

Engenharia Automotiva I – PME-3540

Notas de Aula – Parte 1

# **DINÂMICA VEICULAR VERTICAL**

**Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa**

# DINÂMICA VEICULAR

Conteúdo:

1.	INTRODUÇÃO.....	3
2.	MODOS DE MOVIMENTO.....	6
3.	MODELO VERTICAL DO VEÍCULO .....	8
4.	SISTEMA MASSA-MOLA .....	9
5.	FORÇAMENTO HARMÔNICO .....	12
6.	SISTEMA AMORTECIDO .....	14
7.	TIPOS DE EXCITAÇÃO.....	17
7.1.	Superposição de Excitações .....	17
7.2.	Excitação pela Base .....	19
8.	AValiação da Resposta em Frequência.....	25
8.1.	Determinação das Raízes .....	29
8.2.	Implementação Numérica .....	29
9.	AMORTECEDOR COM BUCHA ELÁSTICA.....	31
10.	AJUSTE BÁSICO DA SUSPENSÃO.....	36
10.1.	Rigidez Vertical da Suspensão .....	38
10.2.	Fator de Amortecimento.....	41
10.3.	Ajuste Vertical .....	41
10.4.	Ajuste Fator de Amortecimento .....	43
10.5.	Minimização de Distúrbio Vertical .....	44
10.6.	Rigidez Angular da Suspensão (Frontal).....	47
10.7.	Barra Anti-rolagem .....	49
10.8.	Relação de Frequências Vertical/Angular .....	51
10.9.	Relação do Fator de Amortecimento Vertical/Angular .....	54
10.10.	Limite de Tombamento .....	54
11.	Referencias Bibliográficas .....	58

Utilizar sempre a última versão deste documento.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento dinâmico de veículos inicia-se pelo desenvolvimento de modelos vibratórios simplificados de representação unidirecional dos movimentos do veículo. Em geral três tipos de modelos simplificados são utilizados para o estudo inicial do comportamento dinâmico do veículo:

- Modelo da Dinâmica Longitudinal;
- Modelo da Dinâmica Vertical;
- Modelo da Dinâmica Lateral.

Estes modelos consideram preliminarmente apenas um corpo rígido (chassis) e com apenas um grau de liberdade (1 G.L.) e tem finalidade específica, permitindo investigar apenas alguns aspectos do comportamento dinâmico do veículo. Considerando um número maior de graus de liberdades (por exemplo: 2 GL) o mesmo enfoque permite elaborar modelos mais complexos, que produzem resultados mais detalhados. Os modelos de múltiplos corpos do veículo completo (**Multibody Systems - MBS**) podem ser utilizados para estudos tridimensionais mais avançados do desempenho veicular de forma mais detalhada mas muito mais complexa.

A suspensão do veículo é o componente agregado ao chassi com a finalidade de atenuar (filtrar) as irregularidades encontradas pelas rodas, no tráfego pela pista de rolamento. A elasticidade da suspensão constitui em conjunto com a massa do veículo, um sistema massa/mola com frequência natural própria. A excitação é considerada como uma entrada **externa**. As irregularidades podem ter pequeno comprimento de onda (ex. rua de paralelepípedo), comprimento de onda médio (ex. ondulação do asfalto) ou ter longo comprimento de onda (ex. relevo do terreno). Cada comprimento de onda de irregularidade excita frequências distintas, com valores magnificados pela velocidade de tráfego. Existem também as vibrações **internas** devido ao motor que possui excentricidades e assimetrias, que se constituem em desbalanceamento (função da velocidade de rotação do motor), de média frequência de vibração

e detonações devida à combustão interna do motor e eventualmente ruídos devido aos gases de escape (ruído oscilatório de alta frequência).

Para o estudo de cada faixa de vibração, um modelo específico deve ser utilizado em função da frequência de cada aspecto tratado. Para oscilação do veículo o modelo de corpo rígido (baixa frequência) com suspensão flexível pode ser utilizado. Para frequências médias (*harshness*) a suspensão primária, componentes do conjunto propulsor (*power-train*) e pneu, devem ser considerados. Para frequências altas (*noise*) detalhes de contato do pneu e solo, vibrações de motor, escapamento, passagem aerodinâmica do ar, etc, devem ser considerados.

Na engenharia automotiva o termo **NVH** (*noise/vibration/harshness*) tem sido utilizado para a classificação das vibrações do veículo em três faixas distintas:

- Ruído audível (*noise*) – vibrações de frequências elevadas entre 100 e 20.000 Hz.
- Oscilação do veículo - Ride (*vibration*) – vibrações de baixa frequência entre 0,1 e 25 Hz
- Rumor (*harshness*) – vibrações de frequências médias entre 25 e 100 Hz

As oscilações que os passageiros de um veículo estão submetidos, dependem da resposta dinâmica do veículo (características da suspensão e massa do corpo) e do conteúdo em comprimento de onda (frequência de excitação) da irregularidade da via, por onde o veículo trafega. Esta frequência de excitação depende do comprimento das irregularidades do pavimento e da velocidade de tráfego do veículo. A expressão que correlaciona estes efeitos é dada por:

$$V = \lambda f \quad (1)$$

onde  $V$  a velocidade longitudinal de movimentação do veículo em [m/s],  $\lambda$  é o comprimento de onda da irregularidade do pavimento (excitação em [m]) e  $f$  é a frequência natural do veículo em [Hz]. Pode-se iniciar os estudos de dinâmica veicular com um modelo simples de um grau de liberdade vertical com excitação pela base. Desta forma no domínio da frequência é possível identificar as acelerações do veículo devido ao comprimento de onda das irregularidades e quantificar a magnitude da oscilação e o conforto (ex. norma ISO 2631).

A expectativa do sistema de transporte associada com os requisitos dos passageiros exige que o projeto dos veículos tenha bom desempenho das seguintes características básicas:

- Movimentação rápida (alta capacidade e aceleração longitudinal);
- Veículos dirigíveis (alta capacidade e aceleração lateral);
- Capacidade de tráfego confortável (alta capacidade de atenuação da entrada);
- Tráfego eficiente e seguro.

Para estudar estas propriedades é necessário quantificar suas variações. Para isto modelos físicos de representação serão elaborados cuja solução numérica permitirá quantificar seu desempenho.

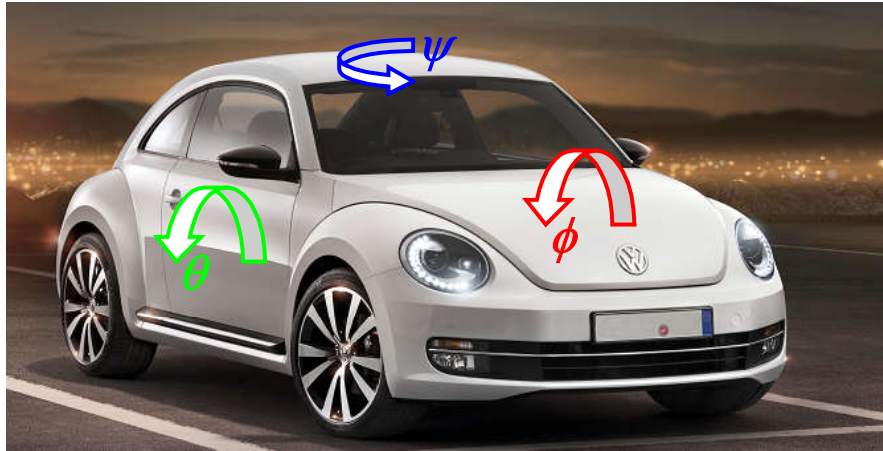
## 2. MODOS DE MOVIMENTO

Um veículo considerado como um corpo rígido, possui seis graus de liberdade de movimento (três translações e três rotações). Cada grau de liberdade é caracterizado por um modo de movimento. Os movimentos de translação e rotação de um corpo rígido, conforme ilustrado na Figura 1 e na Figura 2, são assim descritos (termo em inglês entre parêntesis):



**Figura 1 – Movimentos de Translação do Veículo (Barbosa, 2011)**

- **AVANÇO** – Movimento de **translação** na direção longitudinal do veículo (*surge X*);
- **DERIVA** – Movimento de **translação** na direção lateral do veículo (*sway Y*);
- **GALOPE** – Movimento de **translação** na direção vertical do veículo (*bounce Z*);
- **INCLINAÇÃO** - Ângulo de **rotação** na direção longitudinal do veículo (*roll -  $\phi$* );
- **ELEVAÇÃO** - Ângulo de **rotação** na direção lateral do veículo (*pitch -  $\theta$* );
- **DIREÇÃO** - Ângulo de **rotação** na direção vertical do veículo (*yaw -  $\psi$* ).



**Figura 2 – Movimentos de Rotação do Veículo (Barbosa, 2011)**

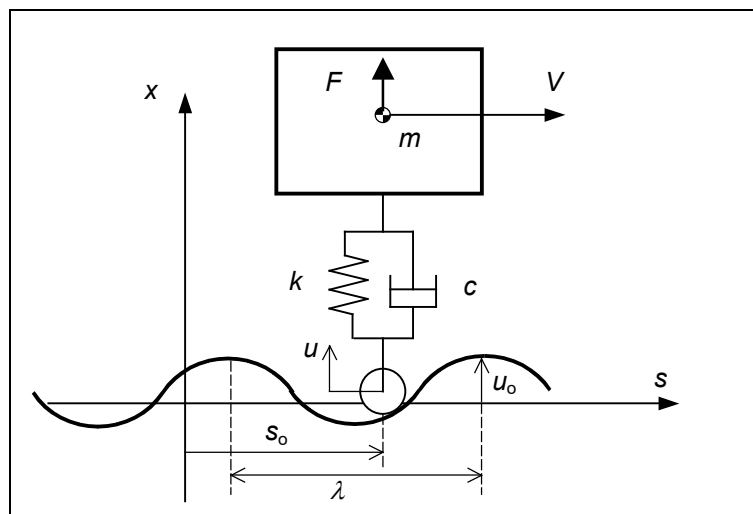
A variação de movimento de cada grau de liberdade é identificada como:

- Velocidade de **AVANÇO** – Velocidade de translação na direção longitudinal do veículo ( $\dot{x}$ );
- Velocidade de **DERIVA** – Velocidade de translação na direção lateral do veículo ( $\dot{y}$ );
- Velocidade de **GALOPE** – Velocidade de translação na direção vertical do veículo ( $\dot{z}$ );
- Velocidade de **ROLAGEM** - Velocidade de rotação na direção longitudinal (*roll* -  $\dot{\phi}$ );
- Velocidade de **ARFAGEM** - Velocidade de rotação na direção lateral do veículo (*pitch* -  $\dot{\theta}$ );
- Velocidade de **GUINADA** - Velocidade de rotação da direção do veículo (*yaw* -  $\dot{\psi}$ ).

Devido à forma de distribuição de massa do corpo e os tipos de vínculos que a suspensão do veículo possui, os movimentos podem ocorrer sincronizados e dependentes. Disto resulta em modos acoplados de movimento (ex. movimento lateral e angular longitudinal: *sway* ou movimento vertical e angular lateral acoplado) (movimento vertical e angular de arfagem acoplada: *front-end-bounce*). Para veículos simétricos há possibilidade dos modos serem desacoplados. Neste texto apenas o modelo vertical será abordado.

### 3. MODELO VERTICAL DO VEÍCULO

O veículo pode ter seus movimentos verticais representados por um modelo unidirecional simplificado de um sistema mecânico do tipo massa/mola/amortecedor de um grau de liberdade com excitação pela base. A Figura 3 mostra uma representação gráfica desta proposição, conhecida como modelo de um quarto de veículo. O veículo é representado como um corpo rígido de massa  $m$  e a suspensão como um dispositivo linear composto por uma mola de rigidez  $k$  associada em paralelo com um amortecedor de constante  $c$  (modelo de representação conhecido como *Kevin-Voight*). A excitação pela base corresponde à irregularidade da via que pode, simplificada, ser descrita por uma função periódica.



**Figura 3 – Veículo excitado pela base**

A equação diferencial de segunda ordem do sistema mecânico massa/mola/amortecedor com 1GL na direção vertical  $x$  com excitação imposta na base de magnitude  $u$  é descrita por:

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) = 0 \quad \text{ou} \quad m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c \dot{u} + ku \quad (2)$$



onde  $m$  é a massa do veículo,  $k$  a rigidez vertical da suspensão e  $c$  a constante de amortecimento e  $u$  a excitação aplicada na base. A excitação vertical posicional  $u(s)$  pode ser descrita por uma função periódica do tipo:

$$u(s) = u_o \sin(2\pi s + s_o) \quad (3)$$

Note que a posição do veículo ao longo da pista, para velocidade constante é:  $s = s_o + V t$ . Portanto  $u(s) = f(s / V)$ .

## 4. SISTEMA MASSA-MOLA

Iniciando por um sistema mecânico simplificado de um grau de liberdade do tipo massa-mola com expressão de movimento obtida pelos teoremas da mecânica (*TR* e/ou *TQMA*) e descrita por uma equação diferencial ordinária (*ODE*) de segunda ordem do tipo:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} \quad (4)$$

Na condição de equilíbrio estático para  $\ddot{x} = 0$ , a suspensão fica sujeita a apenas a ação da gravidade que resulta na deflexão estática da suspensão determinada por:

$$\frac{k}{m} x_{est} = \frac{mg}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{est} = \frac{mg}{k}} \quad (5)$$

Considerando o sistema massa-mola homogêneo, ou seja, sem forçamento externo ( $F = 0$ ), a resposta livre para condições iniciais diferentes de zero será periódica e portanto uma possível solução analítica da equação diferencial homogênea pode ser descrita por uma função periódica do tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

Tomando as derivadas de ordem superior da função periódica candidata a solução tem-se:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

Substituindo segunda derivada na equação diferencial homogênea e considerando as condições iniciais de  $\phi_0 = 0$  para  $t_0 = 0$ :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \rightarrow \quad -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}A \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad (8)$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)A \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (9)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (10)$$

onde  $\omega = (k/m)^{0.5}$  é a frequência natural não amortecida (em rad/s). Verifica-se portanto que a solução da equação diferencial.

Uma possível solução da equação diferencial, ainda homogênea, para condições iniciais (CI) não nulas, pode ser obtida por uma função periódica de soma de senos e co-senos com diferentes magnitudes, do tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (11)$$

Obtém-se a derivadas de ordem superior da soma como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando as condições iniciais (CI) de  $t_0 = 0$ ;  $x(t_0) = x_0$ ;  $V(t_0) = V_0$   $\dot{x}(t_0) = 0$  e  $V(t_0) = 0$  utilizadas nas duas equações anteriores para  $t_0 = 0$  pode-se determinar os parâmetros  $A$  e  $B$  da equação de  $x(t)$ :

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad \text{para } t_0 = 0 \rightarrow x_0 = x(t_0) = B \rightarrow B = x_0 \quad (13)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t) \quad \text{para } t_0 = 0 \rightarrow V_0 = \dot{x}(t_0) = A \omega \rightarrow A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (14)$$

onde as constantes dependem das condições iniciais (CI) de posição e velocidade, sendo  $B = x_0$  e  $A = V_0 / \omega$ . Substituindo na expressão de  $x(t)$  obtêm-se:

$$\boxed{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)} \quad (15)$$

que é a solução da equação diferencial do sistema massa-mola com frequência natural  $\omega_n$  para qualquer instante de tempo  $t$  devido às condições iniciais  $x_0$  e  $\dot{x}_0$ .

## 5. FORÇAMENTO HARMÔNICO

Considere agora o corpo do sistema massa/mola com 1 GL submetido a um forçamento externo harmônico  $F(t)$  com frequência  $\omega_e$  de magnitude  $F_0$ , conforme ilustrado na Figura 3, descrito por:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad \text{onde} \quad F(t) = F_0 \cos(\omega_e t) \quad (16)$$

A solução da equação diferencial é obtida por uma resposta natural do sistema (resposta homogênea devido apenas às condições iniciais) acrescida do comportamento forçado, chamado de solução particular (devido à ação continuada do forçamento periódico externo forçando uma vibração em regime permanente).

Desta forma, a solução da equação homogênea (movimento natural com frequência  $\omega_n$  devido a condições iniciais sem excitação externa) e a solução particular (movimento forçado com frequência  $\omega_e$ ), são fornecidas respectivamente por:

$$x_h(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) \quad \text{e} \quad x_p(t) = X \cos(\omega_e t) \quad (17)$$

Utilizando a solução particular de amplitude máxima  $X$  (devido à força aplicada  $F(t)$ ) e suas derivada aplicadas na equação diferencial do sistema, obtêm-se:

$$x_p(t) = X \cos(\omega_e t) \quad \text{e} \quad \ddot{x}_p(t) = -X \omega_e^2 \cos(\omega_e t) \quad (18)$$

$$-m X \omega_e^2 \cos(\omega_e t) + k X \cos(\omega_e t) = F_0 \cos(\omega_e t) \Rightarrow -m X \omega_e^2 + k X = F_0 \quad (19)$$

$$X(k - m \omega_e^2) = F_0 \Rightarrow X = \frac{F_0}{(k - m \omega_e^2)} = \frac{\delta_{st}}{1 - r^2} \quad (20)$$

onde  $\delta_{st} = F_0 / k$  é a deflexão estática devido a força  $F_0$  e  $r = \omega_e / \omega_n$  é a razão entre a frequência de excitação e a natural.

Assim a solução total (solução homogênea mais a particular) é obtida por:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{(k - m\omega_e^2)} \quad (21)$$

Utilizando novamente as condições iniciais de  $x(t_0) = 0$  e  $\dot{x}(t_0) = 0$  na equação anterior para  $t_0 = 0$  obtêm-se as constantes em função das condições iniciais:

$$B = x_0 + \frac{F_0}{(k - m\omega_e^2)} \quad \text{e} \quad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (22)$$

Finalmente a historia temporal da posição da massa é descrita, para qualquer instante de tempo, pela soma  $x_h(t)$  e  $x_p(t)$ :

$$\boxed{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega_e^2} \right) \cos(\omega_n t) + \left( \frac{F_0}{k - m\omega_e^2} \right) \cos(\omega_e t)} \quad (23)$$

## 6. SISTEMA AMORTECIDO

Para um sistema mecânico do tipo massa, mola e amortecedor, a equação diferencial de movimento para o sistema com forçamento externo periódico com amplitude  $F_0$  e frequência  $\omega_e$  resulta em:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F_0 \cos(\omega_e t) \quad (24)$$

ou alternativamente:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x + \frac{F_0 \cos(\omega_e t)}{m} \quad (25)$$

$$\ddot{x} = -2\zeta \omega_n \dot{x} - \omega_n^2 x + \frac{F_0 \cos(\omega_e t)}{m} \quad \text{onde: } \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (26)$$

onde  $\zeta$  (zeta) é o fator de amortecimento  $\zeta = c/(2m\omega_n)$ ,  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $\omega_d$  é a frequência amortecida obtida de  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

A solução da equação diferencial é novamente obtida por uma resposta natural do sistema (resposta homogênea que se extingue ao longo do tempo devido ao amortecimento), acrescida do comportamento forçado harmônico chamado de solução particular (devido à ação continuada do forçamento externo induzindo a uma oscilação em regime permanente), agora neste caso, com atraso de fase:

$$x_h(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) \quad \text{e} \quad x_p(t) = X \cos(\omega_e t - \phi) \quad (27)$$

Utilizando apenas a resposta particular  $x_p$ , devido ação externa periódica para o movimento de regime forçado (ou seja quando  $\omega = \omega_e$ ) e suas derivadas:

$$x_p(t) = X \cos(\omega_e t - \phi) \quad ; \quad \dot{x}_p(t) = -X \omega_e \sin(\omega_e t - \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{x}_p(t) = -X \omega_e^2 \cos(\omega_e t - \phi) \quad (28)$$

Aplicando na equação principal:

$$X[(k - m\omega_e^2) \cos(\omega_e t - \phi) - c\omega_e \sin(\omega_e t - \phi)] = F_0 \cos(\omega_e t - \phi) \quad (29)$$

Utilizando as duas relações trigonométricas:

$$\cos(A \mp B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B \quad \text{e} \quad \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (30)$$

e fazendo  $A = (\omega_e t)$  e  $B = \phi$  e substituindo na equação anterior, obtêm-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned} X[(k - m\omega_e^2) \cos \phi + c\omega_e \sin \phi] &= F_0 \\ X[(k - m\omega_e^2) \sin \phi - c\omega_e \cos \phi] &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

cuja solução é a amplitude  $X$  do movimento na frequência forçada  $\omega_e$  e a respectiva fase  $\phi$  resultam em:

$$\boxed{X = \frac{F_0}{[(k - m\omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2]^{1/2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\phi = \arctan\left(\frac{c\omega_e}{k - m\omega_e^2}\right)} \quad (32)$$

que são a **Função de Resposta em Frequência (FRF)** e a respectivo **Ângulo de Fase**. Pode-se apreciar a resposta do sistema amortecido quando se aplica um degrau unitário (solução facilmente obtida por transformada de *Laplace*), conforme mostrado na Figura 4.

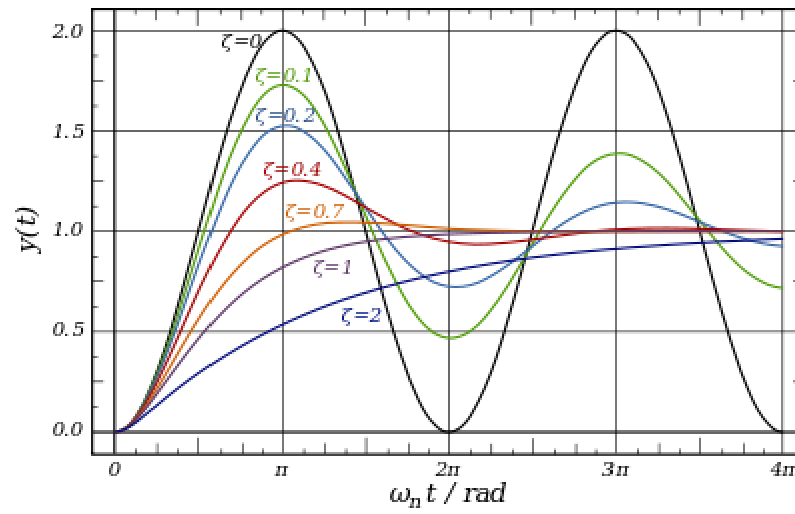


Figura 4 – Resposta ao Degrau em função do fator de amortecimento (fonte: Wiki)



## 7. TIPOS DE EXCITAÇÃO

O sistema mecânico pode estar sujeito a diferentes tipos de excitação:

- Excitação harmônica;
- Excitação periódica (conjunto harmônico);
- Excitação aplicada na base;
- Excitação randômica (aleatória);
- Excitação não periódica, (curta duração – impulso ou impacto, degrau ou pulso, rampa de longa duração, etc.).

### 7.1. Superposição de Excitações

Uma excitação harmônica aplicada ao corpo é caracterizada por uma função periódica do tipo:

$$F = F_o \text{ sen } \omega_e t \quad (33)$$

onde  $F_o$  é a amplitude da variação e  $\omega_e$  a frequência de excitação imposta. A solução desta equação diferencial foi apresentada no item anterior.

Suponha agora que o sistema seja submetido a diversas excitações com diferentes frequência  $\omega_{ei}$  com amplitude  $F_{oi}$ . Utilizando o princípio da superposição de sistemas lineares, a solução para cada excitação é a soma de cada termo:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k x_1 &= F_1(t) \\ m \ddot{x}_2 + c \dot{x}_2 + k x_2 &= F_2(t) \\ &\dots\dots\dots \\ m \ddot{x}_n + c \dot{x}_n + k x_n &= F_n(t) \end{aligned} \quad (34)$$

A excitação pode ser um conjunto de função periódicas com amplitude e período próprio de repetição. O somatório de um conjunto de funções harmônicas pode caracterizar uma função periódica composta (técnica de *Fourier*) do tipo:

$$F(t) = \sum F_{0i} \text{sen}(\omega_{ei} t + \phi_i) \quad (35)$$

onde  $F_{0i}$  é a amplitude da variação da componente  $i$  do somatório,  $\omega_{ei}$  a sua  $i$ -ésima frequência e  $\phi_i$  a  $i$ -ésima fase.

Nos casos de excitação não periódica como a excitação aleatória ou excitação de curta duração o sistema será submetido a um impulso ou impacto. A resposta de um sistema com este tipo de excitação pode ser obtida por um processo de integração numérica. No caso de não haver variação significativa da posição, a colisão corresponde a uma mudança abrupta de velocidade. A implementação desta função no processo de integração numérica pode ser realizada pela troca do estado do sistema (mudança da velocidade sem mudança da posição). No caso de uma excitação randômica de longa duração o sistema será submetido a uma variação suave da entrada. Excitação do tipo rampa ou degrau são formas usuais descontínuas para excitação do sistema com fácil solução pela técnica de *Laplace*.

## 7.2. Excitação pela Base

A excitação imposta na base de um sistema veicular do tipo massa-mola-amortecedor, conforme ilustrado na Figura 5, corresponde a um deslocamento vertical decorrente da irregularidade do pavimento, que pode ser descrita por uma função harmônica periódica posicional (função da posição  $s$ ) ou temporal (função do tempo  $t$ ) do tipo:

$$u(s) = u_o \sin(2\pi s / \lambda + s_o) \quad (36)$$

$$u(t) = u_o \sin(\omega_e t + \theta) = u_o \sin(2\pi V \cdot (t + t_0) / \lambda) \quad (37)$$

Considerando que a frequência de excitação seja  $\omega_e = 2\pi V / \lambda$  e amplitude  $u_o$ , obtêm-se a função temporal da excitação geométrica da via e sua derivada temporal como:

$$u(t) = u_o \sin(\omega_e t) \quad \text{e} \quad \dot{u}(t) = u_o \omega_e \cos(\omega_e t) \quad (38)$$

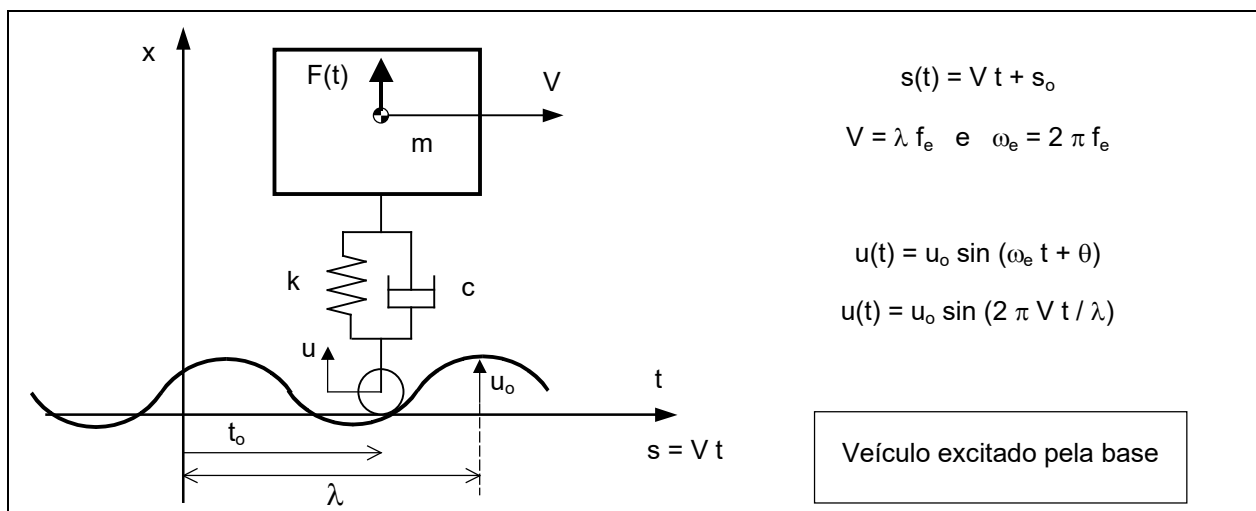


Figura 5 – Sistema excitado pela base

Substituindo esse valor de excitação de entrada  $u(t)$ , e sua derivada  $\dot{u}(t)$ , na equação diferencial de movimento do sistema mecânico de segunda ordem com 1 grau de liberdade, conforme mostrado na Figura 5, obtêm-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) &= F(t) \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= c\dot{u} + ku + F(t) \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= c \cdot \omega_e u_o \cos(\omega_e t) + k \cdot u_o \sin(\omega_e t) + F(t) \end{aligned} \quad (39)$$

Aplicando no lado direito da equação a identidade trigonométrica de soma de ângulos  $\sin(\alpha \pm \beta) = (\sin \alpha \cdot \cos \beta) \pm (\cos \alpha \cdot \sin \beta)$  e fazendo  $\beta = \omega_e t$ , obtêm-se:

$$\sin(\alpha + \omega_e t) = (\sin \alpha \cdot \cos(\omega_e t)) + (\cos \alpha \cdot \sin(\omega_e t)) \quad (40)$$

Igualando o lado direito das duas equações segundo coeficiente de proporcionalidade  $U_o$ , obtêm-se:

$$c \cdot \omega_e u_o \cos(\omega_e t) + k \cdot u_o \sin(\omega_e t) = U_o \cdot (\sin \alpha \cdot \cos(\omega_e t) + \cos \alpha \cdot \sin(\omega_e t)) \quad (41)$$

de onde se conclui que:

$$\sin \alpha = \frac{\omega_e c u_o}{U_o} ; \quad \cos \alpha = \frac{k u_o}{U_o} ; \quad \text{e portanto: } \tan \alpha = -\frac{c \omega_e}{k} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{-c \omega_e}{k} \quad (42)$$

Finalmente utilizando a relação de *Pitágoras* ( $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ) obtêm-se:

$$\boxed{U_o = u_o \sqrt{(c \omega_e)^2 + k^2}} \quad (43)$$

formando os termos da equação dinâmica homogênea na forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = U_o \sin(\omega_e t + \alpha) \quad (44)$$

que é similar a um sistema massa-mola-amortecedor excitado por uma força vertical periódica aplicada ao corpo de frequência  $\omega_e$ , com fase  $\alpha$  e amplitude  $U_o$ .

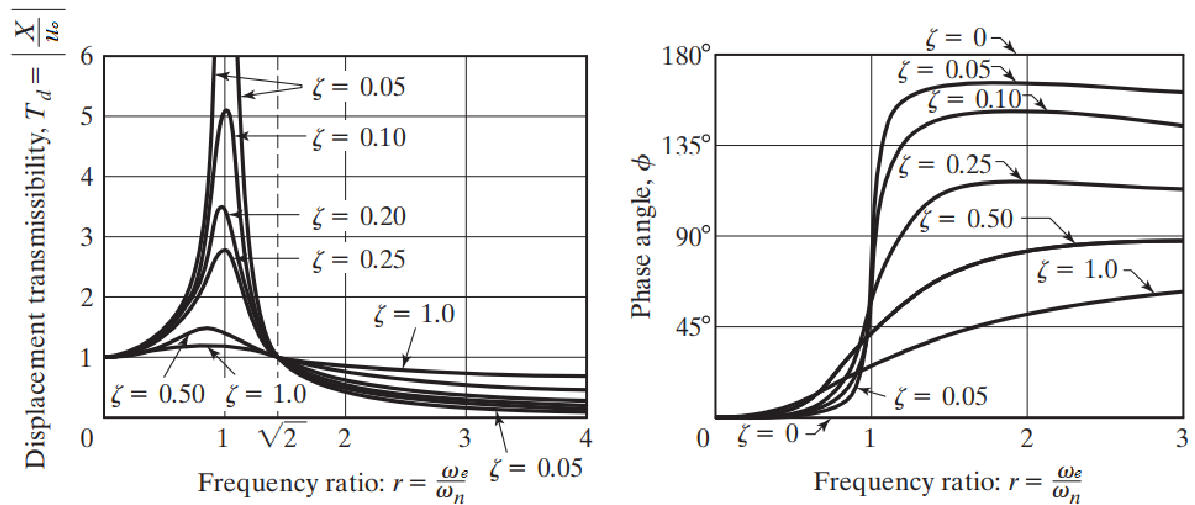
Portanto a magnitude do deslocamento vertical  $X$  do sistema massa-mola-amortecedor quando excitado pela base, é similar ao forçamento aplicado na massa já apresentado no item 6, sendo descrito por:

$$X = \frac{U_o}{\left[(k - m\omega_e^2)^2 + c^2\omega_e^2\right]^{1/2}} = u_o \frac{\left[k^2 + c^2\omega_e^2\right]^{1/2}}{\left[(k - m\omega_e^2)^2 + c^2\omega_e^2\right]^{1/2}} \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega_e}{k - m\omega_e^2}\right) \quad (45)$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $k$  e lembrando que:  $\omega_n^2 = k/m$  e  $\zeta = c/(2m\omega_n)$  e fazendo a razão entre a frequência de excitação e natural  $r = \omega_e/\omega_n$ , obtêm-se a relação chamada de **Transmissibilidade de Deslocamento**:

$$\frac{X}{u_o} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left( \frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2} \right) \quad (46)$$

A Figura 6 apresenta a razão normalizada de transmissibilidade da expressão acima e o correspondente ângulo de fase, para diferentes fatores de amortecimento  $\zeta$ .



**Figura 6 – Transmissibilidade de Deslocamento (Fonte: Rao)**

Note no gráfico de transmissibilidade (Figura 7) que para uma determinada amplitude da irregularidade ( $u_0$ ) de comprimento de onda  $\lambda = 2\pi V / \omega_e$  coincidente com a frequência natural  $\omega_n$ , a resposta em amplitude será aproximadamente 2,28 vezes para um fator de amortecimento de  $\zeta = 0,25$ . Para amplitudes moduladas em comprimento de onda (espectral), o resultado da transmissibilidade será modulado na mesma proporção.

**EXEMPLO:** Um veículo que trafega a uma velocidade de  $V_x = 60$  km/h, quando submetido a uma irregularidade periódica e harmônica do pavimento com amplitude  $u_0 = 0,010$  metros e comprimento de onda de  $\lambda = 7$  metros. Considere o veículo com massa total de 1.200 kg, sem amortecedor e rigidez do conjunto de molas de 68.218 N/m. Determine a amplitude do movimento vertical em regime permanente do chassi do veículo. Determine novamente a amplitude do movimento para um comprimento de onda de  $\lambda = 35$  metros.

**Resolução:** a frequência natural vertical do veículo é obtida da expressão:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{68218}{1200}} = 1,2 \text{ Hz}$$

a frequência de excitação periódica forçada  $f$  para  $\lambda = 7$  para  $V_x = 60$  km/h, é dado por:

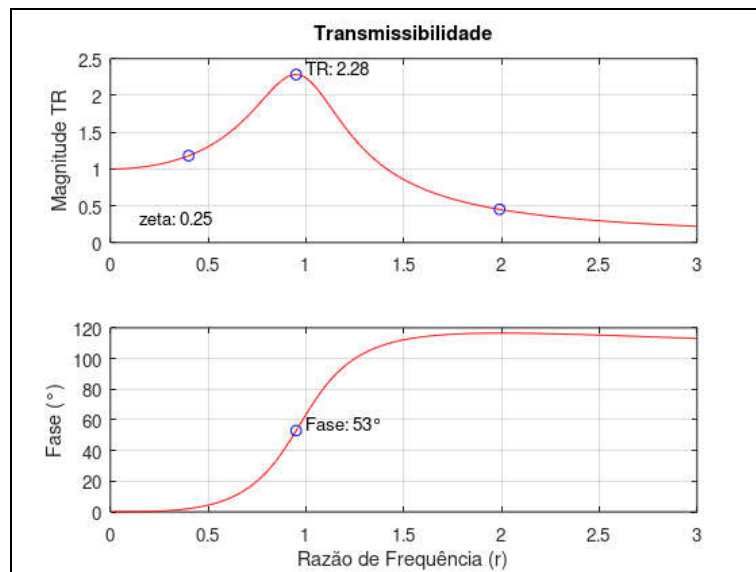
$$V = \lambda f \Rightarrow f = \frac{V}{\lambda} = \frac{60/3,6}{7} = 2,38 \text{ Hz} \Rightarrow r = \frac{\omega_e}{\omega_n} = \frac{f_e}{f_n} = \frac{2,38}{1,2} = 1,98$$

Simplificando a expressão anterior de transmissibilidade para um fator de amortecimento  $\zeta$  nulo tem-se:

$$\frac{X}{u_o} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \Rightarrow X = u_o \sqrt{\frac{1}{(1 - r^2)^2}} \Rightarrow$$

$$X = 0,010 \cdot \sqrt{\frac{1}{(1 - 1,98^2)^2}} = 0,01 \cdot 0,342 = 0,0034 \text{ m}$$

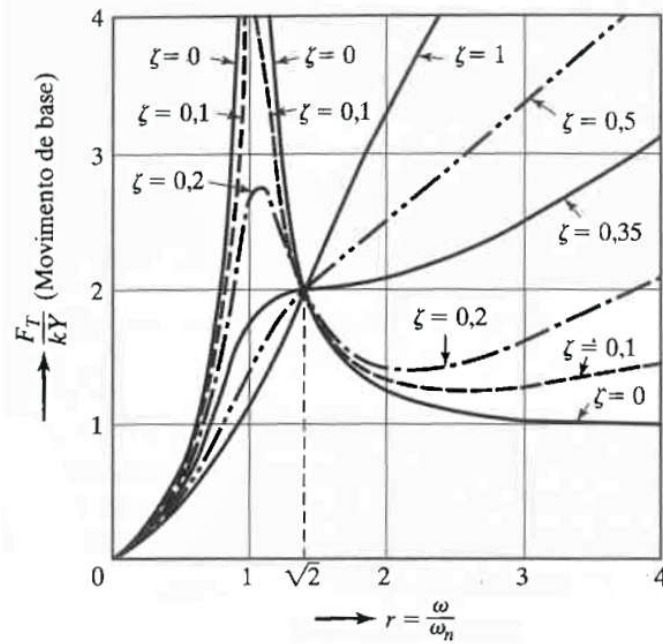
Para comprimento de onda de  $\lambda = 35$  metros ;  $r = 0,396$  e  $X = 0,118$  metros, conforme ilustrado na Figura 7.



**Figura 7 – Curva de Transmissibilidade (zeta = 0.25)**

Outra métrica que pode ser utilizada para a avaliação de resposta em frequência para movimentos verticais é a função de transferência de força ou aceleração (*Aceleração*). Esta função permite identificar a magnificação das acelerações do veículo para diferentes frequências de excitação. Portanto a força transmitida para a base dada por  $-m\ddot{x} = c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) = F_T$  tem resposta em frequência, conforme ilustrado na Figura 8, dada por:

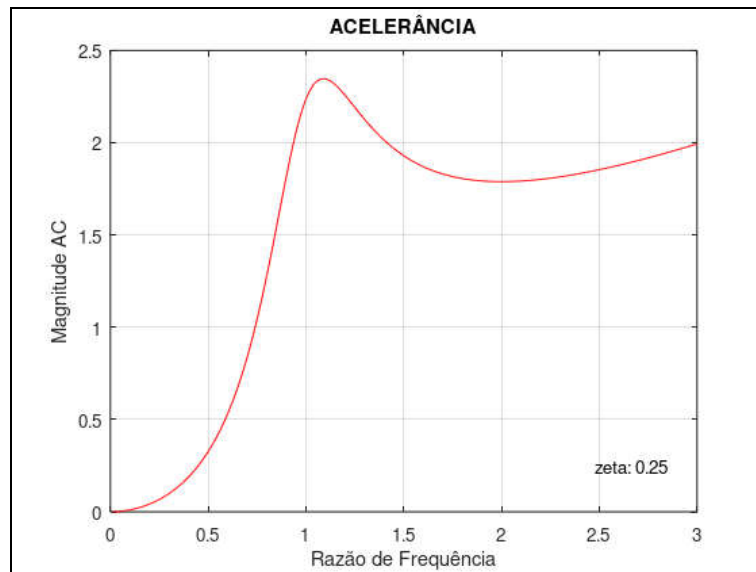
$$\frac{\ddot{X}}{Y} = \frac{F_T}{m \cdot u_0} = r^2 \cdot \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{0.5} \quad (47)$$



**Figura 8 – Função de Resposta em Frequência (fonte: Rao)**

Verifica-se, portanto que para um fator de amortecimento da suspensão de  $\zeta = 0,20$  uma variação de 2,8 vezes da função  $F_T/ku_0$ . Note ainda que para um fator de amortecimento da suspensão de  $\zeta = 0,35$  a resposta do sistema não tem mais amplificação na frequência natural.





**Figura 9 – Acelerância ou Transmissibilidade de Força**

## 8. AVALIAÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Observa-se experimentalmente que um sistema mecânico submetido a uma excitação externa de frequência  $\omega_e$ , tem seu movimento forçado (após os transitórios) manifestado numa única frequência de vibração (tipicamente idêntica a  $\omega_e$ ). A métrica para avaliação de resposta em frequência para movimentos verticais utiliza a função de transferência da magnitude do deslocamento vertical sobre a magnitude da excitação pela base. Considere o sistema massa/mola/amortecedor submetido a excitação harmônica pela base conforme ilustrado na Figura 5. A equação diferencial de segunda ordem a termos constantes para o sistema homogêneo resulta em:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) = F(t) \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku \quad (48)$$

A Resposta em Frequência (**RF**) do sistema com excitação forçada pela base (*Barbosa, 2012*) é obtida pela transformada de *Laplace* “*s*” da equação diferencial homogênea em *x* e *u* para condições iniciais nulas. Assumindo a solução de regime forçado após os transitórios, todo o sistema vai oscilar na frequência de excitação  $\omega_e$ . Na sua forma mais geral, os deslocamentos assumem a forma  $x(t) = C e^{st}$ , devido à irregularidade  $u(t) = u_0 e^{st}$ , que é uma composição de senos e co-senos da forma da identidade de **Euler**:  $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$  e considerando a variável *s* como um número complexo na forma  $s = \sigma + i\omega_e$  (transformação de *Laplace*), obtêm-se as derivadas de ordem superior como:

$$x(t) = X(s) e^{st} \quad ; \quad \dot{x}(t) = s \cdot X(s) e^{st} \quad \text{e} \quad \ddot{x}(t) = s^2 \cdot X(s) e^{st} \quad (49)$$

$$u(t) = U(s) e^{st} \quad \text{e} \quad \dot{u}(t) = s \cdot U(s) e^{st} \quad (50)$$

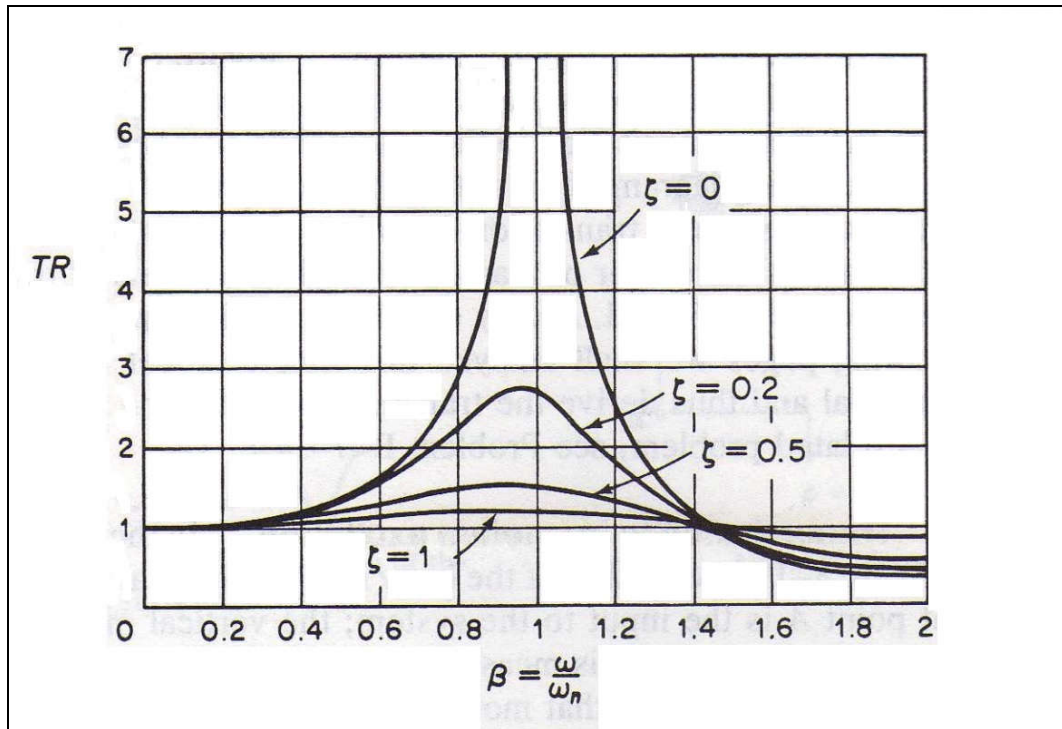
Fazendo a substituindo na equação anterior e eliminando  $e^{st}$ , obtêm-se:

$$(m s^2 + c s + k) X(s) = (c s + k) U(s) \quad (51)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{c s + k}{m s^2 + c s + k}} \quad (52)$$

Substituindo  $s = i\omega_e$  e fazendo a relação da saída pela entrada dos polinômios algébricos em função de *s*, obtém-se a função de resposta forçada em frequência da amplitude do deslocamento  $X(i\omega_e)$  para a amplitude das irregularidades da entrada  $U(i\omega_e)$  como:

$$\boxed{\frac{X(i\omega_e)}{U(i\omega_e)} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \quad (53)$$

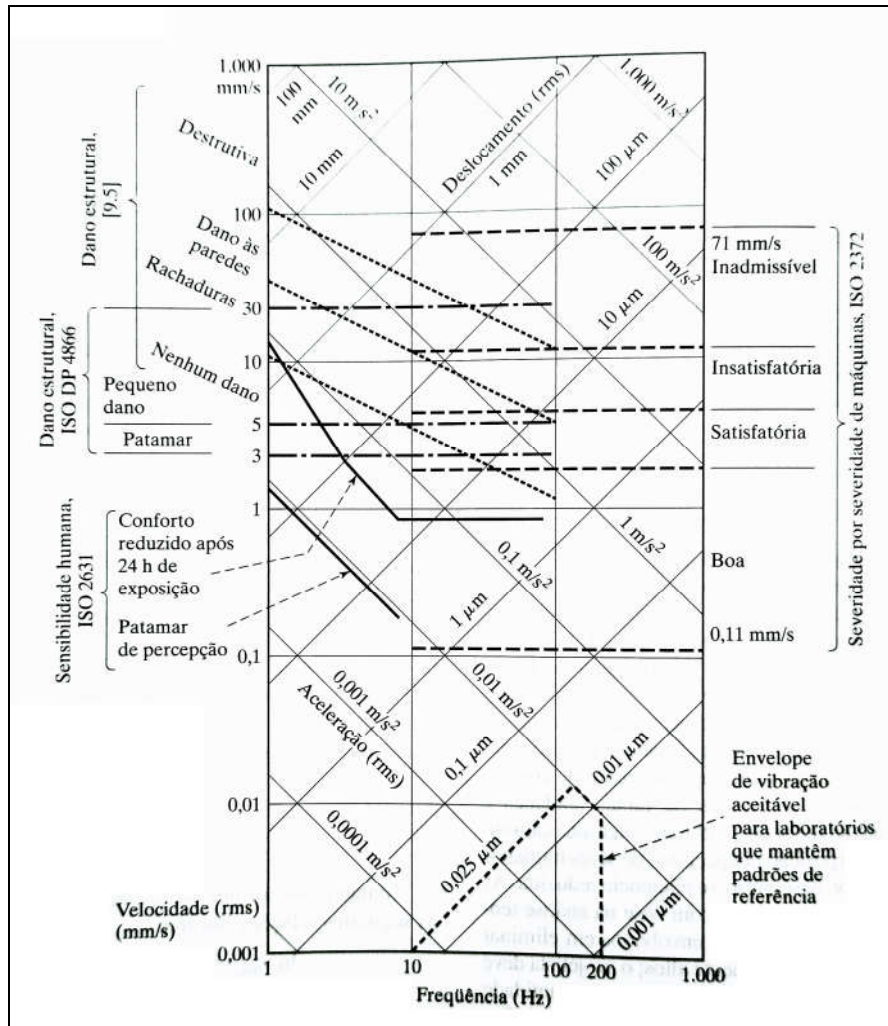


**Figura 10 – Curva de Resposta em Frequência da Transmissibilidade de Deslocamento**

Para aceleração com excitação pela base, a função do sistema massa/mola/amortecedor se transforma em:

$$\frac{\ddot{X}(i\omega_e)}{U(i\omega_e)} = \omega_e^2 \left( \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \quad (54)$$

A função de resposta em aceleração permite identificar a magnificação das acelerações do veículo (conforto) para diferentes frequências de excitação (segundo *ISO 2631* ver Figura 11).



**Figura 11 – Limite de Vibração (Fonte: Rao, 2008)**

**Exemplo:** Para o problema anterior com irregularidade periódica e harmônica do pavimento com amplitude  $u_0 = 0,010$  metros, obtêm-se valor de magnitude de aceleração ligeiramente superior à  $0,01 \text{ m/s}^2$  que é o limite de percepção proposto pela norma ISO-2631, conforme ilustrado na Figura 11:

$$\ddot{X} = r^2 u_0 \sqrt{\frac{1}{(1-r^2)^2}} = 1,98^2 \cdot 0,010 \cdot \sqrt{\frac{1}{(1-1,98^2)^2}} = 0,0133 \text{ ms}^{-2}$$

## 8.1. Determinação das Raízes

Para o sistema homogêneo (sem excitação externa), obtêm-se a equação de segunda ordem em  $s$  que apresenta as duas raízes complexas conjugadas  $S_{1,2}$  que corresponde a frequência natural amortecida:

$$(m s^2 + c s + k)X(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad m s^2 + c s + k = 0 \quad (55)$$

$$S_{1,2} = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2mk}{4m^2}} \quad (56)$$

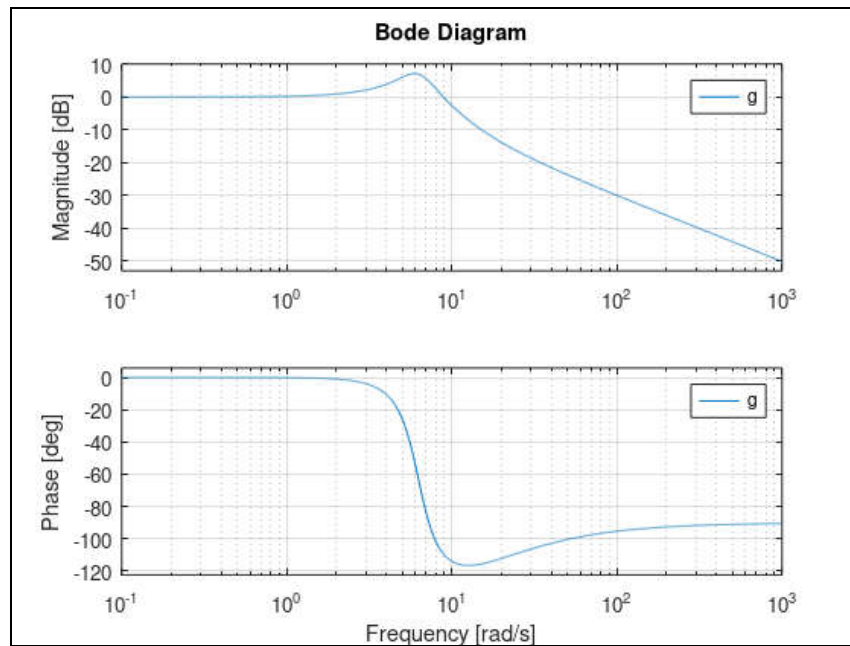
## 8.2. Implementação Numérica

Para a implementação numérica da solução da função de transferência, conforme descrito na equação:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (57)$$

basta descrever os polinômios em  $s$  do numerador (*num*) e outro para o denominador (*den*), utilizar a função **tf** e os seguintes comandos no ambiente *Octave* (ou *Matlab*) para obter os gráficos de magnitude e fase apresentados na Figura 12:

```
num = [(2*zeta*wn) wn^2];
den = [1 (2*zeta*wn) wn^2];
G = tf(num,den);
bode(G);
```

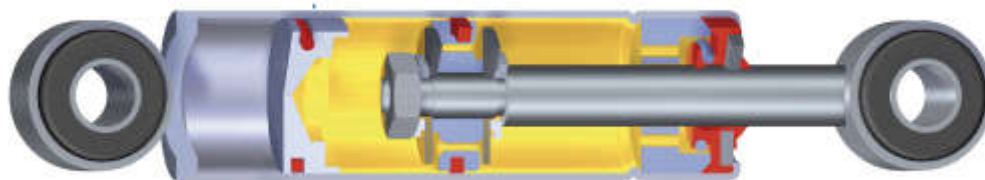


**Figura 12 – Gráfico de Bode**

**Observação:** é necessário ter o módulo de Controle (no *Octave* utilize: *pkg load control*) para processar os comandos sugeridos (no *Matlab* utilizar o *toolbox: Control*).

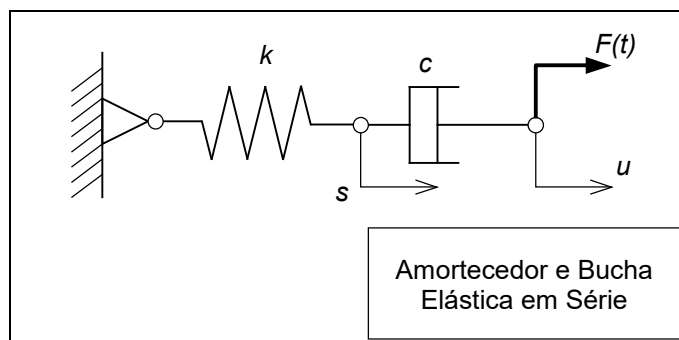
## 9. AMORTECEDOR COM BUCHA ELÁSTICA

Tipicamente o amortecedor veicular é fixado em suas extremidades entre o chassis e a suspensão, com parafusos envolvidos por buchas elásticas, conforme ilustrado na Figura 13. A finalidade das buchas é permitir a articulação do amortecedor durante a excursão da suspensão e reduzir vibrações de frequências elevadas.



**Figura 13 – Amortecedor com bucha elástica de fixação**

Como efeito indireto, a bucha elastomérica também introduz uma elasticidade em série com o amortecedor, que contribui para a redução de vibrações de frequências elevadas. Um modelo para representação completa deste componente está apresentado na Figura 14 sendo conhecido como modelo visco-elástico de *Maxwell*. Os deslocamentos dos componentes elástico e dissipativo podem ser descritos por duas variáveis distintas  $s$  e  $u$  respectivamente (Rill, 2009).



**Figura 14 – Amortecedor e Mola em Série**

Para cada elemento do componente elástico/dissipativo tem-se as forças proporcionais a deslocamentos e velocidades conforme:

$$F_{mola} = -k \cdot s \quad \text{e} \quad F_{amort} = -c \cdot (\dot{u} - \dot{s}) \quad (58)$$

Como os componentes estão em série, a mesma força  $F(t)$  aplicada no amortecedor passa pela bucha elástica (mola), portanto  $F_{mola} = F_{amort} = \hat{F}$ , portanto igualando as equações obtêm-se uma equação diferencial linear de primeira ordem em  $u$ :

$$k \cdot s = c \cdot (\dot{u} - \dot{s}) \quad \Rightarrow \quad c \cdot \dot{s} + k \cdot s = c \cdot \dot{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{c}{k} \dot{u} - s = \frac{c}{k} \dot{s}} \quad (59)$$

onde a razão entre o amortecimento e a elasticidade corresponde a constante de tempo  $T = c / k$  de um sistema de primeira ordem em  $u$ .

A resposta estacionária  $s(t)$  em frequência do componente de *Maxwell* para excitação harmônica  $u(t)$  do tipo:

$$u(t) = u_0 \sin \omega t \quad \text{e portanto} \quad \dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \quad (60)$$

pode ser determinada inserindo a resposta temporal que será na mesma frequência forçada de frequência  $\omega$  tal que:

$$s(t) = u_0 (a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t) \quad \text{e portanto} \quad \dot{s}(t) = u_0 \omega (a \cdot \cos \omega t - b \cdot \sin \omega t) \quad (61)$$

Substituindo essas expressões na equação de primeira ordem, obtêm-se:



$$\begin{aligned}\frac{c}{k}\dot{s} &= \frac{c}{k}\dot{u} - s \\ \frac{c}{k}u_0\omega(a \cdot \cos \omega t - b \cdot \sin \omega t) &= \frac{c}{k}u_0\omega \cos \omega t - u_0(a \cdot \sin \omega t - b \cdot \cos \omega t)\end{aligned}\quad (62)$$

Separando os termos em seno e co-seno resulta em:

$$\begin{aligned}\frac{c}{k}u_0\omega b \cdot \sin \omega t &= u_0 a \cdot \sin \omega t & \Rightarrow & \frac{c}{k}\omega b = a \\ \frac{c}{k}u_0\omega a \cdot \cos \omega t &= \frac{c}{k}u_0\omega \cos \omega t + u_0 b \cdot \cos \omega t & \Rightarrow & \frac{c}{k}\omega a = \frac{c}{k}\omega + b\end{aligned}\quad (63)$$

Fazendo a substituição:

$$\left[ \left( \frac{c}{k}\omega \right)^2 - 1 \right] b = \frac{c}{k}\omega \quad \Rightarrow \quad b = \frac{k}{c} \left( \frac{\omega}{\omega^2 - (k/c)^2} \right) \quad \text{e} \quad a = \frac{\omega^2}{\omega^2 - (k/c)^2} \quad (64)$$

Assim a curva de resposta em frequência em  $\omega$ , da função de força elástica **Fmola**, é dada por

$$Fmola = -k s = -k u_0 \left( \frac{\omega}{\omega^2 - (k/c)^2} \right) \left( \omega \sin \omega t + \frac{k}{c} \cos \omega t \right) \quad (65)$$

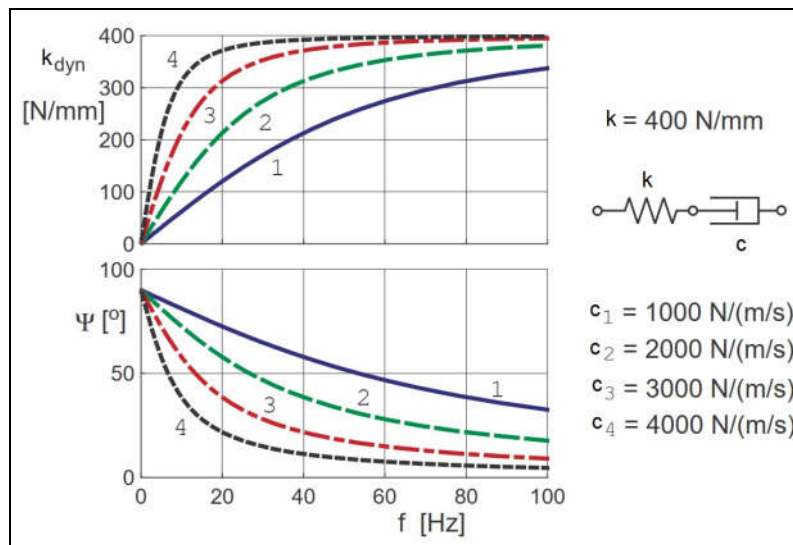
Esta expressão pode ser transformada utilizando soma de senos e co-senos em:

$$Fmola = \hat{F}mola \cdot (\sin \omega t + \Psi) \quad (66)$$

onde a magnitude da força é:  $\hat{F}mola = \frac{k u_0 \omega}{\omega^2 - (k/c)^2} \sqrt{\omega^2 - (k/c)^2} = \frac{k u_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 - (k/c)^2}}$  e o ângulo de

fase é:  $\Psi = \arctan \frac{(k/c)}{\omega}$ .

A rigidez dinâmica  $k_{dyn} = Fmola / u_0$  e o ângulo de fase  $\Psi$  do componente mola/amortecedor em série (modelo visco-elástico de *Maxwell*) está apresentada na Figura 15, para  $k = 400\text{N/mm}$  e diferentes intensidade de amortecimento ( $c_1$  até  $c_4$ ).



**Figura 15 – Resposta em frequência da Rigidez Dinâmica do Componente Mola/amortecedor em Série (Fonte: Rill, 2009)**

Com o aumento da frequência, a componente amortecedor/mola muda de um desempenho dissipativo puro,  $k_{dyn} \rightarrow 0$  e  $\Psi \approx 90^\circ$  para um comportamento elástico puro,  $k_{dyn} \approx k$  e  $\Psi \rightarrow 0$ . A faixa de frequência onde o componente de *Maxwell* fornece rigidez e amortecimento, é controlada pelo valor da constante de amortecimento  $c$ .

De maneira similar a curva de resposta em frequência em  $\omega$ , da função de força viscosa dissipativa **Famort**, é dada por

$$\begin{aligned}
 Famort &= -c(\dot{u} - \dot{s}) = cu_0\omega \cdot [(a \cos \omega t - b \sin \omega t) - \cos \omega t] \\
 Famort &= cu_0\omega \cdot [(a \cos \omega t - b \sin \omega t) - \cos \omega t] = cu_0\omega \cdot [(a-1)\cos \omega t - b \sin \omega t] \quad (67) \\
 Famort &= cu_0\omega \cdot \left[ \left( \frac{(k/c)^2}{\omega^2 - (k/c)^2} \right) \cos \omega t - \left( \frac{\omega^2}{\omega^2 - (k/c)^2} \right) \sin \omega t \right]
 \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser transformada utilizando a expressão de soma de senos e co-senos ( $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ ) em:

$$F_{amort} = \hat{F}_{amort} (\cos \omega t + \Phi) \quad (68)$$

onde a magnitude da força é:  $\hat{F}_{amort} = \frac{c u_0 \omega}{(k/c)^2 - \omega^2} \sqrt{(k/c)^2 - \omega^2} = \frac{c u_0 \omega}{\sqrt{(k/c)^2 - \omega^2}}$  e o ângulo de

fase é:  $\Phi = \arctan \frac{\omega^2}{(k/c)}$

A rigidez dinâmica  $c_{dyn} = \hat{F}_{amort} / u_0$  e o ângulo de fase  $\Phi$  do componente mola/amortecedor em série (modelo visco-elástico de *Maxwell*).

## 10. AJUSTE BÁSICO DA SUSPENSÃO

O ajuste básico da suspensão do veículo para os movimentos verticais conhecido como **vertical TUNING**, pode ser feito com o modelo simplificado de 1 grau de liberdade. Duas propriedades importantes devem ser estimadas:

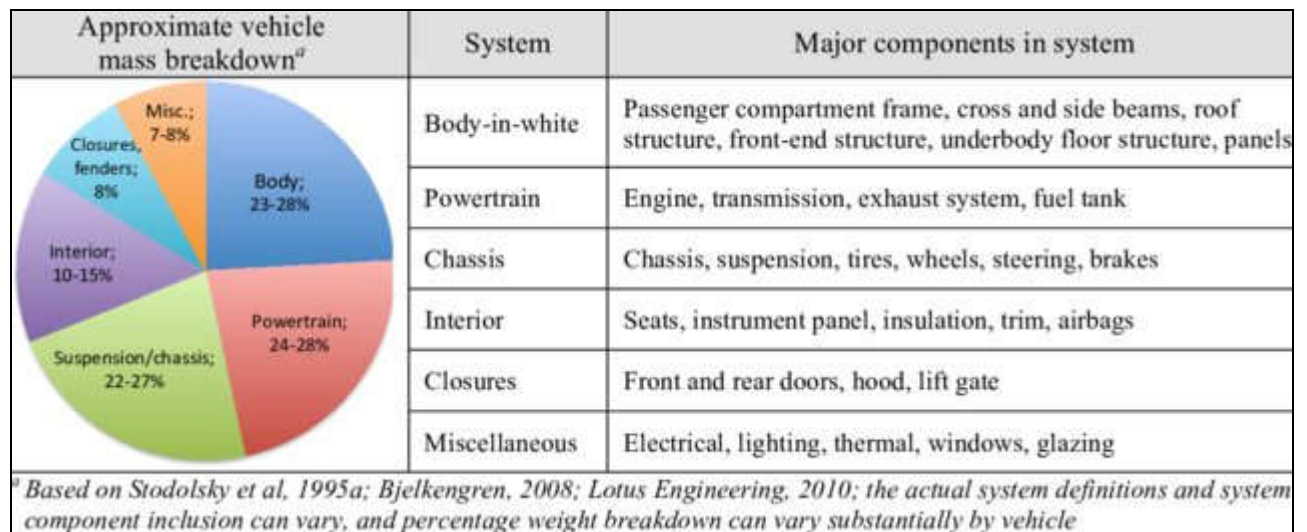
- Rigidez da mola da suspensão e
- Fator de amortecimento.

As propriedades inerciais típicas de veículos comerciais está resumida na Tabela 1.

**Tabela 1 - Propriedades Inerciais (SI)**

Componente \ Tipo	Carro Passeio Médio	Carro Grande	SUV	Veículo Comercial	Caminhão
Eixo Dianteiro	80 kg	100 kg	125 kg	120 kg	600 kg
Eixo Traseiro	80 kg	100 kg	125 kg	180 kg	1100 kg
Chassis	1100 kg	1400 kg	1950 kg	3200 kg	14300 kg
Posição CG	a) 1.10 m b) 1.40 m	1.10 m 1.40 m	1.45 m 1.38 m	1.90 m 1.40 m	2.90 m 1.90 m
Momento Inércia	1500 kg×m <sup>2</sup>	2350 kg×m <sup>2</sup>	3750 kg×m <sup>2</sup>	5800 kg×m <sup>2</sup>	50000 kg×m <sup>2</sup>
Distribuição de Massas Concentradas	545 kg 126 kg 429 kg	600 kg 200 kg 600 kg	914 kg 76 kg 960 kg	925 kg 1020 kg 1255 kg	3592 kg 5225 kg 5483 kg
Curso Suspensão	127~152 mm	175~205			

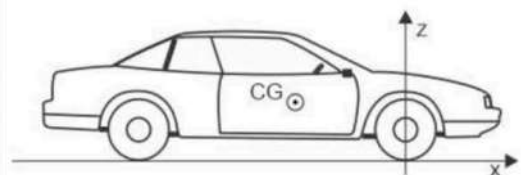
Alternativamente pode-se buscar informações sobre outros veículos na Internet como ilustrado na Figura 16.



**Figura 16 – Distribuição de Massas por Subsistemas (Fonte: *Internet*)**

Um exemplo de distribuição de massa para o sedan médio de tração dianteira, com massa total de 1093 kg, distância entre eixos de 2600 mm e distribuição do centro de massa das partes medido a partir da roda dianteira é apresentado na Figura 17 (Salvagni, R. B. 2024).

System	M (kg)	x (m)	z (m)
Body-in-white	273	-1,3	0,2
Powertrain	273	0	0,5
Chassis	262	-1,3	0,4
Interior	120	-1	0,5
Closures	88	-1,3	0,8
Miscellaneous	77	-1,3	0,8



**Figura 17 – Distribuição Massa (Fonte: *Salvagni, R. B. , 2024*)**

### 10.1. Rigidez Vertical da Suspensão

A deflexão da suspensão  $z_0$  corresponde ao curso da mola quando submetida ao peso próprio do veículo  $M$  é obtida pela expressão relacionada com a rigidez da mola  $k$ :

$$F = k \cdot z \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{M \cdot g}{k} \quad (69)$$

Considerando a rigidez vertical total da suspensão de veículo ( $k = \omega^2 M$ ), com valores típicos para carro de passeio de 80~120 kN/m, portanto muito menor que a rigidez do pneu (típico de 500~700 kN/m), pode-se adotar o modelo simples de massa/mola com 1 *GL* para esta etapa de ajuste. Para uma suspensão linear, a variação  $\Delta M$  da carga corresponde uma variação  $\Delta z$  de curso:

$$\Delta z = \frac{g}{k} \Delta M \quad (70)$$

Portanto no mínimo a rigidez da mola tem que ter capacidade de suportar o acréscimo de carga dentro da variação de curso disponível:

$$k \geq \frac{\Delta M g}{\Delta z} \quad \text{ou} \quad \Delta z \leq \frac{\Delta M g}{k} \quad (71)$$

Considerando um veículo de passeio médio com massa total de 1100 kg e curso vertical da suspensão disponível de  $\Delta z = 0.12 \sim 0.15$  metros, obtêm-se para uma deflexão de 60% do curso disponível devido ao peso próprio, uma rigidez típica de:

$$k \geq \frac{M \cdot g}{0.6 \cdot z} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1100 \cdot 9.81}{0.15 \cdot 0.6} = 119900 \text{ N/m} \quad (72)$$

Considerando o peso dos passageiros e cargas (4 passageiros de 70 kg = 280 kg +100 kg) e um fator dinâmico da carga de 1.3g o curso da suspensão para esta rigidez atinge:

$$z = \frac{g}{k} M \quad \Rightarrow \quad z = \frac{9.81 \cdot 1.3}{119900} 1480 = 0.157 \text{ m} \quad (73)$$

Considerando uma distribuição normal do fator dinâmico ( $1\sigma = 68.2\%$  ;  $2\sigma = 95.45\%$  e  $3\sigma = 99.73\%$ ) em 68% do trajeto ao longo do percurso, o fator dinâmico se mantêm entre  $\pm 1.1g$ 's e, portanto um curso máximo será de 0.145 metros, portanto compatível com o curso total disponível. Nos demais 32% do trajeto, a excursão da suspensão tem probabilidade de superar o disponível sendo necessário à introdução de um batente de fim de curso (coxim elástico de borracha de alta rigidez).

Na configuração com carga (1480 kg), a frequência natural vertical do veículo resulta em:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{96709}{1480}} = 1.28 \text{ Hz} \quad (74)$$

considerando que a rigidez equivalente  $k_{eq}$  da suspensão é determinada pela associação em série ( $k_{eq} = (k_{mola} \cdot k_{pneu}) / (k_{mola} + k_{pneu})$ ) com a rigidez da mola (119 900 N/m) e do pneu (adotada de 500 000 N/m). Para o veículo vazio a frequência natural vai para 1.49 Hz.

A frequência natural também pode ser obtida da deflexão estática da suspensão:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta z}} \quad \Rightarrow \quad f_n \cong \frac{0.5}{\sqrt{\Delta z}} \text{ Hz} \quad (75)$$

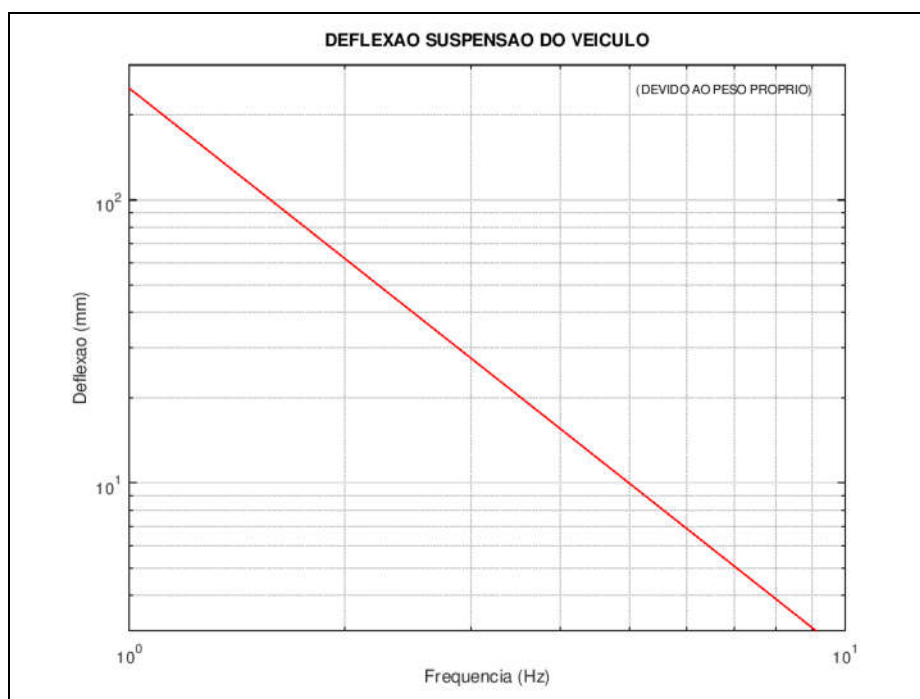
Uma vez que o conforto está relacionado com frequências mais baixas (típica de 1.2 Hz) o valor pode ser reduzido utilizando molas com comportamento não linear (rigidez progressiva).

## DINÂMICA VEICULAR

**Exemplo:** determinar a deflexão da suspensão para um veículo com frequência natural de 1.2 Hz:

$$z = \frac{g}{k} M \Rightarrow z = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{g}{(2\pi \cdot f_n)^2} \Rightarrow z = \frac{9.81}{(2\pi \cdot 1.2)^2} = 0.17 \text{ m} \quad (76)$$

Conforme mostrado no exemplo anterior a deflexão da suspensão devido ao peso próprio do veículo guarda relação inversa com a frequência de oscilação ao quadrado. A Figura 18 apresenta esta relação. Considerando um **fator dinâmico** de 1.3 a deflexão da suspensão devido ao peso próprio pode utilizar aproximadamente 77 % do curso máximo da suspensão.



**Figura 18 – Deflexão da Suspensão devido ao Peso Próprio**

Tipicamente o fator dinâmico utilizado para projeto de suspensão veicular é de 130% ( $F_0 = 1.3mg$ ) ou seja, variação de  $\pm 0.3 \text{ g}$  de movimento, devido às irregularidades da pista.



### 10.2. Fator de Amortecimento

O fator de amortecimento  $\zeta$  (adimensional zeta) da suspensão do veículo, que corresponde a razão entre a constante do amortecedor  $c$  dividido pelo amortecimento crítico  $c_{cr}$  (quando não há mais oscilação), é determinado pela fórmula:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \text{ou} \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (77)$$

Para os valores utilizados no exemplo anterior ( $m = 1.480$  kg e  $k = 96.709$  N/m) para o veículo carregado e considerando um amortecedor com constante  $c = 5.982$  N s/m, tem-se:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{5982}{2\sqrt{1480 \cdot 96709}} = 0,25 \Rightarrow 25\% \quad (78)$$

### 10.3. Ajuste Vertical

O ajuste do fator de amortecimento adequado para a suspensão depende da concepção do veículos. Em geral veículos de passeio devem ser mais confortáveis e trafegar de forma suave sobre as irregularidades do pavimento (*ride*). Em contra partida um veículo esportivo deve manter a máximo possível a roda em contato com a pista, garantindo aderência e, portanto dirigibilidade (*handling*) e segurança.

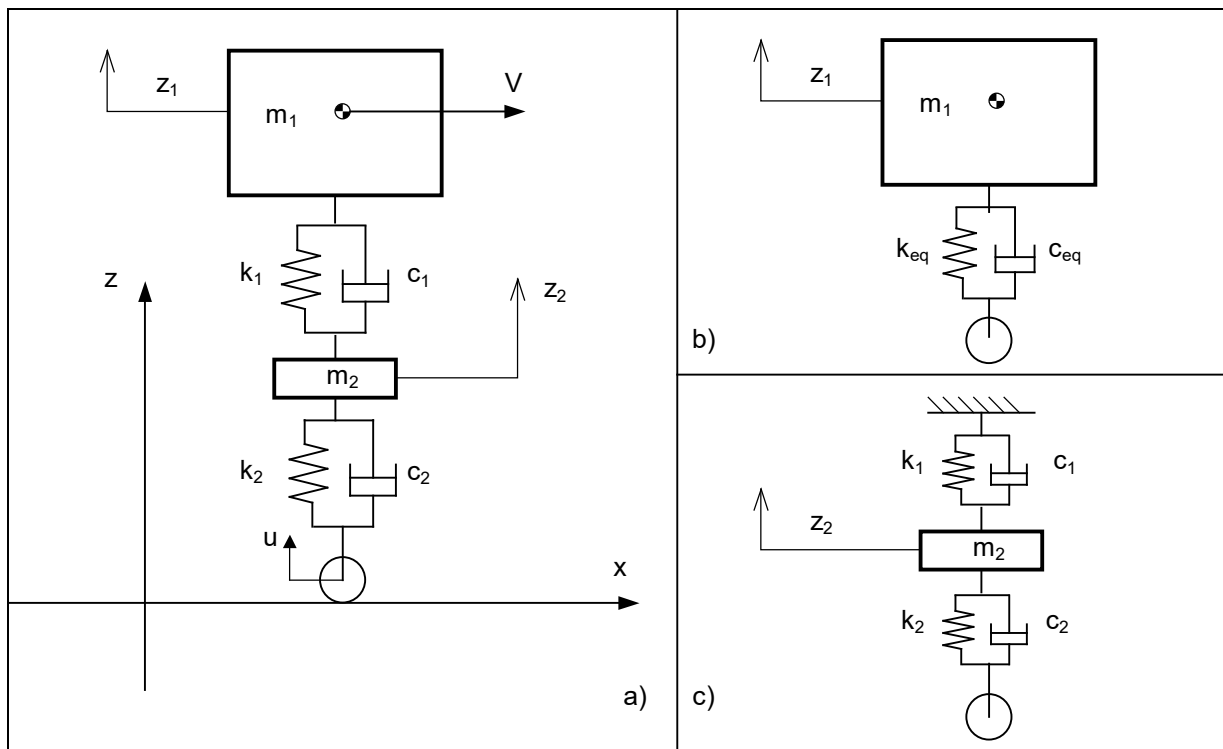
Para realizar este ajuste pode-se utilizar modelo vertical do veículo com 2 GL, conforme mostrado na Figura 19a. Em geral a rigidez de cada pneu identificada como  $k_2$  (200~220 kN/m, que depende da pressão interna), é muito maior que a rigidez total da suspensão, identificada como  $k_1$ . (80 kN/m) na Figura 19a. Como a massa não suspensa (eixo e roda) é da ordem de 7~8% da massa do chassi uma representação de 1 GL simplificada pode ser utilizada para

descrever a movimentação do chassi (massa suspensa  $m_1 \gg m_2$  e rigidez equivalente em série) conforme proposto na Figura 19b, e outra representação para descrever o movimento da suspensão (massa não suspensa e rigidez equivalente em paralelo), conforme proposto na Figura 19c.

Para descrever os modelos simplificados de cada caso, utiliza-se das equações diferenciais de segunda ordem adotando a hipótese que  $m_1 \gg m_2$ , com a rigidez equivalente da associação em série e paralelo das molas (dissipação do pneu desprezada  $c_2 = 0$ ),  $k_{eq} = (k_1 * k_2) / (k_1 + k_2)$  para o primeiro caso e  $k_{eq} = k_1 + k_2$  para o segundo caso:

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_{eq} z_1 = 0 \quad (79)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + c_1 \dot{z}_2 + (k_2 + k_1) z_2 = 0 \quad (80)$$



**Figura 19 – Modelo (a) Simplificado: Suspensão em Série (b) e Suspensão em Paralelo (c)**

A solução típica da equação diferencial homogênea é do tipo:

$$\ddot{x} = -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2 x \quad \text{onde} \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (81)$$

onde  $\zeta$  (zeta) é o fator de amortecimento  $\zeta = c/(2m\omega_n)$ ,  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $\omega_d$  é a frequência amortecida obtida de  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ . Disto resulta para o modelo da massa suspensa (chassi) e para o modelo da massa não suspensa (suspensão):

$$f_{chassi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_1 + 0.5m_2}} \quad \text{para configuração em SÉRIE} \quad k_{eq} = \frac{(k_1 \cdot k_2)}{(k_1 + k_2)} \quad \text{e} \quad \zeta_{chassi} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_{eq}}} \quad (82)$$

$$f_{susp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m_2}} \quad \text{para configuração PARALELO} \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \quad \text{e} \quad \zeta_{susp} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_2(k_1 + k_2)}} \quad (83)$$

**Exemplo:** Determine as frequências naturais de movimento vertical do chassi e do cubo da roda para um veículo com as seguintes características:  $m_1 = 1415$  kg;  $m_2 = 185$  kg;  $k_1 = 68$  kN/m;  $k_2 = 676$  kN/m; que resultam em:

$$k_{eq} = \frac{(k_1 \cdot k_2)}{(k_1 + k_2)} = 61.785 \quad f_{chassi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_1 + 0.5m_2}} = 1.02 \text{ Hz} \quad \text{e} \quad f_{susp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_2}} = 10.1 \text{ Hz}$$

Ajuste da elasticidade:  $z_1 = \frac{m_1 + 0.5 \cdot m_2}{k_{eq}}$

## 10.4. Ajuste Fator de Amortecimento

Se o objetivo do projeto da suspensão for evitar o sobre-sinal (*over-shoot*) então o fator de amortecimento recomendado em cada modelo deve ser unitário ( $\zeta = 1$ ). Desta forma resultam para conforto e segurança dois valores distintos para o amortecedor  $c_1$ :

$$c_1^{opt} |_{\zeta_{chassi}=1}^{Conforto} = 2\sqrt{m_1 k_{eq}} = 2\frac{k_{eq}}{\omega_1} \quad \text{e} \quad c_1^{opt} |_{\zeta=1}^{Seg} = 2\sqrt{m_2(k_1 + k_2)} = 2\frac{(k_1 + k_2)}{\omega_2} \quad (84)$$

**Exemplo:** para um veículo com massa de  $m_1 = 1400$  kg (modelo 1/4 = 350 kg) rigidez de uma mola de  $k_1 = 20$  kN/m, massa não suspensa de  $m_2 = 50$  kg e rigidez de um pneu  $k_2 = 220$  kN/m obtêm-se:

$$c_1^{opt} |_{\zeta=1}^{Conforto} = 5292 \frac{N}{m/s} \quad \text{e} \quad c_1^{opt} |_{\zeta=1}^{Seguran\c{c}a} = 6928 \frac{N}{m/s} \quad (85)$$

Em geral a frequência da massa não suspensa é 15~18 vezes maior que a frequência da massa suspensa. A rigidez de cada pneu é aproximadamente de 220 kN/m e da suspensão como um todo 80 kN/m (aprox. 10~12 vezes maior). Resulta portanto para conforto um fator de amortecimento em torno de 67% do valor para segurança ( $c_1^{opt} |_{\zeta=1}^{Conforto} = 0.67 \cdot c_1^{opt} |_{\zeta=1}^{Seguran\c{c}a}$ )

## 10.5. Minimização de Distúrbio Vertical

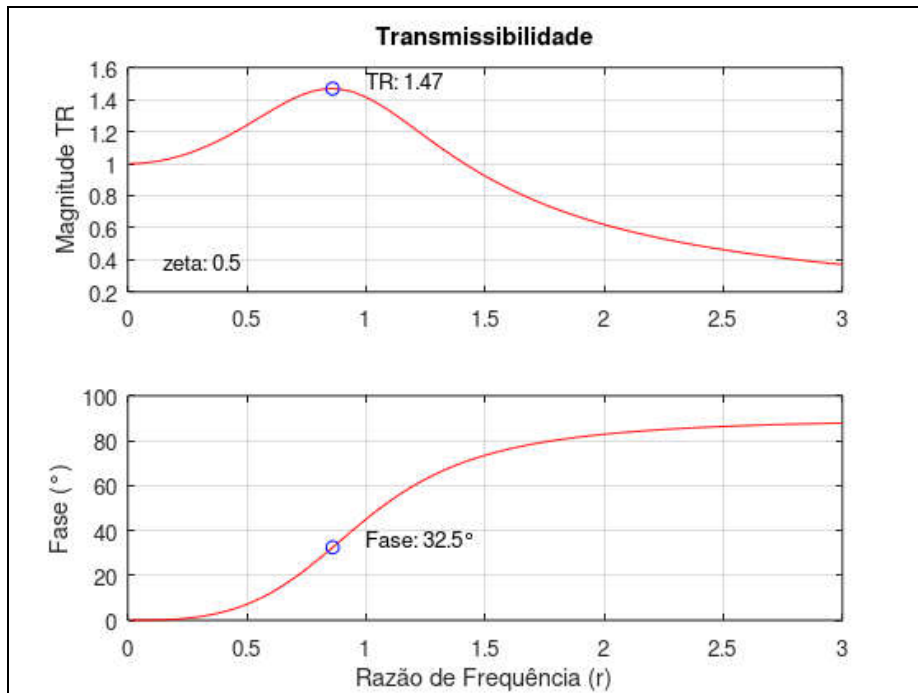
Pode-se minimizar a oscilação  $z(t)$  do sistema quando submetido a um distúrbio buscando o estado de equilíbrio o mais rápido possível (minimizar a oscilação). Para tanto toma-se a resposta do sistema amortecido que é uma exponencial complexa (oscilação  $\omega \zeta$  e decaimento  $\alpha$ ) e o desvio  $\varepsilon$  (oscilação em torno do valor médio) é a área da oscilação  $z(t)$  que deve ser minimizada (Rill, 2009):

$$z(t) = e^{(-\alpha + i\omega\zeta t)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \int_{t=0}^{t_F} z(t)^2 dt \rightarrow Min \quad (86)$$

que resulta em fator de amortecimento de  $\zeta = 0.7$  para conforto e  $\zeta = 0.5$  para segurança. Disto resulta nas seguinte expressões:

$$c_1^{opt}|_{Conforto} = \sqrt{2 m_1 k_{eq}} \quad \text{e} \quad c_1^{opt}|_{Seguran\c{c}a} = \sqrt{m_2 (k_1 + k_2)} \quad (87)$$

Este efeito pode ser apreciado na Figura 20 que compara o ganho das vibrações em função do fator de amortecimento.



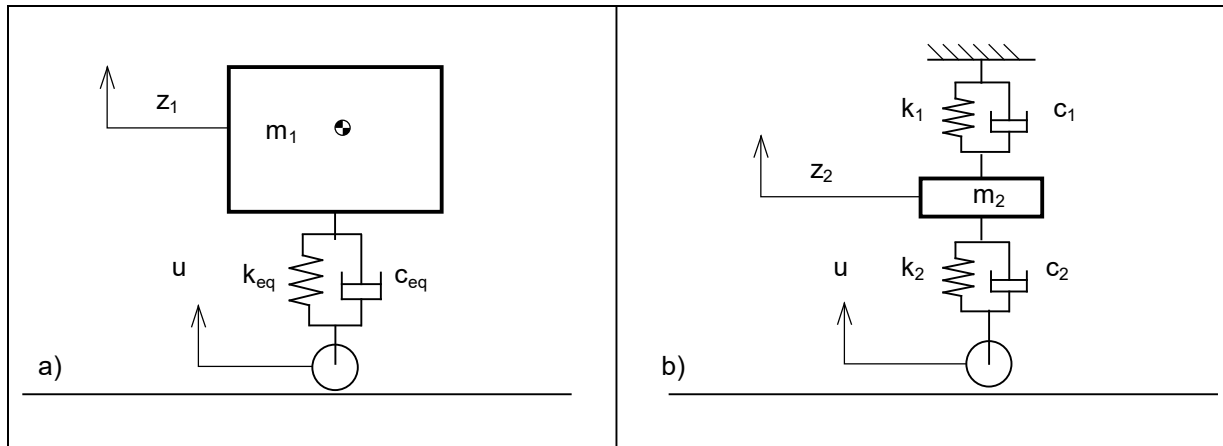
**Figura 20 – Efeito do Amortecedor na Transmissibilidade**

**Exemplo:** Determinar o valor do amortecimento  $c_1$  do amortecedor da suspensão para um veículo com massa total de 1400 kg (modelo 1/4 veículo = 350 kg) e rigidez do pacote de molas 80 kN/m (cada mola com 20 kN/m) conforme modelo agrupado do chassi (Figura 21a) e da suspensão (Figura 21b):

Utilizando a expressão apresentada na equação 45, obtêm para os valores fornecidos:

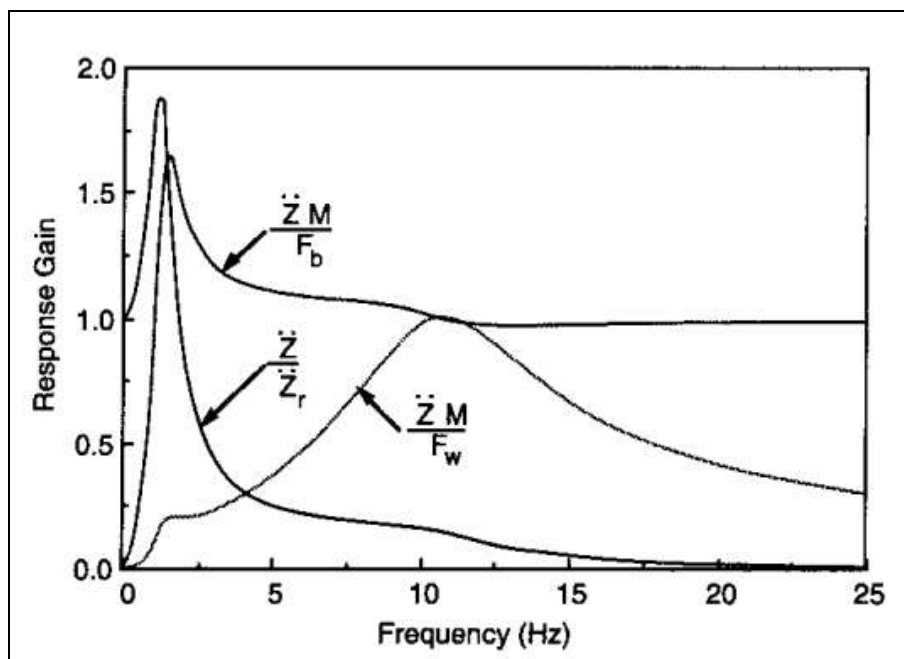
$$c_1^{opt}|_{\zeta=0.7}^{Conforto} = 3742 \frac{N}{m/s} \quad \text{e} \quad c_1^{opt}|_{\zeta=0.5}^{Seguran\c{c}a} = 3464 \frac{N}{m/s} \quad (88)$$

que correspondem a 70% e 50% do valor necessário para minimizar o sobre-sinal.



**Figura 21 – Modelo Chassis (a) e Suspensão (b)**

Note que as faixas de frequência de resposta do chassis (acelerância em torno de 1.2 Hz) e resposta da suspensão (ganho em torno de 12 Hz) são bem distintas, conforme apresentado na Figura 22.



**Figura 22 – Ganho Vertical Chassis e Suspensão (fonte: Guillespie)**

## 10.6. Rigidez Angular da Suspensão (Frontal)

Quando um veículo trafegando a uma velocidade constante  $V$  e inscreve uma curva circular de raio  $R$  constante (*steady state curving*), após as oscilações transitórias, entra em regime com uma inclinação lateral  $\phi$  devido à aceleração centrífuga contraposta a elasticidade da suspensão (binário das molas verticais separadas pela bitola). Dois aspectos podem ser avaliados:

- Inclinação lateral e
- Segurança contra o tombamento.

O primeiro tópico que causa desconforto e má impressão aos passageiros, podendo ser minimizada com a utilização de barra anti-rolagem. No segundo caso, o limite de aceleração lateral para tombamento é função da razão de aspecto entre a altura do centro de massa e a distancia entre as rodas ( $RA = 2h_G / 2b$ ).

Tomando o modelo frontal apresentado na Figura 23 e considerando que as molas já deformadas devido ao peso próprio do veículo  $F_z = mg$ , uma inclinação angular  $\phi$  gera o momento de binário aplicado ao corpo produzido pela variação de carga vertical que deflete cada mola ( $F_z/2 + \Delta F_{zd}$  e  $F_z/2 - \Delta F_{ze}$ ). Desta forma o momento é:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (D-O) \wedge \vec{R}_d + (E-O) \wedge \vec{R}_e \\ \vec{M}_O &= -b \vec{j} \wedge (F_z/2 + \Delta F_{zd}) \vec{k} + b \vec{j} \wedge (F_z/2 - \Delta F_{ze}) \vec{k} \\ \vec{M}_O &= -(\Delta F_{zd} + \Delta F_{ze}) \cdot b \vec{i} = -2\Delta F_z b \vec{i}\end{aligned}\tag{89}$$

Para determinar a elasticidade rotacional  $k_R$ , considera-se a distância entre as molas da suspensão  $2b$  e a movimentação do corpo na direção  $z$ , de onde vem:  $\tan \phi = (z / b)$  e para pequenos ângulos a tangente se confunde com o ângulo ( $z = b \phi$ ), sendo que a força em cada mola é expressa por  $F = -(k_z / 2) z$  conforme Figura 23a, resultando em:

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O &= (P - O) \wedge F_z \Rightarrow -2\Delta F b = -2b \frac{k_z}{2} z \\
 z &= b\phi \Rightarrow 2\Delta F b = k_z \cdot b^2 \phi \\
 \vec{M}_O &= -k_R \phi \vec{i} \Rightarrow k_R = k_z \cdot b^2
 \end{aligned} \tag{90}$$

onde  $k_R = k_z b^2$  que representa a rigidez rotacional do sistema de molas lineares de rigidez total  $k$  e semidistância entre as molas/rodas de  $b$ .

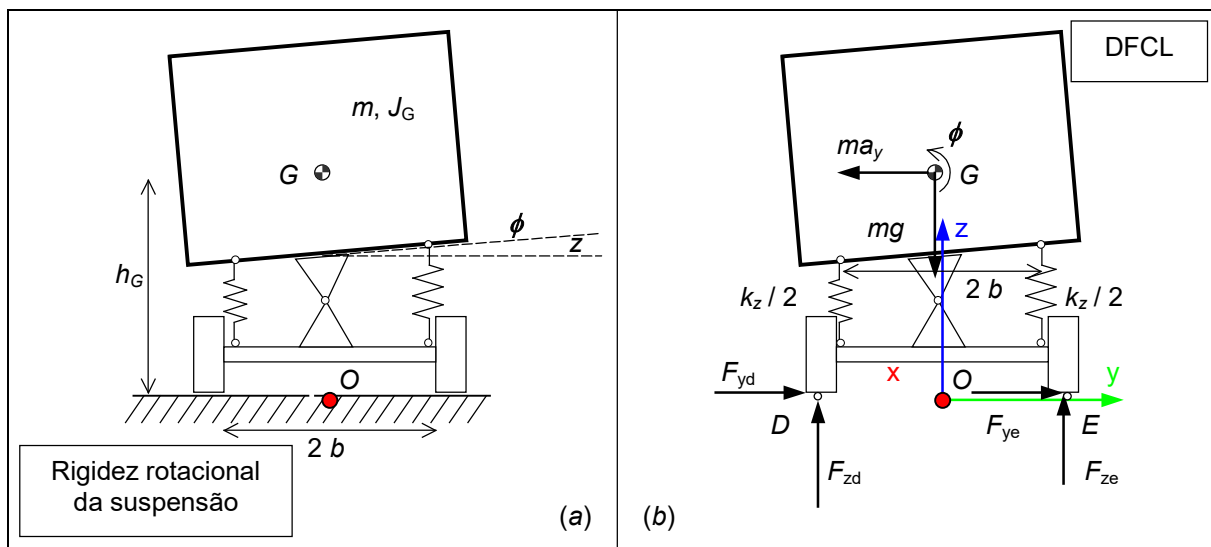


Figura 23 – Rigidez Rotacional (Modelo Frontal)

Considerando o modelo simplificado frontal, conforme mostrado na Figura 23a e utilizando o *TQMA* com pólo em  $O$ , obtém-se a equação de equilíbrio de momentos externos agentes sobre o corpo:

$$[J]_O \ddot{\phi} = \Sigma \vec{M}_O^{ext} \tag{91}$$

para a condição de regime com aceleração angular nula e tomando o pólo  $O$  coincidente com o plano da pista e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*) conforme mostrado na Figura 23b, o calculo do momento para inclinação pequena ( $\phi \approx 0$ ) resulta em:



$$\begin{aligned}\Sigma \vec{M}_G^{ext} &= (D-O) \wedge \vec{R}_d + (E-O) \wedge \vec{R}_e + (G-O) \wedge \vec{R}_g = \vec{0} \\ -b \vec{j} \wedge \Delta F_{zd} \vec{k} + b \vec{j} \wedge -\Delta F_{ze} \vec{k} + h_G \vec{k} \wedge (-ma_y \vec{j} - mg \vec{k}) &= \vec{0} \\ (\Delta F_{ze} + \Delta F_{zd}) \cdot b + ma_y h_G &= 0\end{aligned}\quad (92)$$

Utilizando a expressão das forças nas molas obtêm-se:

$$\begin{aligned}(\Delta F_{ze} + \Delta F_{zd}) \cdot b + ma_y h_G &= 0 \\ -k b^2 \cdot \phi + ma_y h_G &= 0\end{aligned}\quad (93)$$

$$\boxed{\phi = \frac{h_G}{k b^2} ma_y}\quad (94)$$

Assim para uma determinada aceleração lateral  $a_y$  e dimensões fixas ( $h_G$ ,  $b$ ), o ângulo de inclinação lateral do veículo  $\phi$  é inversamente proporcional à rigidez  $k$  das molas verticais. Para veículo altos como ônibus de dois andares ( $h_G / b^2 > 1$ ) ou com desempenho esportivo é desejável uma inclinação reduzida. Para esta finalidade utiliza-se de barras de torção anti-rolagem que aumentam a rigidez rotacional sem alterar a rigidez vertical da suspensão. Note que o aumento da rigidez rotacional altera a frequência natural deste modo de movimento ( $\omega_n = \sqrt{k_R / J_{CIR}}$ ). Note ainda que o aumento da rigidez da mola não afeta o limite de tombamento que depende exclusivamente da razão de aspecto  $Ra$ .

## 10.7. Barra Anti-rolagem

A barra anti-rolagem tem a finalidade de aumentar exclusivamente a rigidez rotacional da suspensão sem afetar a rigidez vertical do veículo. Tem o formato de **U** e articulada em dois pontos de apoio ( $A$  e  $B$ ) fixados no chassis de tal forma a permitir apenas movimento angular ( $\phi$ ). As forças  $F_1$  e  $F_2$  devido aos movimentos da suspensão  $z_1$  e  $z_2$  são aplicado nas rodas, conforme mostrado na Figura 24. A rigidez da barra de anti-rolagem é definida como:

$$k_{AR} = F / \Delta z \quad (95)$$

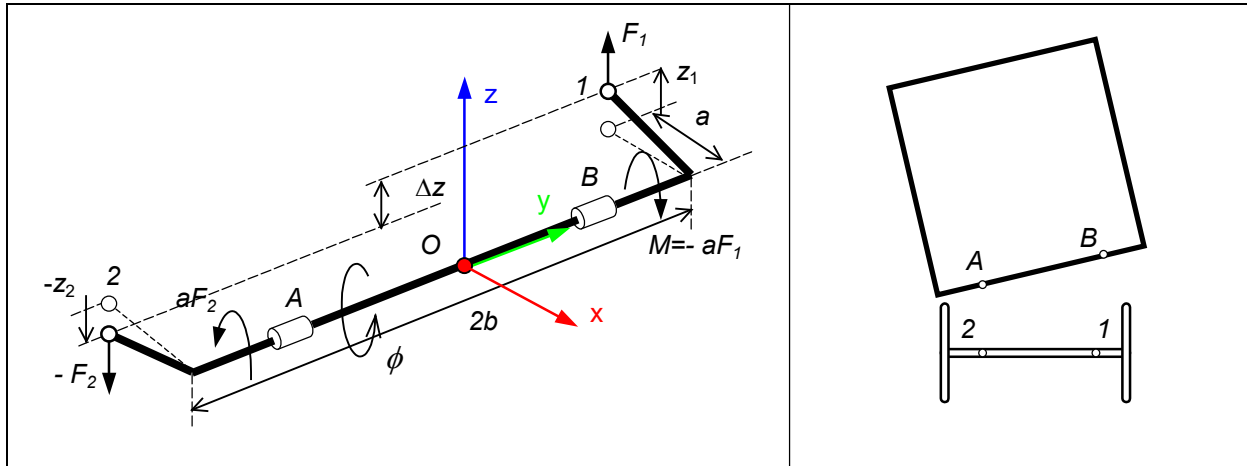


Figura 24 – Barra Anti-Rolagem

Desprezando algum eventual movimento flexional a rigidez da barra de anti-rolagem  $k_{AR}$  resulta em:

$$\Delta z = a \cdot \Delta \phi = a \cdot \frac{Fa \cdot 2b}{G \pi D^4 / 32} = \frac{64Fa^2b}{G \pi D^4} \Rightarrow k_{AR} = \frac{\pi G D^4}{32 a^2 \cdot 2b} \quad (96)$$

onde  $G$  é o modulo de cisalhamento do material,  $D$  o diâmetro da barra e as dimensões  $a$  e  $2b$  estão identificadas na Figura 24. A ligação da extremidade da barra anti-rolagem com a suspensão é feita geralmente por um conjunto de barras e articulações coxinizadas. Considerando apenas que haja uma relação de multiplicação linear “ $i$ ” entre o deslocamento  $z$  e a altura do rodas do tipo:  $z_1 = i s_1$  e  $z_2 = i s_2$  a rigidez do sistema anti-rolagem para o veículo  $k_{AR}$  se torna:

$$k_{AR} = i^2 \frac{\pi G D^4}{32 a^2 \cdot 2b} \quad (97)$$

**Exemplo numérico:** Para um carro de passeio típico tem-se:  $a = 230 \text{ mm}$ ,  $2b = 730 \text{ mm}$ ,  $D = 20 \text{ mm}$  e  $i = 2/3$ . O módulo de cisalhamento do aço é  $G = 85.000 \text{ N/mm}^2$ . Estes dados resultam em:

$$k_{AR} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\pi}{32} \frac{85000 \text{ N/mm}^2 (20 \text{ mm})^4}{(230 \text{ mm})^2 \cdot 730 \text{ mm}} = 15.4 \text{ N/mm} = 15394 \text{ N/m} \quad (98)$$

Esta estimativa não considera a flexão da barra nem a elasticidade dos coxins  $A$  e  $B$  nos apoios da barra anti-rolagem.

A introdução da barra anti-rolagem aumenta a rigidez dos movimentos angulares (*lower e upper sway*) e aumenta um pouco a resistência ao tombamento (projeção da ação gravitacional no plano da pista), pois reduz o ângulo de rolagem para uma determinada ação lateral.

Ao introduzir a barra anti-rolagem afeta a frequência natural de oscilação. Desta forma o fator de amortecimento do modo tem decréscimo ( $\zeta = c / \sqrt{k m}$ ).

Para o ajuste da suspensão, considerando o aspecto de conforto, é desejável que o modo vertical (dependente da massa) e o modo angular (dependente do momento de inércia e distância entre extremidades) tenham aproximadamente o mesmo fator de amortecimento.

### 10.8. Relação de Frequências Vertical/Angular

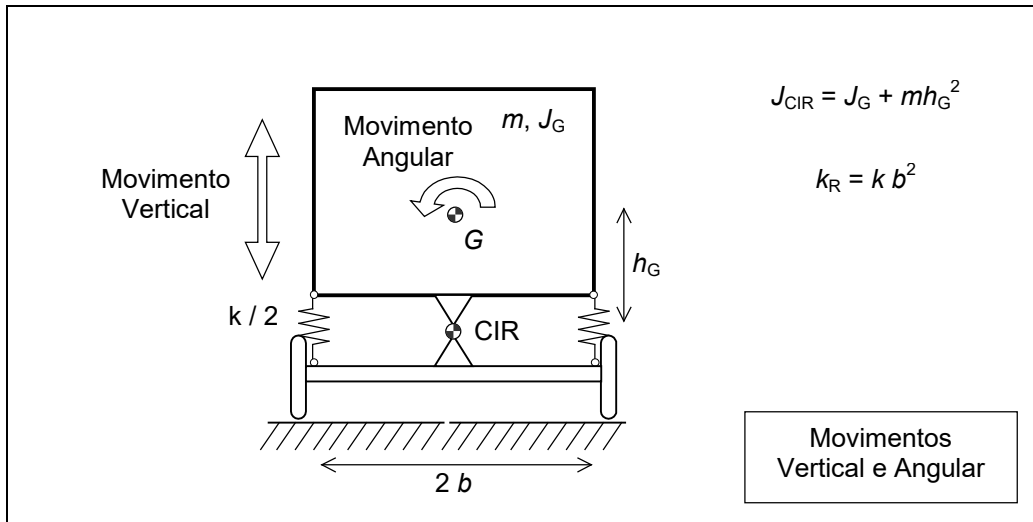
O sistema de molas da suspensão do veículo produz uma rigidez vertical e outra rotacional. Considere apenas os modos de movimento vertical (*bounce*) e lateral/angular (*lower sway*) do veículo, com centro instantâneo de rotação (*CIR*) na posição indicada na Figura 25.

A frequência natural do movimento vertical ( $\omega_V$ ) e a frequência natural do movimento angular ( $\omega_R$ ), são dadas por:

$$\omega_V = \sqrt{k/m} \quad \text{e} \quad \omega_R = \sqrt{k_R/J_{CIR}} \quad (99)$$

Tomando  $RA = 2 h_G / 2 b$  como a razão entre a altura e a largura do retângulo frontal da caixa do carro e lembrando que a rigidez torcional da suspensão e o momento angular em relação ao centro de massa e ao *CIR* são dados por:

$$k_R = k b^2 \quad \text{e} \quad J_G = m \frac{(4b^2 + 4h_G^2)}{12} \quad \text{e} \quad J_{CIR} = \bar{J}_G + m h_G^2 \quad (100)$$



**Figura 25 – Relação de Frequência de Movimentos (Vertical e Angular)**

e substituindo na expressão da frequência rotacional, resulta em:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k_R}{J_{CIR}}} = \sqrt{\frac{k b^2}{J_G + m h_G^2}} \quad \text{ou} \quad \omega_R = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 b^2}{b^2 + 4 h_G^2}} \quad \text{ou} \quad \omega_R = \omega_V \sqrt{\frac{3}{1 + 4 R A^2}} \quad (101)$$

Considerando que a caixa do veículo seja retangular ( $2h = 2b \rightarrow RA = 1$ ), obtêm-se:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_V = 0,77 \omega_V \quad (102)$$

Portanto a frequência de rotação é 77% da frequência vertical para uma caixa homogênea retangular. Note que para ônibus de dois andares ou vagões esbeltos ( $RA = 1,4$ ) a frequência rotacional é reduzida para 58% do valor da frequência vertical. O modo de movimento de rotação (*lower sway*) tem em geral frequência natural de movimento menor que o modo vertical em razão inversa ao  $RA$  do retângulo frontal da caixa.

Esta determinação pode ser comparada com dados reais levantados sobre veículos reais feita por Heydinger (1999, conforme apresentado na Figura 26, para a razão normalizada do momento de inércia de rotação ( $I_{xx}$ ) e o momento restitutivo ( $mb^2$ ) é comparada com a massa total do veículo:

$$R = \frac{I_{xx}}{m \cdot b^2} \quad (103)$$

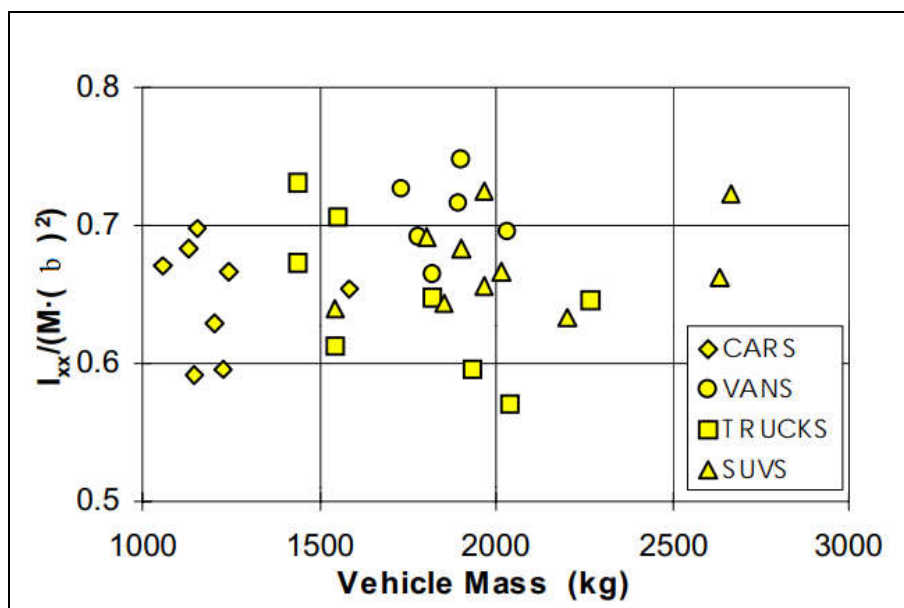


Figura 26 – Razão entre Momento de Inércia e Massa (Fonte: Heydinger 1999)

## 10.9. Relação do Fator de Amortecimento Vertical/Angular

O fator de amortecimento conforme mostrado no item 6 pode ser explicitado para cada modo. Assim têm-se o fator de amortecimento para o modo vertical  $\zeta_V$  e para o modo rotacional  $\zeta_R$ :

$$\zeta_V = \frac{c_V}{c_{Vcr}} = \frac{c_V}{2m\omega_V} \quad \text{e} \quad \zeta_R = \frac{c_R}{c_{Rcr}} = \frac{c_R}{2J_G\omega_R} \quad 104$$

Por similaridade no caso do  $RA = 1$  e fator de amortecimento ser de 30% onde  $\omega_R = 0,77 \omega_V$  e  $c_R = c_V b^2$ :

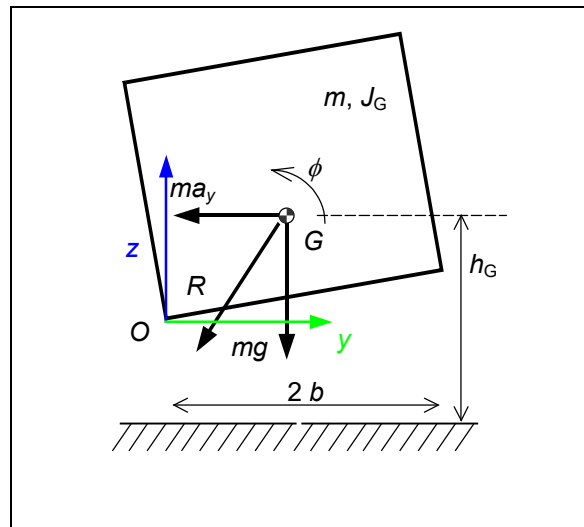
$$\begin{aligned} \zeta_R &= \frac{c_R}{2J_G\omega_R} = \frac{c_V \cdot b^2}{2J_G(0.77\omega_V)} = \frac{c_V}{2m\omega_V} \frac{2m \cdot b^2}{1.54J_G} = \zeta_V \frac{2m \cdot b^2}{1.54J_G} \\ \zeta_R &\cong 1.7 \frac{m \cdot b^2}{J_G} \zeta_V = 1.7 \frac{m \cdot b^2}{m \cdot (b^2 + h_G^2)} \zeta_V = 1.7 \frac{1}{(1 + h_G^2 / b^2)} \zeta_V \\ \zeta_R &\cong 1.7 \left( \frac{1}{1 + RA^2} \right) \zeta_V = 0.85 \zeta_V \end{aligned} \quad (105)$$

Note que se houver a inclusão da barra anti-rolagem a frequência do modo angular aumenta e a relação entre os fatores de amortecimento diminui.

## 10.10. Limite de Tombamento

O limite para eventual tombamento lateral é obtido quando a resultante  $R$  dos esforços ativos tem sua linha de ação para fora da largura da base do veículo, conforme mostrado na Figura 27. Utilizando o *TQMA* com pólo em  $O$ , na situação de equilíbrio no limite obtêm-se aproximadamente:

$$\begin{aligned}
 J_O \dot{\vec{\omega}} &= \vec{M}_O = 0 \\
 (G-O) \wedge m \vec{g} + (G-O) \wedge m \vec{a}_G &= 0 \\
 (b \vec{j} + h_G \vec{k}) \wedge -mg \vec{k} + (-b \vec{j} + h_G \vec{k}) \wedge m a_y \vec{j} &= 0 \\
 -bmg \vec{i} + h_G m a_y \vec{i} &= 0 \\
 a_y &= \frac{b}{h_G} g
 \end{aligned} \tag{106}$$



**Figura 27 - Tombamento**

$$a_y = \frac{b}{h_G} g \quad \text{ou} \quad V_{Lim} \leq \sqrt{\frac{R \cdot b}{h_G} g} \tag{107}$$

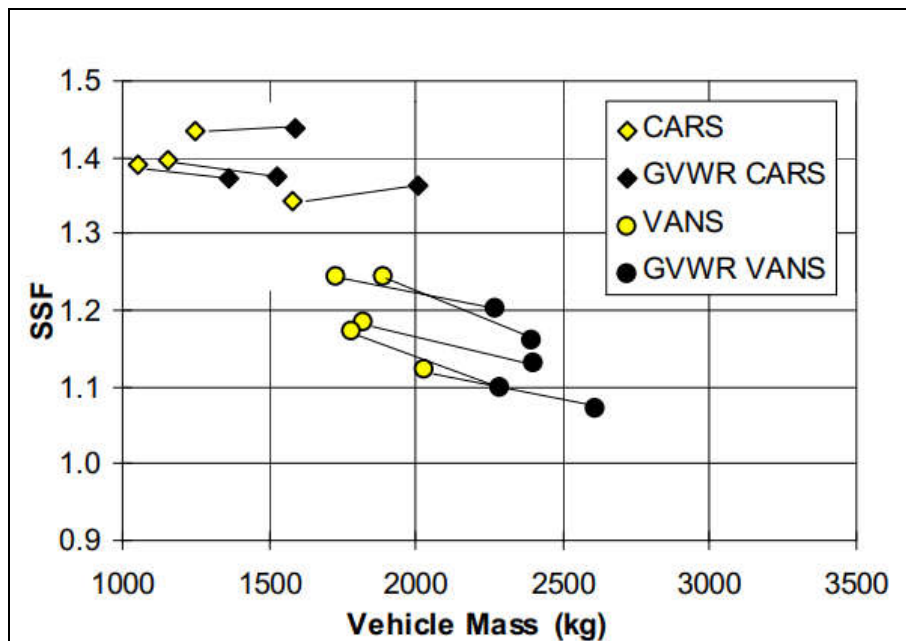
Portanto quanto menor a altura  $h_G$  do centro de massa e quanto maior a largura da base  $2b$ , maior será a capacidade do veículo em suportar aceleração lateral  $a_y$  sem tombar. Por exemplo, em curva onde  $a_c = V^2/R$  determina-se a velocidade limite.

Esta relação de estabilidade é definida pela SAE como *Static Stability Factor (SSF)* em Heydinger (1999) que publicou resultado de um levantamento elaborado para veículos de passeio e veículos de carga nas condições apenas com o motorista e totalmente carregado, conforme mostrado na Figura 28. O índice de segurança contra o tombamento é determinado como uma função

dimensional construtiva do veículo, correspondente a razão entre a distância entre as rodas no mesmo eixo ( $2b$ ) e a altura do centro de massa  $h_G$ :

$$SSF = \frac{b}{h_G} \quad (108)$$

Ou seja, quanto maior o índice de segurança contra o tombamento  $SSF$  mais seguro é o veículo contra o tombamento. Valor típicos para carros de passageiros encontra-se em torno de 1,4 e para caminhões em torno de 1,2 e 1,1 para veículo totalmente carregado ( $GVWR$ ), conforme Figura 28.



**Figura 28 – Índice de Segurança contra o Tombamento (Fonte: Heydinger 1999)**

Considerando a aceleração lateral em uma curva de raio  $R$  como  $a_y = V^2 / R$  identifica-se a velocidade máxima em curva que evita o tombamento:



$$\frac{V^2}{R} = \frac{b}{h_G} g$$

$$V = \sqrt{\frac{b}{h_G} g R} \quad (109)$$

Considerando ainda que a força de atrito lateral seja:  $|F_{at}| = \mu N$  obtêm-se a relação dimensional e o coeficiente de aderência para evitar tombamento:

$$\frac{V^2}{R} = \frac{b}{h_G} g = \mu g$$

$$\frac{b}{h_G} \geq \mu \quad (110)$$

Para suspensão flexível a inclinação lateral  $\phi$  da estrutura do veículo acrescenta uma componente alterando a expressão para:

$$\boxed{ma_y \cdot h_G = (F_{zd} - F_{ze})b + mg \cdot \sin \phi \cdot h_G} \quad (111)$$

### 11. Referencias Bibliográficas

1. Barbosa, R. S. (2012) Vehicle Vibration Response Subjected to Longwave Measured Pavement Irregularity. Journal of Mechanical Engineering and Automation 2012, Vol.: 2, nº 2, pp. 17-24, DOI: 10.5923/j.jmea.20120202.04.
2. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas – ABCM, Vol. 33, No. 3, pp. 302-307.
3. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Safety in Measured Rough Pavement. Journal of Transportation Engineering, ©ASCE, Vol. 137, No. 5, pp. 305-310 DOI: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000216,.
4. Rao, S. S. (2008) Vibrações Mecânicas. Editora Pearson Prentice Hall, 4ª edition, Tradução 2008, pp. 424.
5. Rill, G. (2009) Vehicle Dynamics. University of Applied Sciences, Lecture Notes, p. 200.
6. Pacejka, H. B. (2002) Tire and Vehicle Dynamics. Publisher: SAE International. 2nd Edition. p. 642.
7. Genta, G. (1997) Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation. Publisher: World Scientific Publishing Company. p. 556.
8. Gillespie, T. D. (1992) Fundamentals of vehicle dynamics. Society of Automotive Engineers – SAE, Warrendale, PA, p. 519.
9. Heydinger G. J. et al. (1999) Measured Vehicle Inertial Parameters – NHTSA's Data. SAE, pp. 33.