ser corrigida pela matriz de rotação acima e pelo vetor rotação de arrastamento, que ao invés de ser $\vec{\Omega}$, é $\vec{\Omega} + \dot{\delta}$. Portanto as equações ficam:

$$N_{B'} + B_3 = m \cdot g$$

$$B_1 + B'_1 = m \{ \cos \delta \cdot (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y - b \cdot \Omega^2) + \text{sen} \delta \cdot (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X + b \cdot \dot{\Omega}) \}$$

$$B_2 + B'_2 = m \{ -\text{sen} \delta \cdot (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y - b \cdot \Omega^2) + \cos \delta \cdot (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X + b \cdot \dot{\Omega}) \}$$

$$I \cdot (\dot{\Omega} + \dot{\delta}) = M_{B'} + M_{B3}$$

$$-J \cdot (\Omega + \dot{\delta}) \cdot \omega_B = M_{B1} + B'_2 \cdot R$$

$$J \cdot \dot{\omega}_B = -B'_1 \cdot R + M_{B2}$$

Estrutura:

TMB:

Aplicando o TMB à estrutura, lembrando sempre de rotacionar as forças e momentos aplicados em B através da matriz de rotação mostrada acima e separando a equação vetorial nas direções, temos:

$$A_3 + B_3 = -M \cdot g$$

$$-A_1 - B_1 \cdot \cos \delta + B_2 \cdot \sin \delta = M \cdot (\dot{V}_X - \Omega \cdot V_Y)$$

$$-A_2 - B_1 \cdot \sin \delta - B_2 \cdot \cos \delta = M \cdot (\dot{V}_Y + \Omega \cdot V_X)$$

TMA:

Para podermos aplicar o TMA, devemos calcular o termo:

$$\frac{d}{dt} \{ (\bar{g}_1 \quad \bar{g}_2 \quad \bar{g}_3) \cdot [J_G] \cdot [\omega] \}$$

Como a matriz de inércia assume a forma:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} J_{g1g1}^G & 0 & 0 \\ 0 & J_{g2g2}^G & 0 \\ 0 & 0 & J_{g3g3}^G \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \{ (\bar{g}_1 \quad \bar{g}_2 \quad \bar{g}_3) \cdot \begin{bmatrix} J_{g1g1}^G & 0 & 0 \\ 0 & J_{g2g2}^G & 0 \\ 0 & 0 & J_{g3g3}^G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \} = \frac{d}{dt} \{ J_{g3g3}^G \cdot \Omega \cdot \bar{g}_3 \} = J_{g3g3}^G \cdot \dot{\Omega} \cdot \bar{g}_3 + J_{g3g3}^G \cdot \Omega \cdot \dot{\bar{g}}_3$$

Como a derivada do vetor \bar{g}_3 é nula como mostrado acima, temos:

$$\sum \bar{M}_G^{EXT} = m(G - G) \wedge \bar{a}_G + J_{g3g3}^G \cdot \dot{\Omega} \cdot \bar{g}_3$$

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_G^{EXT} = & -A_3 \cdot a \cdot \bar{g}_2 + A_1 \cdot h \cdot \bar{g}_2 + A_2 \cdot a \cdot \bar{g}_3 - A_2 \cdot h \cdot \bar{g}_1 - M_{A1} \cdot \bar{g}_1 - M_{A3} \cdot \bar{g}_3 - M_{A2} \cdot \bar{g}_2 + B_1 \cdot h \cdot \cos \delta \cdot \bar{g}_2 \\ & - B_2 \cdot h \cdot \sin \delta \cdot \bar{g}_2 + B_3 \cdot b \cdot \bar{g}_2 + (B_1 \cdot \sin \delta + B_2 \cdot \cos \delta) \cdot b \cdot \bar{g}_3 - (B_1 \cdot \sin \delta + B_2 \cdot \cos \delta) \cdot b \cdot \bar{g}_1 - M_{B1} \cdot \cos \delta \cdot \bar{g}_1 \\ & + M_{B2} \cdot \sin \delta \cdot \bar{g}_1 - M_{B3} \cdot \bar{g}_3 - (M_{B1} \cdot \sin \delta + M_{B2} \cdot \cos \delta) \cdot \bar{g}_2 + T \cdot \bar{g}_1 \end{aligned}$$

Separando a equação vetorial em 3 escalares, temos:

$$-A_2 \cdot h - M_{A1} - B_1 \cdot h \cdot \sin \delta - B_2 \cdot h \cdot \cos \delta - M_{B1} \cdot \cos \delta + M_{B2} \cdot \sin \delta + T \cdot \vec{g}_1 = 0$$

$$-A_3 \cdot a + A_1 \cdot h - M_{A2} + B_1 \cdot h \cdot \cos \delta - B_2 \cdot h \cdot \sin \delta + B_3 \cdot b - M_{B1} \cdot \sin \delta - M_{B2} \cdot \cos \delta = 0$$

$$A_2 \cdot a - M_{A3} - B_1 \cdot b \cdot \sin \delta - B_2 \cdot b \cdot \cos \delta - M_{B3} = J_{g^3 g^3}^G \cdot \dot{\Omega}$$

Esforços nos Contatos:

Aqui nós usaremos os modelos lineares nas forças de contato:

$$\vec{F}_{AT} = -k \frac{\vec{V}_{P'}}{\|\vec{V}_P\|}$$

Deste modo, nos pontos A' e B', temos:

$$\vec{F}_{AT}^{A'} = A'_1 \cdot \vec{g}_1 + A'_2 \cdot \vec{g}_2 = -k_A \frac{((V_X - \omega_A \cdot R) \cdot \vec{g}_1 + (V_Y - a \cdot \Omega) \cdot \vec{g}_2)}{\sqrt{V_X^2 + (V_Y - a \cdot \Omega)^2}}$$

$$\vec{F}_{AT}^{B'} = B'_1 \cdot \vec{d}_1 + B'_2 \cdot \vec{d}_2 = -k_B \frac{((V_X \cdot \cos \delta + (V_Y + b \cdot \Omega) \cdot \sin \delta - \omega_B \cdot R) \cdot \vec{d}_1 + ((V_Y + b \cdot \Omega) \cdot \cos \delta - V_X \cdot \sin \delta) \cdot \vec{d}_2)}{\sqrt{V_X^2 + (V_Y + b \cdot \Omega)^2}}$$

Além disso, usaremos um momento restitutivo na roda B, pois é ela que sofre o ângulo de esterçamento δ . Logo, os momentos serão dados por:

$$M_{A3} = 0 \quad M_{B3} = -k' \delta - c \dot{\delta}$$

Symbolic Math Toolbox

Tendo as equações acima obtidas, nós devemos isolar cada variável do problema, para que não precisemos realizar operações de inversão de matrizes durante a simulação. Para isso, utilizaremos o recurso de resolução numérica do Matlab. Este recurso é um toolbox chamado Symbolic. Ele resolve o problema $[A]\{x\}=\{b\}$ de maneira literal. Primeiramente, devemos informar ao programa as variáveis do problema, através do comando `syms`. Além disso, devemos passar para o programa cada equação através do comando `solve`. A sintaxe geral é dada pelo exemplo encontrado no manual do Matlab:

`syms x y z;`

`[x, y, z] = solve('z = 4*x', 'x = y', 'z = x^2 + y^2')`

Efetuada este comando, o Matlab automaticamente nos mostra todas as soluções possíveis para o sistema (neste caso, como é um sistema de equações do segundo grau, a resposta será dupla):

x =

0

2

y =

0

2

z =

0

8

Infelizmente este recurso não entende muito bem os tipos de variáveis do problema. Duas variáveis, por exemplo ax e ay são confundidas por este comando, não fornecendo uma resposta satisfatória para o desacoplamento das equações. Por esta razão, o código que foi utilizado para tal fim não será apresentado, até por que ele constou de um sistema linear cujas incógnitas foram x, y, e os coeficientes da matriz A e B foram a, b, c, d.... As equações resultantes foram:

$$\dot{V}_x = \frac{A_1' + B_1' \cos \delta - B_2' \sin \delta + \Omega V_y (2m + M) + \Omega^2 m(b - a)}{2m + M}$$

$$\dot{V}_y = \frac{\left(\frac{A_2' + B_1' \sin \delta + B_2' \cos \delta - \Omega V_x (2m + M)}{m} \left(a^2 + b^2 + \frac{I + J_G}{m} \right) + \frac{-aA_2' + bB_1' \sin \delta + bB_2' \cos \delta + m\Omega V_x (a - b) + M_A' - M_{B3}}{m} (b - a) \right)}{\left(2 + \frac{M}{m} \right) \left(a^2 + b^2 + \frac{I + J_G}{m} \right) - (b - a)^2}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\left(\begin{array}{l} \left(2 + \frac{M}{m}\right) \frac{-aA_2' + bB_1' \sin \delta + bB_2' \cos \delta + m\Omega V_x (a-b) + M_A' - M_{B3}}{m} \\ -(b-a) \frac{A_2' + B_1' \sin \delta + B_2' \cos \delta - \Omega V_x (2m + M)}{m} \end{array} \right)}{\left(2 + \frac{M}{m}\right) \left(a^2 + b^2 + \frac{I + J_G}{m}\right) - (b-a)^2}$$

$$\ddot{\delta} = \frac{M_{B'} + T}{I} - \dot{\Omega}$$

$$\dot{\omega}_A = \frac{-A_1' R + M_{A2}}{J}$$

$$\dot{\omega}_B = \frac{-B_1' R + M_{B2}}{J}$$

Onde:

M_{A2} : Tração na roda traseira;

M_{B2} : Tração na roda dianteira;

T : Momento do piloto no guidão;

Além disso, as forças de contato são:

$$A_1' = -k_{AX} \frac{V_x - \omega_A R}{\sqrt{V_x^2 + (V_y - a\Omega)^2}}$$

$$A_2' = -k_{AY} \frac{V_y - a\Omega}{\sqrt{V_x^2 + (V_y - a\Omega)^2}}$$

$$B_1' = -k_{BX} \frac{V_x \cos(\delta) + (V_y + b\Omega) \sin(\delta) - \omega_B R}{\sqrt{V_x^2 + (V_y + b\Omega)^2}}$$

$$B_2' = -k_{BY} \frac{-V_x \sin(\delta) + (V_y + b\Omega) \cos(\delta)}{\sqrt{V_x^2 + (V_y + b\Omega)^2}}$$

$$M_{B'} = -k\delta - c\dot{\delta}$$