

8.4. Precessão Estacionária (Pião)

Um caso particular de movimento de corpo em torno de um ponto é a **Precessão Estacionária** ou regular. Neste caso considera-se que o rotor tenha rotação própria $\dot{\psi}$ constante e que seu eixo próprio Oz , apresente um ângulo de nutação θ constante em relação a vertical, descrevendo um movimento de precessão com velocidade angular de precessão $\dot{\phi}$ também constante em torno do eixo Z . Este é o caso do **PIÃO** (corpo axi-simétrico em rotação em torno de um ponto, não coincidente com o centro de massa, conforme mostrado na Figura 25) considerando apenas um pequeno intervalo de tempo. Este movimento com: $\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$ é possível apenas sob determinadas condições.

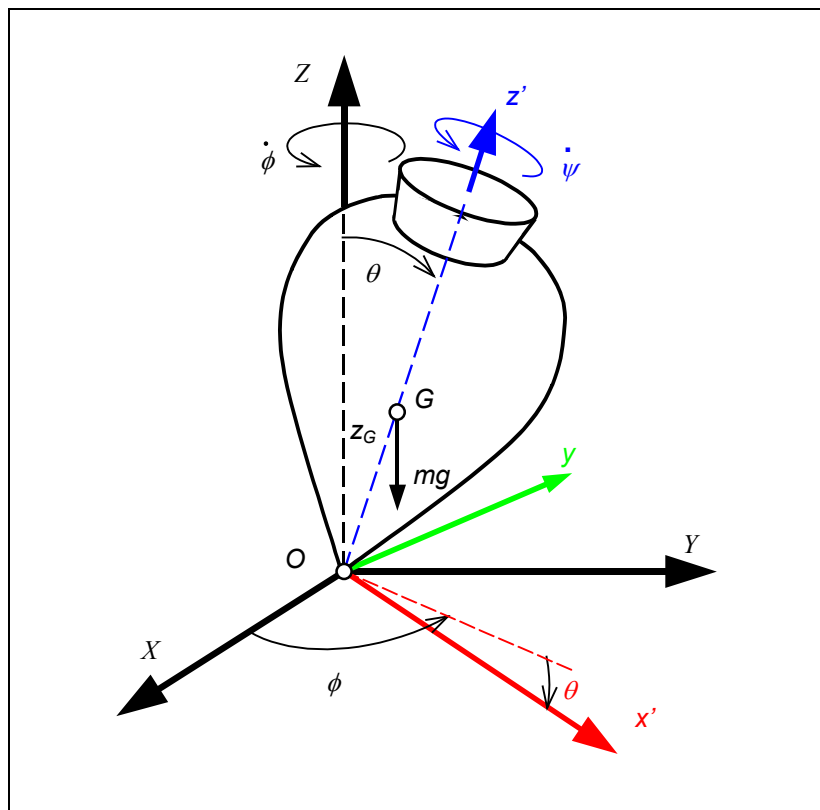


Figura 25 – Movimentos do Pião

Retomando a equação de rotação em torno de um ponto, expressa na base móvel, e anulando os termos descritos para esse caso ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$), obtêm-se uma única equação:

$$\begin{cases} -J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) - J_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + J_z \dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Ox} \\ J_y \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ J_z \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (126)$$

$\dot{\phi} = cte$ $\theta = cte$ $\dot{\theta} = 0$ $\dot{\theta} = 0$
 $\dot{\psi} = cte$ $\dot{\phi} = cte$

$$\begin{cases} 0 = M_{Ox} \\ [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta = M_{Oy} \\ 0 = M_{Oz} \end{cases} \quad (127)$$

Para a segunda equação ser possível é necessário a aplicação de um momento externo na direção \vec{j} que, neste caso, é produzido pela ação gravitacional devido a altura z_G do centro de massa do pião, conforme ilustrado na Figura 25:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (O-O) \wedge \vec{R}_O + (G-O) \wedge m\vec{g} \\ \vec{M}_O &= 0 + z_G \vec{k} \wedge -mg \vec{K} \\ \vec{M}_O &= z_G \vec{k} \wedge -mg (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \\ \vec{M}_O &= mg z_G \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (128)$$

portanto, o momento é ao longo da linha dos nós. Substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned} [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta &= mg z_G \sin \theta \\ (J_z - J_x)\dot{\phi}^2 \cos \theta + J_z \dot{\psi} \dot{\phi} &= mg z_G \end{aligned} \quad (129)$$

Portanto no movimento de precessão estacionária ocorre com ângulo de nutação θ de equilíbrio determinado por:

$$\theta_{eq} = a \cos \left[\frac{mg z_G - J_z \dot{\psi} \dot{\phi}}{(J_z - J_x) \dot{\phi}^2} \right] \quad (130)$$

Considerando ainda um movimento com velocidade angular própria muito maior que a velocidade angular de precessão $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$ (anulando o primeiro termo da equação), obtêm-se:

$$J_z \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cong mg z_G \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\phi} \cong \frac{mg z_G}{J_z} \cdot \frac{1}{\dot{\psi}}} \quad (131)$$

que corresponde a uma situação possível para este movimento. Portanto, velocidade angular do movimento de PRECESSÃO ($\dot{\phi}$ - arrastamento) é inversamente proporcional a velocidade angular própria ($\dot{\psi}$ - relativa). Note também que $J_z \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \vec{j} = J_z (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel})$

Finalmente pode-se obter as reações \vec{R}_O no apoio O , expressas na base móvel $Oxyz$, determinando-se a aceleração do centro de massa, através das suas componentes considerando a **precessão estacionária** ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$) com: $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k}$, $\vec{\omega}_{arr} = \dot{\phi} \vec{K}$, $\dot{\theta} \vec{j} = \vec{0}$ e $(G-O) = z_G \vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\psi} \vec{k} = \vec{0} + \dot{\phi} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) + \dot{\psi} \vec{k} \\ \vec{\omega} &= -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{comp} = \ddot{\psi} \vec{k} + \ddot{\phi} \vec{K} + (\dot{\phi} \vec{K} \wedge \dot{\psi} \vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}} &= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\phi} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \wedge \dot{\psi} \vec{k} = \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] \\ \vec{a}_G &= \vec{0} + (\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} \wedge z_G \vec{k}) + (-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}) \wedge [(-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}) \wedge z_G \vec{k}] \\ \vec{a}_G &= z_G \cdot \dot{\phi}^2 (-\sin \theta \cos \theta \vec{i} - \sin^2 \theta \vec{k}) = -z_G \sin \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k}) \end{aligned} \quad (134)$$

Utilizando o **TR** e o **DFCL**, considerando o caso estacionário, resulta na base móvel $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
m \cdot \vec{a}_G &= \sum \vec{F}_{ext} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= \vec{R}_O - mg \vec{K} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= (Ox \vec{i} + Oy \vec{j} + Oz \vec{k}) - mg (-\text{sen } \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k})
\end{aligned} \tag{135}$$

As reações também podem ser expressas na base fixa **OXYZ**, considerando que $\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k} = \vec{I}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= \vec{R}_O - mg \vec{K} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 \vec{I} &= \vec{R}_O - mg \vec{K}
\end{aligned} \tag{136}$$

e suas componentes em cada direção:

$$\begin{cases} O_X = -m \cdot z_G \text{sen } \theta \dot{\phi}^2 \\ O_Y = 0 \\ O_Z = -m g \end{cases} \tag{137}$$

Note que o centro de massa **G** descreve uma trajetória circular centrípeta de raio $r = z_G \text{sen } \theta$ em torno do eixo vertical **Z**, com velocidade translacional $\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{V}_G = 0 + \dot{\phi} \vec{K} \wedge z_G \vec{k} = z_G \text{sen } \theta \dot{\phi} \vec{J}$ compatível com a componente de aceleração centrípeta $a_c = V^2 / R$. O peso próprio é sustentado apenas pela componente O_Z .

OBSERVAÇÃO: Mantendo a forma completa, a equação diferencial 113, torna-se quadrática de segunda ordem em $\dot{\phi}$, com duas soluções (ver *Pesce*, 2019):

$$\begin{aligned}
[(J_z - J_x) \dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \text{sen } \theta &= m z_G \text{sen } \theta \\
\dot{\phi}^2 + \frac{J_z \dot{\psi}}{(J_z - J_x) \cos \theta} \dot{\phi} - \frac{m g z_G}{(J_z - J_x) \cos \theta} &= 0
\end{aligned} \tag{138}$$

Quando $\cos\theta > 0$ e $J_z > J_x$ (pião achatado) a solução será um movimento **progressivo** (a direção da precessão será a mesma da rotação própria). Dependendo do aspecto do pião (esbelto ou bojudo) o movimento pode ser **retrógrado** (ver *Pesce*, 2019).

INTERPRETAÇÃO GRÁFICA:

As componentes do momento angular do pião nas direções \vec{i} e \vec{k} , para o movimento de precessão estacionária ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$), conforme apresentado na Figura 26a, são:

$$H_{Ox} = -J_x \dot{\phi} \sin\theta \quad \text{e} \quad H_{Oz} = J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \quad (139)$$

Relembrando também que a velocidade angular relativa e absoluta, que estão contidas no plano OZz , conforme apresentado na Figura 26b, são:

$$\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{arr} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K} = 0 + \dot{\phi} \vec{K} \quad (140)$$

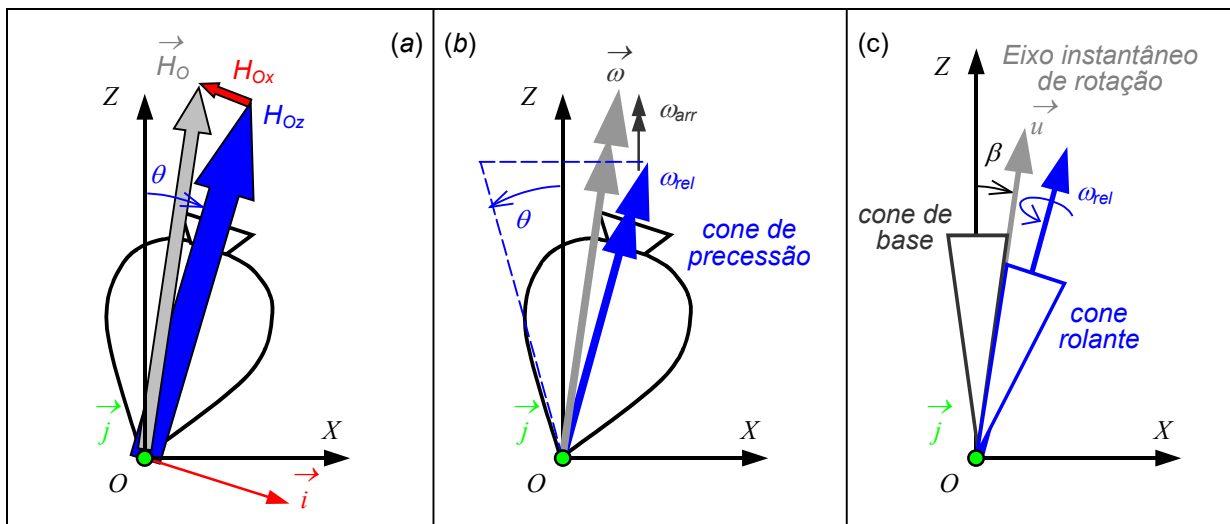


Figura 26 – Cones e Eixo Instantâneo de Rotação

Identifica-se o eixo instantâneo de rotação \vec{u} (linha do pião com velocidade nula naquele instante) alinhado com o momento angular no plano \mathbf{OZz} , em torno do qual o cone rolante (movimento do corpo em torno do eixo móvel z) rola sem escorregar sobre o cone de base (fixo), conforme apresentado na Figura 26c:

$$\vec{H}_O = H_{Ox} \vec{i} + H_{Oz} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{u} = \frac{\vec{H}_O}{|\vec{H}_O|} \quad (141)$$

Note ainda que o cone de precessão (*spin cone*), conforme mostrado na Figura 26b, é caracterizado pelo movimento do vetor velocidade angular própria $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k}$ do corpo em torno do eixo fixo \mathbf{Z} , que tem inclinação θ de nutação.

Finalmente, pode ser de interesse expressar a quantidade de movimento angular na direção vertical \vec{K} ($\vec{K} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}$) da base fixa. Para tanto basta multiplicar a primeira equação da solução apresentada no item 8.2, por $(-\sin \theta)$ e a terceira por $(\cos \theta)$, obtendo após algumas manipulações numéricas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] - J_z \cos \theta \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= -M_{Oz} \sin \theta \\ J_z \cos \theta \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= M_{Oz} \cos \theta \end{aligned} \quad (142)$$

Finalmente acrescentando as duas direções já obtidas no item 8.2, resulta nas direções $\vec{K}, \vec{j}, \vec{k}$ em:

$$\begin{cases} \vec{K} & \frac{d}{dt} [J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] = -M_{Ox} \sin \theta + M_{Oz} \cos \theta = M_{Oz} \\ \vec{j} & \dot{H}_{Oy} = J_y \frac{d\dot{\theta}}{dt} - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ \vec{k} & \dot{H}_{Oz} = J_z \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (143)$$

portanto a quantidade de movimento angular expressa no eixo vertical Z da base fixa, é dado por:

$$\vec{H}_{OZ} = J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta),$$

conforme mostrado na Figura 27b. Esta forma de apresentação da equação de movimento é particularmente útil nos seguintes casos: a) quando o pólo for coincidente com o centro de massa G , ou quando as únicas forças externas agentes sobre o corpo forem o peso e a reação do apoio, no ponto fixo O . Em ambas as situações as componentes do momento externo são $M_{OZ} = M_{Oz} = 0$ e, portanto, a quantidade de movimento angular \vec{H}_{OZ} nesta direção é um “**INVARIANTE**”; ou seja, uma constante do movimento de **precessão** (conservação da quantidade de movimento de precessão na direção Z). O mesmo vale para a quantidade de movimento angular \vec{H}_{Oz} para o movimento de **rotação própria** (na direção z).

No primeiro caso em que $O \equiv G$ têm-se adicionalmente que $M_{Oy} = 0$ (caso do giroscópio), o que significa que a quantidade de movimento angular será invariante. O segundo caso é típico de um pião simétrico, sob ações do próprio peso e da reação no apoio O . Neste caso o momento é ortogonal ao plano OZz , não afetando a quantidade de movimento angular (movimento conservativo).

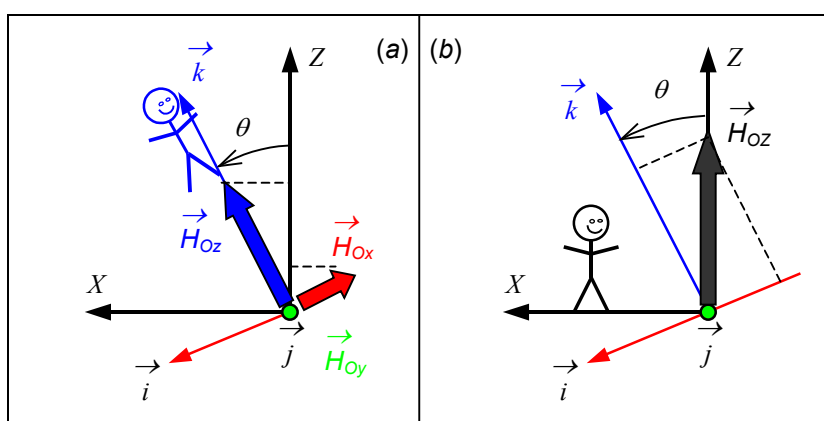


Figura 27 – Quantidade de Movimento Expressa: a) na Base Móvel e b) no Eixo Fixo Z