

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Redução de vibração de um painel solar flexível durante  
manobras de atitude de um satélite**

Luis Felipe Meyer de Orey Gaivão

Brasil

2019

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Redução de vibração de um painel solar flexível durante  
manobras de atitude de um satélite**

Relatório parcial de trabalho de conclusão de  
curso apresentado para a disciplina PME3600

Luis Felipe Meyer de Orey Gaivão

Orientador: Prof. Roberto Spinola Barbosa

Área de concentração: Engenharia Mecânica

Brasil

2019

# RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem para os sistemas de controle de satélites incorporando a flexibilidade de componentes e suas vibrações durante manobras. As estruturas que não são consideradas como corpo rígido são modeladas por elementos finitos a fim de se determinar seus primeiros modos naturais. Esses resultados são usados para aproximar o sistema completo pelo Método dos Modos Assumidos e derivar as equações de movimento através da mecânica lagrangiana.

**Palavras-chaves:** Controle de atitude. Redução de vibração. Satélites flexíveis.

# ABSTRACT

This work presents an approach for satellite control systems incorporating the flexibility of components and their vibrations during maneuvers. The structures that are not considered rigid bodies are modelled by finite elements as to determine their first natural modes. These results are applied to approximate the complete system in the Assumed Modes Method and derive the equations of motion through the Lagrangian mechanics.

**Key-words:** Attitude control. Vibration reduction. Flexible satellites.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Deslocamento $s_x$ de um ponto dentro de um elemento tridimensional (a) em coordenadas físicas globais (b) em coordenadas locais isoparamétricas	14
Figura 2 – Satélite com plataforma rígida (em branco) conectada a um componente flexível na condição deformada (linhas sólidas) e não deformada (linhas tracejadas)	22
Figura 3 – Transdutor piezoelétrico (branco) instalado na superfície de parte da estrutura (cinza) e conectado ao circuito elétrico	43
Figura 4 – Modelo físico do satélite para simulações	55
Figura 5 – Tipos de elementos estruturais do ANSYS, adaptado de (ANSYS, 2019a)	70
Figura 6 – Coordenadas locais isoparamétricas do elemento <i>BEAM189</i> , adaptado de (ANSYS, 2019b)	71
Figura 7 – Coordenadas locais isoparamétricas dos elementos <i>SURF154</i> e <i>SHELL281</i> , adaptado de (ANSYS, 2019b)	71
Figura 8 – Coordenadas locais isoparamétricas do elemento <i>SOLID186</i> , adaptado de (ANSYS, 2019b)	72

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais técnicas e estudos de redução de vibração . . . . .	11
Tabela 2 – Lista de modelos de flexibilidade e intervalos de validade . . . . .	40
Tabela 3 – Propriedades mecânicas do núcleo favo-de-mel . . . . .	55
Tabela 4 – Camadas do painel solar . . . . .	56
Tabela 5 – Propriedades mecânicas do núcleo favo-de-mel . . . . .	56
Tabela 6 – Propriedades mecânicas do tecido de fibra de carbono . . . . .	57
Tabela 7 – Propriedades mecânicas e elétricas dos transdutores piezoelétricos (JAFFE; COOK JR.; JAFFE, 1971) . . . . .	57
Tabela 8 – Posição dos transdutores piezoelétricos na face inferior do painel solar .	57
Tabela 9 – Modos de vibração do painel sanduíche . . . . .	58

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACS	<i>Attitude Control System</i>
CLC	<i>Classic Linear Cartesian</i>
CSVS	<i>Component Synthesis Vibration Suppression</i>
GDL	Grau de Liberdade
LQG	<i>Linear-quadratic-Gaussian</i>
LQR	<i>Linear-quadratic Regulator</i>
LSS	<i>Large Space Structures</i>
MOR	Modelo de Ordem Reduzida
MRP	<i>Modified Rodrigues Parameters</i>
PID	controlador Proporcional Integral Derivativo
PPF	<i>Positive Position Feedback</i>
PRFC	Polímero Reforçado com Fibra de Carbono
PWPF	<i>Pulse-Width Pulse-Frequency</i>
SCA	Sistema de Controle de Atitude
SRF	<i>Strain Rate Feedback</i>
USP	Universidade de São Paulo

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
1.1	Resumo do projeto	9
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO COMPONENTE FLEXÍVEL</b>	<b>12</b>
3.1	Método dos Elementos Finitos	12
3.1.1	Modelos tridimensionais	13
3.1.2	Modelos reduzidos	14
3.1.2.1	Placas de Mindlin–Reissner	15
3.1.2.2	Placas de Kirchhoff–Love	16
3.2	Representação Modal	16
3.3	Deformações	18
3.3.1	Modelos tridimensional	18
3.3.2	Modelos reduzidos	20
3.3.2.1	Placas de Mindlin–Reissner	20
3.3.2.2	Placas de Kirchhoff–Love	20
3.4	Comentários sobre qualidade da malha	21
<b>4</b>	<b>EQUACIONAMENTO DA DINÂMICA</b>	<b>22</b>
4.1	Modelo físico e cinemático do satélite	22
4.2	Dinâmica para um componente flexível	24
4.2.1	Equacionamento adotando uma representação mínima	27
4.2.2	Equacionamento adotando quatérnios	29
4.2.3	Mudança de nomenclatura para vetores extraídos do MEF	30
4.2.4	Representação em Espaço de Estados Não-Linear	33
4.3	Dinâmica para múltiplos componentes flexíveis	36
4.4	Dinâmica com variável de estado imposta	38
4.4.1	Dinâmica com posição imposta	38
4.4.2	Dinâmica com velocidade angular imposta	38
4.4.3	Dinâmica com posição e velocidade angular impostas	39
4.5	Limitações do modelo	40
<b>5</b>	<b>MODELAGEM DO TRANSDUTOR PIEZOELÉTRICO</b>	<b>41</b>
5.1	Equações do efeito piezoelétrico	41
5.2	Equações de movimento do sistema	46

5.3	Estratégias para redução de vibração . . . . .	47
5.3.1	Múltiplos circuitos resistivos . . . . .	48
5.3.2	Múltiplos circuitos indutivos-resistivos . . . . .	49
5.3.3	Circuito resistivo único . . . . .	51
5.3.4	Circuito indutivo-resistivo único . . . . .	52
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>55</b>
6.1	Modelo do satélite . . . . .	55
6.2	Simulação da estrutura . . . . .	56
6.3	Simulação da dinâmica livre do satélite . . . . .	58
6.4	Simulação das estratégias de redução de vibração . . . . .	58
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO . . . . .</b>	<b>64</b>
A.1	Posição como coordenada generalizada . . . . .	64
A.2	Deslocamento modal como coordenada generalizada . . . . .	65
A.3	Atitude (representação mínima) como coordenada generalizada . . . . .	65
A.4	Atitude (quatérnios) como coordenada generalizada . . . . .	67
	<b>APÊNDICE B DETALHES DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>70</b>
B.1	Malha e refinamento . . . . .	70
B.2	Funções isoparamétricas . . . . .	70
B.2.1	<i>BEAM189</i> . . . . .	71
B.2.2	<i>SURF154</i> e <i>SHELL281</i> . . . . .	71
B.2.3	<i>SOLID186</i> . . . . .	71
B.3	Exportação dos dados do modelo . . . . .	72
	<b>APÊNDICE C REPRESENTAÇÕES MÍNIMAS DE ATITUDE . . . . .</b>	<b>74</b>
C.1	Vetor de Gibbs . . . . .	74
C.2	MRP . . . . .	74

# 1 INTRODUÇÃO

No ramo da Engenharia Espacial, o Sistemas de Controle de Atitude (SCA) da maioria dos satélites se baseia nas equações dinâmicas de corpo rígido, que se move sob influência de torques atuadores e perturbações externas (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014). Essa abordagem simplifica o projeto e oferece os resultados desejados em muitos casos. As aproximações envolvidas, porém, se tornam um problema relevante quando grandes componentes móveis fazem parte do sistema, como painéis solares que se abrem em órbita.

Do ponto de vista estrutural, as metas no projeto desses componentes são: aumentar as frequências naturais até que estejam uma ordem de magnitude acima das outras frequências do sistema (como os movimentos de libração e nutação para satélites de controle passivo ou a resposta de controle para satélites estabilizados em 3-eixos); reduzir os gradientes de temperatura (evitando assim grandes esforços e deformações térmicas); e maximizar sua rigidez, especialmente em flexão e torção (a fim de garantir a validade das aproximações) (DAVIS; DIALETIS, 2012). Ao mesmo tempo, todo elemento aeroespacial deve ter uma massa tão baixa quanto o possível, pois qualquer peso extra resulta em grandes impactos de custo e eficiência. Muitas vezes, esses objetivos opostos obrigam o SCA a lidar com a flexibilidade do satélite. Nessas situações, a adequação do controle para um sistema flexível é necessária.

## 1.1 Resumo do projeto

O objetivo do projeto é desenvolver um sistema de controle que aumente o amortecimento das vibrações. Para isso, o movimento do satélite é modelado incluindo a flexibilidade e os materiais piezoelétricos implantados; a simulação em MATLAB, utilizando dados exportados do programa ANSYS, é usada para analisar o movimento livre e controlado; e os parâmetros envolvidos são otimizados.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O cenário de satélites flexíveis apresenta desafios ao projeto e desempenho do SCA, associados principalmente a três fenômenos: deformações no suporte de sensores para a observação; deformações no suporte de atuadores para o controle; e as vibrações de estruturas. Os dois primeiros lidam com os efeitos do desalinhamento na medição e na atuação do sistema. Já o terceiro lida com grandes elementos do satélite, em dimensões físicas ou em massa, cujos deslocamentos, velocidades e acelerações são termos significativos na dinâmica do sistema. Este trabalho visa ao estudo do último caso, no qual a literatura foi pesquisada e analisada.

A pesquisa no ramo de redução de vibração segue dois caminhos possíveis: modificar os comandos de controle a fim de reduzir as excitações; e amortecer as vibrações de forma artificial. No primeiro, as técnicas mais comuns são *Input Shaping* e *Component Synthesis Vibration Suppression* (CSVS) (HU; MA, 2005). Já o segundo, popularizado pela possibilidade de usar materiais piezoelétricos embarcados como sensores e atuadores, oferece uma grande diversidade de abordagens.

Técnicas tradicionais de controle foram propostas para lidar com o problema. Em controle ótimo, o método Linear-Quadrático-Gaussiano (*Linear-quadratic-Gaussian*, LQG), que combina um filtro de Kalman como observador e um Regulador Linear-Quadrático (*Linear-quadratic Regulator*, LQR) como controlador, foi estudado por referências como (WON et al., 1994; MEYER et al., 1998). O seu projeto otimiza a soma ponderada de termos quadráticos de energia e esforço de controle e, ao se ajustar propriamente os pesos selecionados, o sistema resultante pode atender requisitos específicos como: minimizar deslocamento e rotação da ponta da estrutura; minimizar energia cinética da vibração; ou maximizar o amortecimento de modos naturais de interesse. Em controle clássico, a opção foi feita pelo controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) devido à sua simplicidade, diversidade de aplicações e facilidade de calibragem (FONSECA et al., 2017).

Ao mesmo tempo que técnicas já existentes foram testadas, novas abordagens foram desenvolvidas particularmente para o problema de Grandes Estruturas Espaciais (*Large Space Structures*, LSS). A primeira delas é a *Positive Position Feedback* (PPF), originalmente proposta por (GOH; CAUGHEY, 1985) e estudada por diversas referências posteriores. Nela, a coordenada de posição da estrutura é alimentada a um compensador com dinâmica de segunda ordem. A variável de posição do compensador, multiplicada por um ganho positivo menor que 1, é então usada como entrada dos atuadores. Os resultados indicam um amortecimento rápido de modos de vibração particulares, dado

que as propriedades são conhecidas com acurácia (MEYER et al., 1998).

Outra alternativa similar é a técnica de *Strain Rate Feedback* (SRF), proposta por (NEWMAN, 1992). Nesta abordagem, a coordenada de velocidade estrutural é alimentada a um compensador e a coordenada de posição do compensador, multiplicada por um ganho negativo, é realimentada à estrutura. Observa-se que o valor do amortecimento ativo é limitado, mas a região afetada é maior e múltiplos modos de vibração podem ser estabilizados (MEYER et al., 1998; SONG et al., 2002).

Uma alternativa às técnicas citadas de controle ativo de estruturas é a adição de amortecimento passivo. Enquanto métodos passivos mais clássicos são materiais com altos fatores de perda viscoelástica ou absorvedores de vibração, a pesquisa nesse campo lidou com os mesmos materiais piezoelétricos das abordagens anteriores, porém conectados diretamente a um circuito elétrico dissipativo. Primeiramente, os transdutores convertem a energia mecânica da vibração em eletricidade; posteriormente, através de circuitos resistivos ou resistivos-indutivos, ela é dissipada na forma de calor. Cabe ressaltar que a segunda etapa não é estritamente necessária, dado que a energia elétrica no circuito pode ser usada para alimentar pequenos sistemas eletrônicos. Este conceito, chamado de *Piezoelectric Energy Harvesting*, é cada vez mais comum em setores como o aeronáutico (LIANG; LIAO, 2009; MARQUI et al., 2011) e pode ser aproveitado na Engenharia Espacial.

A Tabela 1 compila algumas das referências relevantes no assunto, divididas entre as técnicas estudadas para o controle de vibração.

Técnica	Referências
PPF	(GOH; CAUGHEY, 1985) (FANSON; CAUGHEY, 1990) (MEYER et al., 1998) (FRISWELL; INMAN, 1999) (SONG; AGRAWAL, 2001) (SONG et al., 2002) (HU; MA, 2005) (BAILLARGEON; VEL, 2005) (ORSZULIK; SHAN, 2011)
SRF	(NEWMAN, 1992) (SONG et al., 2002) (BAILLARGEON; VEL, 2005)
Passiva ( <i>shunt</i> )	(HAGOOD; FLOTOW, 1991) (SALES; RADE; SOUZA, 2013)
LQG	(WON et al., 1994) (MEYER et al., 1998)
PID	(FONSECA et al., 2017)

Tabela 1 – Principais técnicas e estudos de redução de vibração

## 3 MODELAGEM DO COMPONENTE FLEXÍVEL

Neste capítulo, os componentes flexíveis são estudados separadamente do resto do sistema para criar-se um modelo que capture seu comportamento. Primeiramente, é necessário converter o modelo de um corpo contínuo com infinitos graus de liberdade (GDL) para outro que use um número reduzido de variáveis.

O processo adotado começa com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), convertendo o corpo contínuo em uma malha de nós conectados. As soluções de um problema generalizado de autovalores representam os modos de vibração da estrutura. A seleção dos primeiros modos (associados às menores frequências naturais) permite uma nova redução do número de GDLs utilizando a representação modal. Por fim, os parâmetros de interesse são escritos nessa representação para serem utilizados posteriormente.

### 3.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser considerado um caso particular do Método de Ritz-Galerkin, que utiliza funções contínuas (multiplicadas pelos deslocamentos generalizados) para aproximar os deslocamentos físicos durante a deflexão de um corpo (DOZIO, 2014). A particularidade, porém, é que as funções usadas são locais (ou seja, só assumem valores não-nulos em uma região de interesse) e os seus deslocamentos generalizados são associados diretamente a valores físicos de pontos do sólido.

A primeira etapa do MEF é a discretização do corpo em nós. Cada um faz parte de pelo menos um elemento, dentro do qual a função de interpolação  $N_i^j$  assume os valores não-nulos. O vetor  $\mathbf{N}^j$  é usado para representá-las, como mostrado pela Eq. (3.1). As variáveis  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  representam o sistema de coordenadas locais usado.

$$\mathbf{N}^j(\xi, \eta, \zeta) \triangleq \left\{ \dots \quad N_i^j(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \right\} \quad (3.1)$$

Uma escolha comum de método de interpolação são as funções isoparamétricas. Elas possuem esse nome porque permitem tanto o cálculo das coordenadas de um ponto do corpo quanto a interpolação dos parâmetros de interesse. Quando ambos têm seus valores nodais agrupados em vetores  $\mathbf{x}^j$  e  $\mathbf{p}^j$ , como ilustrado pela Eq. (3.2), as relações

podem ser escritas nas Eqs. (3.3) e (3.4), respectivamente.

$$\mathbf{x}^j = \begin{Bmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{p}^j = \begin{Bmatrix} \vdots \\ p_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$x = \mathbf{N}^j \mathbf{x}^j \quad (3.3)$$

$$p = \mathbf{N}^j \mathbf{p}^j \quad (3.4)$$

Para prosseguir com o modelo matemático, é útil dividir os componentes flexíveis a serem estudados em duas categorias básicas: aqueles modelados como sólidos tridimensionais; e aqueles modelados de forma reduzida como elementos unidimensionais (como treliças e vigas) ou bidimensionais (como placas). Cada uma tem especificidades distintas, porém a abordagem geral desenvolvida no Capítulo 4 será válida para ambas com pequenas diferenças em acurácia.

### 3.1.1 Modelos tridimensionais

Modelos tridimensionais em MEF utilizam nós para representar pontos dos sólidos em estudo. Desta forma, os três GDLs representam seus deslocamentos lineares e são suficientes para capturar as deformações do corpo. Qualquer cisalhamento ou rotação rígida de uma face ou seção transversal emerge da diferença de posição dos nós que a compõem.

O número total de GDLs no modelo,  $N_{GDL}$ , é igual à soma dos GDLs em deslocamentos no eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$  ( $N_{vx}$ ,  $N_{vy}$  e  $N_{vz}$ , respectivamente), conforme expresso por Eq. (3.5). Nós fixados ou engastados perdem os três GDLs, enquanto nós apoiados em uma superfície perdem um GDL.

$$N_{GDL} = N_{vx} + N_{vy} + N_{vz} \quad (3.5)$$

A solução de uma simulação numérica, estática ou modal, inclui um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_{GDL}}$ , que une os deslocamentos  $v_{x,i}$ ,  $v_{y,i}$  e  $v_{z,i}$  de cada nó  $i$ . Esses valores podem ser reagrupados para analisar apenas os nós de um dado elemento  $j$ , de acordo com a Eq. (3.6).

Usando também o vetor  $\mathbf{N}^j$ , qualquer ponto  $(x, y, z)$  contido no elemento  $j$  e representado pelas coordenadas locais  $(\xi^j, \eta^j, \zeta^j)$ , como ilustrado pela Figura 1, pode ter seu deslocamento calculado através da Eq. (3.7).

$$\mathbf{v}_x^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{x,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_y^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{y,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_z^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{z,i} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

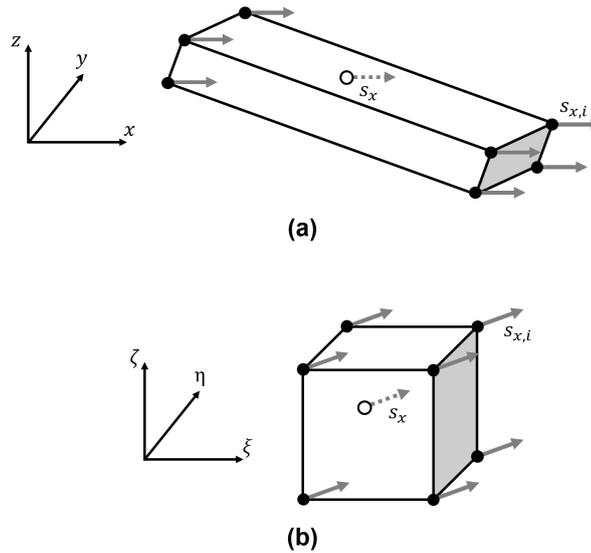


Figura 1 – Deslocamento  $s_x$  de um ponto dentro de um elemento tridimensional (a) em coordenadas físicas globais (b) em coordenadas locais isoparamétricas

$$\begin{aligned} s_x(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) \mathbf{v}_x^j \\ s_y(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) \mathbf{v}_y^j \\ s_z(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) \mathbf{v}_z^j \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Modelos reduzidos

Componentes que possuem um ou mais comprimentos característicos muito menores que os outros podem ser aproximados por modelos reduzidos. Esse é o caso de placas (espessura pequena em relação ao comprimento e à largura) e vigas (seção transversal pequena em relação ao comprimento).

Nesses modelos unidimensionais ou bidimensionais, os nós representam seções ou espessuras de um corpo sólido. Assim, modelos que lidam apenas com deslocamentos lineares são aproximações que preservam a forma das seções transversais e seu ângulo com a linha ou superfície neutras (modelos de viga de Euler-Bernoulli ou de placa de Kirchhoff–Love). Modelagens mais completas e mais fiéis à distribuição de cisalhamento

consideram também GDLs de rotações (modelos de viga de Timoshenko ou de placa de Mindlin–Reissner). A abordagem para dois casos será discutida a seguir.

### 3.1.2.1 Placas de Mindlin–Reissner

Neste modelo, cada nó está associado a três deslocamentos lineares ( $v_{x,i}$ ,  $v_{y,i}$  e  $v_{z,i}$ ) e três rotações ( $\theta_{x,i}$ ,  $\theta_{y,i}$  e  $\theta_{z,i}$ ). O número total de GDLs, portanto, é a soma de seis componentes (Eq. 3.8). O reagrupamento dos valores para um elemento  $j$  é feito conforme as Eqs. (3.9) e (3.10).

$$N_{GDL} = N_{vx} + N_{vy} + N_{vz} + N_{\theta x} + N_{\theta y} + N_{\theta z} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}_x^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{x,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_y^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{y,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_z^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{z,i} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\theta}_x^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ \theta_{x,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_y^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ \theta_{y,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_z^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ \theta_{z,i} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

O equacionamento a seguir será restrito a uma superfície neutra plana normal ao eixo  $z$  (Eq. 3.11). Equações mais gerais, como planos desalinhados em relação aos eixos de referência ou cascas curvas, podem ser derivadas.

$$\begin{aligned} s_x(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_x^j + \Delta z \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \boldsymbol{\theta}_y^j \\ s_y(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_y^j - \Delta z \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \boldsymbol{\theta}_x^j \\ s_z(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_z^j \end{aligned} \quad (3.11)$$

O equacionamento desenvolvido no Capítulo 4 utiliza todos os GDLs da malha através dos modos de vibração e da matriz de rigidez extraídos do MEF, mas descarta a contribuição das rotações nos termos que lidam com a energia cinética do sistema. Essa aproximação pode ser realizada para placas e vigas de pequena espessura devido ao baixo valor de sua inércia em comparação com os outros termos envolvidos (SHIMPI; PATEL, 2006). A princípio, isso pode ser julgado como um ponto negativo dos modelos de Timoshenko ou Mindlin-Reissner dentro dos procedimentos deste trabalho; porém, ambos oferecem resultados numéricos para o MEF melhores que seus substitutos já citados e, portanto, possuem sua importância e aplicação no presente estudo.

### 3.1.2.2 Placas de Kirchhoff–Love

Assim como o caso tridimensional, os GDLs são dados pela Eq. (3.12) e os reagrupamentos são dados pela Eq. (3.13).

$$N_{GDL} = N_{vx} + N_{vy} + N_{vz} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}_x^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{x,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_y^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{y,i} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_z^j \triangleq \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_{z,i} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Os deslocamentos de cada ponto  $(x, y, z)$  são dados pela Eq. (3.14), na qual derivadas parciais das funções de interpolação estão presentes.

$$\begin{aligned} s_x(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_x^j - \Delta z \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_z^j \\ s_y(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_y^j - \Delta z \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_z^j \\ s_z(x, y, z) &\triangleq \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) \mathbf{v}_z^j \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 3.2 Representação Modal

A malha desenvolvida no MEF, considerando as condições de contorno aplicadas aos nós com restrições, possuem matrizes simétricas de massa e rigidez, de ordem igual ao número de graus de liberdade do sistema  $N_{GDL}$ . O problema generalizado de autovalor é então resolvido para se determinar os primeiros  $N$  resultados, como apresentado na Eq. (3.15).

$$([K] - \lambda_i [M]) \boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{0}_{N_{GDL}} \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

O resultado pode ainda ser escrito na forma matricial da matriz dos modos  $[\Psi]$  e a matriz diagonal dos autovalores  $[\Lambda]$ , como apresentado pela Eq. (3.16). Com isso, os deslocamentos dos nós em seus GDLs  $\mathbf{v}$  (e, quando presentes,  $\boldsymbol{\theta}$ ) pode ser aproximado como a combinação linear dos  $N$  primeiros modos naturais, ponderados pelos deslocamentos

modais  $\mathbf{u}_F$  (Eq. 3.17) e as matrizes de massa e rigidez podem também ser convertidas para a representação modal (Eq. 3.18).

$$\begin{aligned}
 [\Psi] &\triangleq [\boldsymbol{\psi}_1 \cdots \boldsymbol{\psi}_N] \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N} \\
 [\Lambda] &\triangleq \mathbf{diag} \{ \lambda_r \} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{v} = [\Psi] \mathbf{u}_F \in \mathbb{R}^{N_{GDL}} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 [M_{uu}] &\triangleq [\Psi]^T [M] [\Psi] \in \mathbb{R}^{N \times N} \\
 [K_{uu}^M] &\triangleq [\Psi]^T [K] [\Psi] \in \mathbb{R}^{N \times N}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Cabe observar que os autovetores  $[\Psi]$  contém todos os GDLs da malha. Por vezes, é interessante extrair dessa matriz os valores apenas para um nó  $i$  ou para um deslocamento do elemento  $j$ . Portanto, é conveniente definir símbolos para as submatrizes que serão utilizadas posteriormente.

Para extrair os deslocamentos lineares de um nó na forma de um vetor  $\mathbb{R}^3$ , é conveniente definir a submatriz  $[\Psi_i]$  tal como apresentado na Eq. (3.19).

$$[\Psi_i] \triangleq \begin{bmatrix} \cdots & v_{x,i}^r & \cdots \\ \cdots & v_{y,i}^r & \cdots \\ \cdots & v_{z,i}^r & \cdots \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

A submatriz que reúne os deslocamentos  $v_x$  dos nós de um mesmo elemento  $j$  é representada por  $[\Psi_{vx}^j]$ , como expresso na Eq. (3.20). Expressões análogas podem ser escritas para  $[\Psi_{vy}^j]$ ,  $[\Psi_{vz}^j]$ ,  $[\Psi_{\theta x}^j]$ ,  $[\Psi_{\theta y}^j]$  e  $[\Psi_{\theta z}^j]$ .

$$[\Psi_{vx}^j] \triangleq \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \cdots & v_{x,i}^r & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

### 3.3 Deformações

A deformação de um ponto  $(x, y, z)$  é um tensor simétrico em  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  e portanto apresenta seis valores distintos. O seu cálculo é baseado nas derivadas parciais do deslocamento sofrido pelo ponto, conforme apresentado pela Eq. (3.21).

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial x} \\
 \epsilon_{yy}(x, y, z) &= \frac{\partial s_y}{\partial y} \\
 \epsilon_{zz}(x, y, z) &= \frac{\partial s_z}{\partial z} \\
 2\epsilon_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \\
 2\epsilon_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \\
 2\epsilon_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Conforme já foi mostrado na Subseção 3.1, o cálculo dos deslocamentos  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  para cada ponto variam de acordo com o modelo adotado para o corpo. Assim, as deformações também serão calculadas de formas distintas. Apresentam-se algumas expressões a seguir.

#### 3.3.1 Modelos tridimensional

O cálculo das deformações é realizado de acordo com Eq. (3.22).

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x} \mathbf{v}_x^j \\
 \epsilon_{yy}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y} \mathbf{v}_y^j \\
 \epsilon_{zz}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z} \mathbf{v}_z^j \\
 2\epsilon_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y} \mathbf{v}_x^j + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x} \mathbf{v}_y^j \\
 2\epsilon_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z} \mathbf{v}_x^j + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x} \mathbf{v}_z^j \\
 2\epsilon_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z} \mathbf{v}_y^j + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y} \mathbf{v}_z^j
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Conforme expresso na Eq. (3.20), é possível selecionar uma submatriz  $[\Psi_{vx}^j]$  dentro da matriz de autovetores  $[\Psi]$  com os valores correspondentes apenas aos deslocamentos

nodais  $v_{x,i}$  de um elemento  $j$ . Ela permite definir um vetor  $\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^M$  e reescrever a deformação  $\epsilon_{xx}$  sofrida pelo corpo como uma função dos deslocamentos modais  $\mathbf{u}_F$ , conforme as Eqs. (3.23) e (3.24).

$$\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vx}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.23)$$

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = \boldsymbol{\epsilon}_{xx}^M \mathbf{u}_F \quad (3.24)$$

Analogamente, o cálculo pode ser estendido para todos os elementos do vetor de deformações do corpo, como mostrado nas Eqs. (3.25)–(3.30).

$$\boldsymbol{\epsilon}_{yy}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vy}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.25)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{zz}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vz}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.26)$$

$$2\boldsymbol{\epsilon}_{yz}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vz}^j] + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vy}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.27)$$

$$2\boldsymbol{\epsilon}_{xz}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vz}^j] + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial z}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vx}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.28)$$

$$2\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vy}^j] + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j, \zeta^j) [\Psi_{vx}^j] \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(x, y, z) \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) \\ \epsilon_{zz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{yz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{xx}^M(x, y, z) \\ \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^M(x, y, z) \\ \boldsymbol{\epsilon}_{zz}^M(x, y, z) \\ 2\boldsymbol{\epsilon}_{yz}^M(x, y, z) \\ 2\boldsymbol{\epsilon}_{xz}^M(x, y, z) \\ 2\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^M(x, y, z) \end{pmatrix} \mathbf{u}_F \quad (3.30)$$

Frequentemente o programa já é capaz de realizar o cálculo das deformações e portanto os valores podem ser tratados como saídas da simulação.

### 3.3.2 Modelos reduzidos

#### 3.3.2.1 Placas de Mindlin–Reissner

As Eqs. (3.31)–(3.35) representam a deformação modal e a Eq. (3.36) mostra o resultado final. Observa-se que, de acordo com esse modelo, a deformação normal paralela à espessura da placa (no caso,  $\epsilon_{zz}$ ) é sempre nula.

$$\epsilon_{xx}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vx}^j] + \Delta z \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta y}^j] \quad (3.31)$$

$$\epsilon_{yy}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vy}^j] - \Delta z \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta x}^j] \quad (3.32)$$

$$2\epsilon_{yz}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vz}^j] - \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta x}^j] \quad (3.33)$$

$$2\epsilon_{xz}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vz}^j] + \mathbf{N}^j(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta y}^j] \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{xy}^M(x, y, z) = & \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vy}^j] + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vx}^j] + \\ & + \Delta z \left[ \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta y}^j] - \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{\theta x}^j] \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(x, y, z) \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) \\ \epsilon_{zz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{yz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^M(x, y, z) \\ \epsilon_{yy}^M(x, y, z) \\ \mathbf{0}_{1 \times N} \\ 2\epsilon_{yz}^M(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xz}^M(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xy}^M(x, y, z) \end{pmatrix} \mathbf{u}_F \quad (3.36)$$

#### 3.3.2.2 Placas de Kirchhoff–Love

As Eqs. (3.37)–(3.39) representam a deformação modal e a Eq. (3.40) mostra o resultado final. Observa-se que, de acordo com esse modelo, tanto a deformação normal paralela à espessura da placa (no caso,  $\epsilon_{zz}$ ) quanto os cisalhamentos que envolvam esse eixo ( $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$ ) é sempre nulos.

$$\epsilon_{xx}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vx}^j] - \Delta z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^j}{\partial x^2}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vz}^j] \quad (3.37)$$

$$\epsilon_{yy}^M(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vy}^j] - \Delta z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^j}{\partial y^2}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vz}^j] \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{xy}^M(x, y, z) &= \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial x}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vy}^j] + \frac{\partial \mathbf{N}^j}{\partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vx}^j] + \\ &- 2\Delta z \frac{\partial^2 \mathbf{N}^j}{\partial x \partial y}(\xi^j, \eta^j) [\Psi_{vz}^j] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(x, y, z) \\ \epsilon_{yy}(x, y, z) \\ \epsilon_{zz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{yz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xz}(x, y, z) \\ 2\epsilon_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^M(x, y, z) \\ \epsilon_{yy}^M(x, y, z) \\ \mathbf{0}_{1 \times N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} \\ 2\epsilon_{xy}^M(x, y, z) \end{pmatrix} \mathbf{u}_F \quad (3.40)$$

### 3.4 Comentários sobre qualidade da malha

Como dito na Subseção 3.1, a qualidade da malha afeta significativamente a qualidade do modelo desenvolvido. Logo, é importante comentar sobre as possíveis técnicas de refinamento usadas em MEF para aumentar sua acurácia.

O refino  $h$  visa à melhora dos resultados reduzindo o comprimento característico dos elementos usados, aumentando assim o número de nós da malha sem alterar a ordem de cada elemento. Já o refino  $p$  mantém o número de elementos constante e aumenta o número de nós em cada um deles, elevando assim a ordem polinomial das funções de interpolação. Apesar de oferecer boa convergência na maioria dos casos, a maior parte dos programas de MEF limitam-se à 1ª e 2ª ordem e focam no refino  $h$  para o aumento de precisão desejado (KITUR; HUSTON, 1989; NOVOTNY; FANCELLO, 1998).

Um comentário final relevante para a discussão é que, seguindo-se o refinamento da malha, as frequências naturais diminuem até o valor de convergência. Isso se dá ao fato de que a remoção de GDLs de um modelo estrutural resulta matematicamente num aumento artificial da rigidez e, por consequência, dos autovalores do sistema. Diversos algoritmos de programas especializados avaliam a precisão do resultado baseados em quanto os resultados diminuem com o refinamento da malha. É importante ressaltar esse fato para uma malha com poucos nós ser usada como justificativa para afirmar que o primeiro modo natural está acima das frequências de interesse do sistema e, portanto, o satélite pode ser considerado rígido.

## 4 EQUACIONAMENTO DA DINÂMICA

Neste capítulo, o modelo físico do satélite como plataforma rígida conectada a um ou mais componentes flexíveis é descrito e o equacionamento do sistema é desenvolvido a partir do Método dos Modos Assumidos. As equações diferenciais são expressas no espaço de estados não-linear e a implementação de um código para simulações é discutido.

### 4.1 Modelo físico e cinemático do satélite

O modelo físico do satélite considera uma plataforma central, tratada como corpo rígido, conectada aos componentes flexíveis, como apresentado na Figura 2. Dois sistemas de coordenadas são usados no equacionamento: o referencial inercial  $N$ , com origem em um ponto  $O$ ; e o referencial solidário ao corpo  $B$ , com origem no ponto  $C$ . A posição do satélite no primeiro é representada pelo vetor  $\mathbf{R}_C$ . Para qualquer ponto  $P$  pertencente ao componente flexível conectado, um vetor constante  $\mathbf{r}_P$  é a sua posição na situação natural e o vetor variável  $\mathbf{s}_P$  indica o deslocamento sofrido durante a deformação.

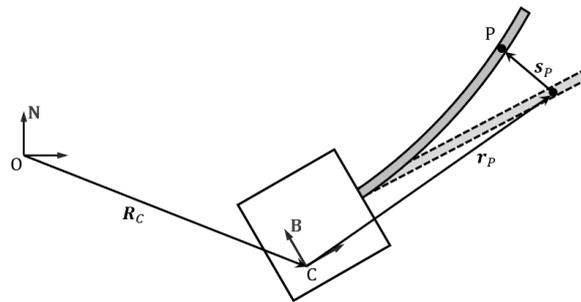


Figura 2 – Satélite com plataforma rígida (em branco) conectada a um componente flexível na condição deformada (linhas sólidas) e não deformada (linhas tracejadas)

A atitude  $A_{B/N}$ , com a mesma definição das abordagens de um satélite puramente rígido, é a matriz de rotação entre o sistema de coordenadas inerciais e solidárias ao corpo, como mostrado na Eq. (4.1). A matriz é ortonormal e tem determinante unitário, como mostrado na Eq. (4.2). A sua equação cinemática é expressa na Eq. (4.3), na qual utiliza-se a matriz produto vetorial da velocidade angular (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014). As propriedades básicas dessa notação são apresentadas na Eq. (4.4).

$$B = A_{B/N}N \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \det A_{B/N} &= 1 \\ A_{B/N}^{-1} &= A_{B/N}^T \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\dot{A}_{B/N} = -[\boldsymbol{\omega}\wedge] A_{B/N} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}\wedge] &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= [\mathbf{v}\wedge] \mathbf{w} = [\mathbf{w}\wedge]^T \mathbf{v} \\ [\mathbf{v}\wedge]^T &= -[\mathbf{v}\wedge] \\ [M] [\mathbf{v}\wedge] [M]^T &= [[M] \mathbf{v}\wedge] \\ [\mathbf{v}\wedge] [\mathbf{v}\wedge]^T &= [\mathbf{v}\wedge]^T [\mathbf{v}\wedge] = \|\mathbf{v}\|^2 [I_3] - \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_2^2 + v_3^2 & -v_1v_2 & -v_1v_3 \\ -v_1v_2 & v_1^2 + v_3^2 & -v_2v_3 \\ -v_1v_3 & -v_2v_3 & v_1^2 + v_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como a forma matricial descrita pela Eq. (4.3) envolve nove equações diferenciais e seis restrições (associadas ao determinante unitário e à ortonormalidade da Eq. 4.2), sua integração numérica é ineficiente e raramente utilizada em sistemas reais de observação e estimação de atitude. Apresentam-se duas alternativas principais: o uso de quatérnios (quatro equações diferenciais e uma restrição); ou o uso de representações mínimas de atitude (três equações diferenciais apenas). Ambas são avaliadas e usadas no equacionamento seguinte.

Os quatérnios  $q \in \mathbb{R}^4$ , frequentemente divididos em um vetor  $\mathbf{q}_{1:3} \in \mathbb{R}^3$  e um escalar  $q_4 \in \mathbb{R}$ , formam uma representação global da atitude (ou seja, não apresentam nenhum ponto de singularidade ao mapear as possíveis rotações tridimensionais) e por isso são comumente empregados no setor espacial. A equação de restrição envolvida garante o módulo unitário do vetor, conforme a Eq. (4.5) A relação entre a matriz  $A_{B/N}$  e os quatérnios é apresentada pela Eq. (4.6), suas expressões cinemáticas pela Eq. (4.7) e sua relação com o vetor velocidade angular pela Eq. (4.8).

$$\|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
A_{B/N} &= (q_4^2 - \|\mathbf{q}_{1:3}\|^2) [I_3] - 2q_4 [\mathbf{q}_{1:3}^\wedge] + 2\mathbf{q}_{1:3}\mathbf{q}_{1:3}^T = \\
&= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_{1:3} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{1:3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}q_4 \\
\dot{q}_4 &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_{1:3} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.8)$$

As representações mínimas da atitude são assim chamadas por usar apenas três variáveis para representar as rotações tridimensionais. Elas não estão associadas à nenhuma equação de restrição e têm a mesma dimensão do vetor  $\boldsymbol{\omega}$  de velocidades angulares, oferecendo assim uma vantagem na simplicidade de modelagem do sistema. Porém, todas contêm pelo menos um ponto de singularidade em seu domínio, o que exige atenção especial durante as integrações numéricas.

O Apêndice C apresenta quais são as principais alternativas dentro dessa segunda categoria. Neste capítulo, a modelagem será baseada em uma representação genérica  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ . No Capítulo 6, a opção é pelos parâmetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues Parameters*, MRP) devido às vantagens em relação a singularidades.

## 4.2 Dinâmica para um componente flexível

As equações de movimento são derivadas usando o Método de Modos Assumidos, que parte de uma discretização da flexibilidade aplicada à mecânica lagrangiana.

A energia cinética do sistema pode ser dividida em dois termos: aquela devido ao movimento da plataforma rígida; e aquela devido ao movimento do componente flexível. Adotam-se os símbolos  $T_{RB}$  e  $T_F$ , respectivamente, como mostrado na Eq. (4.9).

$$T = T_{RB} + T_F \quad (4.9)$$

Para o primeiro termo, adota-se que o ponto  $C$  é genérico e portanto o termo cruzado entre rotação e translação está presente (Eq. 4.10). Esta abordagem é escolhida

não apenas por tratar do caso mais geral, mas também porque a deformação de grandes componentes flexíveis pode alterar significativamente a posição do baricentro do sistema  $G$ , enquanto o ponto de origem do referencial será mantido constante no tempo.

$$T_{RB} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_C^T M \dot{\mathbf{R}}_C + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\omega}^T [I_C] \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_C) \quad (4.10)$$

A expressão da Eq. (4.11) vem da definição de energia cinética. A flexibilidade é aproximada através do MEF descrito na Subseção 3.1, portanto é interessante aproximar o sólido contínuo como um sistema de  $N_N$  massas pontuais nos nós da malha, como expressas na Eq. (4.12). É importante lembrar que, em modelos cujos nós possuem também GDLs de rotação, a aproximação descarta a contribuição proveniente da inércia das seções. Esse termo, porém, já foi explicado de ser desprezível para vigas e placas de pequena área transversal e espessura (SHIMPI; PATEL, 2006).

$$T_F = \frac{1}{2} \int_V \left\| \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} \right\|_N^2 dm \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_N} m_i \left\| \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \right\|_N^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_N} m_i \left\| \left( \dot{\mathbf{R}}_C + A_{B/N}^T \dot{\mathbf{s}}_{P,i} + A_{B/N}^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] (\mathbf{r}_{P,i} + \mathbf{s}_{P,i}) \right) \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

O deslocamento de cada massa pontual é aproximado usando os modos naturais obtidos pelo MEF como descrito na Subseção 3.2. A matriz dos modos  $[\Psi] \in \mathbb{R}^{N_{GDL} \times N}$  pode ser dividida em matrizes  $[\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  que representem os graus de liberdade de deslocamento de um único ponto  $P_i$  da malha (em caso de GDL restrito por condição de contorno, a linha correspondente será nula). Assim, o vetor  $\mathbf{s}_{P,i}$  de tal ponto em representação modal é expresso de acordo com a Eq. (4.13) e a expressão da energia cinética do componente pode ser reescrita como Eq. (4.14).

$$\mathbf{s}_{P,i} = [\Psi_i] \mathbf{u}_F \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_N} m_i \left( \dot{\mathbf{R}}_C^T \dot{\mathbf{R}}_C + \dot{\mathbf{u}}_F^T [\Psi_i]^T [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + 2 \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_P + [\Psi_i] \mathbf{u}_F)^T [\boldsymbol{\omega} \wedge]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] (\mathbf{r}_P + [\Psi_i] \mathbf{u}_F) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] (\mathbf{r}_P + [\Psi_i] \mathbf{u}_F) + 2 \dot{\mathbf{u}}_F^T [\Psi_i]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] (\mathbf{r}_P + [\Psi_i] \mathbf{u}_F) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

As propriedades da plataforma rígida combinada com o apêndice não-deformado são calculadas na Eq. (4.15). Outras matrizes, úteis para representar a flexibilidade, são definidas na Eq. (4.16). Utilizando-se esses termos, a expressão final da energia cinética total é apresentada na Eq. (4.17).

$$\begin{aligned}
M_{tot} &= M + \sum_{i=1}^{N_N} m_i \in \mathbb{R} \\
\mathbf{S}_{C,tot} &= \mathbf{S}_C + \sum_{i=1}^{N_N} m_i \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3 \\
[I_{C,tot}] &= [I_C] + \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \wedge] [\mathbf{r}_i \wedge]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
[M_{uu}] &\triangleq [\Psi]^T [M] [\Psi] \approx \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i]^T [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{N \times N} \\
[M_{Ru}] &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \\
[M_{\omega u,0}] &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \\
[L_D](\boldsymbol{\omega}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \\
[L_E](\boldsymbol{\omega}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{N \times N} \\
[L_F](\boldsymbol{\omega}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{N \times N} \\
[L_G](\boldsymbol{\omega}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \wedge] [\boldsymbol{\omega} \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \\
[L_H](\boldsymbol{\omega}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega} \wedge] [\Psi_i]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_C^T M_{tot} \dot{\mathbf{R}}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_F^T [M_{uu}] \dot{\mathbf{u}}_F + \\
&+ \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega}^T [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T [L_E](\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_G](\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \\
&+ \dot{\mathbf{u}}_F^T [L_F](\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Tratando da energia potencial  $V$ , apenas a flexibilidade elástica linear do apêndice será considerada ( $V^{el}$ ). Isso resulta na Eq. (4.18), onde utiliza-se a matriz modal de rigidez  $[K_{uu}^M]$  definida na Eq. (3.18). Essa aproximação de linearidade, que permite o uso

da análise modal proveniente do Capítulo 3, resulta na limitação do modelo para altas velocidades de rotação, como será explicado na Subseção 4.5.

$$V = V^{el} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T [K_{uu}^M] \mathbf{u}_F \quad (4.18)$$

Para situações nas quais haja interesse de realizar manobras orbitais, um termo gravitacional deveria ser adicionado (MEIROVITCH; QUINN, 1987). No presente trabalho, apenas manobras de atitude serão estudadas e, portanto, a expressão apresentada é suficiente para a análise.

A dissipação de energia também está presente devido à vibração da antena. Considerando um amortecimento modal expresso por  $[C_M]$ , a função de dissipação de Rayleigh  $D$  é definida na Eq. (4.19). Observa-se que a análise estrutural realizada no Capítulo 3 considerou vibrações não-amortecidas, pois em geral não se conhece a matriz real dos coeficientes viscosos para a estrutura. Ao adicionar-se posteriormente esse termo, é possível variá-lo sem afetar os modos de vibração (que variam com termos quadráticos dos coeficientes) e, portanto, seguir com um procedimento mais flexível para tratar do tópico.

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_F^T [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F \quad (4.19)$$

#### 4.2.1 Equacionamento adotando uma representação mínima

Seguindo uma derivação semelhante à de (MEIROVITCH; QUINN, 1987), é possível utilizar-se de uma representação mínima da atitude para garantir a mesma dimensão nos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\boldsymbol{\omega}$ . Com isso, as matrizes  $D_{\omega/a}$  e  $D_{a/\omega}$ , definidas pelas Eqs. (4.20) e (4.21) são quadradas e inversíveis.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= [D_{\omega/a}] \dot{\mathbf{a}} \\ [D_{\omega/a}] &= [D_{\omega/a}] (\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ [D_{a/\omega}] &= [D_{a/\omega}] (\mathbf{a}) = [D_{\omega/a}]^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nessa representação de atitude, o trabalho virtual contém a ação da força  $\mathbf{F}$  e do torque  $\mathbf{M}$  que atuam no satélite e da força modal  $\mathbf{F}_u$  que deriva das forças distribuídas no apêndice flexível, conforme expresso pela Eq. (4.22). O valor da força modal é calculado pela Eq. (4.23).

$$\delta W = \mathbf{F}^T A_{B/N} \delta \mathbf{R}_C + \mathbf{M}^T [D_{\omega/a}] \delta \mathbf{a} + \mathbf{F}_u^T \delta \mathbf{u}_F \quad (4.22)$$

$$\mathbf{F}_u = \sum_{i=1}^{N_N} [\Psi_i]^T \mathbf{F}_i \quad (4.23)$$

Adotando-se como coordenadas generalizadas  $\mathbf{R}_C$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{u}_F$ , é possível escrever as equações lagrangianas (4.24)–(4.26). Porém, convém utilizar as pseudo-coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\omega}$  em vez de  $\dot{\mathbf{a}}$  devido à sua presença nas expressões de energia cinética, como é possível observar na Eq. (4.17). Com isso, a segunda equação é substituída pela Eq. (4.27) (MEIROVITCH, 1970).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{R}}_C} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{R}_C} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_C} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{R}}_C} = A_{B/N}^T \mathbf{F} \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{a}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{a}}} = [D_{\omega/a}]^T \mathbf{M} \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_F} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_F} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_F} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{u}}_F} = \mathbf{F}_u \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + [\boldsymbol{\omega} \wedge] \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} - [D_{a/\omega}]^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} + [D_{a/\omega}]^T \frac{\partial V}{\partial \mathbf{a}} + [D_{a/\omega}]^T \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{a}}} = \mathbf{M} \quad (4.27)$$

As derivações necessárias são apresentadas no Apêndice A. Os resultados finais obtidos são apresentados nas Eqs. (4.28)–(4.30).

$$\begin{aligned} M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F} + \\ - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) - 2 (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} ([\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [I_{C,tot}] \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + ([L_G] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H] (\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F + \left( [M_{\omega u,0}] + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge] [\Psi_i] \right) \ddot{\mathbf{u}}_F = \\ = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} - ([L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega})) \dot{\mathbf{u}}_F + \\ - [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F - [\boldsymbol{\omega} \wedge] \left( [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} [M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [M_{\omega u,0}]^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + [L_F] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{u}_F \right) + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u + \\ - \left( [C_{uu}^M] + 2 [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \right) \dot{\mathbf{u}}_F - \left( [K_{uu}^M] - [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + [L_G]^T (\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.30)$$

## 4.2.2 Equacionamento adotando quatérnios

Diferentemente de referências como (MEIROVITCH; QUINN, 1987), a presente demonstração não utiliza uma representação de atitude mínima (três variáveis), mas sim quatérnios. A vantagem do último é que, não existindo singularidades em nenhum conjunto de valores, as manobras do satélite podem ser realizada sem preocupações numéricas na integração. Porém, a variável extra exige que uma quarta equação lagrangiana seja derivada. Para tanto, define-se a variável escalar  $\omega_0$  na Eq. (4.31).

$$\omega_0 = \frac{d}{dt} \|q\|^2 = 2(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + q_3\dot{q}_3 + q_4\dot{q}_4) \quad (4.31)$$

Com essa definição, é possível definir a matriz quadrada  $[D_{\omega/q}]$  como expressa na Eq. (4.32) e sua inversa  $[D_{q/\omega}]$  na Eq. (4.33). Através dela, é possível derivar as equações de movimento e, posteriormente, impor  $\omega_0 = 0$  para garantir a unidade do vetor de quatérnios.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \omega_0 \end{Bmatrix} &= [D_{\omega/q}](q)\dot{q} \\ [D_{\omega/q}](q) &= 2 \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [D_{q/\omega}](q) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \omega_0 \end{Bmatrix} \\ [D_{q/\omega}](q) &= [D_{\omega/q}]^{-1}(q) = \frac{1}{4} [D_{\omega/q}]^T(q) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

O trabalho virtual  $\delta W$  é calculado de forma análoga às Eqs. (4.22) e (4.23). Porém, a presença do valor  $\omega_0$  (que será imposto como 0) exige a presença de uma nova força generalizada  $\lambda$  que se comportará como um multiplicador de Lagrange no sistema. A expressão modifica é apresentada na Eq. (4.34).

$$\delta W = \mathbf{F}^T A_{B/N} \delta \mathbf{R}_C + \left\{ \mathbf{M}^T \quad \lambda \right\} [D_{\omega/q}](q) \delta q + \mathbf{F}_u^T \delta \mathbf{u}_F \quad (4.34)$$

Novamente as equações dinâmicas são derivadas a partir da mecânica lagrangiana. Para as coordenadas generalizadas  $\mathbf{R}_C$  e  $\mathbf{u}_F$  mantêm-se as Eqs. (4.24) e (4.26), respectivamente. A expressão da Eq. (4.27) é modificada para a da Eq. (4.35) (MEIROVITCH, 1970; MEIROVITCH; QUINN, 1987).

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}_0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega} \wedge] & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}_0} \end{Bmatrix} - [D_{q/\omega}]^T \frac{\partial T}{\partial q} + [D_{q/\omega}]^T \frac{\partial V}{\partial q} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\omega}} \\ \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\omega}_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

As equações finais do movimento são demonstradas no Apêndice A e apresentadas nas Eqs. (4.36)–(4.39).

$$\begin{aligned} M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F} + \\ - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) - 2 (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} ([\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [I_{C,tot}] \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + ([L_G] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H] (\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F + \left( [M_{\omega u,0}] + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge] [\Psi_i] \right) \ddot{\mathbf{u}}_F = \\ = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} - ([L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega})) \dot{\mathbf{u}}_F + \\ - [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F - [\boldsymbol{\omega} \wedge] \left( [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^T [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_G] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \\ + \dot{\mathbf{u}}_F^T [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_F^T [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F - \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F = \lambda \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} [M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [M_{\omega u,0}]^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + [L_F] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{u}_F \right) + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u + \\ - \left( [C_{uu}^M] + 2 [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \right) \dot{\mathbf{u}}_F - \left( [K_{uu}^M] - [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + [L_G]^T (\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Observa-se que as Eqs. (4.28)–(4.30) mantêm-se inalteradas, enquanto a Eq. (4.38) surge como resultado da restrição adicionada ao sistema e a variável  $\lambda$  é calculada a partir dos valores do estado.

### 4.2.3 Mudança de nomenclatura para vetores extraídos do MEF

A fim de simplificar as simulações computacionais, é importante separar as somatórias envolvendo valores extraídos do MEF e a integração numérica da dinâmica do sistema.

Por este motivo, as definições das Eqs. (4.41)–(4.44) removem a presença de coordenadas generalizadas dentro das somas, substituindo-as pelos versores  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  conforme definidos pela Eq. (4.40).

$$\mathbf{e}_1 \triangleq \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 \triangleq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

$$[L_{E,jk}] \triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i]^T [\mathbf{e}_j \wedge]^T [\mathbf{e}_k \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.41)$$

$$[L_{F,j}] \triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\Psi_i]^T [\mathbf{e}_j \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.42)$$

$$[L_{G,j}] \triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \wedge] [\mathbf{e}_j \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.43)$$

$$[L_{H,j}] \triangleq \sum_{i=1}^{N_N} m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_j \wedge] [\Psi_i] \in \mathbb{R}^{3 \times N} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.44)$$

A partir desses valores, definem-se as matrizes das Eqs. (4.45)–(4.53) e as equações finais são reescritas de acordo.

$$[A_{E,ju}] (\mathbf{u}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{E,j1}] \mathbf{u}_F & [L_{E,j2}] \mathbf{u}_F & [L_{E,j3}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} [A_{E,1u}] (\mathbf{u}_F) &\triangleq \begin{bmatrix} [L_{E,11}] \mathbf{u}_F & [L_{E,12}] \mathbf{u}_F & [L_{E,13}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \\ [A_{E,2u}] (\mathbf{u}_F) &\triangleq \begin{bmatrix} [L_{E,21}] \mathbf{u}_F & [L_{E,22}] \mathbf{u}_F & [L_{E,23}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \\ [A_{E,3u}] (\mathbf{u}_F) &\triangleq \begin{bmatrix} [L_{E,31}] \mathbf{u}_F & [L_{E,32}] \mathbf{u}_F & [L_{E,33}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$[A_{E,u\omega}] (\mathbf{u}_F, \boldsymbol{\omega}) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{E,1u}] (\mathbf{u}_F) \boldsymbol{\omega} & [L_{E,2u}] (\mathbf{u}_F) \boldsymbol{\omega} & [L_{E,3u}] (\mathbf{u}_F) \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad (4.47)$$

$$[A_{F,u}] (\mathbf{u}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{F,1}] \mathbf{u}_F & [L_{F,2}] \mathbf{u}_F & [L_{F,3}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad (4.48)$$

$$[A_{G,u}](\mathbf{u}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{G,1}] \mathbf{u}_F & [L_{G,2}] \mathbf{u}_F & [L_{G,3}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.49)$$

$$[A_{G,\dot{u}}](\dot{\mathbf{u}}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{G,1}] \dot{\mathbf{u}}_F & [L_{G,2}] \dot{\mathbf{u}}_F & [L_{G,3}] \dot{\mathbf{u}}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.50)$$

$$[A_{G,\omega}](\boldsymbol{\omega}) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{G,1}]^T \boldsymbol{\omega} & [L_{G,2}]^T \boldsymbol{\omega} & [L_{G,3}]^T \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 3} \quad (4.51)$$

$$[A_{H,u}](\mathbf{u}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{H,1}] \mathbf{u}_F & [L_{H,2}] \mathbf{u}_F & [L_{H,3}] \mathbf{u}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.52)$$

$$[A_{H,\dot{u}}](\dot{\mathbf{u}}_F) \triangleq \begin{bmatrix} [L_{H,1}] \dot{\mathbf{u}}_F & [L_{H,2}] \dot{\mathbf{u}}_F & [L_{H,3}] \dot{\mathbf{u}}_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.53)$$

As definições mostradas acima permitem reescrever termos presentes nas Eqs. (4.28)–(4.30) e (4.38) de forma a usar apenas matrizes que não dependam das variáveis de estado. As substituições estão apresentadas nas Eqs. (4.54)–(4.60).

$$([L_G](\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H](\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F = ([A_{G,u}](\mathbf{u}_F) + [A_{H,u}](\mathbf{u}_F)) \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.54)$$

$$[L_F](\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{u}_F = [A_{F,u}](\mathbf{u}_F) \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.55)$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F] = [A_{F,u}]^T(\mathbf{u}_F) \ddot{\mathbf{u}}_F \quad (4.56)$$

$$([L_G](\boldsymbol{\omega}) + [L_H](\boldsymbol{\omega})) \dot{\mathbf{u}}_F = ([A_{G,\dot{u}}](\dot{\mathbf{u}}_F) + [A_{H,\dot{u}}](\dot{\mathbf{u}}_F)) \boldsymbol{\omega} \quad (4.57)$$

$$([L_G](\boldsymbol{\omega}) + [L_H](\boldsymbol{\omega})) \mathbf{u}_F = ([A_{G,u}](\mathbf{u}_F) + [A_{H,u}](\mathbf{u}_F)) \boldsymbol{\omega} \quad (4.58)$$

$$[L_E](\boldsymbol{\omega})\mathbf{u}_F = [A_{E,u\boldsymbol{\omega}}](\mathbf{u}_F, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \quad (4.59)$$

$$[L_G]^T(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} = [A_{G,\boldsymbol{\omega}}](\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \quad (4.60)$$

Através das substituições mostradas, as equações lagrangianas finais são escritas nas Eqs. (4.61)–(4.63). No caso do uso de quatérnios como representação de atitude, a restrição resulta na Eq. (4.64).

$$\begin{aligned} M_{tot}A_{B/N}\ddot{\mathbf{R}}_C + \left([S_{C,tot}\wedge]^T + [[M_{Ru}]\mathbf{u}_F\wedge]^T\right)\dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{Ru}]\ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F} + \\ - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times S_{C,tot})) - 2(\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}]\dot{\mathbf{u}}_F)) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}]\mathbf{u}_F)) \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \left([S_{C,tot}\wedge] + [[M_{Ru}]\mathbf{u}_F\wedge]\right)A_{B/N}\ddot{\mathbf{R}}_C + \left([I_{C,tot}] + [A_{G,u}] + [A_{H,u}]\right)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + \left([M_{\omega u,0}] + [A_{F,u}]^T\right)\ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}]\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega}\wedge][M_{\omega u,0}]\dot{\mathbf{u}}_F + \\ - \left([A_{G,\dot{u}}] + [A_{H,\dot{u}}] + [\boldsymbol{\omega}\wedge][A_{G,u}] + [\boldsymbol{\omega}\wedge][A_{H,u}]\right)\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} [M_{Ru}]^T A_{B/N}\ddot{\mathbf{R}}_C + \left([M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}]\right)\dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{uu}]\ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u + \\ - [C_{uu}^M]\dot{\mathbf{u}}_F - 2[A_{F,\dot{u}}]\boldsymbol{\omega} - [K_{uu}^M]\mathbf{u}_F + [A_{E,u\boldsymbol{\omega}}]\boldsymbol{\omega} + [A_{G,\boldsymbol{\omega}}]\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^T [I_{C,tot}]\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T [M_{\omega u,0}]\dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega}^T [A_{G,u}]\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T [A_{H,u}]\boldsymbol{\omega} + \\ + \dot{\mathbf{u}}_F^T [A_{F,u}]\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_F^T [A_{E,u\boldsymbol{\omega}}]\boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [M_{Ru}]\dot{\mathbf{u}}_F = \lambda \end{aligned} \quad (4.64)$$

#### 4.2.4 Representação em Espaço de Estados Não-Linear

A forma clássica do Espaço de Estados Não-Linear é apresentada pela Eq. (4.65). O estado do sistema pode ser definido pela Eq. (4.66) (utilizando a representação mínima de atitude) ou pela Eq. (4.67) (utilizando os quatérnios).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_F \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{12+2N} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{x}_q(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{q}_{1:3} \\ q_4 \\ \mathbf{u}_F \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{13+2N} \quad (4.67)$$

A dinâmica do sistema pode ser expressa através da matriz  $[A_m](\mathbf{u}_F)$ , definida pela Eq. (4.68), que multiplica as acelerações  $\ddot{\mathbf{R}}_C$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_F$ , como expresso pela Eq. (4.69). A linha pontilhada separa os termos associados aos GDLs de corpo rígido (correspondentes às seis primeiras linhas e colunas) dos termos associados à representação modal (correspondentes às  $N$  últimas linhas e colunas) e seus termos cruzados.

$$\begin{aligned} [A_m](\mathbf{u}_F) &\triangleq \\ &= \begin{bmatrix} M_{tot} [[I_{3 \times 3}]] & [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T & [M_{Ru}] \\ [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge] & [I_{C,tot}] + [A_{G,u}] + [A_{H,u}] & [M_{\omega u,0}] + [A_{F,u}]^T \\ \hline [M_{Ru}]^T & [M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}] & [M_{uu}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$[A_m](\mathbf{u}_F) \begin{Bmatrix} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} + \mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL} \quad (4.69)$$

É interessante dividir a matriz em seus termos constantes e variáveis, como mostrado nas Eqs. (4.70)–(4.72), a fim de entender a influência de cada elemento. Entre os termos constantes, as seis primeiras linhas e colunas (região acima e à esquerda das linhas pontilhadas) são idênticas ao resultado de um corpo rígido. As linhas e colunas extras simplesmente adicionam a dinâmica dos GDLs flexíveis ao sistema. Na matriz variável, é possível observar que as contribuições se devem à mudança da posição do centro de massa,

à mudança dos valores de inércia e à mudança do produto vetorial entre  $\boldsymbol{\omega}$  e a posição do ponto  $P_i$ . Outros termos não são diretamente afetados pelos grandes deslocamentos da estrutura.

$$[A_{m,0}] \triangleq \begin{bmatrix} M_{tot} [I_{3 \times 3}] & [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T & [M_{Ru}] \\ [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] & [I_{C,tot}] & [M_{\omega u,0}] \\ [M_{Ru}]^T & [M_{\omega u,0}]^T & [M_{uu}] \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$[A_{m,u}](\mathbf{u}_F) \triangleq \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T & 0_{3 \times N} \\ [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge] & [A_{G,u}] + [A_{H,u}] & [A_{F,u}]^T \\ 0_{N \times 3} & [A_{F,u}] & 0_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$[A_m](\mathbf{u}_F) = [A_{m,0}] + [A_{m,u}](\mathbf{u}_F) \in \mathbb{R}^{(6+N) \times (6+N)} \quad (4.72)$$

Como a matriz  $[A_m]$  varia ao longo do tempo devido aos deslocamentos do componente, sua inversa também será variável. Isso é um problema em termos de custo computacional, dado que o cálculo precisa ser feito a cada intervalo de tempo. Como a matriz preserva sempre sua simetria, algoritmos mais eficientes estão disponíveis para esse processo. Outra abordagem interessante, é desenvolver um algoritmo particular baseado nas propriedades da inversa da soma de matrizes (MILLER, 1981). Como já notado, a matriz variável possui apenas três linhas (4ª, 5ª e 6ª) e três colunas (também 4ª, 5ª e 6ª) com valores não-nulos. Isso significa que bastariam sempre seis iterações do algoritmo para obter-se o resultado. Suas vantagens quanto ao custo de processamento e de memória, focando em particular no computador de bordo, precisariam ser estudadas mais a fundo para obter-se uma conclusão.

Os termos lineares e não-lineares das equações são agrupados nos vetores  $\mathbf{Q}_L$  e  $\mathbf{Q}_{NL}$  (Eqs. 4.73 e 4.74), respectivamente.

$$\mathbf{Q}_L = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ -[K_{uu}^M] \mathbf{u}_F - [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{Q}_{NL} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) - 2\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F \\ ([I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + [A_{G,u}] \boldsymbol{\omega} + [A_{H,u}] \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - ([A_{G,\dot{u}}] + [A_{H,\dot{u}}]) \boldsymbol{\omega} \\ -2[A_{F,\dot{u}}] \boldsymbol{\omega} + [A_{E,\omega}] \boldsymbol{\omega} + [A_{G,\omega}] \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

A expressão final em espaço de estados de cada caso é apresentada nas Eqs. (4.75) e (4.76).

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{R}}_C \\ [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ A_m^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{array} \right\} + A_m^{-1} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL}) \end{array} \right\} \quad (4.75)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_q(t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{R}}_C \\ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_{1:3} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} q_4 \\ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{q}_{1:3} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ A_m^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{array} \right\} + A_m^{-1} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL}) \end{array} \right\} \quad (4.76)$$

### 4.3 Dinâmica para múltiplos componentes flexíveis

Existem dois cenários possíveis para a adição de um segundo componente flexível ao satélite: ele tem conexão apenas com a plataforma rígida; ou ele tem alguma conexão com o primeiro componente (ambos compartilham algum GDL comum).

No primeiro caso, a mesma abordagem da Subseção 4.2 pode ser estendida adicionando ao vetor de estado os deslocamentos e as velocidades modais  $\mathbf{u}_{F,2}$  e  $\dot{\mathbf{u}}_{F,2}$ , respectivamente. Como o acoplamento das equações anteriores se dá aos termos cruzados entre  $\dot{\mathbf{R}}_C$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  e as deformações na expressão da velocidade de cada nó (Eq. 4.12), é possível observar que não existem termos cruzados entre as deformações de componentes distintos.

Em um sistema com  $N_C$  componentes flexíveis distintos conectados apenas à plataforma rígida, cada um com  $N_r$  elementos na representação modal, as definições dos vetores e das matrizes da Subseção 4.2 alteram-se de acordo com as Eqs. (4.77)–(4.82). As matrizes definidas nas Eqs. (4.41)–(4.44) da Subseção 4.2.3 são redefinidas de acordo com as Eqs. (4.83)–(4.86) a fim de preservar a validade das outras definições posteriores. O resultado final dessas alterações preserva as equações de estado como descritas pela Subseção 4.2.4 nas Eqs. (4.75) e (4.76).

$$N_{tot} = \sum_{r=1}^{N_C} N_r \quad (4.77)$$

$$\mathbf{u}_F = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{F,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{F,N_C} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{tot}} \quad (4.78)$$

$$[M_{Ru}] \triangleq \left[ [M_{Ru}^1] \quad \cdots \quad [M_{Ru}^{N_C}] \right] \in \mathbb{R}^{3 \times N_{tot}} \quad (4.79)$$

$$[M_{\omega u,0}] \triangleq \left[ [M_{\omega u,0}^1] \quad \cdots \quad [M_{\omega u,0}^{N_C}] \right] \in \mathbb{R}^{3 \times N_{tot}} \quad (4.80)$$

$$[M_{uu}] \triangleq \mathbf{blkdiag} \{ [M_{uu}^i] \} = \begin{bmatrix} [M_{uu}^1] & & \\ & \ddots & \\ & & [M_{uu}^{N_C}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{tot} \times N_{tot}} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{F}_u = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_u^{N_C} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{tot}} \quad (4.82)$$

$$[L_{E,jk}] \triangleq \mathbf{blkdiag} \{ [L_{E,jk}^i] \} = \begin{bmatrix} [L_{E,jk}^1] & & \\ & \ddots & \\ & & [L_{E,jk}^{N_C}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{tot} \times N_{tot}} \quad (4.83)$$

$j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3$

$$[L_{F,j}] \triangleq \mathbf{blkdiag} \{ [L_{F,j}^i] \} = \begin{bmatrix} [L_{F,j}^1] & & \\ & \ddots & \\ & & [L_{F,j}^{N_C}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{tot} \times N_{tot}} \quad (4.84)$$

$j = 1, 2, 3$

$$[L_{G,j}] \triangleq \left[ [L_{G,j}^1] \quad \cdots \quad [L_{G,j}^{N_C}] \right] \in \mathbb{R}^{3 \times N_{tot}} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.85)$$

$$[L_{H,j}] \triangleq \left[ [L_{H,j}^1] \quad \cdots \quad [L_{H,j}^{N_C}] \right] \in \mathbb{R}^{3 \times N_{tot}} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.86)$$

No segundo cenário, termos cruzados entre os deslocamentos modais estariam presentes. Porém, a abordagem mais simples seria tratar ambos os apêndices como um único componente, seja por um novo MEF para o cálculo das novas frequências naturais, seja por técnicas de síntese modal (método de Craig-Bampton, por exemplo).

## 4.4 Dinâmica com variável de estado imposta

Uma possível variação no equacionamento do sistema se dá pela imposição dos valores de certas variáveis de estado. Por consequência, todas as suas derivadas e integrais são também impostas. Nesse caso, suas expressões deixam de ser equações diferenciais resolvidas durante a integração numérica para se tornarem equações algébricas calculadas *a posteriori* para medir os esforços aplicados no sistema.

Duas variáveis de estado serão impostas nas expressões abaixo:  $\mathbf{R}_C$  e  $\boldsymbol{\omega}$ . A escolha por ambas se deu pois uma manobra (seja orbital ou de atitude) pode ser definida pelo perfil desejado de ambas e a simulação do sistema completo permite a análise de como as vibrações são excitadas nesse cenário.

### 4.4.1 Dinâmica com posição imposta

Quando  $\mathbf{R}_C$  tem valores impostos, as Eqs. (4.62) e (4.63) são alteradas para separar as derivadas  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_F$  do valor imposto de  $\ddot{\mathbf{R}}_C$ , conforme apresentado pelas Eqs. (4.87) e (4.88). Já a Eq. (4.61) se torna uma expressão para calcular o valor da força  $\mathbf{F}$  aplicada no satélite que resulta no movimento descrito (Eq. 4.89). A Eq. (4.64) mantém-se como uma expressão da variável  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} & \left( [I_{C,tot}] + [A_{G,u}] + [A_{H,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \left( [M_{\omega u,0}] + [A_{F,u}]^T \right) \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{M} + \\ & - \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge] \right) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C - \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \\ & - \left( [A_{G,\dot{u}}] + [A_{H,\dot{u}}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{G,u}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{H,u}] \right) \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} [M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u - \left( [M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ - [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F - 2 [A_{F,\dot{u}}] \boldsymbol{\omega} - [K_{uu}^M] \mathbf{u}_F + [A_{E,\omega}] \boldsymbol{\omega} + [A_{G,\omega}] \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F + \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + \left( \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot}) \right) + 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F) \right) + \left( \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

### 4.4.2 Dinâmica com velocidade angular imposta

Quando  $\boldsymbol{\omega}$  tem valores impostos, as Eqs. (4.61) e (4.63) são alteradas para separar as derivadas  $\ddot{\mathbf{R}}_C$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_F$  do valor imposto de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , conforme apresentado pelas Eqs. (4.90) e (4.91). Já a Eq. (4.62) se torna uma expressão para calcular o valor de torque  $\mathbf{M}$  aplicado

no satélite que resulta no movimento descrito (Eq. 4.92). A Eq. (4.64) mantém-se como uma expressão da variável  $\lambda$ .

$$M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F} - \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) - 2 (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) \quad (4.90)$$

$$[M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u - \left( [M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ - [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F - 2 [A_{F,\dot{u}}] \boldsymbol{\omega} - [K_{uu}^M] \mathbf{u}_F + [A_{E,u\omega}] \boldsymbol{\omega} + [A_{G,\omega}] \boldsymbol{\omega} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{M} = \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge] \right) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [I_{C,tot}] + [A_{G,u}] + [A_{H,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + \left( [M_{\omega u,0}] + [A_{F,u}]^T \right) \ddot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \\ + \left( [A_{G,\dot{u}}] + [A_{H,\dot{u}}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{G,u}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{H,u}] \right) \boldsymbol{\omega} \quad (4.92)$$

#### 4.4.3 Dinâmica com posição e velocidade angular impostas

Quando  $\mathbf{R}_C$  e  $\boldsymbol{\omega}$  têm valores impostos, a Eq. (4.63) é alterada para separar a derivada  $\ddot{\mathbf{u}}_F$  dos valores impostos de  $\ddot{\mathbf{R}}_C$  e  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , conforme apresentado pela Eq. (4.93). Já as Eqs. (4.61) e (4.62) se tornam expressões para calcular o valor da força  $\mathbf{F}$  e do torque  $\mathbf{M}$  aplicados no satélite que resultam no movimento descrito (Eqs. 4.94 e 4.95). A Eq. (4.64) mantém-se como uma expressão da variável  $\lambda$ .

$$[M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u - [M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C - \left( [M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ - [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F - 2 [A_{F,\dot{u}}] \boldsymbol{\omega} - [K_{uu}^M] \mathbf{u}_F + [A_{E,u\omega}] \boldsymbol{\omega} + [A_{G,\omega}] \boldsymbol{\omega} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{F} = M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F + \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) + 2 (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) \quad (4.94)$$

$$\mathbf{M} = \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge] \right) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [I_{C,tot}] + [A_{G,u}] + [A_{H,u}] \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ + \left( [M_{\omega u,0}] + [A_{F,u}]^T \right) \ddot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \\ + \left( [A_{G,\dot{u}}] + [A_{H,\dot{u}}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{G,u}] + [\boldsymbol{\omega} \wedge] [A_{H,u}] \right) \boldsymbol{\omega} \quad (4.95)$$

## 4.5 Limitações do modelo

A limitação principal presente nesse modelo provém da modelagem clássica linear para a elasticidade do componente flexível. Na Eq. (4.30), é possível definir uma rigidez equivalente  $[K_e]$  (Eq. 4.96).

$$[K_e] \triangleq [K_{uu}^M] - [L_E](\boldsymbol{\omega}) \quad (4.96)$$

Pela própria definição de  $[L_E](\boldsymbol{\omega})$  na Eq. (4.16), é possível notar que seu valor é proporcional ao quadrado da velocidade angular. Com isso, o modelo inclui um termo de redução de rigidez proporcional a  $\|\boldsymbol{\omega}\|^2$ . Resultados experimentais, por outro lado, apontam para um fenômeno oposto: o enrijecimento centrífugo (ANDERSON, 1975).

A diferença entre o presente modelo e os resultados experimentais é produto direto do uso de um modelo clássico linear cartesiano (*Classic Linear Cartesian*, CLC) para um cenário de grandes movimentos de rotação (YOO; RYAN; SCOTT, 1995). A correção matemática necessária envolve considerar os termos geométricos não-lineares presentes na relação entre deslocamentos e deformações do material elástico.

O presente trabalho adota a modelagem CLC e observa a precaução necessárias para preservar sua fidelidade: as velocidades angulares presentes na simulação devem ser mantidas abaixo da primeira frequência de vibração do componente. Caso isso não seja respeitado, a rigidez equivalente  $[K_e]$  torna-se negativa e o sistema torna-se matematicamente instável.

Modelo de flexibilidade	$f_{SCA} < 0.1f_1$	$0.1f_1 < f_{SCA} \ll f_1$	$f_{SCA} < f_1, f_{SCA} \approx f_1$	$f_{SCA} > f_1$
Corpo Rígido	<b>Preciso</b>	Impreciso	Impreciso	Impreciso
CLC	Preciso	<b>Preciso</b>	Impreciso	-
Métodos não-lineares	Preciso	Preciso	<b>Preciso</b>	<b>Preciso</b>

Tabela 2 – Lista de modelos de flexibilidade e intervalos de validade

# 5 MODELAGEM DO TRANSDUTOR PIEZOELÉTRICO

Este capítulo apresenta a modelagem dos transdutores piezoelétricos e a estratégia de redução de vibração implementada no sistema. Inicialmente, as equações que governam o efeito piezoelétrico são apresentadas e derivadas para o caso particular do transdutor. Em seguida, as novas variáveis são integradas ao sistema do Capítulo 4 e a estratégia de redução de vibração é apresentada.

## 5.1 Equações do efeito piezoelétrico

A abordagem dessa seção é baseada em trabalhos anteriores sobre o tópico de transdutores piezoelétricos, em especial (JAFFE; COOK JR.; JAFFE, 1971; HAGOOD; FLOTOW, 1991). Para tanto, é necessário definir as variáveis relevantes do elemento para que seja possível equacionar os efeitos direto (a aplicação de uma tensão mecânica resulta em uma diferença de potencial elétrico) e reverso (a aplicação de um campo elétrico resulta em uma deformação mecânica).

Os efeitos mecânicos relevantes no material são a deformação e a tensão. Ambos são tensores simétricos  $[\epsilon]$  e  $[\sigma]$  em  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , mas a representação mais conveniente neste capítulo é de vetores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  em  $\mathbb{R}^6$  como apresentado pela Eq. (5.1).

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Os efeitos elétricos presentes são também dois: o deslocamento elétrico (C/m<sup>2</sup>), representando o comportamento das cargas livres no material; e o campo elétrico (N/C). Como ambos são campos vetoriais no espaço tridimensional, a representação se dá pelos vetores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  da Eq. (5.2), respectivamente.

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

As relações entre  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são dadas por três matrizes de propriedades do material em questão: a permissividade elétrica (em tensão constante, geralmente nula)  $[\epsilon^T]$ , conforme Eq. (5.3); a matriz de flexibilidade (em campo elétrico constante, geralmente nulo)  $[s^E]$ , conforme Eq. (5.4); e a matriz das constantes piezoelétricas  $[d]$ , conforme Eq. (5.5). O efeito direto é equacionado pela Eq. (5.6) e o efeito reverso é dado pela Eq. (5.7).

$$[\epsilon^T] = \begin{bmatrix} \epsilon_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^T \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$[s^E] = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{D} = [\epsilon^T] \mathbf{E} + [d] \mathbf{T} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{S} = [s^E] \mathbf{T} + [d]^T \mathbf{E} \quad (5.7)$$

As expressões das Eqs. (5.6) e (5.7) podem ser combinadas em uma única expressão matricial, conforme apresentado pelas Eq. (5.8) (em versão compacta) e Eq. (5.9) (expandida).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\epsilon^T] & [d] \\ [d]^T & [s^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{T} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & \epsilon_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^T & d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{31} & s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{31} & s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Tratando do transdutor instalado na estrutura, é possível simplificar a expressão usada. Sua fixação será feita colando uma superfície paralela a 12 (normal à direção de polarização 3) no componente, conforme mostrado pela Figura 3. Com isso, é possível aproximar as tensões  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$  como nulas devido às faces livres do material piezoelétrico. Além disso, a conexão elétrica se dá na direção 3 através de dois conectores metálicos: um conector entre a estrutura e o transdutor; outro na superfície visível do transdutor. Com isso, qualquer campo elétrico nas direções 1 e 2 pode ser considerado nulo. As relações simplificadas resultam nas Eqs. (5.10) e (5.11).

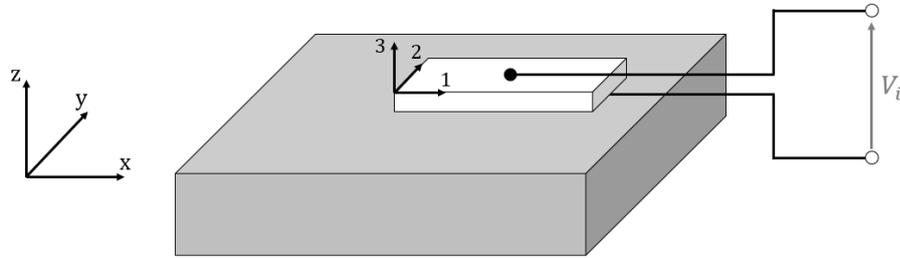


Figura 3 – Transdutor piezoelétrico (branco) instalado na superfície de parte da estrutura (cinza) e conectado ao circuito elétrico

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^T & d_{31} & d_{31} \\ d_{31} & s_{11}^E & s_{12}^E \\ d_{31} & s_{12}^E & s_{11}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_3 \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$S_6 = s_{66}^E T_6$$

$$D_1 = D_2 = 0$$

$$S_3 = d_{33} E_3 + s_{13}^E T_1 + s_{13}^E T_2 \quad (5.11)$$

$$S_4 = S_5 = 0$$

A expressão matricial da Eq. (5.10) pode ser invertida a fim de escrever o campo elétrico e a tensão mecânica como função do deslocamento elétrico e da deformação, como apresentado pela Eq. (5.12). Cabe notar que como a matriz original é simétrica, sua inversa também o será.

$$\begin{Bmatrix} E_3 \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} D_3 \\ S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

O material enfim é assumido como ortotrópico, com os eixos 1 e 2 associados ao módulo de Young  $E_X$  e o plano 12 associado ao módulo de cisalhamento  $G_{XY}$  e ao coeficiente de Poisson  $\nu_{XY}$ . Com esses valores, é possível calcular os elementos de compliância da Eq. (5.10) e a matriz  $[C]$  como os apresentados nas Eqs. (5.13) e (5.14).

$$\begin{aligned} s_{11}^E &= \frac{1}{E_X} \\ s_{12}^E &= -\frac{\nu_{XY}}{E_X} \\ s_{66}^E &= \frac{1}{G_{XY}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$[C] = \frac{1}{2d_{31}^2 E_X (1 + \nu_{XY}) - \epsilon_3 (1 - \nu_{XY}^2)} \begin{bmatrix} \nu_{XY}^2 - 1 & d_{31} E_X (\nu_{XY} + 1) & d_{31} E_X (\nu_{XY} + 1) \\ d_{31} E_X (\nu_{XY} + 1) & d_{31}^2 E_X^2 - \epsilon_3 E_X & -d_{31}^2 E_X^2 - \epsilon_3 E_X \nu_{XY} \\ d_{31} E_X (\nu_{XY} + 1) & -d_{31}^2 E_X^2 - \epsilon_3 E_X \nu_{XY} & d_{31}^2 E_X^2 - \epsilon_3 E_X \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

É possível observar na expressão de  $[C]$  que, em se tratando de um material sem piezoeletricidade ( $d_{31} = 0$ ), os fenômenos elétricos e mecânicos são desacoplados e o caso clássico de um material ortotrópico é obtido.

A energia potencial associada ao transdutor,  $V^{pz}$ , é calculada pela integral do produto entre as variáveis mecânicas e elétricas em todo o seu volume, conforme apresentado pela Eq. (5.15). A expressão pode ser expandida de acordo com a Eq. (5.16), lembrando que a matriz  $[C]$  é simétrica.

$$V^{pz} = \frac{1}{2} \int_{V_t} [\mathbf{D}^T \mathbf{E} + \mathbf{S}^T \mathbf{T}] dV_t \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{E} + \mathbf{S}^T \mathbf{T} &= C_{11} D_3^2 + C_{22} S_1^2 + C_{33} S_2^2 + \frac{1}{s_{66}^E} S_6^2 + \\ &+ 2C_{12} S_1 D_3 + 2C_{13} S_2 D_3 + 2C_{23} S_1 S_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

A fim de converter essa expressão em algo relacionado às equações de movimento do satélite, retoma-se a análise desenvolvida na Subseção 3.3 que relaciona as deformações do corpo com o deslocamento modal  $\mathbf{u}_F$ . Assim, os valores de  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_6$  podem ser calculados a cada ponto pela Eq. (5.17). Além disso, considerando o transdutor de índice  $i$ , a variável  $D_3$  pode ser considerada constante por todo o plano 12. Como trata-se de um valor de carga elétrica por área, define-se a carga  $Q_i$  associada ao transdutor  $i$  conforme a Eq. (5.18). A expressão então é desenvolvida para a Eq. (5.19)

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z) &= \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M(x, y, z) \mathbf{u}_F \\ S_2(x, y, z) &= \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M(x, y, z) \mathbf{u}_F \\ S_6(x, y, z) &= \boldsymbol{\epsilon}_{12}^M(x, y, z) \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$D_{3,i} = \frac{Q_i}{A_i} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{E} + \mathbf{S}^T \mathbf{T} &= \left[ \frac{C_{11}}{A_i^2} \right] Q_i^2 + 2Q_i \left[ \frac{C_{12}}{A_i} \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M + \frac{C_{13}}{A_i} \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M \right] \mathbf{u}_F + \\ &+ \mathbf{u}_F^T \left[ C_{22} \boldsymbol{\epsilon}_{11}^{MT} \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M + C_{33} \boldsymbol{\epsilon}_{22}^{MT} \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M + \frac{1}{s_{66}^E} \boldsymbol{\epsilon}_{12}^{MT} \boldsymbol{\epsilon}_{12}^M + 2C_{23} \boldsymbol{\epsilon}_{11}^{MT} \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M \right] \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por fim, o potencial de um transdutor piezoelétrico  $i$  pode ser expresso de acordo com a Eq. (5.20), na qual os termos  $[K_{uu}^P]$ ,  $\mathbf{K}_{Qu,i}$  e  $K_{QQ,i}$  são definidos pelas Eqs. (5.21)–(5.23), respectivamente.

$$V^{pz} = \frac{1}{2} Q_i K_{QQ,i} Q_i + Q_i \mathbf{K}_{Qu,i} \mathbf{u}_F + \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T [K_{uu}^P] \mathbf{u}_F \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} [K_{uu}^P] &\triangleq t_{P,i} \int_{A_i} C_{22} (\boldsymbol{\epsilon}_{11}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M + C_{33} (\boldsymbol{\epsilon}_{22}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M + \frac{1}{s_{66}^E} (\boldsymbol{\epsilon}_{12}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{12}^M + \\ &+ C_{23} \left( (\boldsymbol{\epsilon}_{11}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M + (\boldsymbol{\epsilon}_{22}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M \right) dA_i \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{K}_{Qu,i} \triangleq \frac{t_{P,i}}{A_i} \int_{A_i} C_{12} \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M + C_{13} \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M dA_i \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (5.22)$$

$$K_{QQ,i} \triangleq \frac{C_{11} t_{P,i}}{A_i} \quad (5.23)$$

No caso múltiplos elementos piezoelétricos montados na estrutura, os termos  $Q_i$  são agrupados no vetor  $\mathbf{Q}$  (Eq. 5.24) e a energia potencial é expressa na Eq. (5.25), na qual as matrizes  $[K_{uu}^P]$ ,  $[K_{Qu}]$  e  $[K_{QQ}]$  são definidas nas Eqs. (5.26)–(5.28).

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N_Q} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_Q} \quad (5.24)$$

$$V^{pz} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [K_{QQ}] \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T [K_{Qu}] \mathbf{u}_F + \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T [K_{uu}^P] \mathbf{u}_F \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} [K_{uu}^P] \triangleq & \sum_{i=1}^{N_Q} t_{P,i} \int_{A_i} C_{22} (\boldsymbol{\epsilon}_{11}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M + C_{33} (\boldsymbol{\epsilon}_{22}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M + \frac{1}{s_{66}^E} (\boldsymbol{\epsilon}_{12}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{12}^M + \\ & + C_{23} \left( (\boldsymbol{\epsilon}_{11}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{22}^M + (\boldsymbol{\epsilon}_{22}^M)^T \boldsymbol{\epsilon}_{11}^M \right) dA_i \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$[K_{Qu}] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Qu,1} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{Qu,N_Q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_Q \times N} \quad (5.27)$$

$$[K_{QQ}] \triangleq \mathbf{diag} \{ K_{QQ,i} \} = \begin{bmatrix} K_{QQ,1} & & \\ & \ddots & \\ & & K_{QQ,N_Q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_Q \times N_Q} \quad (5.28)$$

## 5.2 Equações de movimento do sistema

A energia potencial total do sistema considera a energia elástica da deformação, já discutida no Capítulo 4, e a energia dos transdutores deste capítulo, conforme a Eq. (5.29) revela.

$$V = V^{el} + V^{pz} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_F^T \left( [K_{uu}^M] + [K_{uu}^P] \right) \mathbf{u}_F + \mathbf{Q}^T [K_{Qu}] \mathbf{u}_F + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [K_{QQ}] \mathbf{Q} \quad (5.29)$$

Com esse novo elemento no sistema, as equações de movimento são alteradas de duas formas: a derivada da energia potencial pela coordenada generalizada  $\mathbf{u}_F$  tem um novo valor; e o sistema possui uma quarta coordenada generalizada  $\mathbf{Q}$ .

A primeira alteração afeta apenas a terceira equação de movimento obtida no Capítulo 4 (Eq. 4.63). Sua nova expressão é apresentada na Eq. (5.30).

$$\begin{aligned}
[M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}} + ([M_{\omega u,0}]^T + [A_{F,u}]) \dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u + \\
- [C_{mod}] \dot{\mathbf{u}}_F - 2[A_{F,\dot{u}}] \boldsymbol{\omega} - ([K_{uu}^M] + [K_{uu}^P]) \mathbf{u}_F - [K_{Qu}]^T \mathbf{Q} + [A_{E,u\omega}] \boldsymbol{\omega} + [A_{G,\omega}] \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

A segunda alteração  $\mathbf{V}^{PZ}$  vetor de tensões  $V_i$  aplicadas em cada transdutor  $i$ .

$$\delta W = \mathbf{F}^T A_{B/N} \delta \mathbf{R} + \mathbf{M}^T [D_{\omega/a}] \delta \mathbf{a} + \mathbf{F}_u^T \delta \mathbf{u}_F + \mathbf{V}_{PZ}^T \delta \mathbf{Q} \tag{5.31}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \mathbf{0}_{N_Q} \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}_{N_Q} \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{Q}} = [K_{Qu}] \mathbf{u}_F + [K_{QQ}] \mathbf{Q} \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \mathbf{0}_{N_Q} \tag{5.35}$$

$$[K_{Qu}] \mathbf{u}_F + [K_{QQ}] \mathbf{Q} = \mathbf{V}_{PZ} \tag{5.36}$$

### 5.3 Estratégias para redução de vibração

As estratégias abordadas nesta seção são todas passivas com um circuito elétrico dissipativo conectado ao transdutor.

Para calibragem dos valores de resistência e indução, é interessante calcular a capacitância equivalente dos transdutores. Para tanto, considera-se o satélite em uma condição estática sem carregamentos (SALES; RADE; SOUZA, 2013), para a qual a

Eq. (5.30) é simplificada e o deslocamento modal  $\mathbf{u}_F$  depende apenas do vetor  $\mathbf{Q}$ , conforme a Eq. (5.37).

$$\mathbf{u}_F = -[K_{uu}^P]^{-1} [K_{Qu}]^T \mathbf{Q} \quad (5.37)$$

A substituição desse resultado na Eq. (5.36) resulta na Eq. (5.38), a partir da qual a matriz  $C_{eq}$  pode ser definida (Eq. 5.39). A capacitância equivalente de cada elemento piezoelétrico  $i$  é o elemento da diagonal principal  $C_{eq,ii}$ .

$$\mathbf{Q} = \left( [K_{QQ}] - [K_{Qu}] [K_{uu}^P]^{-1} [K_{Qu}]^T \right)^{-1} \mathbf{V}_{PZ} \quad (5.38)$$

$$[C_{eq}] \triangleq \left( [K_{QQ}] - [K_{Qu}] [K_{uu}^P]^{-1} [K_{Qu}]^T \right)^{-1} \quad (5.39)$$

### 5.3.1 Múltiplos circuitos resistivos

Caso o transdutor seja conectado a resistores, cada elemento do vetor

$$V_{PZ,i} = -R_{PZ,i} \dot{Q}_i \quad (5.40)$$

$$\mathbf{V}_{PZ} = -[R_{PZ}] \dot{\mathbf{Q}} \quad (5.41)$$

Cada transdutor conectado no seu próprio resistor

$$[R_{PZ}] \triangleq \mathbf{diag} \{R_{PZ,i}\} = \begin{bmatrix} R_{PZ,1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{PZ,N_Q} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$[R_{PZ}] \dot{\mathbf{Q}} + [K_{QQ}] \mathbf{Q} = -[K_{Qu}] \mathbf{u}_F \quad (5.43)$$

O estado de espaços modificado para o sistema incluindo um circuito resistivo é expresso pelas Eqs. (5.44) e (5.45) para uma representação mínima de atitude. Para o uso de quatérnios, parte-se das Eqs. (4.67) e (4.76) e obtém-se resultado similar.

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_F \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{12+2N+N_Q} \quad (5.44)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_C \\ [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ A_m^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} + A_m^{-1} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL}) \\ - [R_{PZ}]^{-1} ([K_{QQ}] \mathbf{Q} + [K_{Qu}] \mathbf{u}_F) \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

O valor ótimo para a resistência do circuito é indicado por (HAGOOD; FLOTOW, 1991; SALES; RADE; SOUZA, 2013) como a expressão da Eq. (5.46).

$$R_{PZ,i}^{opt} = \frac{1}{C_{eq,i} \omega_r^{SC}} \sqrt{1 - \frac{d_{31}^2 E_X (1 - \nu_{XZ} \nu_{ZX})}{\epsilon_3^T (1 + \nu_{XY}) (1 - \nu_{XY} - 2\nu_{XZ} \nu_{ZX})}} \quad (5.46)$$

### 5.3.2 Múltiplos circuitos indutivos-resistivos

$$V_{PZ,i} = -R_{PZ,i} \dot{Q}_i - L_{PZ,i} \ddot{Q}_i \quad (5.47)$$

$$[L_{PZ}] \triangleq \mathbf{diag} \{L_{PZ,i}\} = \begin{bmatrix} L_{PZ,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{PZ,N_Q} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{V}_{PZ} = -[R_{PZ}] \dot{\mathbf{Q}} - [L_{PZ}] \ddot{\mathbf{Q}} \quad (5.49)$$

$$[L_{PZ}] \ddot{\mathbf{Q}} + [R_{PZ}] \dot{\mathbf{Q}} + [K_{QQ}] \mathbf{Q} = -[K_{Qu}] \mathbf{u}_F \quad (5.50)$$

O estado de espaços modificado para um circuito resistivo-indutivo é expresso pelas Eqs. (5.51) e (5.52) para uma representação mínima de atitude. Para o uso de quatérnios, parte-se das Eqs. (4.67) e (4.76) e obtém-se resultado similar.

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{12+2N+2N_Q} \quad (5.51)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_C \\ [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ \dot{\mathbf{Q}} \\ A_m^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} + A_m^{-1} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL}) \\ -[L_{PZ}]^{-1} ([R_{PZ}] \dot{\mathbf{Q}} + [K_{QQ}] \mathbf{Q} + [K_{Qu}] \mathbf{u}_F) \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

A otimização da resistência e da indutância no circuito depende do parâmetro  $K$ , definido pela Eq. (5.53), que calcula a diferença nas frequências de vibração do corpo quando os transdutores estão conectados em circuitos abertos ( $\omega_r^{OC}$ , imposição de deslocamento elétrico nulo) e curto-circuitados ( $\omega_r^{SC}$ , imposição de campo elétrico nulo).

$$K = \frac{\sqrt{(\omega_r^{OC})^2 - (\omega_r^{SC})^2}}{\omega_r^{SC}} \quad (5.53)$$

Apesar dessa análise não ter sido realizada neste trabalho, seu valor é muito menor que 1 e portanto os

$$\begin{aligned} r^{opt} &= \frac{K\sqrt{2}}{1+K^2} \\ \delta^{opt} &= \sqrt{1+K^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$R_{PZ,i}^{opt} = \frac{r^{opt}}{C_{eq,i}\omega_r^{SC}} \quad (5.55)$$

$$L_{PZ,i}^{opt} = \frac{1}{C_{eq,i}(\delta^{opt}\omega_r^{SC})^2} \quad (5.56)$$

### 5.3.3 Circuito resistivo único

aaaa

$$V_{PZ,i} = -R_{PZ} \sum_{i=1}^{N_Q} \dot{Q}_i \quad (5.57)$$

$$\mathbf{V}_{PZ} = -R_{PZ} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \quad (5.58)$$

Cada transdutor conectado no seu próprio resistor

$$R_{PZ} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} + [K_{QQ}] \mathbf{Q} = -[K_{Qu}] \mathbf{u}_F \quad (5.59)$$

Nota-se que, diferentemente da abordagem resistiva anterior, a matriz que multiplica  $\dot{\mathbf{Q}}$  é singular. Logo, a abordagem matemática para lidar com o sistema precisa ser diferente e evitar a inversão dessa matriz.

$$Q_{tot} \triangleq \sum_{i=1}^{N_Q} Q_i = \mathbf{1}^T \mathbf{Q} \quad (5.60)$$

$$\dot{Q}_{tot} \triangleq \sum_{i=1}^{N_Q} \dot{Q}_i = \mathbf{1}^T \dot{\mathbf{Q}} \quad (5.61)$$

O estado de espaços modificado para o sistema incluindo um circuito resistivo é expresso pelas Eqs. (5.44) e (5.45) para uma representação mínima de atitude. Para o uso de quatérnios, parte-se das Eqs. (4.67) e (4.76) e obtém-se resultado similar.

$$R_{PZ} \dot{Q}_{tot} = -K_{QQ,i} Q_i - \mathbf{K}_{Qu,i} \mathbf{u}_F \quad i = 1, \dots, N_Q \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ K_{QQ,1} & -K_{QQ,2} & 0 & \cdots & 0 \\ K_{QQ,1} & 0 & -K_{QQ,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{QQ,1} & 0 & 0 & \cdots & -K_{QQ,N_Q} \end{bmatrix} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{tot} \\ (\mathbf{K}_{Qu,2} - \mathbf{K}_{Qu,1}) \mathbf{u}_F \\ (\mathbf{K}_{Qu,3} - \mathbf{K}_{Qu,1}) \mathbf{u}_F \\ \vdots \\ (\mathbf{K}_{Qu,N_Q} - \mathbf{K}_{Qu,1}) \mathbf{u}_F \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

$$\dot{Q}_{tot} = -\frac{K_{QQ,i}}{R_{PZ}} Q_i - \frac{1}{R_{PZ}} \mathbf{K}_{Qu,i} \mathbf{u}_F = g_1(Q_{tot}, \mathbf{u}_F) \quad (5.64)$$

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_F \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ Q_{tot} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{13+2N} \quad (5.65)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}_C \\ [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ A_m^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{pmatrix} + A_m^{-1} (\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_{NL}) \\ g_1(Q_{tot}, \mathbf{u}_F) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

O valor ótimo para a resistência do circuito é indicado por (HAGOOD; FLOTOW, 1991; SALES; RADE; SOUZA, 2013) como a expressão da Eq. (5.46).

$$R_{PZ}^{opt} = \frac{1}{\text{tr} \{ [C_{eq}] \} \omega_r^{SC}} \sqrt{1 - \frac{d_{31}^2 E_X (1 - \nu_{XZ} \nu_{ZX})}{\epsilon_3^T (1 + \nu_{XY}) (1 - \nu_{XY} - 2\nu_{XZ} \nu_{ZX})}} \quad (5.67)$$

### 5.3.4 Circuito indutivo-resistivo único

$$V_{PZ,i} = -R_{PZ} \sum_{i=1}^{N_Q} \dot{Q}_i - L_{PZ} \sum_{i=1}^{N_Q} \ddot{Q}_i \quad (5.68)$$

$$\mathbf{V}_{PZ} = -R_{PZ} [1_{N_Q \times N_Q}] \dot{\mathbf{Q}} - L_{PZ} [1_{N_Q \times N_Q}] \ddot{\mathbf{Q}} \quad (5.69)$$

$$L_{PZ} [1_{N_Q \times N_Q}] \ddot{\mathbf{Q}} + R_{PZ} [1_{N_Q \times N_Q}] \dot{\mathbf{Q}} + [K_{QQ}] \mathbf{Q} = - [K_{Qu}] \mathbf{u}_F \quad (5.70)$$

É útil usar os valores de  $Q_{tot}$  e  $\dot{Q}_{tot}$  já definidos pelas Eqs. (5.60) e (5.61) e definir a derivada  $\ddot{Q}_{tot}$ , conforme a Eq. (5.71). Com essa nomenclatura, é possível reescrever cada linha da Eq. (5.70) na expressão da Eq. (5.72).

$$\ddot{Q}_{tot} \triangleq \sum_{i=1}^{N_Q} \ddot{Q}_i = \mathbf{1}^T \ddot{\mathbf{Q}} \quad (5.71)$$

$$L_{PZ} \ddot{Q}_{tot} = -R_{PZ} \dot{Q}_{tot} - K_{QQ,i} Q_i - \mathbf{K}_{Qu,i} \mathbf{u}_F \quad i = 1, \dots, N_Q \quad (5.72)$$

O mesmo sistema descrito pela Eq. (5.63) permite o cálculo de  $\mathbf{Q}$  nesse cenário, pois os termos de indutância e resistência são constantes em todas as linhas da expressão matricial. A expressão final é apresentada pela Eq. (5.73), cuja abreviação se dará pela função  $g_2(Q_{tot}, \dot{Q}_{tot}, \mathbf{u}_F)$ . O novo espaço de estados para representação mínima de atitude é apresentado pelas Eqs. (5.74) e (5.75).

$$\ddot{Q}_{tot} = -\frac{R_{PZ}}{L_{PZ}} \dot{Q}_{tot} - \frac{K_{QQ,i}}{L_{PZ}} Q_i - \frac{1}{L_{PZ}} \mathbf{K}_{Qu,i} \mathbf{u}_F = g_2(Q_{tot}, \dot{Q}_{tot}, \mathbf{u}_F) \quad (5.73)$$

$$\mathbf{x}_a(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_C \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{u}_F \\ Q_{tot} \\ \dot{\mathbf{R}}_C \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ \dot{Q}_{tot} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{14+2N} \quad (5.74)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_C \\ [D_{a/\omega}] \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{u}}_F \\ \dot{Q}_{tot} \\ A_m^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{F}_u \end{Bmatrix} + A_m^{-1} (Q_L + Q_{NL}) \\ g_2(Q_{tot}, \dot{Q}_{tot}, \mathbf{u}_F) \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

A otimização dos parâmetros se dá pelas Eqs. (5.76) e (5.77). Os termos são idênticos à Subseção 5.3.2, porém com a já citada distinção de que o valor de capacitância é computado como o traço da Eq. (5.39) porque a conexão em paralelo leva à soma de cada elemento.

$$R_{PZ}^{opt} = \frac{r^{opt}}{\text{tr} \{ [C_{eq}] \} \omega_r^{SC}} \quad (5.76)$$

$$L_{PZ}^{opt} = \frac{1}{\text{tr} \{ [C_{eq}] \} (\delta^{opt} \omega_r^{SC})^2} \quad (5.77)$$

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção apresenta os resultados numéricos obtidos nas simulações computacionais. Primeiramente, o modelo do satélite é apresentado, incluindo sua configuração e os valores numéricos relevantes. Em seguida, a análise estrutural é executada no programa ANSYS e os modos de vibração são extraídos. Com

### 6.1 Modelo do satélite

O modelo adotado possui uma plataforma rígida e um componente flexível, como mostrado na Figura 4. O primeiro é adotado como um cuboide de dimensões  $1.70 \times 2.00 \times 2.30$  m, massa 1500 kg uniformemente distribuída e baricentro  $C$ . A plataforma do satélite é considerada como um cuboide de dimensões e de massa 1500 kg uniformemente distribuída. As propriedades do satélite estão compiladas na Tabela 3.

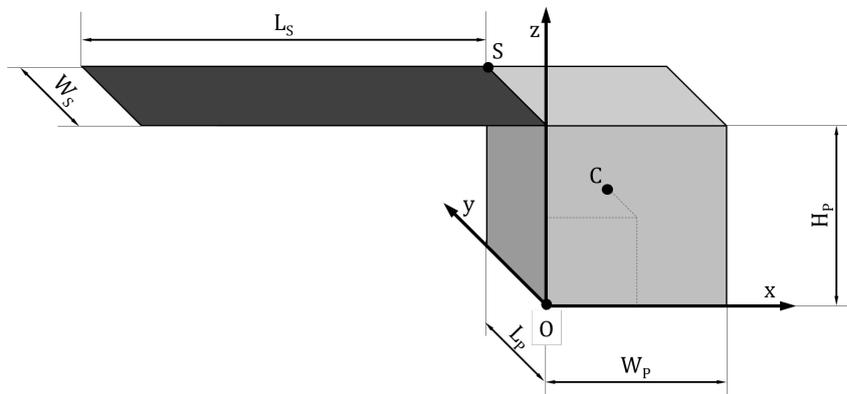


Figura 4 – Modelo físico do satélite para simulações

Propriedade	Valor	Unidade
$M_P$	1500	kg
$W_P$	1.70	m
$L_P$	2.00	m
$H_P$	2.30	m
$I_{C,1}$	1161.25	$\text{kg m}^2$
$I_{C,2}$	1022.5	$\text{kg m}^2$
$I_{C,3}$	861.25	$\text{kg m}^2$

Tabela 3 – Propriedades mecânicas do núcleo favo-de-mel

O componente flexível é um painel solar de dimensões  $6.00 \times 1.70 \times 0.037$  m. Sua estrutura é um painel sanduíche com faces de Polímero Reforçado com Fibra de Carbono

(PRFC) e núcleo favo-de-mel. As propriedades das camadas adesivas serão ignoradas neste trabalho. Para determinar a relação entre as espessuras dos elementos (apresentadas na Tabela 4), segue-se a sugestão de otimização de rigidez flexional em que a massa do núcleo deve ser o dobro da massa das faces combinadas (WIJKER, 2008).

Camada	Material	Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]	Espessura [mm]	Massa por área [kg/m <sup>2</sup> ]
Células fotovoltaicas	-	-	0.8	2.1
Face superior	PRFC	1420	0.5	0.71
Núcleo favo-de-mel	Alumínio	80	35	2.80
Face inferior	PRFC	1420	0.5	0.71
Total	-	-	37	6.3

Tabela 4 – Camadas do painel solar

As propriedades mecânicas dos componentes são mostradas nas Tabelas 5 e 6. Observa-se que cada face do painel é composta por duas camadas de tecido de fibra de carbono, posicionadas em ângulo relativo de 45°.

Propriedade	Valor	Unidade
$E_X$ (direção W)	1	MPa
$E_Y$ (direção L)	1	MPa
$E_Z$ (direção T)	255	MPa
$\nu_{XY}$	0.49	adim.
$\nu_{YZ}$	0.001	adim.
$\nu_{XZ}$	0.001	adim.
$G_{XY}$	$1 \times 10^{-6}$	MPa
$G_{YZ}$	37	MPa
$G_{XZ}$	70	MPa

Tabela 5 – Propriedades mecânicas do núcleo favo-de-mel

Na Subseção 6.4, o sistema adota oito transdutores piezoelétricos posicionados na face inferior do painel solar e feitos de titanato zirconato de chumbo  $Pb(Ti_{0.48}Zr_{0.52})O_3$  (JAFFE; COOK JR.; JAFFE, 1971). As propriedades mecânicas e elétricas são apresentadas na Tabela 7 e as posições de montagem estão na Tabela 8.

## 6.2 Simulação da estrutura

A estrutura é simulada no programa ANSYS<sup>®</sup> usando a ferramenta ACP (Pre) para o pré-processamento do painel sanduíche, enquanto as células fotovoltaicas são adicionadas apenas como massa distribuída na face superior (nenhuma contribuição estrutural).

Propriedade	Valor	Unidade
t	0.25	mm
$E_X$ (paralelo)	91.82	GPa
$E_Y$ (paralelo)	91.82	GPa
$E_Z$ (normal)	9	GPa
$\nu_{XY}$ (plano)	0.05	adim.
$\nu_{YZ}$ (seção)	0.3	adim.
$\nu_{XZ}$ (seção)	0.3	adim.
$G_{XY}$ (plano)	19.5	GPa
$G_{YZ}$ (seção)	3	GPa
$G_{XZ}$ (seção)	3	GPa

Tabela 6 – Propriedades mecânicas do tecido de fibra de carbono

Propriedade	Valor	Unidade
$E_X$	72.5	GPa
$E_Z$	58.5	GPa
$\nu_{XY}$	0.295	adim.
$\nu_{XZ}$	0.421	adim.
$G_{XY}$	26.0	GPa
$d_{31}$	$-93.5 \times 10^{-12}$	C/N
$\epsilon_3$	$6.46 \times 10^{-9}$	F/m
$t_{P,i}$	1	mm
$A_i$	10 000	mm <sup>2</sup>

Tabela 7 – Propriedades mecânicas e elétricas dos transdutores piezoelétricos (JAFPE; COOK JR.; JAFPE, 1971)

Transdutor	Coordenadas $x$ (m)	Coordenadas $y$ (m)
1	0–0.1	0.7–0.8
2	0–0.1	0.9–1.0
3	0.2–0.3	0.7–0.8
4	0.2–0.3	0.9–1.0
5	0.4–0.5	0.7–0.8
6	0.4–0.5	0.9–1.0
7	0.6–0.7	0.7–0.8
8	0.6–0.7	0.9–1.0

Tabela 8 – Posição dos transdutores piezoelétricos na face inferior do painel solar

O modelo considera a superfície engastada em uma das arestas menores e utiliza 1020 elementos *SHELL281*, como descrito em mais detalhe no Apêndice B.1.

Os 10 primeiros modos de vibração são apresentados na Tabela 9.

Modo	Frequência [Hz]	Tipo
1	0.8194	Flexão
2	5.1194	Flexão
3	6.1205	Torção
4	14.2792	Flexão
5	18.8454	Torção
6	21.4458	Lateral
7	27.8219	Flexão
8	32.9627	Torção
9	45.6332	Flexão
10	49.2558	Torção

Tabela 9 – Modos de vibração do painel sanduíche

### 6.3 Simulação da dinâmica livre do satélite

O satélite é testado em uma simulação sem aplicação de forças ou amortecimento das vibrações para garantir a validade do modelo matemático na região de interesse para as variáveis de estado. Como já notado na Subseção 4.5, altas velocidades angulares para o satélite resultam em erros que desrespeitam a conservação de energia do sistema.

### 6.4 Simulação das estratégias de redução de vibração

A comparação entre as estratégias propostas na Subseção 5.3 se dá em uma manobra com velocidade angular imposta.

## 7 CONCLUSÃO

A modelagem do movimento de um satélite com componentes flexíveis foi derivada e representada na forma de espaço de estados não-linear. O equacionamento é abrangente nos parâmetros relevantes desses componentes (que podem ser sólidos tridimensionais em qualquer formato ou simplificações como placas e cascas). Alterações nos modelos de flexibilidade permitem ainda uma maior amplitude de cenários a serem simulados.

A maior restrição envolvida no modelo matemático trata da faixa de frequências para a qual a simulação é fidedigna ao movimento. Conforme discutido, valores altos de velocidade angular resultam em uma falha numérica na simulação, enquanto valores intermediários resultam em trajetórias e manobras que não conservam a energia mecânica mesmo quando dissipações são nulas. A solução passa por alterar o modelo de elasticidade linear (que permite a representação modal utilizada) para o modelo não-linear (cuja validade se estende para grandes deslocamentos). Referências no assunto podem ser adaptadas para esta aplicação no SCA.

# Referências

- ANDERSON, G. On the extensional and flexural vibrations of rotating bars. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 10, n. 5, p. 223–236, 1975. Citado na página 40.
- ANSYS, I. *2. Element Classifications: 2.2. summary of element types*. 2019. Disponível em: <[https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp-v194/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_CH3\\_2.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp-v194/ans_elem/Hlp_E_CH3_2.html)>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 70.
- ANSYS, I. *Theory Reference: Chapter 11: Shape functions*. 2019. Disponível em: <[https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp-v194/ans\\_thry/thy\\_shp.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp-v194/ans_thry/thy_shp.html)>. Citado 4 vezes nas páginas 4, 70, 71 e 72.
- BAILLARGEON, B. P.; VEL, S. S. Active vibration suppression of sandwich beams using piezoelectric shear actuators: experiments and numerical simulations. *Journal of intelligent material systems and structures*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 16, n. 6, p. 517–530, 2005. Citado na página 11.
- DAVIS, R. M.; DIALETIS, D. Flexible spacecraft dynamics. In: \_\_\_\_\_. *Spacecraft attitude determination and control*. Dordrecht, The Netherlands: Springer Science & Business Media, 2012. v. 73, p. 548–557. Citado na página 9.
- DOZIO, L. *Dynamics and Control of Space Structures*. 2014. 480 p. 2014 Lecture Notes, Politecnico di Milano. Citado na página 12.
- DU, I. S.; GRIMES, R. G.; LEWIS, J. G. *Users' guide for the Harwell-Boeing sparse matrix collection (Release I)*. [S.l.], 1992. Citado na página 72.
- FANSON, J.; CAUGHEY, T. K. Positive position feedback control for large space structures. *AIAA journal*, v. 28, n. 4, p. 717–724, 1990. Citado na página 11.
- FONSECA, I. M. da et al. Attitude and vibration control of a satellite containing flexible solar arrays by using reaction wheels, and piezoelectric transducers as sensors and actuators. *Acta Astronautica*, Elsevier, v. 139, p. 357–366, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- FRISWELL, M. I.; INMAN, D. J. The relationship between positive position feedback and output feedback controllers. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 8, n. 3, p. 285, 1999. Citado na página 11.
- GOH, C.; CAUGHEY, T. On the stability problem caused by finite actuator dynamics in the collocated control of large space structures. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 41, n. 3, p. 787–802, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- HAGOOD, N. W.; FLOTOW, A. von. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 146, n. 2, p. 243–268, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 11, 41, 49 e 52.

- HU, Q.; MA, G. Vibration suppression of flexible spacecraft during attitude maneuvers. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 28, n. 2, p. 377–380, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- JAFFE, B.; COOK JR., W. R.; JAFFE, H. *Piezoelectric ceramics*. London: Elsevier, 1971. 328 p. (Non-Metalic Solids, v. 3). Citado 4 vezes nas páginas 5, 41, 56 e 57.
- KITTUR, M. G.; HUSTON, R. L. Mesh refinement in finite element analysis by minimization of the stiffness matrix trace. 1989. Citado na página 21.
- LIANG, J.; LIAO, W. Piezoelectric energy harvesting and dissipation on structural damping. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 20, n. 5, p. 515–527, 2009. Citado na página 11.
- MARKLEY, F. L.; CRASSIDIS, J. L. *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 9, 22, 74 e 75.
- MARQUI, C. D. et al. Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting from aeroelastic vibrations using the doublet-lattice method. *Journal of Vibration and Acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 133, n. 1, p. 011003, 2011. Citado na página 11.
- MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1970. 157–160 p. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 67.
- MEIROVITCH, L.; QUINN, R. Equations of motion for maneuvering flexible spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 10, n. 5, p. 453–465, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 27, 29, 30 e 65.
- MEYER, J. L. et al. Vibration suppression of a spacecraft flexible appendage using smart material. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 95, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- MILLER, K. S. On the inverse of the sum of matrices. *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, v. 54, n. 2, p. 67–72, 1981. ISSN 0025570X, 19300980. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2690437>>. Citado na página 35.
- NEWMAN, S. M. *Active damping control of a flexible space structure using piezoelectric sensors and actuators*. Dissertação (Mestrado) — US Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1992. Citado na página 11.
- NIKISHKOV, G. *Introduction to the finite element method*. 2004. 45 p. 2004 Lecture Notes, University of Aizu. Disponível em: <<http://homepages.cae.wisc.edu/~suresh/ME964Website/M964Notes/Notes/introfem.pdf>>. Citado na página 70.
- NOVOTNY, A.; FANCELLO, E. Um refinamento h, pe hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, v. 14, n. 1, p. 25–48, 1998. Citado na página 21.
- ORSZULIK, R.; SHAN, J. Vibration control using input shaping and adaptive positive position feedback. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 34, n. 4, p. 1031–1044, 2011. Citado na página 11.

- SALES, T.; RADE, D.; SOUZA, L. D. Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 403–412, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 11, 47, 49 e 52.
- SCHAUB, H.; JUNKINS, J. L. Rigid body kinematics. In: \_\_\_\_\_. *Analytical Mechanics of Aerospace Systems*. Washington, D.C.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003. (AIAA Education Series), cap. 3, p. 96–103. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- SHIMPI, R.; PATEL, H. Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 296, n. 4-5, p. 979–999, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 25.
- SONG, G.; AGRAWAL, B. N. Vibration suppression of flexible spacecraft during attitude control. *Acta Astronautica*, Elsevier, v. 49, n. 2, p. 73–83, 2001. Citado na página 11.
- SONG, G. et al. Active vibration damping of composite beam using smart sensors and actuators. *Journal of aerospace engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 15, n. 3, p. 97–103, 2002. Citado na página 11.
- WIJKER, J. J. *Spacecraft structures*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. 159-160 p. Citado na página 56.
- WON, C. C. et al. Application of piezoelectric devices to vibration suppression. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 17, n. 6, p. 1333–1338, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- YOO, H. H.; RYAN, R.; SCOTT, R. A. Dynamics of flexible beams undergoing overall motions. *Journal of Sound and vibration*, Elsevier, v. 181, n. 2, p. 261–278, 1995. Citado na página 40.

# Apêndices

# APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações da mecânica lagrangiana são apresentadas nas Equações (4.24) (para a posição  $\mathbf{R}_C$ ), (4.26) (para os deslocamentos modais  $\mathbf{u}_F$ ), (4.27) (para a representação mínima de atitude  $\mathbf{a}$ ) e (4.35) (para a representação de atitude usando os quatérnios  $q$ ). As seções seguintes tratam da derivação de cada uma das expressões, nesta ordem.

## A.1 Posição como coordenada generalizada

A primeira coordenada generalizada é a posição do satélite  $\mathbf{R}_C$ , para qual os termos da equação são calculados nas Eqs. (A.1)–(A.5). Depois da substituição, a expressão é pré-multiplicada por  $A_{B/N}$  e o resultado é apresentado na Eq. (A.6).

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{R}}_C} = M_{tot} \dot{\mathbf{R}}_C + A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot}) + A_{B/N}^T [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{R}}_C} \right) &= M_{tot} \ddot{\mathbf{R}}_C + A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) + A_{B/N}^T [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ &+ A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) + A_{B/N}^T [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F + \\ &+ A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) + A_{B/N}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) + \\ &+ A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{R}_C} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_C} = \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{R}}_C} = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} M_{tot} A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [\mathbf{S}_{C,tot} \wedge]^T + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}} + [M_{Ru}] \ddot{\mathbf{u}}_F &= \mathbf{F} + \\ - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot})) - 2 (\boldsymbol{\omega} \times ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F)) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Deslocamento modal como coordenada generalizada

Outra coordenada generalizada é o deslocamento modal  $\mathbf{u}_F$ . Os termos da equação são derivados nas Eqs. (A.7)–(A.11). A expressão final é apresentada na Eq. (A.12).

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_F} = [M_{uu}] \dot{\mathbf{u}}_F + [M_{Ru}]^T A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C + [M_{\omega u,0}]^T \boldsymbol{\omega} + [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_F} \right) &= [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F + [M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + [M_{Ru}]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge]^T A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C + \\ &+ [M_{\omega u,0}]^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{u}}_F + [L_F] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_F} = [M_{Ru}]^T [\boldsymbol{\omega} \wedge]^T A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C + [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + [L_G]^T (\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + [L_F]^T (\boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{u}}_F \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_F} = [K_{uu}^M] \mathbf{u}_F \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{u}}_F} = [C_{uu}^M] \dot{\mathbf{u}}_F \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} &[M_{Ru}]^T A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + ([M_{\omega u,0}]^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + [L_F] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{u}_F) + [M_{uu}] \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_u + \\ &- \left( [C_{uu}^M] + 2[L_F] (\boldsymbol{\omega}) \right) \dot{\mathbf{u}}_F - \left( [K_{uu}^M] - [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + [L_G]^T (\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A aproximação final utilizada é remover os termos quadráticos em  $\mathbf{u}_F$  e  $\dot{\mathbf{u}}_F$  ou seus termos cruzados. Diferentemente de (MEIROVITCH; QUINN, 1987), essa hipótese de pequenos deslocamentos e velocidades de vibração não será estendida para a aceleração modal  $\ddot{\mathbf{u}}_F$ , pois a natureza de alta frequência de certos modos de vibração pode levar a contribuições relevantes por parte desses termos. Além disso, como visto no Capítulo 4, a preservação dessa contribuição mantém a simetria de matrizes de interesse e não gera problemas numéricos ou aumentos significativos de tempo computacional.

## A.3 Atitude (representação mínima) como coordenada generalizada

Para o modelo que utiliza a representação mínima de atitude, os termos da segunda equação lagrangiana são calculados pelas Eqs. (A.13)–(A.16), (A.18) e (A.19). A expressão

final é apresentada na Eq. (A.20).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + ([\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]) A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C + [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \\ &+ [L_G] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [\Psi_i] \mathbf{u}_F \times ([\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [\Psi_i] \mathbf{u}_F) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= ([I_{C,tot}] + \mathbf{u}_F^T [M_{uu}] \mathbf{u}_F) \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \times (A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C \times \boldsymbol{\omega}) + \\ &+ ([M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F) \times (A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C) + (\mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \times (A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C) + \\ &+ \left( [M_{\omega u,0}] + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge] [\Psi_i] \right) \ddot{\mathbf{u}}_F + \\ &+ ([L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega})) \dot{\mathbf{u}}_F + ([L_G] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H] (\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F + 2 \left( \dot{\mathbf{u}}_F^T [M_{uu}] \mathbf{u}_F \right) \boldsymbol{\omega} + \\ &- \sum_{i=1}^{N_1} m_i \left( (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F) [\Psi_i] \mathbf{u}_F + (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + (\dot{\boldsymbol{\omega}}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) [\Psi_i] \mathbf{u}_F \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega} \wedge] \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \left( (\mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \times A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C \right) + \\ &+ [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + [\boldsymbol{\omega} \wedge] \left( [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_1} m_i \left( (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F) [\Psi_i] \mathbf{u}_F - (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) ([\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [\Psi_i] \mathbf{u}_F) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial a_r} &= \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial a_r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} &= \left\{ \begin{aligned} &\dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial a_1} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ &\dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial a_2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ &\dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial a_3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Através de algum esforço matemático, é possível converter a Eq. (A.16) na expressão simplificada apresentada na Eq. (A.17).

$$[D_{a/\omega}]^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} = - (A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{a}}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \times (A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C) + ([I_{C,tot}] + \mathbf{u}_F^T [M_{uu}] \mathbf{u}_F) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ & + ([L_G] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H] (\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F + \left( [M_{\omega u,0}] + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge] [\Psi_i] \right) \ddot{\mathbf{u}}_F = \\ & = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} - ([L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega})) \dot{\mathbf{u}}_F - 2 (\dot{\mathbf{u}}_F^T [M_{uu}] \mathbf{u}_F) \boldsymbol{\omega} + \\ & - [\boldsymbol{\omega} \wedge] [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F - [\boldsymbol{\omega} \wedge] \left( [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + \\ & + \sum_{i=1}^{N_1} m_i \left( (\dot{\boldsymbol{\omega}}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) [\Psi_i] \mathbf{u}_F + (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) (\boldsymbol{\omega} \times [\Psi_i] \mathbf{u}_F) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Como feito no Apêndice A.2, os termos quadráticos em  $\mathbf{u}_F$  e  $\dot{\mathbf{u}}_F$  são desprezados e o resultado final é apresentado na Eq. (4.29).

#### A.4 Atitude (quatérnios) como coordenada generalizada

Dado que a expressão da energia cinética (Eq. 4.17) contém a velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  em vez da derivada dos quatérnios  $\dot{q}$ , convém utilizar a equação lagrangiana para uma quasi-coordenada generalizada (MEIROVITCH, 1970). Os termos são calculados pelas Eqs. (A.13)–(A.15) e (A.21)–(A.26).

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}_0} = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\omega}^T [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot}) + \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) + \\ & + \boldsymbol{\omega}^T [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_G] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \dot{\mathbf{u}}_F^T [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \\ & + \mathbf{u}_F^T [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial q_r} &= \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\
 \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_r} &= \begin{cases} -2q_r [I_{3 \times 3}] + 2q_4 [\mathbf{e}_r \wedge] + 2(\mathbf{e}_r q^T + q \mathbf{e}_r^T), & r = 1, 2, 3 \\ 2q_4 [I_{3 \times 3}] + 2[q \wedge], & r = 4 \end{cases} \\
 \frac{\partial T}{\partial q} &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_1} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ \dot{\mathbf{R}}_C^T \frac{\partial A_{B/N}^T}{\partial q_4} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

É possível de se demonstrar com algum esforço matemático que a expressão de Eq. (A.23) pode ser transformada na Eq. (A.24).

$$[D_{q/\omega}]^T \frac{\partial T}{\partial q} = \left\{ \begin{array}{l} - (A_{B/N} \dot{\mathbf{R}}_C) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \\ \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_{C,tot} + [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [M_{Ru}] \mathbf{u}_F) \end{array} \right\} \tag{A.24}$$

A energia potencial  $V$  e a função de dissipação de Rayleigh  $D$  não contém termos que dependam da atitude ou da rotação do sistema, logo ambas não contribuem para esta equação de movimento (Eqs. A.25 e A.26).

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \mathbf{0} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{0} \\
 \frac{\partial D}{\partial \omega_0} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

A equação final em  $\boldsymbol{\omega}$  é expressa em Eq. (A.27), enquanto a equação em  $\omega_0$  é expressa em Eq. (A.28) e é apenas usada para determinar a variável  $\lambda$  (que funciona

como um multiplicador de Lagrange no sistema).

$$\begin{aligned}
 & ([\mathbf{S}_{C,tot} \wedge] + [[M_{Ru}] \mathbf{u}_F \wedge]) A_{B/N} \ddot{\mathbf{R}}_C + \left( [M_{\omega u,0}] + \sum_{i=1}^{N_1} m_i [[\Psi_i] \mathbf{u}_F \wedge] [\Psi_i] \right) \ddot{\mathbf{u}}_F + \\
 & + ([I_{C,tot}] + (\mathbf{u}_F [M_{uu}] \mathbf{u}_F) [I_{3 \times 3}]) \dot{\boldsymbol{\omega}} + ([L_G] (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [L_H] (\dot{\boldsymbol{\omega}})) \mathbf{u}_F + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_1} m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) [\Psi_i] \mathbf{u}_F = \mathbf{M} + [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \\
 & - (\boldsymbol{\omega} \times [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F) - 2 (\dot{\mathbf{u}}_F [M_{uu}] \mathbf{u}_F) \boldsymbol{\omega} + \\
 & - \left( [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \dot{\mathbf{u}}_F - \left( \boldsymbol{\omega} \times [L_G] (\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \right) \mathbf{u}_F + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_1} m_i \left( (\boldsymbol{\omega}^T [\Psi_i] \mathbf{u}_F) (2[\Psi_i] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega} \times [\Psi_i] \mathbf{u}_F) \right)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
 & \boldsymbol{\omega}^T [I_{C,tot}] \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T [M_{\omega u,0}] \dot{\mathbf{u}}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_G] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \boldsymbol{\omega}^T [L_H] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \\
 & + \dot{\mathbf{u}}_F^T [L_F] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_F^T [L_E] (\boldsymbol{\omega}) \mathbf{u}_F - \dot{\mathbf{R}}_C^T A_{B/N}^T [M_{Ru}] \dot{\mathbf{u}}_F = \lambda
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Como feito no Apêndice A.2, os termos quadráticos em  $\mathbf{u}_F$  e  $\dot{\mathbf{u}}_F$  são desprezados e o resultado final é apresentado na Eq. (4.37).

# APÊNDICE B – DETALHES DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Este apêndice foca em explicar particularidades do programa ANSYS® para a simulação estrutural. O Apêndice B.1 descreve os elementos disponíveis e o Apêndice B.3 descreve o método usado e a forma de arquivo obtida na exportação dos dados do modelo.

## B.1 Malha e refinamento

Como explicado na Subseção 3.1, malhas de sólidos usam nós com três deslocamentos como graus de liberdade, chamados  $UX$ ,  $UY$  e  $UZ$  pelo programa. Para nós que representam espessuras ou seções, podem ser usados também três variáveis para rotações, chamados  $ROTX$ ,  $ROTY$  e  $ROTZ$ .

Como diversos programas de MEF, o refino  $p$  dos elementos da malha no ANSYS® está limitado até a 2ª ordem. As opções para análise estrutural, ilustradas na Figura 5, são: *BEAM189* para vigas de Timoshenko; *SURF154* para placas de Kirchhoff–Love; *SHELL281* para placas de Mindlin–Reissner; e *SOLID186* para sólidos (ANSYS, 2019a). Dessa forma, o foco do refinamento está na redução dos elementos até a precisão desejada (refino  $h$ ).

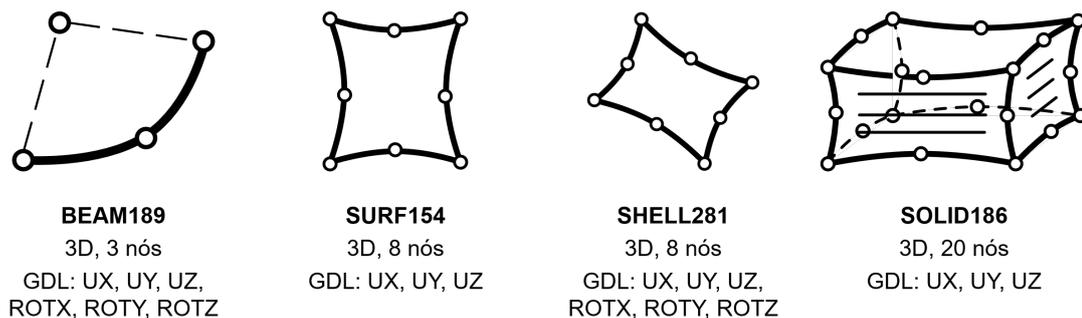


Figura 5 – Tipos de elementos estruturais do ANSYS, adaptado de (ANSYS, 2019a)

## B.2 Funções isoparamétricas

As funções de interpolação dos elementos quadráticos estão descritas a seguir (ANSYS, 2019b). É possível demonstrar que as expressões são equivalentes às funções isoparamétricas como apresentadas por (NIKISHKOV, 2004). A nomenclatura dos nós e das coordenadas locais foi alterada para se adequar com o apresentado anteriormente.

### B.2.1 *BEAM189*

O elemento está ilustrado na Figura 6 e as funções de interpolação são expressas na Eq. (B.1).

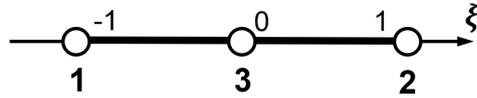


Figura 6 – Coordenadas locais isoparamétricas do elemento *BEAM189*, adaptado de (ANSYS, 2019b)

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{2} (\xi_i \xi + \xi^2), & i = 1, 2 \\ (1 - \xi^2), & i = 3 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

### B.2.2 *SURF154* e *SHELL281*

O elemento está ilustrado na Figura 7 e as funções de interpolação são expressas na Eq. (B.2).

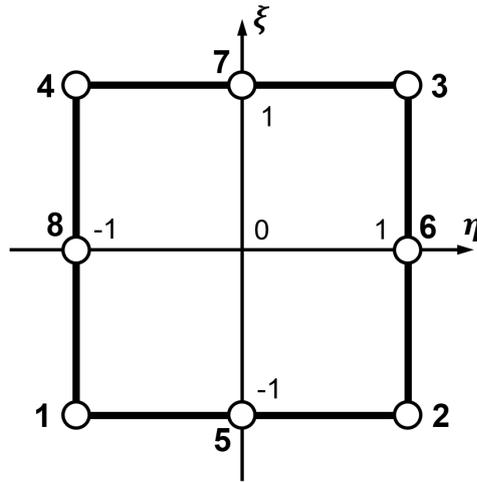
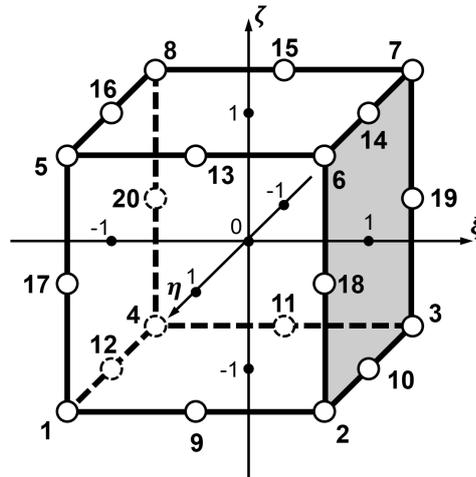


Figura 7 – Coordenadas locais isoparamétricas dos elementos *SURF154* e *SHELL281*, adaptado de (ANSYS, 2019b)

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), & i = 1, \dots, 4 \\ \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta), & i = 5, 7 \\ \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2), & i = 6, 8 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

### B.2.3 *SOLID186*

O elemento está ilustrado na Figura 8 e as funções de interpolação são expressas na Eq. (B.3).


 Figura 8 – Coordenadas locais isoparamétricas do elemento *SOLID186*, adaptado de (ANSYS, 2019b)

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2), & i = 1, \dots, 8 \\ \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), & i = 9, 11, 13, 15 \\ \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta_i \zeta), & i = 10, 12, 14, 16 \\ \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 - \zeta^2), & i = 17, \dots, 20 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

### B.3 Exportação dos dados do modelo

Os dados exportados são listados abaixo, citando também seus formatos e os comandos usados.

- *Lista de nós e coordenadas*: extraída na forma de uma lista em arquivo .txt através do comando *NLIST*;
- *Matrizes de massa e rigidez*: extraídos no formato Harwell-Boeing (DU; GRIMES; LEWIS, 1992) através dos comandos *\*SMAT* e *\*EXPORT*;
- *Vetores de modos de vibração*: extraídos na forma de uma lista em arquivo .txt através dos comandos *\*VEC* e *\*EXPORT*;
- *Relação entre GDLs e nós*: extraídos na forma de uma lista em arquivo .mapping através do comando *HBMAT*.

A massa associada a cada nó pode ser obtido de duas formas distintas, mas com resultados equivalentes: multiplicar a matriz de massa por um vetor de elementos iguais a 1 (Eq. B.4); ou aplicar na malha um campo de aceleração constante de valor  $\begin{Bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}^T$  em uma análise estática e coletar o vetor de forças aplicadas. Ambos

os casos permitem a obtenção do valor das massas  $m_i$  como descritas no Capítulo 4 de forma redundante (pois cada ponto possui em geral três GDLs que resultam no mesmo valor de massa).

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ m_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = [M] \mathbf{1}_{N_{GDL}} \quad (\text{B.4})$$

# APÊNDICE C – REPRESENTAÇÕES MÍNIMAS DE ATITUDE

Este apêndice apresenta três representações mínimas comuns na área de controle de atitude: ângulos de Euler; vetor de Gibbs (ou parâmetros de Rodrigues); e Parâmetros Modificados de Rodrigues (MRP). Apresentam-se as definições e as relações cinemáticas, além de discutir-se os pontos positivos e negativos de cada uma.

## C.1 Vetor de Gibbs

O vetor de Gibbs é por vezes chamado de "quatérnio não-normalizado" por deter o mesmo significado que o vetor  $\mathbf{q}_{1:3}$  sem satisfazer a restrição de módulo unitário. Sua definição é apresentada na Eq. (C.1). A matriz de atitude é calculada pela expressão da Eq. (C.2) e a conversão entre  $\dot{\mathbf{g}}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  é feita usando as matrizes das Eqs. (C.3) e (C.4). A singularidade da representação ocorre para rotações de  $180^\circ$  em relação à atitude de referência, quando o valor de  $q_4$  é nulo (SCHAUB; JUNKINS, 2003; MARKLEY; CRASSIDIS, 2014).

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{q}}{q_4} \quad (\text{C.1})$$

$$A_{B/N} = [I]_3 + 2 \frac{[\mathbf{g}^\wedge]^2 - [\mathbf{g}^\wedge]}{(1 + \|\mathbf{g}\|^2)} \quad (\text{C.2})$$

$$[D_{\mathbf{g}/\boldsymbol{\omega}}] = \frac{1}{2} ([I]_3 + [\mathbf{g}^\wedge] + \mathbf{g}\mathbf{g}^T) \quad (\text{C.3})$$

$$[D_{\boldsymbol{\omega}/\mathbf{g}}] = \frac{1}{(1 + \|\mathbf{g}\|^2)} [[I]_3 - [\mathbf{g}^\wedge]] \quad (\text{C.4})$$

## C.2 MRP

O MRP é uma variação do Vetor de Gibbs desenvolvida para evitar problemas de singularidades durante grandes manobras. Sua definição está apresentada na Eq. (C.5). Como os valores de quatérnions  $q$  e  $-q$  equivalem à mesma atitude, existe um valor de MRP

distinto, representado por  $p^S$  e comumente chamado de "shadow" ("sombra"), que também resulta a mesma atitude, conforme definido pela Eq. (C.6). A diferença entre ambos está no ponto de singularidade: o primeiro não é capaz de representar rotações de  $360^\circ$  a partir da referência (quando  $q_4$  tem valor  $-1$ ); o segundo não é capaz de representar uma rotação de  $0^\circ$  (quando  $q_4$  tem valor  $1$ ). Assim, é possível evitar qualquer singularidade numa manobra através da troca entre valores quando conveniente (em geral, quando os ângulos atingem  $\pm 180^\circ$ ). O sistema resultante é contínuo por partes, mas cada troca de parâmetro resulta num salto finito.

A matriz de atitude é calculada pela expressão da Eq. (C.7) e a conversão entre  $\dot{\mathbf{g}}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  é feita usando as matrizes das Eqs. (C.8) e (C.9) (SCHAUB; JUNKINS, 2003; MARKLEY; CRASSIDIS, 2014).

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{1 + q_4} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{p}^S = \frac{-\mathbf{q}}{1 - q_4} \quad (\text{C.6})$$

$$A_{B/N} = [I]_3 + \frac{8[\mathbf{p}\wedge]^2 - 4(1 - \|\mathbf{p}\|^2)[\mathbf{p}\wedge]}{(1 + \|\mathbf{p}\|^2)^2} \quad (\text{C.7})$$

$$[D_{p/\omega}] = \frac{1}{4} \left( (1 - \|\mathbf{p}\|^2) [I]_3 + 2[\mathbf{p}\wedge] + 2\mathbf{p}\mathbf{p}^T \right) \quad (\text{C.8})$$

$$[D_{\omega/p}] = \frac{16}{(1 + \|\mathbf{p}\|^2)^2} [D_{p/\omega}]^T \quad (\text{C.9})$$