8.5. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 3. PROPOSIÇÃO.

Considere, conforme mostra a figura abaixo, um pião simétrico, sujeito à ação da força peso, deprezando qualquer forma de atrito. O eixo fixo *OZ* é vertical e *O* é uma articulação.

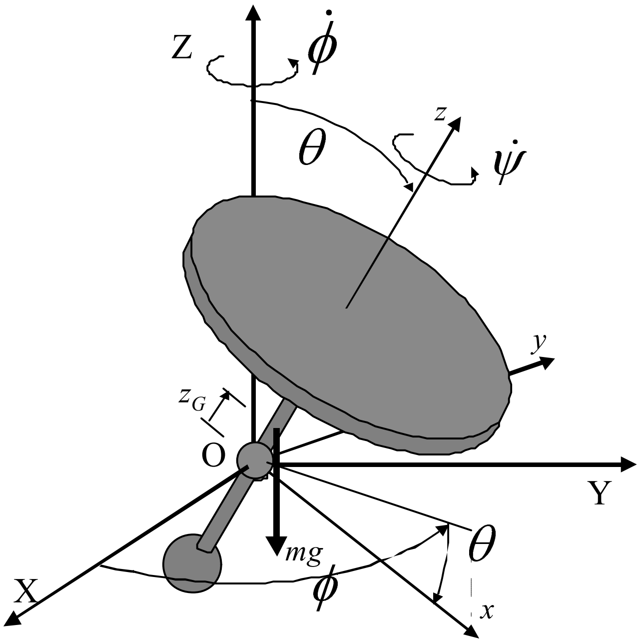


Figura 21 Pião simétrico.

Nestas condições, (ver Capítulo 6) pode-se mostrar que uma única equação diferencial ordinária, não-linear, rege o movimento do 'pião',

$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\beta - \alpha\cos\theta)}{I\mathrm{sen}^3\theta} = mgz_G\mathrm{sen}\theta \quad , \qquad (1)$$

onde $\alpha = K_{OZ}$, $\beta = K_{Oz}$ são dois invariantes do movimento. Note que estes parâmetros dependem apenas das condições iniciais.

8.5.1. Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo as equações do movimento.

(a) Estude o item 6.5.
(b) Interprete a situação particular de precessão estacionária, agora em termos dos invariantes $\alpha = K_{OZ}$, $\beta = K_{Oz}$, utilizando a equação (1) acima.
(c) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\overline{\theta}$.
(d) Discuta a estabilidade "giroscópica", considerando os seguintes casos: $J > I$ (pião "achatado") e $J < I$ (pião esbelto). O que você pode concluir?
(e) Discuta os casos de precessão "direta"($\dot{\psi}/\dot{\phi} > 0$) e "retrógada" ($\dot{\psi}/\dot{\phi} < 0$).

8.5.2. Modelagem do sistema através de simulador.

(f) Elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou MATLAB/SIMULINK) um diagrama de blocos, representando a equação (1). A saída será a posição angular θ.

8.5.3. Simulação do modelo computacional

(g) Teste o modelo SCILAB, com a equação não-linear. Simule primeiramente o caso ideal de precessão estacionária, com os dados e condições iniciais abaixo. Plote gráficos de: $\theta(t);\phi(t);\dot{\theta}(t);\dot{\phi}(t);\dot{\psi}(t)$; $X_G(t),Y_G(t),Z_G(t)$ e $Y_G(X_G)$. Analise o resultado e interprete-o.
(h) Com os mesmos dados e condições iniciais $\dot{\psi}(0),\dot{\phi}(0),\dot{\theta}(0)$, utilize agora um valor inicial $\theta(0) = \pi/4$, repita a simulação. Plote gráficos de: $\theta(t);\phi(t);\dot{\theta}(t);\dot{\phi}(t);\dot{\psi}(t)$; $X_G(t),Y_G(t),Z_G(t)$ e $Y_G(X_G)$. Analise o resultado e interprete-o.
(i) Aumente a rotação própria inicial $\dot{\psi}(0) = 5\text{rad/s}$. Repita a simulação e a análise. O que você pode concluir a respeito da restauração giroscópica?
(j) Diminua a rotação própria inicial para $\dot{\psi}(0) = 0.5\text{rad/s}$. Repita a simulação e a análise. Interprete o movimento.
(k) Varie sistematicamente dados e parâmetros iniciais. Explore seu modelo de simulação, procurando compreender as várias possibilidades de movimento que mesmo este caso particular apresenta.

DADOS PARA SIMULAÇÃO:

$$mgz_G = 0.2\ \text{Nm}; \qquad I = 1{,}0\ \text{kg m}^2; \qquad J = 2I;$$

$$\text{condições iniciais}\ :\quad \overline{\theta} = \pi/6;\ \dot{\psi}(0) = 1.0\ \text{rad/s};\ \dot{\theta}(0) = 0$$

8.6. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 3. EXEMPLO DE ANÁLISE.

Para o problema 3, proposto, pede-se:

(a) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\overline{\theta}$.

(b) Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILA (ou MATLAB/SIMULINK), chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).

(c) A figura abaixo mostra dois resultados de simulação da equação (1). Responda às seguintes perguntas:

1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária?

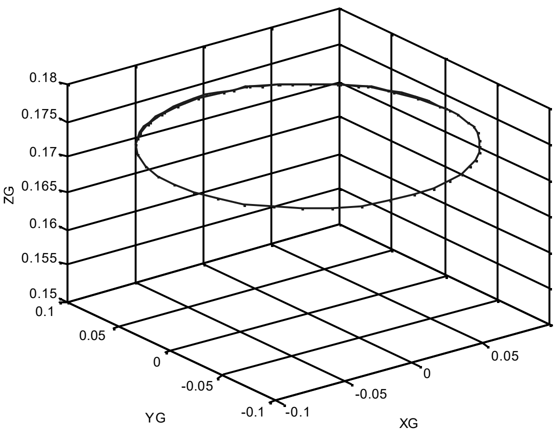
2 - Observando os gráficos do caso (b), vê-se que a taxa de precessão atinge um valor máximo quando a taxa de de rotação própria atinge valores mínimos e também quando o ângulo de nutação tem valores máximos. Justifique esta afirmação à luz do princípio de conservação de momento angular.

3 - Avalie o período da nutação no caso (b)?

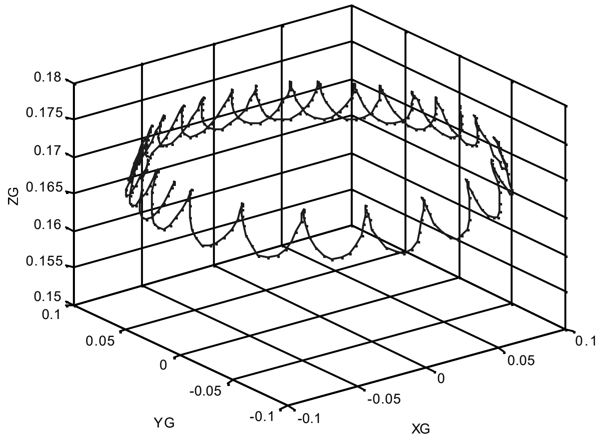
4 - Se a rotação própria fosse aumentada o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

Parâmetros da simulação: $mgz_G = 0.2$ Nm; $I = 1{,}0\ \text{kg m}^2$; $J = 2I$

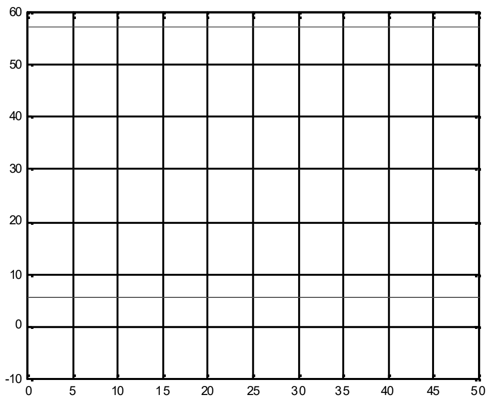
condições iniciais : $\theta(0) = \pi/6$; $\dot{\psi}(0) = 1.0$ rad/s; $\dot{\theta}(0) = 0$


0.18
0.175
0.17
0.165
0.16
0.155
0.15
ZG
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
YG
-0.1
-0.05
0
0.05
XG

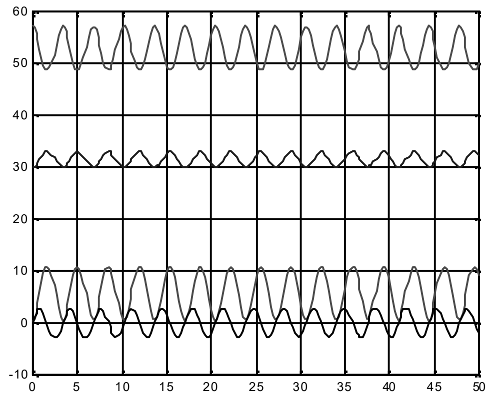
(a)


0.18
0.175
0.17
0.165
0.16
0.155
0.15
ZG
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
YG
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
XG

(b)


60
50
40
30
20
10
0
-10
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

(a)


60
50
40
30
20
10
0
-10
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

(b)

ANÁLISE DETALHADA E COMENTADA

(a) Precessão estacionária significa: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$; $\dot{\psi} = \omega$; $\dot{\phi} = \Omega$; $\theta = \overline{\theta}$, e portanto de $\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\text{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$ e $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$, vem

$$\beta = K_{Oz} = J(\omega + \Omega\cos\overline{\theta}) \tag{2}$$

que fornece a taxa de precessão:

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{\cos\overline{\theta}}\left(\frac{\beta}{J} - \omega\right)} \tag{3}$$

ou, alternativamente,

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{2}\left\{-\frac{J\omega}{(J-I)\cos\overline{\theta}} \pm \sqrt{\left(\frac{J\omega}{(J-I)\cos\overline{\theta}}\right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J-I)\cos\overline{\theta}}}\right\}} \tag{4}$$

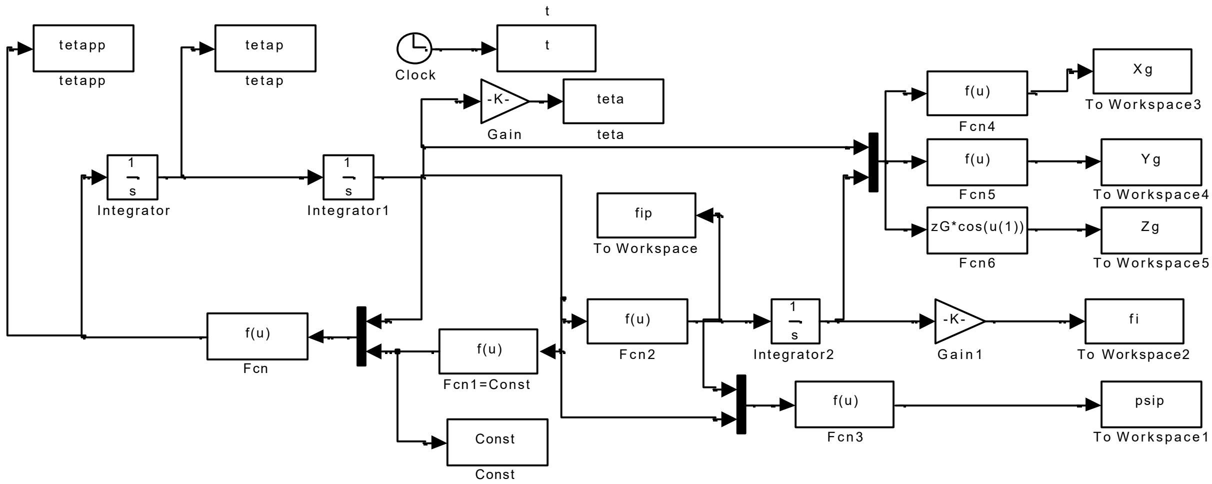
e, da eq. (1), uma relação entre $\overline{\theta}, \alpha$ e β , na forma

$$\boxed{\frac{(\alpha - \beta\cos\overline{\theta})(\beta - \alpha\cos\overline{\theta})}{I\text{sen}^3\overline{\theta}} = mgz_G\text{sen}\overline{\theta}} \tag{5}$$

ou, alternativamente,

$$\boxed{\cos\overline{\theta} = \frac{1}{(1 - \frac{I}{J})\Omega^2}\left(\omega\Omega - \frac{mgz_G}{J}\right)} \tag{6}$$

(b) Diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente MATLAB/SIMULINK, chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).



onde:

$$\mathrm{K} = 180/\pi$$

$$\alpha = K_{OZ}(0) = \left[I\dot{\phi}\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0}$$

$$\beta = K_{Oz}(0) = \left[J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0}$$

$$\text{func} \equiv= (\text{m * g * zG * sin(u(1)) - u(2)/(I * sin(u(1))\^{} 3))/I} = \frac{1}{I}\left[mgz_G\mathrm{sen}\theta - \frac{\text{Const}}{I\mathrm{sen}^3\theta}\right]$$

$$\text{func1} \equiv \text{Const} = (\alpha - \beta\cos\theta_0)(\beta - \alpha\cos\theta_0)$$

$$\text{func2} \equiv \text{(alfa - beta * cos(u(1))) /(I * sin(u(1))\^{} 2)} = (\alpha - \beta\cos\theta)/(\mathrm{I}\sin^2\theta) = \dot{\phi}$$

$$\text{func3} \equiv \text{beta/J - u((1)) * cos(u(2))} = \beta/J - \text{func2}\ \cos\theta = \dot{\psi}$$

$$\text{func4} \equiv \text{zG * sin(u(1)) * cos(u(2))} = z_G\mathrm{sen}\theta\cos\phi = X_G$$

$$\text{func5} \equiv \text{zG * sin(u(1)) * sin(u(2))} = z_G\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi = Y_G$$

$$\text{func6} \cong \text{zG * cos(u(1))} = z_G\ \cos\theta = Z_G$$

(c) *1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária? Observando os gráficos abaixo, indique as posições (instantes) em que a taxa de precessão atinge valores máximos? Justifique as respostas.*

Resposta: O caso (a) corresponde à precessão estacionária, pois o ângulo de nutação é constante e o CG descreve uma trajetória circular.

2- Observando os gráficos abaixo, indique as posições (instantes) em que a taxa de precessão atinge valores máximos? Justifique as respostas.

Resposta: O caso (a) é de precessão estacionária e portanto a taxa de precessão é constante. No caso (b) a taxa de precessão atinge valores máximos toda a vez em que o ângulo de nutação atingir um máximo, ou seja, sempre que Z_G atingir um mínimo.

2 - Avalie o período da nutação no caso (b)?

Resposta: Do gráfico de $\theta(t)$ em (b), contamos 14 ciclos completos em cerca de 47,5 segundos. Portanto o período de nutação é aproximadamente $T_\Theta \cong \frac{47{,}5}{14}\mathrm{s} \cong 3{,}4s$.

3 - Se a rotação própria fosse aumentada o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

Resposta: O período de nutação diminuiria, pois a "rigidez giroscópica", que é proporcional à rotação própria, aumentaria.