

**Mecânica I – PME 3100**

**Notas de Aula – Parte 1**

# **MECÂNICA GERAL**

## **ESTÁTICA**

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

SÃO PAULO

**CONTEÚDO**

1. INTRODUÇÃO .....	4
2. CONCEITOS BÁSICOS.....	5
3. FORÇAS .....	6
3.1. Representação da Força.....	6
3.2. Sistema de Forças.....	7
3.3. Resultante .....	7
3.4. Princípio da Ação e Reação .....	10
4. MOMENTO .....	11
4.1. Momento de um Sistema de Forças .....	13
4.2. Forças Concorrentes (Teorema de Varignon) .....	15
4.3. Mudança de Pólo.....	19
4.4. Momento em Relação a um Eixo .....	20
4.5. Binário de Forças .....	15
5. SISTEMAS EQUIVALENTES .....	22
5.1. Redução de Sistema de Forças .....	26
6. EIXO CENTRAL.....	30
6.1. Equação Vetorial .....	30
6.2. Eixo de Momento Mínimo .....	31
6.3. Momento Mínimo .....	33
7. ESTÁTICA.....	36
7.1. Forças Externa e Internas .....	36
7.2. Princípio da Ação e Reação .....	36
7.3. Grau de Liberdade .....	36
7.4. Vínculos .....	37
7.5. Elementos Vinculares.....	39
7.6. Postulados da Estática .....	40
7.7. Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre .....	41
8. ESTÁTICA - Sistemas de Corpos Rígidos .....	45
8.1. Sistemas Isostáticos.....	45
8.2. Sistema Submetido a Forças .....	45

8.3.	Sistema com Múltiplos Elementos .....	47
8.4.	Treliças .....	52
9.	CENTRO DE MASSA .....	61
9.1.	Sistema de Forças Paralelas .....	61
9.2.	Definição de Corpo Rígido .....	62
9.3.	Distribuição de Massa .....	62
9.4.	Centro de Massa .....	62
9.5.	Propriedade do Centro de Massa .....	64
10.	HIDROSTÁTICA .....	69
10.1.	Forças Distribuídas Sobre uma Superfície .....	69
10.2.	Ação de um Líquido numa Superfície Submersa .....	70
11.	ATRITO .....	78
11.1.	Atrito de Escorregamento .....	78
11.2.	Momento de Atrito de Rolamento .....	80
11.3.	Momento de Atrito de Pivotamento .....	83
11.4.	Direção da Força de Atrito .....	90
12.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	92
13.	Anexo A – Notação Vetorial .....	93
13.1.	Vetor .....	93
13.2.	Reta .....	94
13.3.	Plano .....	94
13.4.	Versores .....	95
13.5.	Representação Vetorial .....	96
13.6.	Rotação de Base .....	97
13.7.	Produto Escalar .....	98
13.8.	Produto Vetorial .....	99

**Atenção: utilize sempre a versão atualizada deste documento.**

## 1. INTRODUÇÃO

Esta monografia resume as notas de aula deste autor na disciplina de Mecânica I (PME3100), elaborada ao longo do seu aprimoramento didático junto à equipe de dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica (PME) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EP-USP). O texto pressupõe que o aluno domine os conhecimentos elementares de álgebra vetorial, álgebra linear e de cálculo diferencial e integral, adquirido nas disciplinas do primeiro ano básico (biênio) do curso de engenharia.

A motivação do curso ministrado pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (PME) é formar conhecimento fundamental sobre movimentação de partículas e corpos rígidos com objetivo de identificar trajetórias e solicitações para efeito de projeto mecânico.

O curso está dividido em três etapas, a saber:

- 1º Parte – ESTÁTICA
- 2º Parte – CINEMÁTICA
- 3º Parte – DINÂMICA

O conjunto de notas de aula se inicia pelo trato da ESTÁTICA de partículas, corpos rígidos e sistemas estruturais que serão modelados e analisados. Na CINEMÁTICA, os movimentos e composição de movimentos são abordados. Em DINÂMICA os teoremas de energia (Teorema da Energia Cinética - *TEC*), *Newton* (Teorema da Resultante - *TR*) e *Euler* (Teorema da Quantidade de Movimento Angular - *TQMA*) são apresentados e utilizados. A notação vetorial é utilizada sistematicamente ao longo deste texto (*Boulos, 1997*).

## 2. CONCEITOS BÁSICOS

São CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA *NEWTONIANA* os seguintes tópicos:

**ESPAÇO:** o espaço geométrico *Euclidiano* corresponde à noção dos conceitos de ponto (e sua localização), reta (entidade que une dois pontos), distância entre pontos e ângulos entre retas. As grandezas básicas de medida são o comprimento (medido em metros) e o ângulo (medido em radianos).

**TEMPO:** refere-se à noção de sucessão de eventos simultâneos, com os conceitos de instante, ordem e intervalo constante de tempo. O tempo pode ser medido por simultaneidade de variação de movimento constante (rotação angular do sol ou dos ponteiros de um relógio). A grandeza básica de medida é o intervalo de tempo, que é quantificado em segundos.

**MATÉRIA:** corresponde à idéia básica de quantidade de massa de um corpo, que é medida por comparação com um padrão e expressa em quilogramas.

**Sistema Internacional de Unidades (SI)** – Sistema consistente utilizado para quantificar as grandezas de base independentes. As utilizadas de base no **SI** são: comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, quantidade de substância e intensidade luminosa. As unidades de base correspondentes aos padrões do **SI** são: *metro, quilograma, segundo, ampere, kelvin, mol e candela*.

### 3. FORÇAS

A observação e a experiência mostram que o movimento (ou equilíbrio) de um corpo se modifica por efeito da interação com outros corpos. As forças podem ser de **CONTATO** ou de natureza de **CAMPO** com ação à distância. Chama-se força a grandeza física que quantifica a ação mecânica de interação de um corpo sobre outro. Esta interação tem efeitos iguais e contrários em cada corpo (princípio da ação e reação, preconizado na 3ª lei de *Newton*), ocorrendo na região de contato ou à distância devida à gravitação universal ou forças de campo.

Na realidade os corpos em contato se deformam localmente, constituindo uma região mutua de contato onde a força ocorre de maneira distribuída. Entretanto esta distribuição pode ser reduzida a uma resultante com ponto específico de aplicação. A força é uma entidade que pode ser observada apenas de forma indireta por “sensores” que percebem sua intensidade por deformação **EQUIVALENTE** (ex. pressionando a ponta dos dedos).

#### 3.1. Representação da Força

Verifica-se que a força pode ser adequadamente representada por uma grandeza vetorial, pois tem magnitude, direção e sentido. Tipicamente a interação entre corpos rígidos convexos ocorre idealizadamente por uma força aplicada em um ponto de contato. Num sistema de coordenadas tri-ortogonal, a força  $\vec{F}$  que tem ponto de aplicação  $P$ , sendo descrita na base de coordenadas  $Oxyz$  por um vetor do tipo:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \text{onde} \quad (P-O) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

conforme representação vetorial apresentada em Anexo no item 13.5.

### 3.2. Sistema de Forças

Um sistema de forças  $S$  é composto por conjunto de  $\vec{F}_i$  forças aplicadas em  $P_i$  pontos específicos sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , conforme ilustrado na Figura 1.

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{e} \quad (P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (2)$$

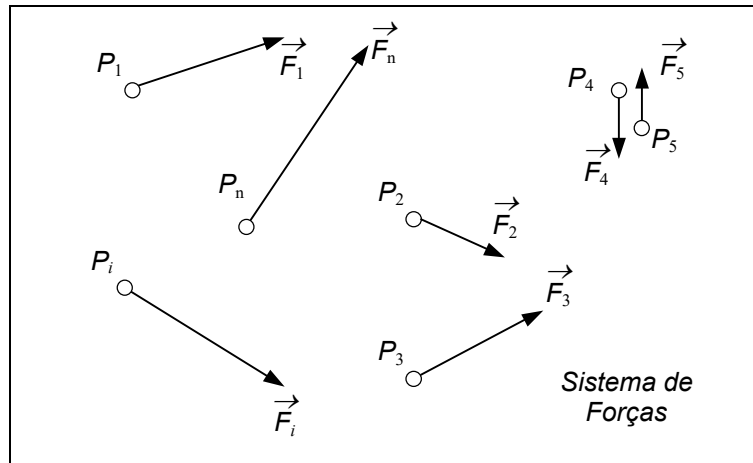
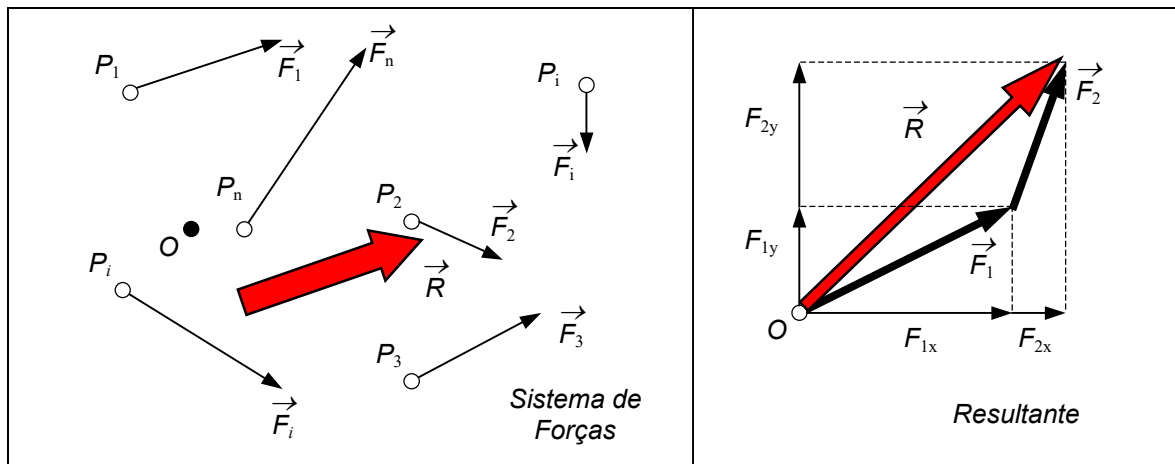


Figura 1 – Sistema de Forças

### 3.3. Resultante de Sistema de Forças

A **RESULTANTE**  $\vec{R}$  de um sistema de forças  $S$  formado por  $(\vec{F}_i, P_i)$  sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , conforme ilustrado na Figura 2a, é determinada pelo vetor  $\vec{R}$  obtido da soma das forças:

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i} \quad (3)$$



**Figura 2 – Resultante de um Sistema de Forças**

Em um sistema de coordenadas tri-ortogonal e portanto independentes, as componentes do vetor resultante ( $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ) são escalares conforme ilustrado no plano da Figura 2b, obtidos diretamente pela soma em cada direção:

$$\boxed{R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi}} \quad ; \quad \boxed{R_y = \sum_{i=1}^n F_{yi}} \quad \text{e} \quad \boxed{R_z = \sum_{i=1}^n F_{zi}} \quad (4)$$

### Exemplo Elementar:

Determinar a Resultante  $\vec{R}$  do sistema de forças  $\mathcal{S}$  dado por  $(\vec{F}_i, P_i)$  para  $i = 3$ :

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} & P_1 = (0, 2, 0) \\ \vec{F}_2 = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} & \text{aplicadas em } P_2 = (1, 1, 0) \\ \vec{F}_3 = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k} & P_3 = (1, 0, 1) \end{array}$$

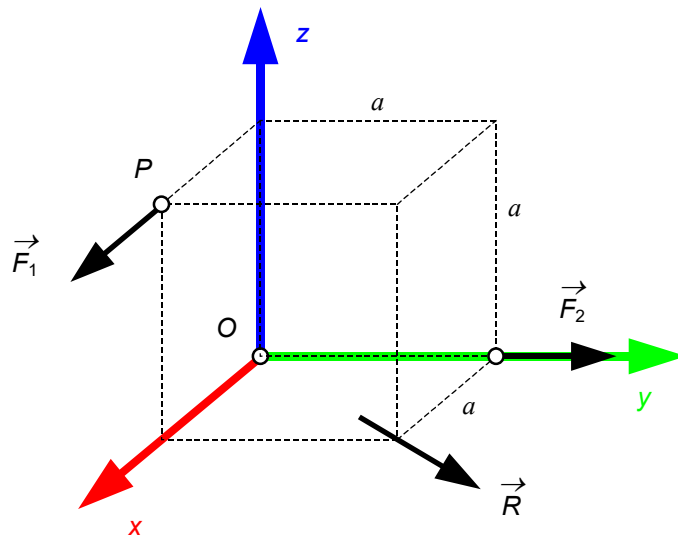
### Resolução:

$$\boxed{\vec{R} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}}$$



**Exemplo Espacial:**

Calcule a resultante  $\vec{R}$  do sistema de forças  $\mathcal{S}, (\vec{F}_i, P_i)$ , sendo  $\vec{F}_1 = F \vec{i}$  aplicada em  $P_1 (a, 0, a)$  e  $\vec{F}_2 = F \vec{j}$  aplicada em  $P_2 (0, a, 0)$ , conforme ilustrado na Figura 3:



**Figura 3 – Resultante de Sistema e Forças**

**Resolução:** Sistema:  $(\vec{F}_i, P_i)$  forças e respectivos pontos de aplicação:

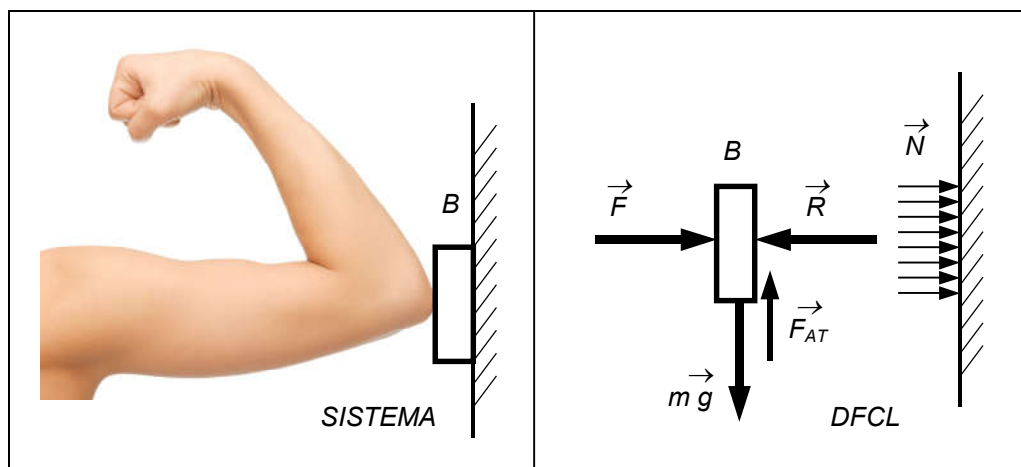
$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = F \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} & \text{aplicadas em } P_1 = (a, 0, a) \\ \vec{F}_2 = 0 \vec{i} + F \vec{j} + 0 \vec{k} & P_2 = (0, a, 0) \end{array}$$

$$\vec{F}_1 = F \vec{i} + \vec{F}_2 = F \vec{j} \Rightarrow \vec{R} = F \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

Portanto basta somar as componentes em cada direção das forças ( $R_x = \sum_{i=1}^n F_{xi}$ ) e obter cada componente da resultante  $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$ .

### 3.4. Princípio da Ação e Reação

Quando dois corpos rígidos se tocam a interação entre eles restringe a inter-penetração através de forças **ATIVAS** e **REATIVAS**. Considere um bloco pressionado pelo cotovelo contra uma parede. As forças externas ao bloco, o mantém em equilíbrio.



**Figura 4 – Ação e Reação**

No caso do cotovelo, a força ativa percebida pelo tecido da pele (sensor de força), tem seu par reativo aplicado no bloco e são sempre forças externas aos corpos e sempre associadas aos pares ativos e reativos de forças iguais e opostas, conforme a terceira lei de *Newton*. Existem dois grandes grupos de forças:

- **FORÇAS DE CONTATO** e
- **FORÇAS DE CAMPO.**

Forças de contato são decorrentes da ação entre corpos e forças de campo são devido à ação à distância entre corpos, portanto sem contato. Dois exemplos de forças de campo são: a ação gravitacional e força de atração magnética.

O **ATO DE MOVIMENTO** decorrente de uma força é uma **TRANSLAÇÃO**.

## 4. MOMENTO

O **Momento** de uma força  $\vec{F}$  aplicada no ponto  $P$  em relação a um **pólo**  $O$  é definido Pelo produto vetorial:

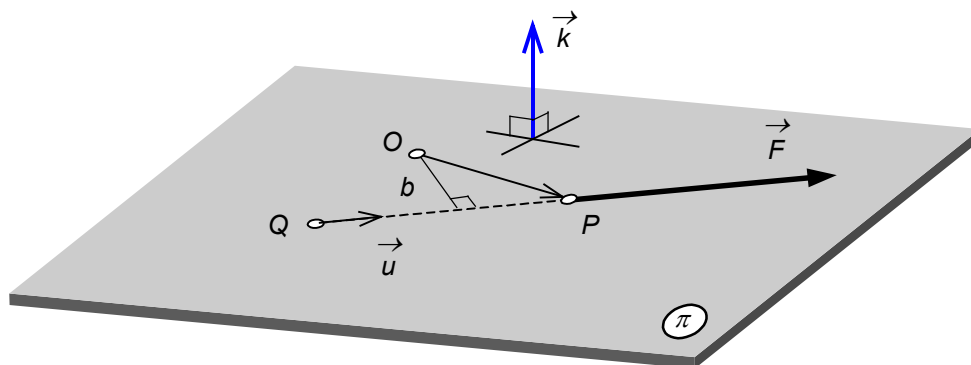
$$\boxed{\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}} \quad (5)$$

Note que o vetor momento  $\vec{M}_O$  é ortogonal ao plano  $\pi$  formado pelo força  $\vec{F}$  e o vetor  $(P_i - O)$ , conforme ilustrado na Figura 5. Portanto o momento de uma força se altera em função da magnitude da força  $\vec{F}$  e posição do pólo  $(P_i - O)$  considerado.

O modulo do vetor  $\vec{M}_O$  considerando as características do produto vetorial (ver item 13.8) é dado por:

$$|\vec{M}_O| = |P - O| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta = |\vec{F}| \cdot b \quad (6)$$

onde  $d$  é chamado de **braço de momento** dado por  $b = |\vec{M}_O| / |\vec{F}|$ , conforme ilustrado na Figura 5.



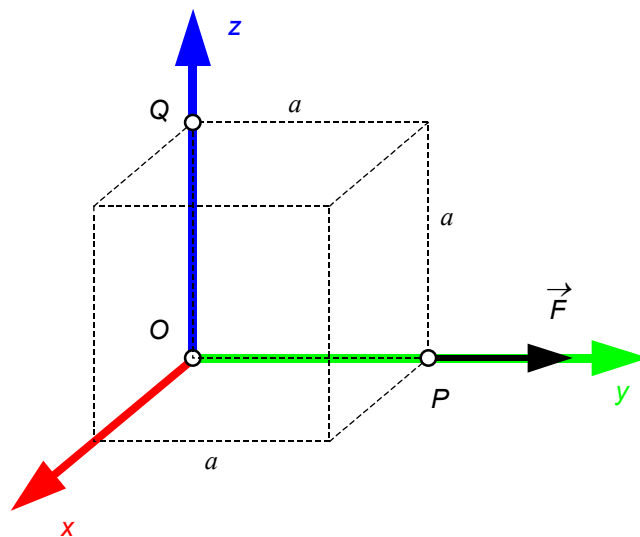
**Figura 5 – Momento de Força em Relação a um Pólo**

Note ainda que se a força for aplicada no ponto  $Q$  contido na linha de ação da força ( $\vec{u}$ ), o momento não se altera:

$$(\vec{Q}-\vec{O}) \wedge \vec{F} = [(\vec{Q}-\vec{P}) + (\vec{P}-\vec{O})] \wedge \vec{F} = (\vec{P}-\vec{O}) \wedge \vec{F} = \vec{M}_O \quad (7)$$

### Exemplo de Momento de Força

Considere a força  $(\vec{F}, P)$  conforme ilustrado na figura. Determine o momento em relação ao pólo  $Q(0, 0, a)$ .



**Resolução:** Sistema:  $(\vec{F}, P) \Rightarrow \vec{F} = F \vec{j} \quad P = a \vec{j}$

$$\vec{M}_Q = (\vec{P}-\vec{Q}) \wedge \vec{F} = (a \vec{j} - a \vec{k}) \wedge F \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & -a \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} = aF \vec{i}$$

**Análise dimensional:** é sempre conveniente realizar a análise dimensional da resposta para verificar a consistência do resultado. Considerando que a força “ $F$ ” tem unidade de *Newtons* e a coordenada “ $a$ ” tem unidade em metros, a resposta consistente do momento neste caso deve ter unidade de *Newtons*  $\times$  metro.

### 4.1. Momento de um Sistema de Forças

Para um conjunto  $S$  de forças aplicadas  $(\vec{F}_i, P_i)$ , o **Momento** das forças em relação ao **pólo**  $O$  é dado por:

$$\boxed{\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i]} \quad (8)$$

Note que o momento de cada força, com ponto de aplicação próprio, deve ser calculado individualmente e depois somado.

#### 1º Exercício de Momento:

Determinar a **Resultante**  $\vec{R}$  do sistema de forças  $S$  dado por  $(\vec{F}_i, P_i)$  e o **Momento** de  $S$  em relação a  $O(1, 1, 0)$ .

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} & P_1 = (0, 2, 0) \\ \vec{F}_2 = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} & \text{aplicadas em } P_2 = (1, 1, 0) \\ \vec{F}_3 = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k} & P_3 = (1, 0, 1) \end{array}$$

$$\boxed{\vec{R} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}} \text{ Resultante}$$

Cálculo do Momento em relação a  $O(1, 1, 0)$  utilizando  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$  e a regra da mão

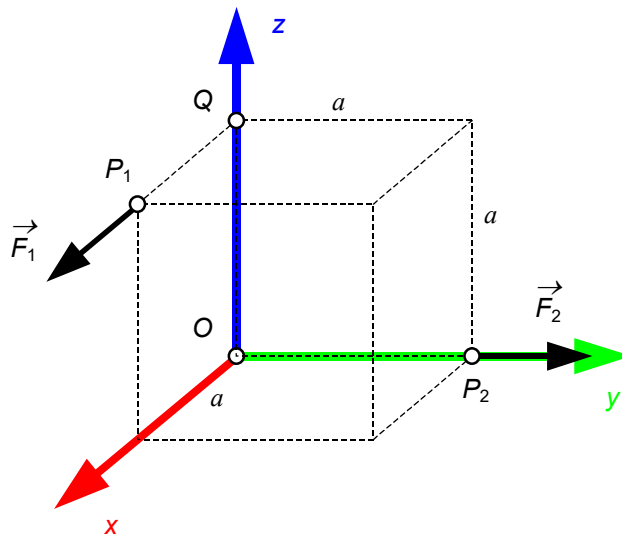
direita conforme apresentado no ANEXO 13.8:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^1 &= (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 = (-1\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) \wedge (1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{M}_O^2 &= (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) \wedge (4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = 0 \\ \vec{M}_O^3 &= (P_3 - O) \wedge \vec{F}_3 = (0\vec{i} - 1\vec{j} + 1\vec{k}) \wedge (0\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k}) = -6\vec{i} \end{aligned}$$

$$\text{Momento } \boxed{\vec{M}_O = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}}$$

**2º Exercício de Momento:**

Calcule o momento  $\vec{M}_O$  do sistema de forças  $\mathcal{S}$  em relação ao pólo  $O$ , indicado na Figura 6:



**Figura 6 – Sistema e Forças**

**Resolução:** Sistema: forças e pontos de aplicação:  $\vec{F}_1 = F \vec{i}$  aplicada em  $P_1 (a,0,a)$  e  $\vec{F}_2 = F \vec{j}$  aplicada em  $P_2 (0,a,0)$ . Determinar o momento em relação ao pólo  $O (0,0,0)$ :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = (a \vec{i} + a \vec{k}) \wedge F_1 \vec{i} + (a \vec{j}) \wedge F_2 \vec{j} = a F \vec{j}$$

Considere agora o pólo  $Q (0,0,a)$  e calcule novamente o momento:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_Q = a \vec{i} \wedge F_1 \vec{i} + (a \vec{j} - a \vec{k}) \wedge F_2 \vec{j} = a F \vec{i}$$

Portanto a mudança de pólo pode alterar a magnitude do momento como também pode mudar a sua direção.

## 4.2. Binário de Forças

Existe um par especial de forças ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) aplicadas em pontos ( $P_1$  e  $P_2$ ) chamado de **BINÁRIO DE FORÇAS**, que tem resultante nula e momento diferente de zero (torque). São obrigatoriamente forças colineares, idênticas e opostas ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$ ), mas não alinhadas ( $d$ ), conforme ilustrado na Figura 7. O momento do binário de forças tem direção perpendicular ao plano formado pelas forças e independe do pólo selecionado (verifica-se pela fórmula de mudança de pólo).

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{aplicadas em:} \quad (P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (9)$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^2 [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i] = \vec{0} \quad (10)$$

$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 \quad (11)$$

$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \wedge \vec{F} + (P_2 - O) \wedge (-\vec{F}) = [(P_1 - O) - (P_2 - O)] \wedge \vec{F} \quad (12)$$

$$\vec{M}_O = (P_1 - P_2) \wedge \vec{F} \quad \text{ou} \quad |\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot (P_1 - P_2) \cdot \sin \theta = |\vec{F}| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = |\vec{M}| / |\vec{R}| \quad (13)$$

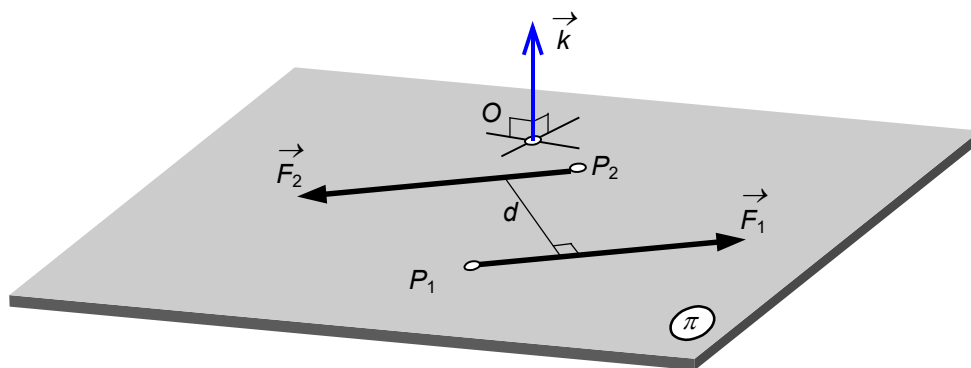


Figura 7 – Binário de Forças

**Propriedades:**

- $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow$  O sistema é equivalente a um binário de forças.
- $\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{M}_Q \Rightarrow$  O momento do binário não depende do pólo selecionado.
- O momento do binário de forças não se altera se o ponto de aplicação da força for transportado ao longo de sua direção de atuação (note que o braço  $d$  do binário não se altera).

**Exemplo de Binário de Forças**

Considere o sistema de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  com características de binário e determine a resultante e o momento em relação aos pólos  $O(0, 0, 0)$  e ao pólo  $Q(0, C, 0)$ .

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1, O) &\Rightarrow \vec{F}_1 = a \vec{j} & (O - O) &= 0 \\ (\vec{F}_2, A) &\Rightarrow \vec{F}_2 = -a \vec{j} & (A - O) &= b \vec{i} \end{aligned}$$

$$R = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = a \vec{j} + (-a \vec{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^2 [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i] = (O - O) \wedge \vec{F}_1 + (A - O) \wedge \vec{F}_2 = 0 + b \vec{i} \wedge (-a \vec{j}) = ab \vec{k}$$

$$\vec{M}_Q = (O - Q) \wedge \vec{F}_1 + (A - Q) \wedge \vec{F}_2 = (-c \vec{j}) \wedge a \vec{j} + (b \vec{i} - c \vec{j}) \wedge (-a \vec{j}) = ab \vec{k}$$

O momento de um binário de forças, portanto é uma entidade que pode ser observada apenas de forma indireta, pois tem forças, mas resultante nula e momento diferente de zero.

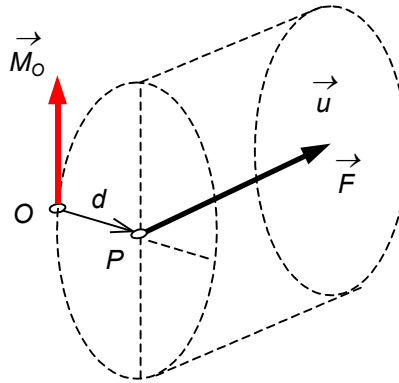
O **ATO DE MOVIMENTO** decorrente de um binário de força é uma **ROTAÇÃO**.

**Proposição:**

Considere uma força  $\vec{F}$  aplicada no ponto  $P$ . Qual o lugar geométrico dos pólos (pontos) para os quais o módulo do momento dessa força não se altera (invariante)?



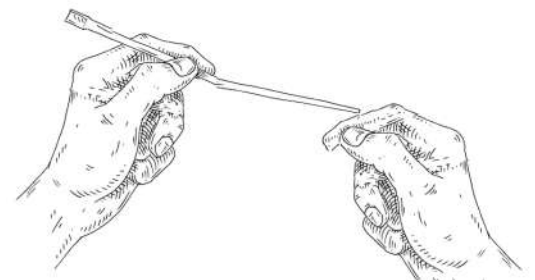
**Resposta:** Um cilindro de raio  $d$  idêntico ao braço de momento, em torno da linha de ação da força.



**Demonstração:** O momento da força  $\vec{F}$  em relação ao pólo  $O$  é:  $\vec{M}_O = (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{F}$  e tem módulo igual à:  $|\vec{M}_O| = |(\vec{P} - \vec{O})| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$ ; mas para  $\theta = \pi$  tem-se que  $|(\vec{P} - \vec{O})| \cdot \sin \theta = d$  que é um círculo em torno do ponto  $P$ . Como o momento não se altera para pólos ao longo da linha de ação da força  $\vec{F}$ , resulta em um cilindro de raio  $d$  (c.q.d.), conforme ilustrada na figura. O valor do momento será mínimo quando  $d = 0$ , ou seja, pólos coincidentes com a linha de ação da força geram momento nulo.

### Proposição:

Tente quebrar um palito de comida oriental (*hashi*) aplicando forçamentos com as duas mãos, apenas nas extremidades. Qual a estratégia mais fácil de quebrar ?



Dai-me um ponto de apoio e levantarei o mundo (*Arquimedes*, Grécia - 287-212 aC).

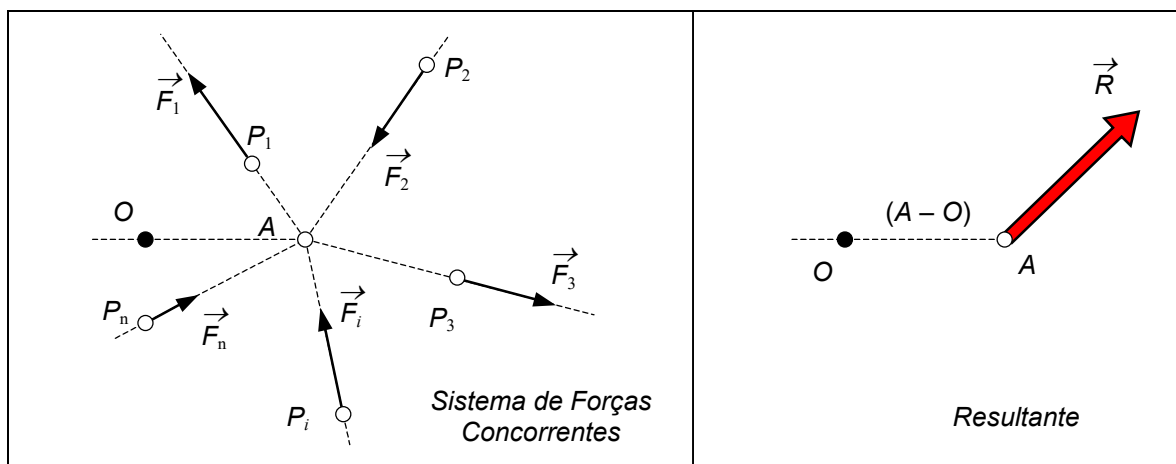
### 4.3. Forças Concorrentes (Teorema de Varignon)

Vetores que representam forças no espaço  $\mathbb{R}^3$  podem ser:

- PARALELOS;
- CONCORRENTES;
- REVERSOS.

O momento de um sistema  $S$  de forças **concorrentes**  $(\vec{F}_i, P_i)$ , em relação a um pólo  $O$  qualquer, é igual ao momento, em relação ao mesmo pólo, da resultante do sistema de forças  $\vec{R}$ , aplicada no ponto de concurso das forças (Ponto  $A$ ). Demonstração: Considere o sistema de forças concorrentes no ponto  $A$ , conforme ilustrado na Figura 8a. O momento em relação ao pólo  $O$  é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (14)$$



**Figura 8 – Momento de Forças Concorrentes**

Note ainda que o momento não se altera quando o ponto de aplicação da força permanece sobre a linha de ação da força, por exemplo sobre o ponto de concorrência  $A$ . Portanto, conforme ilustrado na Figura 8b, obtêm-se:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (A-O) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = (A-O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = (A-O) \wedge \vec{R} \quad (15)$$

*c.q.d.*

#### 4.4. Mudança de Pólo

Pode ser necessário determinar o Momento do sistema de forças em relação a outro pólo distinto. Considere outro pólo  $Q$  qualquer, tal que:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i \quad (16)$$

Tomando  $(P_i - O) = (P_i - Q) + (Q - O)$  e fazendo a diferença entre os momentos em cada pólo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n [(P_i - Q) + (Q - O)] \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n (Q - O) \wedge \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q - \vec{M}_O &= 0 - (Q - O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = -(Q - O) \wedge \vec{R} \\ \vec{M}_Q &= \vec{M}_O + (O - Q) \wedge \vec{R} \end{aligned} \quad (17)$$

Desta forma conclui-se que:

- Se  $\vec{R} = \vec{0} \therefore \vec{M}_Q = \vec{M}_O$  o momento do sistema de forças independe do pólo escolhido;
- Se  $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_Q = \vec{M}_O$  se e somente se  $(O - Q) \parallel \vec{R}$ ;

- c) Se  $\vec{M}_Q = \vec{M}_O$  para qualquer  $Q \Rightarrow (O-Q) \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$ ;
- d)  $\vec{M}_Q \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I \quad \therefore$  a projeção do momento do sistema sobre a resultante é invariante para mudanças de pólo. O escalar  $I$  é chamado de **INVARIANTE ESCALAR** do sistema de forças.

$$\boxed{\vec{M}_Q = \vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R}} \quad \text{\underline{Fórmula de Mudança de Pólo}} \quad (18)$$

### Exercício

Considere o momento em relação ao pólo  $O$  (0, 0, 0),  $\vec{M}_O = a F \vec{j}$  do sistema de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  com resultante  $\vec{R} = F \cdot (\vec{i} + \vec{j})$  apresentado na Figura 6. Determine o momento  $\vec{M}_Q$  em relação ao pólo  $Q$  (0, 0, a). Resolução: Utilizando a fórmula de mudança de pólo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R} \\ \vec{M}_Q &= a F \vec{j} - a \vec{k} \wedge F \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = a F \cdot (\vec{j} - \vec{j} + \vec{i}) = a F \vec{i} \end{aligned} \quad (19)$$

### 4.5. Momento em Relação a um Eixo

Considera-se um eixo passando por um ponto  $O$  e orientado pelo versor  $\vec{u}$ . Defini-se como momento do sistema de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  em relação ao eixo  $O\vec{u}$  (ou torque) o escalar  $M_u$  tal que (ver detalhes de produto escalar no item 13.7):

$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \quad (20)$$

Algumas propriedades são importantes:

- a) Uma força paralela ao eixo  $O\vec{u}$  não acrescenta momento ao eixo.

- b) O valor absoluto do momento de uma força ortogonal a um eixo é o produto do módulo da força multiplicado pela distância da linha de ação da força ao eixo.
- c) Só fornecem momentos em relação ao eixo, forças ortogonais ao eixo e reversas com ele.
- d) O sinal do momento em relação a um eixo pode ser identificado pela regra da mão direita.

**Exemplo:** Considere o Momento do sistema de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  calculado em relação ao outro ponto  $Q$  pertencente ao eixo  $\vec{u}$ . Utilizando a fórmula de mudança de pólo, obêm-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_Q &= \vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R} \\ \vec{M}_Q \cdot \vec{u} &= [\vec{M}_O + (O-Q) \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} + \vec{0}\end{aligned}\tag{21}$$

Note que  $(O-Q) // \vec{u}$  portanto  $(O-Q) \wedge \vec{R} \perp \vec{u}$ .

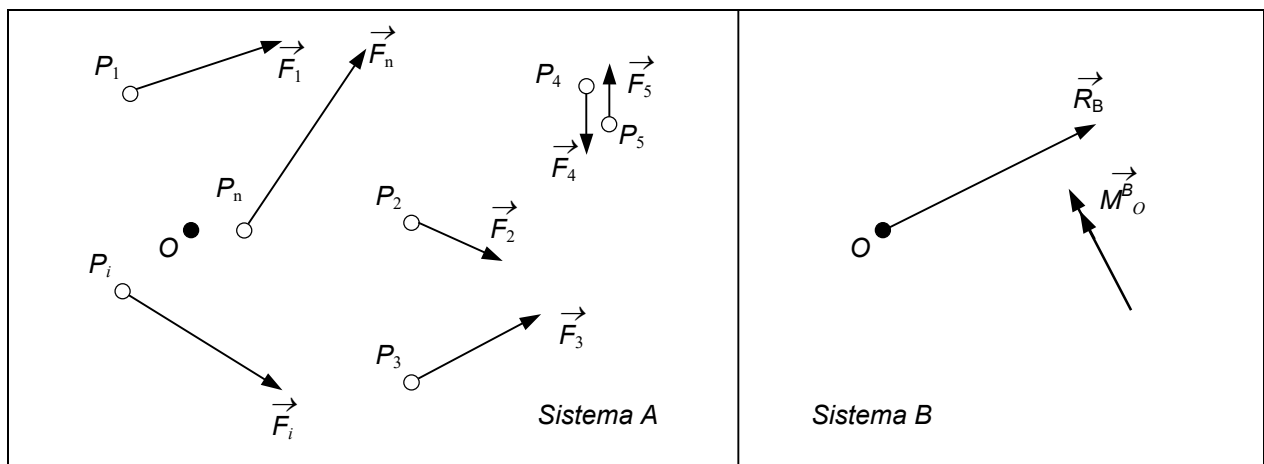
Vejam as deduções das propriedades de momento em relação a um eixo em *França* (2011).

## 5. SISTEMAS EQUIVALENTES

**DEFINIÇÃO:** dois sistemas de forçamentos são equivalentes se tiverem a mesma **Resultante** e o mesmo **Momento** em relação a um pólo. Neste caso, as solicitações devem produzir o mesmo **Ato de Movimento** a um corpo.

Considere o Sistema de Forças A  $\vec{F}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , aplicadas em pontos  $P_i$ , conforme ilustrado na Figura 9:

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k} \quad \text{e} \quad P_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (22)$$



**Figura 9 – Sistemas Equivalentes**

O Sistema A, conforme ilustrado na Figura 9a possui **Resultante** e **Momento** em relação ao pólo  $O$  descritos por:

$$\vec{R}_A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^A = \sum_{i=1}^{n-2} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{M} \quad (23)$$

Note que as forças  $\vec{F}_4$  e  $\vec{F}_5$  formam um binário de Resultante nula e Momento  $\vec{M} = (P_4 - P_5) \wedge \vec{F}_4$  com módulo  $|\vec{M}| = |P_4 - P_5| \wedge |\vec{F}_4| = d \cdot F$ .

O Sistema B (conforme ilustrado na Figura 9b) será equivalente ao Sistema A se a resultante e o momento em relação ao mesmo pólo forem idênticas:

$$\vec{R}_B = \vec{R}_A \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^B = \vec{M}_O^A \quad (24)$$

A resultante  $\vec{R}_B$  deve ser aplicada no ponto **O** chamado de pólo de redução do sistema de forças.

### Propriedades:

- a) O ato de movimento de um corpo não se altera, se substituirmos as forças aplicadas em um mesmo ponto pela resultante delas aplicada nesse mesmo ponto, e reciprocamente.
- b) O momento de binário de forças não é alterado se o ponto de aplicação da força for transportado ao longo de sua direção de atuação (note que o braço **d** do binário não se altera).
- c) Teorema: Todo sistema de forças é equivalente a uma única força aplicada num ponto e um momento de binário.

### Exemplo 1: Sistema Nulo

**Sistema Equivalente:** qual o Sistema **B** equivalente ao Sistema **A**, apresentado na Figura 10a.

**Resolução:** Sistema **A** de forças ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) paralelas, iguais e opostas aplicadas em pontos coincidentes ( $P_1$  e  $P_2$ ). Diagrama de forças. Resultante e Momento em relação ao pólo **O** do Sistema **A**:  $\vec{R} = \vec{0}$  ;  $\vec{M} = \vec{0}$ . Sistema **B**:  $\vec{R} = \vec{0}$  ;  $\vec{M} = \vec{0}$  (Figura 10b).

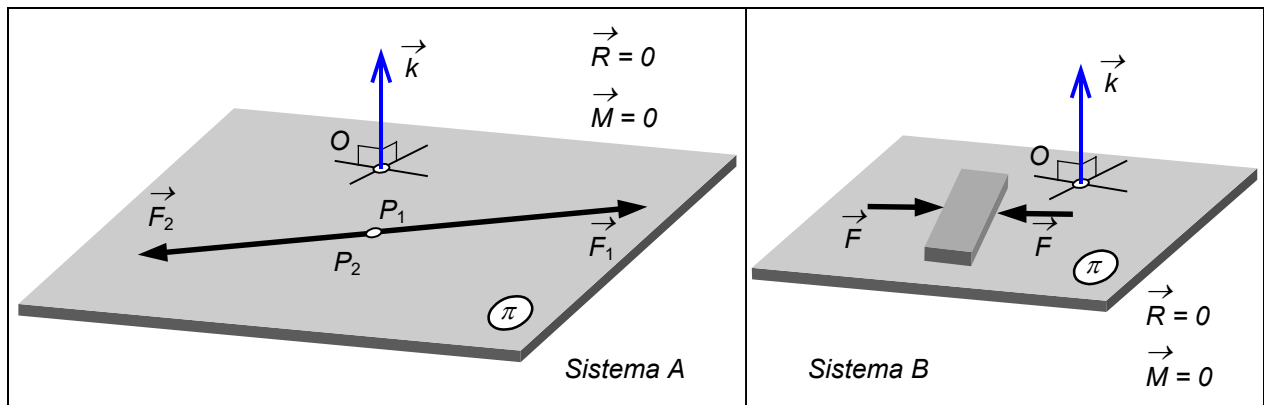


Figura 10 – Sistemas Equivalente - Nulo

Aplique forças similares alinhadas com os dedos sobre o seu celular apoiado sobre a mesa. O que acontece?

## Exemplo 2 – Binário de Forças

**Sistema Equivalente:** qual o Sistema **B** equivalente ao Sistema **A**, apresentado na Figura 11a.

**Resolução:** Sistema **A** de forças ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) paralelas, iguais e opostas (binário de forças) aplicadas em pontos ( $P_1$  e  $P_2$ ). Diagrama de forças. Resultante e Momento em relação ao pólo  $O$  do Sistema **A**:  $\vec{R} = \vec{0}$ ;  $\vec{M} = d \cdot F \vec{k}$ . Sistema **B**:  $\vec{R} = \vec{0}$ ;  $\vec{M} = d \cdot F \vec{k}$  (Figura 11b).

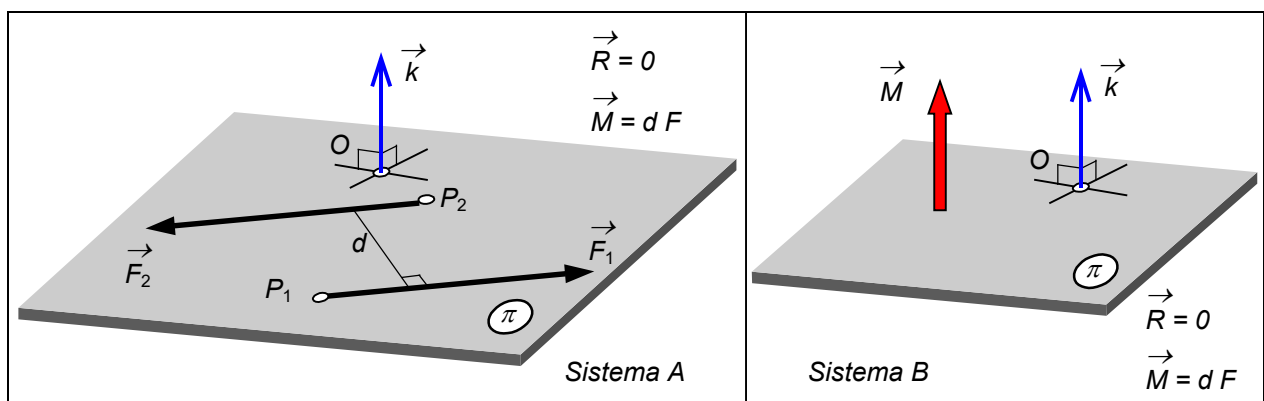


Figura 11 – Sistemas Equivalente - Binário



Agora aplique forças similares com os dedos **não alinhados** (afastados de  $d$ ) sobre o seu celular apoiado sobre a mesa. O que acontece? Qual o ato de movimento?

### Exemplo 3: Uma Força

Considere o sistema de força **A** com  $(\vec{F}_1, P_1)$  aplicada no disco de centro **O**, conforme apresentado na Figura 12a. Pode-se obter o Sistema **B** equivalente ao Sistema **A**, com o introdução de duas forças alinhadas iguais e contrárias aplicadas no ponto **O** (portanto com Resultante e Momento nulos). **Resolução:** Sistema **A** com  $(\vec{F}_1, P_1)$ . Adicionar duas forças alinhadas, iguais e opostas  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_2$  aplicadas no ponto **O** que não afetam o sistema pois tem Resultante e Momento nulos, conforme Figura 12b. O Sistema **A** possui:  $\vec{R} = F_1 \vec{i}$  ;  $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$ . Note que o par  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  forma o binário  $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$ . Finalmente o Sistema **B** resulta em:  $\vec{R} = F_1 \vec{i}$  ;  $\vec{M}_O = r \cdot F \vec{k}$ , portanto **equivalente**, conforme ilustrado na Figura 12c.

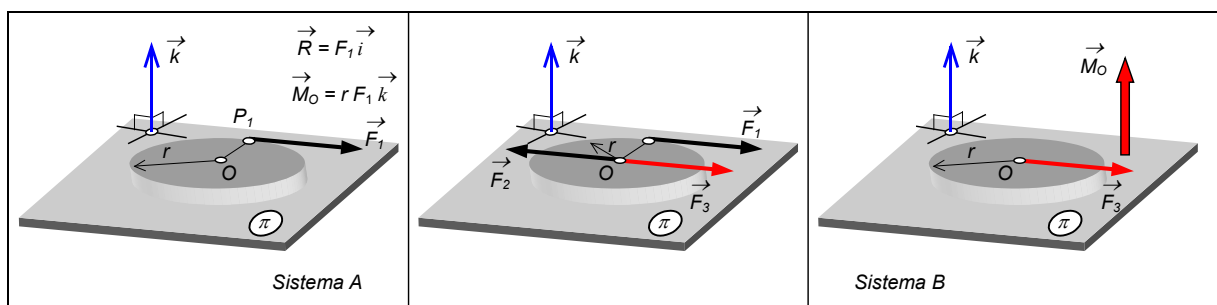


Figura 12 – Sistemas Equivalente

Note que o sistema de forçamento “tende” a produzir um **ato de movimento** de **translação** na direção  $x$  devido a força  $\vec{F}_3$  e uma **rotação** na direção  $z$ , devido ao binário  $\vec{M}_O$ .

### 5.1. Redução de Sistema de Forças

Reduzir um sistema de forças corresponde a obter outro sistema equivalente, que tenha um número mínimo de forças. Da definição de sistemas equivalentes, constata-se que o sistema reduzido mínimo consiste de uma única força (Resultante) aplicada num ponto **O** qualquer e um momento idêntico ao momento das forças do sistema original, em relação ao mesmo pólo.

Casos possíveis de redução de sistemas de forças:

- 1)  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow$  O sistema é equivalente a zero (Tipo 1).
- 2)  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow$  O sistema é equivalente a um binário de momento  $\vec{M}_O$  (Tipo 2).
- 3)  $\vec{R} \neq \vec{0}$  e  $I = 0 \Rightarrow$  O sistema é equivalente a uma única força resultante aplicada em ponto específico (Tipo 3).
- 4)  $\vec{R} \neq \vec{0}$  e  $I \neq 0 \Rightarrow$  O sistema é equivalente a uma força resultante e um momento (Tipo 4).

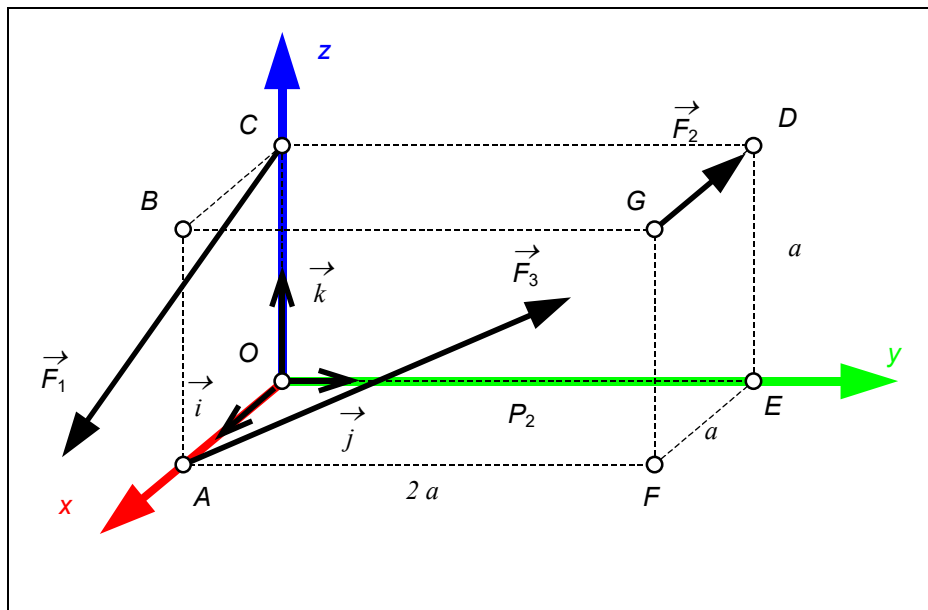
Portanto um sistema de forçamentos, composto por forças e momentos, é equivalente a uma única força resultante aplicada no pólo de redução e um binário de momento. Para sistema com INVARIANTE NULO o sistema será equivalente a uma única força aplicada em um ponto específico.

O ATO DE MOVIMENTO decorrente de um sistema de forçamentos na sua constituição mais ampla é uma ROTO-TRANSLAÇÃO.

### Exemplo de Redução Sistema de Forças

Considere o sistema **S** de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  conforme ilustrado na Figura 13, com as seguintes características e determine a resultante o momento em relação aos pólos **O** e **G**. Verifique a qual sistema de forças mais simples o sistema original é redutível. Neste caso qual a linha de aplicação da resultante e qual o momento mínimo?

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}_1, C) &\Rightarrow \vec{F}_1 = +a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k} & (C-O) &= a\vec{k} \\
 (\vec{F}_2, G) &\Rightarrow \vec{F}_2 = -a\vec{i} & (G-O) &= a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} \\
 (\vec{F}_3, A) &\Rightarrow \vec{F}_3 = a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} & (A-O) &= a\vec{i}
 \end{aligned}$$



**Figura 13 – Sistema de Forças S**

**RESOLUÇÃO:** Sistema S de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$ . Diagrama de forças: conforme a figura, Referencial e pólo:  $Oxyz$ . Teoremas:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ ,  $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$ ,  $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$ .

a) A Resultante é obtida da soma das componentes em cada direção independente:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= +a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k} \\
 \vec{F}_2 &= -a\vec{i} \\
 \vec{F}_3 &= +a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k} \\
 \vec{R} &= +a\vec{i} + a\vec{j}
 \end{aligned}$$

b) O Momento das forças é calculado em relação ao pólo indicado:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O &= (C-O) \wedge \vec{F}_1 + (G-O) \wedge \vec{F}_2 + (A-O) \wedge \vec{F}_3 \\
\vec{M}_O &= (a \vec{k}) \wedge (a \vec{i} - a \vec{j} - a \vec{k}) + (a \vec{i} + 2a \vec{j} + a \vec{k}) \wedge (-a \vec{i}) + (a \vec{i}) \wedge (a \vec{i} + 2a \vec{j} + a \vec{k}) \\
\vec{M}_O &= a^2 \vec{j} + a^2 \vec{i} + 2a^2 \vec{k} - a^2 \vec{j} + 2a^2 \vec{k} - a^2 \vec{j} \\
\vec{M}_O &= a^2 \vec{i} - a^2 \vec{j} + 4a^2 \vec{k}
\end{aligned}$$

c) Para que o sistema de forças seja redutível a uma única força o Invariante Escalar deve ser nulo:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (a^2 \vec{i} - a^2 \vec{j} + 4a^2 \vec{k}) \cdot (a \vec{i} + a \vec{j}) = a^3 - a^3 = 0$$

Portanto o sistema original  $\mathcal{S}$  é do tipo 3, redutível a uma única força  $\vec{R}$  desde que aplicada no local  $\mathcal{Q}$  tal que o momento do novo sistema  $\mathcal{S}'$  seja:  $\vec{M}'_O = (Q-O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$ . Então identifica-se as coordenadas do ponto  $\mathcal{Q}$  com:

$$\begin{aligned}
(Q-O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O &\Rightarrow (q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}) \wedge (a \vec{i} + a \vec{j}) = (a^2 \vec{i} - a^2 \vec{j} + 4a^2 \vec{k}) \\
a q_x \vec{k} - a q_y \vec{k} + a q_z \vec{j} - a q_z \vec{i} &= (a^2 \vec{i} - a^2 \vec{j} + 4a^2 \vec{k}) \quad \text{separando nas três direções:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{i} \begin{cases} -a q_z = a^2 \\ a q_z = -a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} q_z = -a \\ q_z = -a \end{cases} \Rightarrow \text{para } q_y = a \Rightarrow (Q-O) = 5a \vec{i} + a \vec{j} - a \vec{k} \\
\vec{j} \begin{cases} a q_z = -a^2 \\ a(q_x - q_y) = 4a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} q_z = -a \\ q_x = q_y + 4a \end{cases} \\
\vec{k} &
\end{aligned}$$

O novo sistema  $\mathcal{S}'$ , que é equivalente a  $\mathcal{S}$ , é composto de uma única força aplicada em  $\mathcal{Q}$ :  $(\vec{R}, \mathcal{Q})$ .

Note que a Resultante pode ser aplicada em qualquer ponto  $\mathcal{Q}$  ao longo da direção de  $\vec{R}$ .

### Exemplo: Sistema de Forças Concorrentes

O sistema  $\mathcal{S}$  de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  concorrentes, conforme ilustrado na Figura 13, tem resultante não nula e invariante escalar nulo. Demonstração: o momento de uma força é sempre o mesmo para pólos ao longo da linha de ação da força, inclusive o ponto  $A$  de concorrência. Portanto o momento em relação ao pólo  $O$  é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (A - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = (A - O) \wedge \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}_O = (A - O) \wedge \vec{R} \quad \text{Portanto sistema do tipo 3.}$$

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = [(A - O) \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R} = 0$$

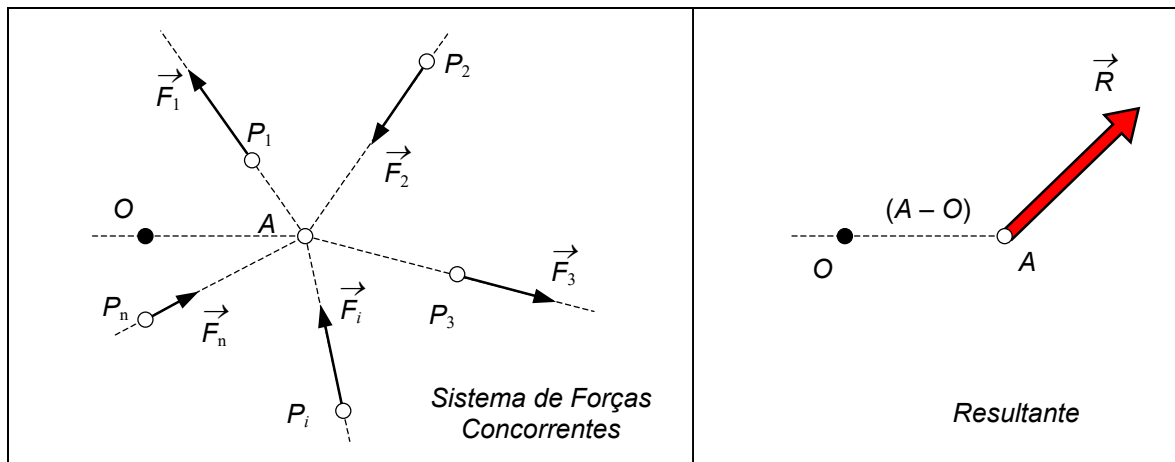


Figura 14 – Sistema de Forças Concorrentes

### Exemplo: Sistema de Forças Coplanares

O sistema  $\mathcal{S}$  de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  coplanares, com resultante não nula tem invariante escalar nulo.

Demonstração: a resultante das forças será contida nesse plano. Tomando um pólo pertencente a plano da linha de ação das forças, o momento será ortogonal a esse plano.

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \quad \text{para} \quad \vec{M}_O \perp \vec{R}. \quad \text{Portanto sistema do tipo 3.}$$

### Exemplo: Sistema de Forças Paralelas

Considere o sistema  $\mathcal{S}$  de forças  $(\vec{F}_i, P_i)$  paralelas  $\vec{F}_i = h_i \vec{u}$ . A resultante e o momento em relação ao pólo  $O$  serão:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = (\sum h_i) \vec{u}$  e  $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (\sum (P_i - O) \cdot h_i) \wedge \vec{u}$ .

Finalmente o invariante escalar:  $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$  para  $\vec{M}_O \parallel \vec{R}$ . Portanto sistema do tipo 3.

## 6. EIXO CENTRAL

Existe um conjunto de pontos formando um eixo, sobre o qual o momento de um sistema de forças produz um **MOMENTO MÍNIMO**. Tal eixo é denominado **EIXO CENTRAL**. Para determinar a localização de tal eixo vamos apresentar a resolução da equação vetorial com uma incógnita.

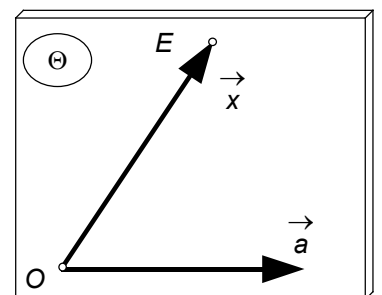
### 6.1. Equação Vetorial

**Resolução do Produto Vetorial:** Determinar a incógnita  $\vec{x}$  do produto vetorial:

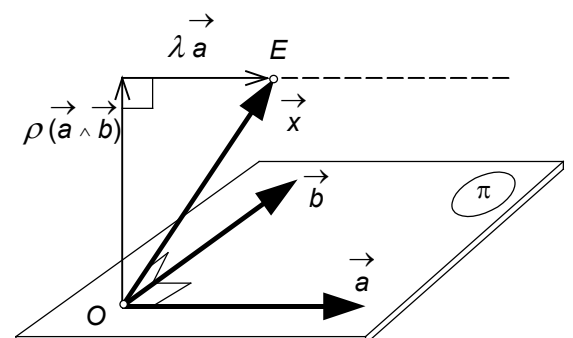
$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}} \quad (25)$$

com  $\vec{x}$ ,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  não nulos e  $\in \mathcal{R}^3$ ; que é um espaço vetorial de ordem 3 (3 dimensões).

Considere o plano  $\Theta$  formado pelos vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{a}$  quaisquer e não ortogonais, conforme ilustrado na figura. Observe que o vetor  $\vec{b}$  será ortogonal ao plano  $\Theta$ , devido as propriedades do produto vetorial, então  $\vec{b} \perp \vec{x}$  e também  $\vec{b} \perp \vec{a}$ , conforme ilustrado na figura. Portanto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  (perpendiculares) e contidos no plano  $\pi$ , ortogonal ao plano  $\Theta$ .



Pode-se representar o vetor  $\vec{x} = (E - O)$  contido no plano  $\Theta$  como a soma de dois vetores: um na direção de  $\vec{a}$  e outro perpendicular a  $\vec{a}$  (e  $\therefore$  ortogonal a  $\vec{b}$ , como já estabelecido), conforme ilustrado na figura.



$$\vec{x} = (E - O) \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \rho(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a}} \quad \text{com } \lambda \text{ e } \rho \in \mathfrak{R}. \quad (26)$$

Substituindo esta expressão na equação incógnita, tem-se que:

$$[\rho(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \lambda \vec{a}] \wedge \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow (\rho \vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad (27)$$

Tomando o módulo dos termos da equação anterior e como os vetores são perpendiculares, determina-se o valor para o escalar  $\rho$ :

$$|\rho| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \quad (28)$$

Verificando, a solução corresponde ao valor positivo de  $\rho$ , obtêm-se finalmente da equação incógnita a resolução para  $\vec{x}$ :

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}} \quad (29)$$

com o escalar  $\lambda$  qualquer  $\in \mathfrak{R}$  que são as soluções da equação do produto vetorial com uma incógnita em  $\vec{x}$ . Tal solução correspondente à reta  $\lambda \vec{a}$  (linha pontilhada mostrada na figura) que passa pelo ponto  $E$ . Note ainda que a solução particular quando  $\lambda = 0$ , resulta em  $\vec{x} \perp \vec{a}$ .

## 6.2. Eixo de Momento Mínimo

Considere o sistema de forças  $\mathbf{S}$  com resultante não nula e momento  $\vec{M}_O$ . O lugar geométrico dos pontos  $E$  para os quais o momento do sistema é paralelo à resultante ( $\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$ ) é uma reta paralela à  $\vec{R}$ . Tal reta é única e chamada de **EIXO CENTRAL** do sistema  $\mathbf{S}$ .

**Demonstração:** Utilizando a fórmula de mudança de pólo e impondo que  $\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$  obtêm-se:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \quad \Rightarrow \quad (E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - h \cdot \vec{R} \quad (30)$$

A solução de uma equação vetorial com uma incógnita é dada por:

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a} \quad (31)$$

$$\underbrace{(E - O)}_{\vec{x}} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{\vec{a}} = \underbrace{\vec{M}_O - h \cdot \vec{R}}_{\vec{b}} \quad \Rightarrow \quad (E - O) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_O - h \cdot \vec{R})}{R^2} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \quad (32)$$

que é o ponto  $E$  para o qual o momento é mínimo. Portanto os pontos do eixo  $(E - O)$  paralelo para a resultante são:

$$\boxed{(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \cdot \vec{R}} \quad (33)$$

que é a equação da reta paralela à  $\vec{R}$  (**EIXO CENTRAL**) descrita na forma paramétrica como:

$$\boxed{E = O + \left( \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \right) + \lambda \cdot \vec{R}} \quad (34)$$

A determinação do escalar  $h$  é obtida pré-multiplicando-se escalarmente os dois lados da equação anterior por  $\vec{R}$  (o produto triplo com dois vetores paralelos é nulo) obtendo-se:

$$\vec{R} \cdot (E - O) \wedge \vec{R} = \vec{R} \cdot (\vec{M}_O - h \cdot \vec{R}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{I}{R^2} \quad (35)$$

onde  $I$  é o invariante escalar definido anteriormente.



### 6.3. Momento Mínimo

O momento de um sistema de forças  $\mathbf{S}$  é **MÍNIMO** quando o pólo estiver sobre o **EIXO CENTRAL**. Neste eixo o momento tem a direção da resultante sendo mínimo e determinado por:

$$\vec{M}_E = h \cdot \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_E = \frac{I}{|\vec{R}|^2} \cdot \vec{R}} \quad (36)$$

**Demonstração:** Considere um sistema de forças  $\mathbf{S}$  com resultante  $\vec{R}$  momento  $\vec{M}_O$  em relação a um pólo  $O$ . O momento em relação a um pólo  $E$  é obtido pela fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R} \quad (37)$$

Utilizando novamente a fórmula de mudança de pólo para outro pólo  $P$ , fora do eixo central, terá momento:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_E + (E - P) \wedge \vec{R} \quad (38)$$

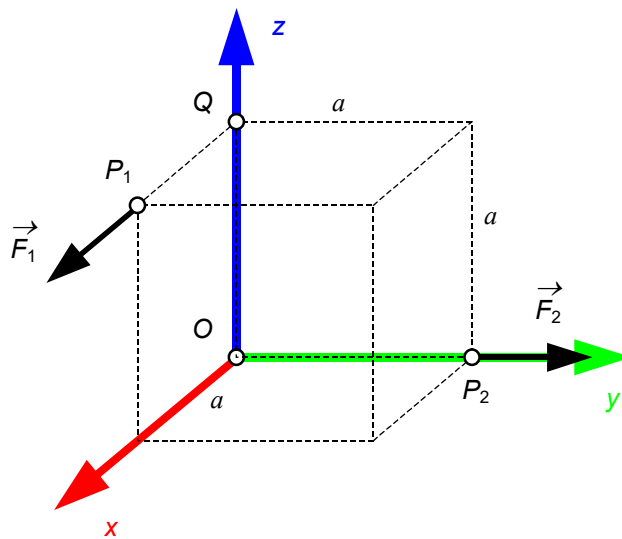
No eixo central vale  $\vec{M}_E = h \cdot \vec{R}$  portanto qualquer ponto  $P$  fora do eixo central:

$$\vec{M}_P = h \vec{R} + (E - P) \wedge \vec{R} \quad (39)$$

que mostra que  $\vec{M}_P$  não é mais paralelo com  $\vec{R}$  pois à ele é somada uma componente ortogonal. Portanto para qualquer ponto  $P$  fora do eixo central, o momento  $\vec{M}_P$  não é mais o valor mínimo.

**Exemplo:**

Considere o sistema de forças  $\mathcal{S}$ , composto de  $(\vec{F}_i, P_i)$  de mesmo módulo, conforme indicado na Figura 15. Calcule a resultante  $\vec{R}$  do sistema e o momento  $\vec{M}_O$  em relação ao pólo  $O$ . Determine a posição do eixo central onde o momento é mínimo e seu valor. Qual o ato de movimento que o sistema de forças induziria a um corpo?



**Figura 15 – Localização do Eixo de Momento Mínimo**

**Resolução: Sistema:** forças e pontos de aplicação:  $\vec{F}_1 = F \vec{i}$  aplicada em  $P_1 (a,0,a)$  e  $\vec{F}_2 = F \vec{j}$  aplicada em  $P_2 (0,a,0)$ . Resultante e Momento em relação ao pólo  $Q (0,0,a)$ :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F \vec{i} + F \vec{j} = F (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (a \vec{i} + a \vec{k}) \wedge F_1 \vec{i} + (a \vec{j}) \wedge F_2 \vec{j} = a F \vec{j}$$

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = F (\vec{i} + \vec{j}) \cdot a F \vec{j} = a F^2$$

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i = (a \vec{i} + a \vec{k} - a \vec{k}) \wedge F_1 \vec{i} + (a \vec{j} - a \vec{k}) \wedge F_2 \vec{j} = a F \vec{i}$$

**Eixo Central:** Tomando a Resultante e o Momento em relação ao pólo  $O$  (0, 0, 0), tem-se:

$$E = O + \left( \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} \right) + \lambda \cdot \vec{R} = O + \left( \frac{F(\vec{i} + \vec{j}) \wedge aF\vec{j}}{2F^2} \right) + \lambda \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

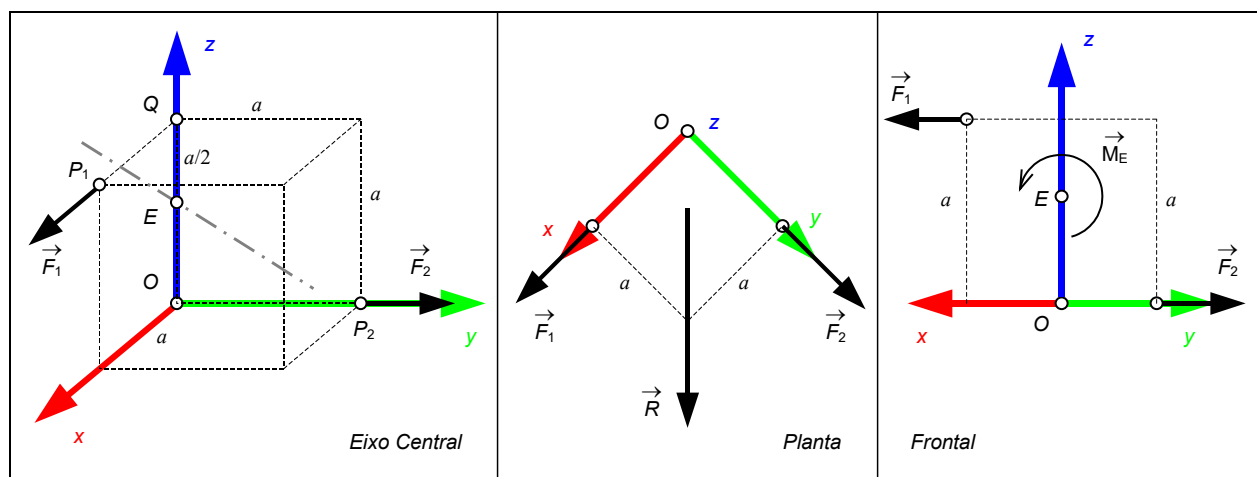
$$E = \frac{a}{2} \vec{k} + \lambda \cdot (\vec{i} + \vec{j})$$

Note que o invariante escalar não é nulo ( $I = aF^2$ ) e portanto o sistema não pode ser reduzido a uma única força. O sistema equivalente será portanto  $(\vec{R}, Q)$  e  $\vec{M}_Q$ . Calculando o momento em relação ao pólo  $E$  (0, 0,  $a/2$ ) que pertence ao eixo central (onde o momento é mínimo):

$$\vec{M}_E = \sum_{i=1}^n (P_i - E) \wedge \vec{F}_i = (a\vec{i} + a/2\vec{k}) \wedge F_1\vec{i} + (a\vec{j} - a/2\vec{k}) \wedge F_2\vec{j} = Fa/2(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_{\min} = \frac{I}{R^2} \vec{R} = \frac{aF^2}{2F^2} F(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{aF}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Verifica-se que o momento em relação ao pólo  $E$  pertencente ao eixo central, tem a mesma direção da resultante  $(\vec{i} + \vec{j})$  e valor mínimo ( $\vec{M}_E = Fa/2(\vec{i} + \vec{j})$ ). O ato de movimento que o sistema de forças induziria a um corpo pode ser composto por uma roto-translação conforme ilustrado na Figura 16.



**Figura 16 – Eixo Central e Ato de Movimento**

## 7. ESTÁTICA

As ciências Mecânicas se propõem a estudar o comportamento de corpos ou sistema de corpos sob a ação de forças. Na **ESTÁTICA**, o foco se dá nas situações de equilíbrio, ou seja, quando não há variações das posições ao longo do tempo. Em geral, os problemas se referem a determinar os esforços numa dada configuração do sistema, ou determinar a configuração sob um dado conjunto de esforços.

### 7.1. Forças Externas e Internas

Em relação a um sistema de corpos, são ditas **FORÇAS EXTERNAS**, aquelas forças que provem da interação de contato com outros corpos não pertencente ao sistema considerado. **FORÇAS INTERNAS** são as forças desenvolvidas entre corpos pertencentes ao sistema considerado.

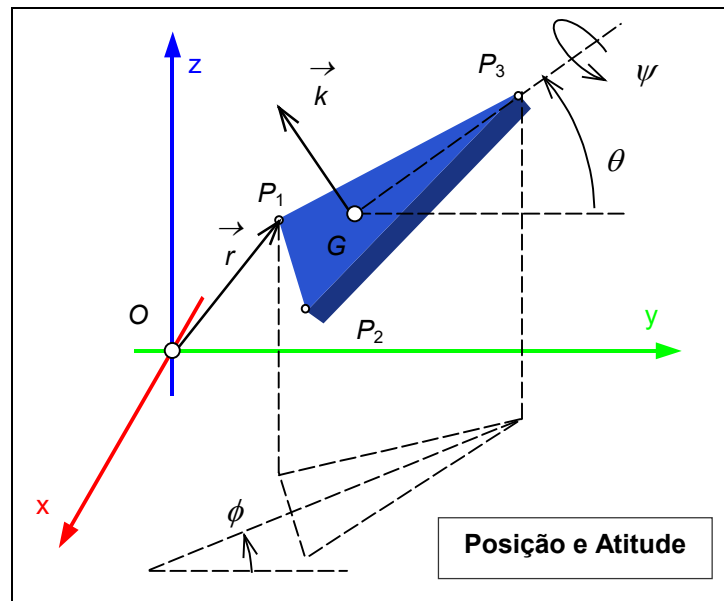
### 7.2. Princípio da Ação e Reação

A cada força proveniente da ação de um corpo **A** sobre um corpo **B**, corresponde a uma força de reação diretamente oposta, portanto com a mesma linha de ação e sentido contrário, proveniente da ação do corpo **B** sobre o corpo **A** (3º lei de *Newton*).

### 7.3. Grau de Liberdade

A definição da posição de um ponto no espaço Euclidiano  $\mathcal{R}^3$  é obtida de forma inequívoca por três escalares ou três graus de liberdade (3 *GL*). Um corpo requer mais três ângulos de orientação (três escalares), correspondendo a seis graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 17.

$$(P_1 - O) = \vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \text{e} \quad (\phi \ \theta \ \psi) \quad (40)$$

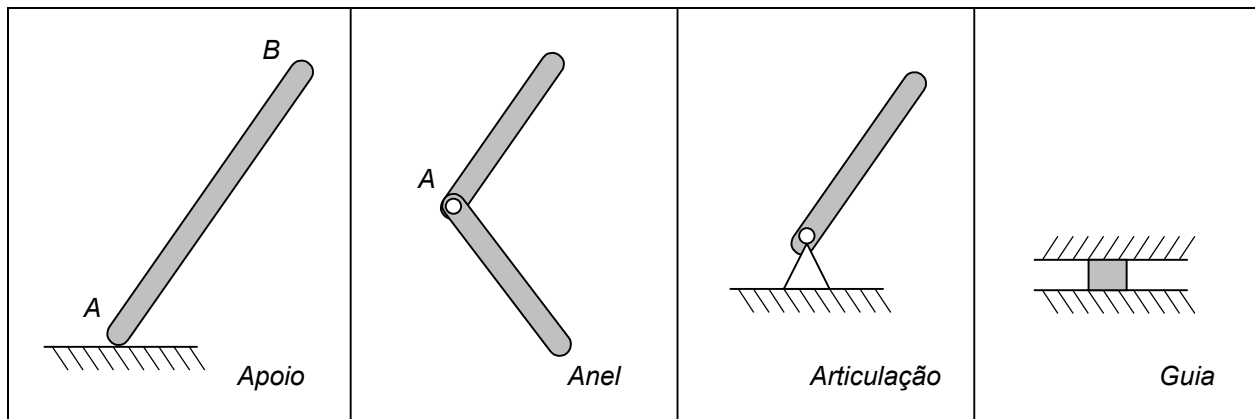


**Figura 17 – Posição e Atitude de um Corpo**

Note que o ângulo  $\phi$  (*phi*) do corpo foi definido no plano  $Oxy$  sobre a projeção do corpo, denominado “ângulo de direção”. A “elevação” do plano do corpo (versor  $\vec{k}$ ) é quantificada pelo ângulo  $\theta$  (*teta*) formado pela linha média do corpo, medido em relação a linha projetada no plano  $Oxy$ . Finalmente a rotação própria descrita pelo ângulo  $\psi$  (*psi*) em torno do eixo longitudinal do corpo (linha  $\overline{GP_3}$  da Figura 17).

#### 7.4. Vínculos

Um corpo rígido pode realizar 2 tipos de movimento: translações em 3 direções ortogonais e rotações em três direções possíveis. Vínculos são dispositivos mecânicos que permitem apenas alguns movimentos relativos entre corpos. Os vínculos constituem restrições de movimento relativo de **translação** entre corpos realizados por forças. Os vínculos também podem constituir restrições de movimento relativo de **rotação** entre corpos realizada por binários de força (momentos). Existem vários tipos de vínculos e possíveis combinações entre eles, conforme ilustrado na Figura 18.



**Figura 18 – Tipos de Vínculos Planos**

Corpos em contato realizam interação de forças **ativas** e **reativas** de contato. Para corpos convexos pode haver pelo menos um ponto de contato comum aos dois corpos. Esse tipo de vínculo é chamado de **apoio simples**, conforme ilustrado na Figura 18a. Para corpos confinados a movimento em um plano, interligados por um vínculo do tipo anel (pino) pode haver apenas movimento **relativo de rotação**, conforme ilustrado na Figura 18b. Esta restrição de movimento é realizada por uma força contida no plano (ou suas correspondentes componentes ortogonais).

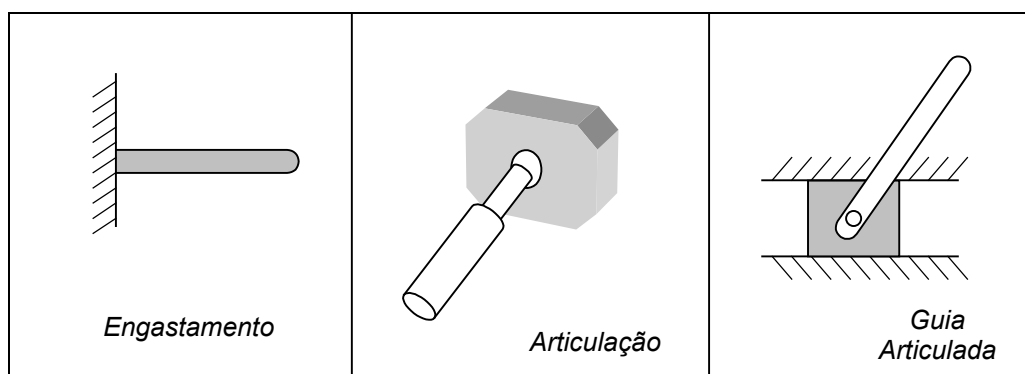
#### **Tipos de Vínculos em Sistemas Planos:**

- APOIO SIMPLES SEM ATRITO:** vínculo unilateral que restringe apenas o movimento de interpenetração entre corpos e permite a rotação relativa no plano.
- APOIO SIMPLES COM ATRITO:** vínculo unilateral que restringe o movimento de interpenetração entre corpos, o movimento tangencial entre corpos e permite a rotação relativa no plano.
- ANEL:** Vínculo que restringe os movimentos relativos de translação no seu plano;
- ARTICULAÇÃO** (com pino): Vínculo que restringe os movimentos de translação no seu plano;
- GUIA** unidirecional; Permite apenas um movimento de translação.

#### **Tipos de vínculos de sistemas espaciais:**

- ENGASTAMENTO:** vínculo que restringe todos os movimentos relativos (três translações e três rotações), conforme ilustrado na Figura 19a.

- g) ARTICULAÇÃO 3D (joystick): Vínculo que permite a movimento de rotação em três direções, conforme ilustrado na Figura 19b.
- h) GUIA ARTICULADA: Vínculo combinado que permite o movimento de translação e de rotação em uma direção, conforme ilustrado na Figura 19c.



**Figura 19 - Tipos de Vínculos Espaciais**

É possível constituir vínculos combinados interligando ligações básicas, liberando apenas determinados tipos de movimento relativo.

## 7.5. Elementos Vinculares

São chamados de elementos ideais de ligação vinculares os dispositivos que restringem um ou mais movimentos.

- a) FIOS: Dispositivo de vínculo que restringe o movimento relativo entre suas extremidades apenas na sua direção (fio ideal sem massa e inextensível), conforme ilustrado na Figura 20a. A restrição é realizada por uma força da direção do fio.
- b) POLIAS: Dispositivo de vínculo que funciona com um fio passante por um disco articulado num anel e apenas muda a direção do fio e portanto da sua força (polia ideal sem massa e sem atrito no anel), conforme ilustrado na Figura 20b.
- c) BARRA ARTICULADA: Dispositivo de vínculo que restringe o movimento relativo entre suas extremidades apenas na sua direção, conforme ilustrado na Figura 20d. No caso de

barras com articulações nas extremidades a restrição é realizada por um par de forças que ocorre apenas na sua linha entre os pinos (chamadas de barras de treliça).

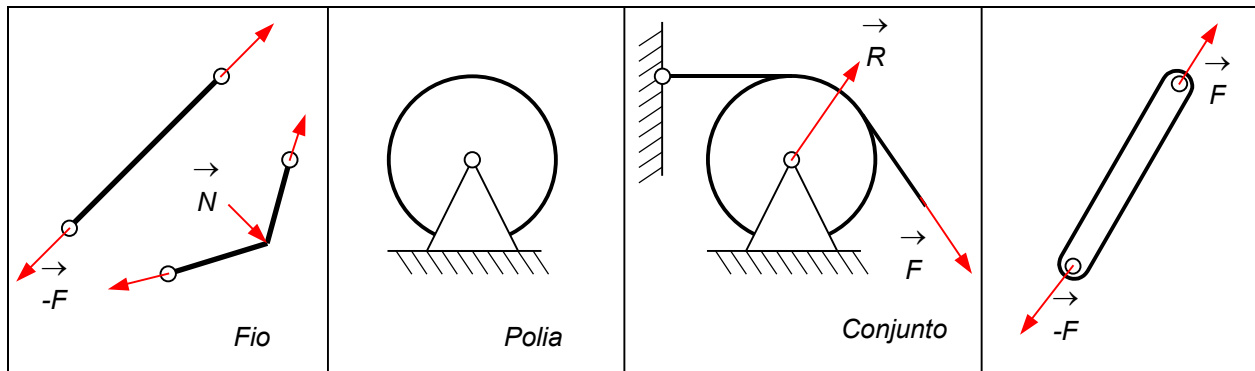


Figura 20 - Dispositivos Vinculares (fios, polias e barra)

## 7.6. Postulados da Estática

O equilíbrio estático de uma partícula (ou ponto material) vem do princípio proposto por *Issac Newton* (1687) sobre a variação da quantidade de movimento para corpos de massa invariante:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V} + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V} = m \vec{a} = \vec{F} \quad (41)$$

para o caso particular do Sistema Estático (partícula ou ponto material sem movimento), a aceleração deve ser nula e, portanto o somatório de forças agentes será nulo:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (42)$$

Note ainda que para o caso de um agregado de partículas, como veremos mais a frente ( $\dot{\vec{H}}_O = [\vec{J}]_O \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_O^{ext}$ ), para que não haja movimento angular, exige-se também que o momento seja nulo:



$$\sum_i \vec{M}_o = \vec{0} \quad (43)$$

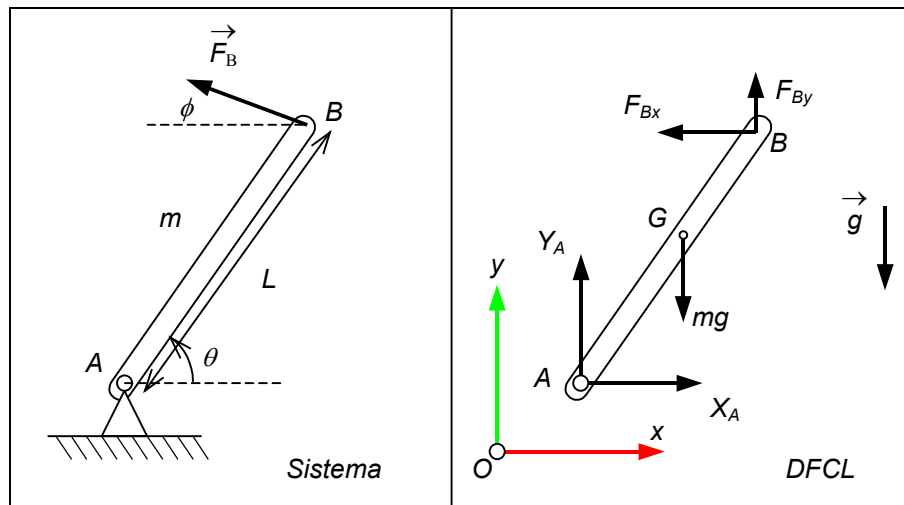
Portanto um sistema  $\mathcal{S}$  de pontos materiais, constituindo um corpo rígido (ou agregado de partículas com distância invariante) está em equilíbrio estático quando o sistema de forçamentos externos à  $\mathcal{S}$  for equivalente a zero, ou seja, tem resultante e momento nulos:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_o = \vec{0} \quad (44)$$

(Note que a resultante e o momento das forças internas é nulo, conforme o *Princípio da Ação e Reação*).

### 7.7. Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre

Para o estudo do equilíbrio estático (ou movimentação dinâmica) de um corpo é necessária a identificação de todas as forças ativas incidentes sobre o corpo. Trata-se, portanto de isolar o corpo de seus vínculos e discriminar todas as forças ativas externas, de CAMPO e VINCULARES que atuam sobre o corpo. Considere o sistema constituído pela barra  $AB$ , vinculada em  $A$  (articulação), conforme apresentado na Figura 21a que está submetida a força  $(\vec{F}_B, B)$  conhecida e ações de campo gravitacional, conforme ilustrado na Figura 21b. Isolando a barra dos seus vínculos ( $A$ ) e aplicando ao corpo as forças externas, de campo e vinculares, obêm-se o Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre (DFCL), conforme ilustrado na Figura 21b.



**Figura 21 – Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre**

Observe que as incógnitas decorrentes do vínculo em  $A$ , são identificadas com valores positivos na base de coordenadas adotadas. Pode-se escrever a partir do **DFCL** a Resultante das forças

externas como  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  e suas componentes para a condição de equilíbrio:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_A + F_{Bx} = 0 \\ R_y = Y_A + F_{By} - mg = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -F_{Bx} = -|\vec{F}_B| \cos \phi \\ Y_A = F_{By} - mg = |\vec{F}_B| \sin \phi - mg \\ R_z = 0 \end{cases} \quad (45)$$

Note ainda que para o corpo permanecer em equilíbrio tem-se que:  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$ .

Tomando o pólo em  $A$ , tem-se a partir do **DFCL** que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \sum_{i=1}^n (P_i - A) \wedge \vec{F}_i = (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (G - A) \wedge m\vec{g} = 0 \\ L(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \wedge (F_{Bx} \vec{i} + F_{By} \vec{j}) + L/2 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \wedge -mg \vec{j} &= 0 \\ L(F_{By} \cos \theta - F_{Bx} \sin \theta) \vec{k} - mgL/2 \cos \theta \vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

### Exemplo: Barra apoiada

Considere uma barra homogênea de comprimento  $L$  e massa  $m$  contida no plano  $Oxy$  em equilíbrio apoiada no solo e na parede formando um ângulo  $\theta$ , conforme ilustrada na Figura 22a. Considere o coeficiente de atrito  $\mu$  com o solo e a parede muito lisa. Determine as forças nos apoios e o máximo valor de  $\theta$  compatível com a condição de equilíbrio.

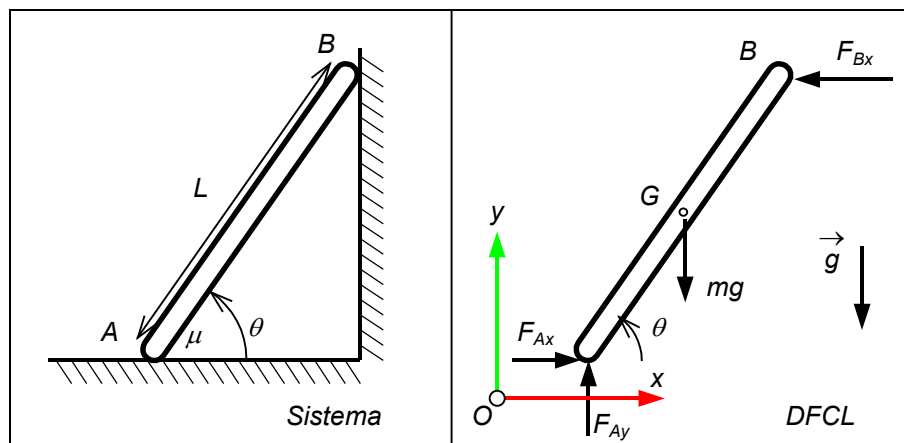


Figura 22 – Barra Apoiada

**Resolução:** **Sistema:** barra de comprimento  $L$  com peso  $mg$ , em equilíbrio sobre dois vínculos em  $A$  e  $B$ . **DFCL:** conforme apresentado na Figura 22b. Referencial  $Oxy$  e pólo  $A$ . **Teoremas:**

para o Equilíbrio Estático deve-se ter:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$  e  $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = F_{Ax} - F_{Bx} = 0 \\ R_y = F_{Ay} - mg = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = F_{Bx} \\ F_{Ay} = mg \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Tomando o pólo em  $A$ , tem-se a partir do **DFCL** da Figura 22b que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (G - A) \wedge m\vec{g} = 0 \\ 0 + L(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) \wedge (-F_{Bx})\vec{i} + L/2(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) \wedge -mg\vec{j} &= 0 \\ L F_{By} \sin\theta\vec{k} - (Lmg)/2 \cos\theta\vec{k} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{By} = \frac{mg}{2} \cot\theta = F_{Ay}}$$

Para força de atrito  $|F_{Ax}| \leq \mu \cdot N$ , na iminência do escorregamento atinge o limite máximo quando  $|F_{Ax}| = \mu \cdot F_{Ay}$  resultando num ângulo máximo de:  $\boxed{\theta = a \cot(2\mu)}$

### Exemplo: Bicicleta

Considere a bicicleta de massa  $m$  ilustrada na Figura 23a, como um corpo rígido em equilíbrio e contido no plano  $Oxy$ . Determine as reações verticais nas rodas para carga de um ciclista de peso  $P$  sobre o selim.

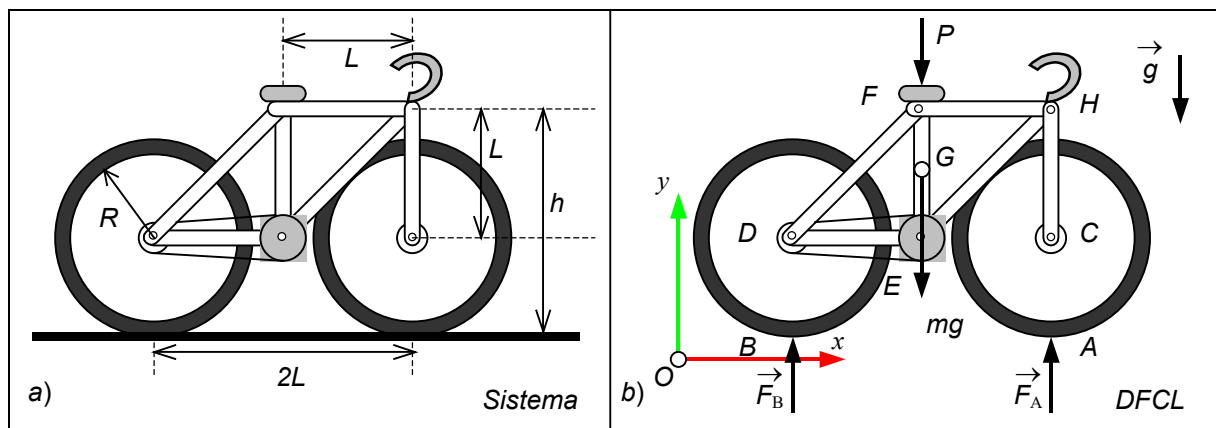


Figura 23 – Bicicleta

**Resolução:** Sistema: corpo rígido bicicleta, peso  $mg$ , em equilíbrio sobre dois vínculos em  $A$  e  $B$ . DFCL: conforme apresentado na Figura 23b. Teoremas: para o Equilíbrio Estático deve-se ter:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ R_y = F_{Ay} + F_{By} - P - mg = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = -F_{Bx} \\ F_{Ay} + F_{By} = P + mg \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Note ainda que para o corpo permanecer em equilíbrio tem-se que:  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$ .

Tomando o pólo em  $A$ , tem-se a partir do **DFCL** da Figura 23b que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (F - A) \wedge \vec{R}_F + (G - A) \wedge m\vec{g} = 0 \\ 0 - 2L\vec{i} \wedge (F_{Bx}\vec{i} + F_{By}\vec{j}) - (L\vec{i} + (L+R)\vec{j}) \wedge P\vec{j} - (L\vec{i} + (L/2+R)\vec{j}) \wedge -mg\vec{j} &= 0 \\ -2LF_{By}\vec{k} + L(P+mg)\vec{k} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{By} = (P + mg)/2} \Rightarrow \boxed{F_{Ay} = (P + mg)/2}$$

## 8. SISTEMAS DE CORPOS RÍGIDOS ESTÁTICOS

Na mecânica é comum haver sistemas formados com múltiplos corpos com vários tipos de elementos de ligação. Os sistemas podem ser planos ou tridimensionais. Pode conter **PLACAS**, **BARRAS**, **FIOS** e **POLIAS**. O sistema pode ser suportado ou acoplado por apoios, pinos, articulações, engastamentos, etc.

### 8.1. *Sistemas Isostáticos*

Um sistema em equilíbrio estático tal que as equações sejam suficientes para determinar as reações vinculares incógnitas é chamado de sistema **ISOSTÁTICO** ou estaticamente determinado. Caso contrário é chamado de Sistema **HIPERESTÁTICO** (ou estaticamente indeterminado). Existe sistema que tem um grau de liberdade indeterminado chamado de sistema **HIPOSTÁTICOS**.

### 8.2. *Sistema Submetido a Forças*

Dois casos importantes de sistemas em equilíbrio submetidos a forças devem ser destacados:

- Sistema em equilíbrio submetido a duas forças externas;
- Sistema em equilíbrio submetido a três forças externas;

Para o primeiro caso conclui-se imediatamente que as duas forças devem ser iguais e opostas (sistema plano).

Para o segundo caso as forças devem ser coplanares, pois caso uma delas esteja fora do plano não haverá componente de resultante nula naquela direção. Portanto sendo coplanares podem ser

paralelas ou concorrentes. Sendo duas forças concorrentes num ponto  $P$ , a terceira força deve passar também por  $P$  para resultar em momento nulo.

### Exemplo: BARRA DE TRELIÇA

Uma barra com articulações nas extremidades estará em equilíbrio apenas quando as forças externas nas extremidades forem alinhadas. Demonstração: considere a barra  $AB$  bi-vinculada conforme apresentado na Figura 24.

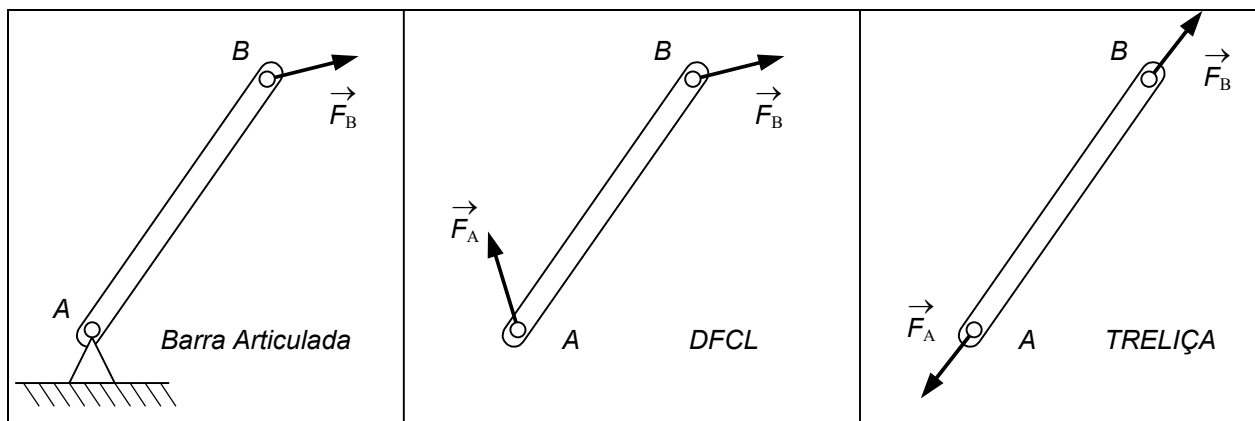


Figura 24 – Barra Bi-Articulada (Barra de Trelça)

Para que a barra esteja em equilíbrio devem valer:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0 \quad (47)$$

Da primeira equações obtêm-se que:  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$ , portanto iguais e contrárias. Da segunda equação, considerando o pólo em  $A$  têm-se:  $\vec{M}_A = (B - A) \wedge \vec{F}_B = 0$ , portanto, para  $(B - A) \neq 0$  os vetores  $(B - A)$  e  $\vec{F}_B$  devem ser alinhadas e portanto contidas no plano.

Uma barra com extremidades articuladas é chamada de BARRA DE TRELIÇA e suporta apenas forças iguais e contrárias aplicadas na sua extremidade.

**Exemplo: Sistema de 3 forças**

Demonstra-se (*França*, 2011) que um sistema submetido a três forças só está em equilíbrio se as forças forem coplanares. Sendo coplanares são necessariamente paralelas ou concorrentes.

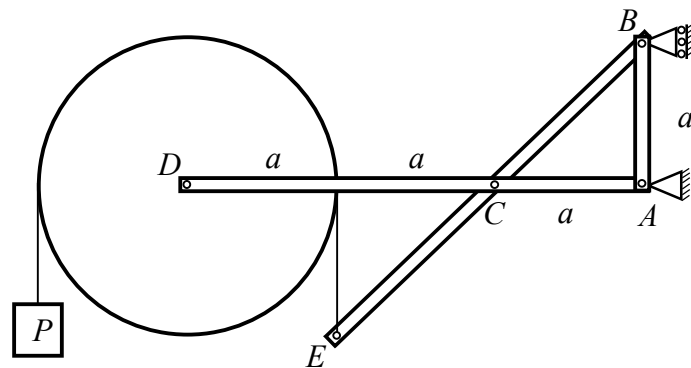
**8.3. Sistema com Múltiplos Elementos**

Na mecânica é comum haver sistemas formados com múltiplos tipos de elementos. Os sistemas podem ser planos ou tridimensionais. Pode conter **PLACAS**, **BARRAS**, **FIOS** e **POLIAS**. O sistema pode ser suportado ou acoplado por apoios, pinos, articulações, engastamentos, etc. O sistema pode ser formado por tríades de barras articuladas nas extremidades formando o que é chamado de **TRELIÇA**. Eventualmente o sistema pode ser constituído por mais de um pórticos rígidos, conforme ilustrado no sistema de barras de treliça apresentado na Figura 33.

**Exemplo: Sistema com Múltiplos Elementos**

O sistema ideal mostrado na figura tem 3 barras e uma polia de massas desprezíveis, o vínculo em **A** é uma articulação, e o vínculo em **B** é um apoio simples. As barras são articuladas em **C**. O fio que passa pela polia está fixado em **E** e tem na outra extremidade um peso **P**. Determine:

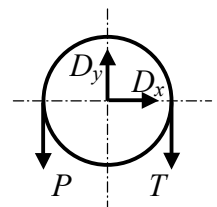
- as forças que a polia e o fio aplicam nas barras.
- as reações vinculares em **A** e **B**.
- as forças na conexão **C** entre as barras.
- Desenhe as barras indicando todos os esforços atuantes.



**Resolução:** Sistema: Polia de centro em D, peso P, barras AB, AD, BE.

DFCL: conforme figuras. Teoremas: Equilíbrio Estático:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$$



a) Isolando a polia centro em **D**, obtêm-se:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow P \cdot a - T \cdot a = 0 \Rightarrow T = P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

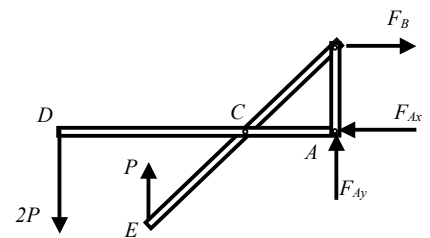
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y - P - T = 0 \Rightarrow D_y = 2P$$

b) Observando a estrutura formada pelas barras e utilizando os valores da polia:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B - F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = F_B \Rightarrow F_{Ax} = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + P - 2P = 0 \Rightarrow F_{Ay} = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2P \cdot 3a - P \cdot 2a - F_B \cdot a = 0 \Rightarrow F_B = 4P$$

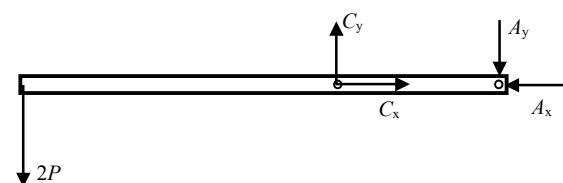


c) Isolando a barra **ACD** e utilizando valores obtidos  
(atenção, não é barra de treliça):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - A_x = 0 \Rightarrow C_x = A_x \Rightarrow C_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - A_y - 2P = 0 \Rightarrow A_y = C_y - 2P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2P \cdot 3a - C_y \cdot a = 0 \Rightarrow C_y = 6P \quad \therefore A_y = 4P$$



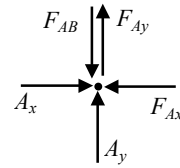


d) Analisando o nó **A**, obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_{Ax} = 0 \Rightarrow A_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{Ay} - F_{AB} = 0 \Rightarrow$$

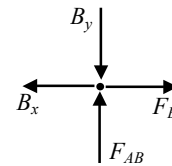
$$F_{AB} = A_y + F_{Ay} = 4P + P \Rightarrow F_{AB} = 5P$$



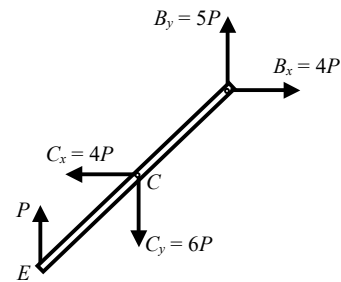
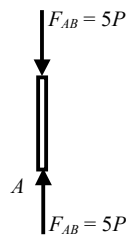
e) Analisando o nó **B**:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B - B_x = 0 \Rightarrow B_x = F_B \Rightarrow B_x = 4P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} - B_y = 0 \Rightarrow B_y = F_{AB} \Rightarrow B_y = 5P$$



f) Portanto as barras **AB** e **BE** resultam como as seguintes solicitações:



### Exemplo: Propulsão da Bicicleta

Considere agora que o ciclista apóia todo seu peso apenas sobre o pedal da bicicleta, que ainda permanece em equilíbrio, conforme ilustrado na Figura 25a. Determine as forças na roda traseira e a força na corrente.

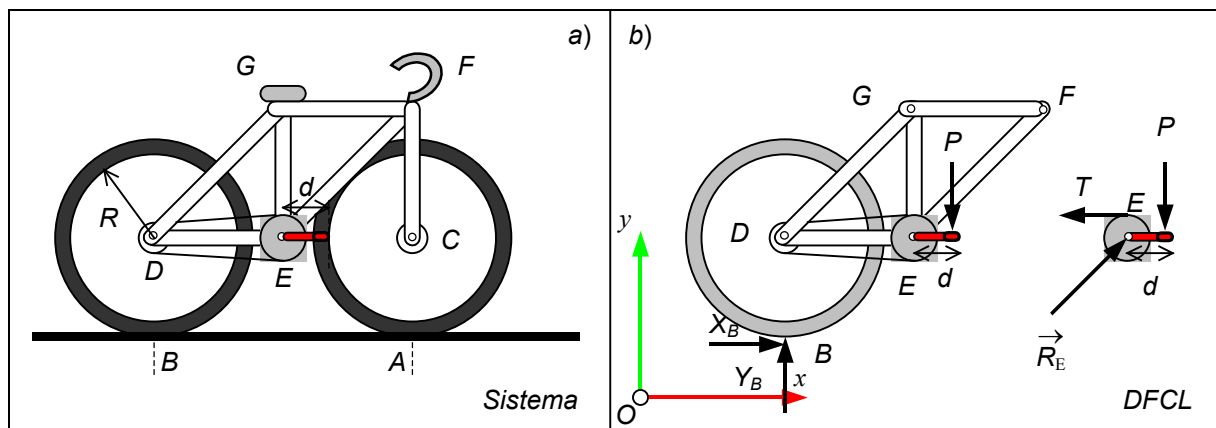


Figura 25 – Pedal da Bicicleta

**Resolução:** Sistema: corpo rígido pedal + engrenagem + corrente, tudo em equilíbrio sobre o vínculos em  $E$ . DFCL: conforme apresentado na Figura 25b que mostra a força  $P$  no pedal e a reação do mancal fixo no quadro  $\vec{R}_E$  e a força na corrente  $T$ . Teoremas: para o Equilíbrio Estático deve-se ter:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{P} + \vec{R}_E + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = F_{Ex} - T = 0 \\ R_y = F_{Ey} - P = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ex} = T \\ F_{Ey} = P \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Para o corpo permanecer em equilíbrio tem-se que  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$ , tomando o pólo em

$E$ , e observando o **DFCL** da Figura 23b, determina-se a tensão na corrente:

$$\vec{M}_E = (E - E) \wedge \vec{R}_E + d \vec{i} \wedge (-P \vec{j}) + r_1 \vec{j} \wedge (-T \vec{i}) = \vec{0}$$

$$0 - Pd \vec{k} + Tr_1 \vec{k} = 0 \Rightarrow T = \frac{d}{r_1} P$$

Para o sistema em equilíbrio composto pela corrente + engrenagem traseira + roda traseira, tomando o pólo em  $D$ , e observando novamente o **DFCL** da Figura 23b, que mostra a reação do mancal fixo no quadro  $\vec{R}_D$  e a força na corrente  $T$ , determinada no item anterior, onde determina-se a força de propulsão na roda traseira:

$$\vec{M}_D = (D - D) \wedge \vec{R}_D + (B - D) \wedge \vec{R}_B + r_2 \vec{j} \wedge T \vec{i} = \vec{0}$$

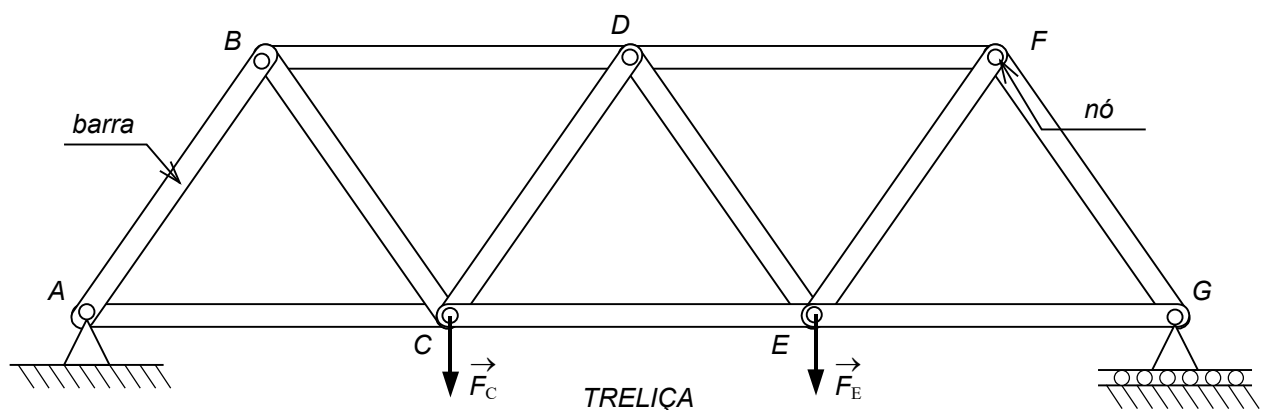
$$0 - R \vec{j} \wedge (X_B \vec{i} + Y_B \vec{j}) - T r_2 \vec{k} = \vec{0}$$

$$X_B R \vec{k} - T r_2 \vec{k} = 0 \Rightarrow X_B = \frac{r_2}{R} T \Rightarrow X_B = \frac{r_2}{r_1} \frac{d}{R} P$$

Verifique que o sistema de mudança de marcha faz o engrenamento em coroas com diâmetro variável ( $r_2 / r_1$ ), mudando a magnitude da força de tração na roda  $X_B$ . Note ainda que para produzir maior potência ( $P = F \cdot V$ ) é necessário aumentar a velocidade da produção da força.

### 8.4. Treliças

Treliças são estruturas rígidas formadas por sequências triangulares de barras retas interligadas por articulações, conforme ilustrado na Figura 26. Em geral as forças externas são aplicadas nos vértices dos triângulos (nós). As barras articuladas nas extremidades são chamadas de barras de treliça e só recebem forças iguais e contrárias alinhadas com ela, conforme apresentado no item 8.2. Neste texto apenas as treliças planas estáticas serão abordadas.



**Figura 26 – Treliça Plana**

Para análise estática de uma treliça, faz-se inicialmente o *DFCL* da treliça como um todo (corpo rígido estático único) para determinação das forças nos apoios. A subsequente determinação das forças internas das barras da treliça em equilíbrio, pode ser realizada por dois métodos:

- Método dos Nós;
- Método das Seções.

**MÉTODO DOS NÓS:** O nó (ou pino) é o centro de um sistema de forças concorrentes cujo momento em relação a este ponto é nulo, conforme ilustrado na Figura 27a. Desta forma um nó (ou pino) está em equilíbrio quando a resultante das forças for nula (veja o *DFCL* na Figura 27b). Note que o pino transmite as forças entre a articulação e as barras.

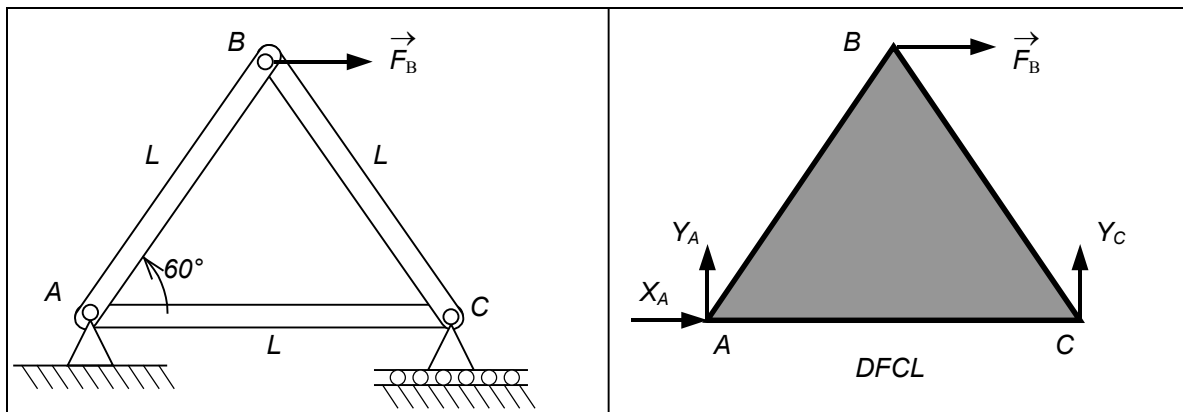


**Exemplo: Treliça - Método dos Nós**

Determine as forças nas barras da treliça, submetida à força  $\vec{F}_B = F_{Bx} \vec{i}$  aplicada no ponto **B**, conforme mostrado na Figura 29a, utilizando o MÉTODO DOS NÓS.

**Resolução:** Sistema: Treliça. Referencial: **Oxy** e Pólo conveniente **A**. Teoremas: Equilíbrio

Estático:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$  e  $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$



**Figura 29 – Treliça Plana Simples e DFCL**

Para determinar as reações nos vínculos de apoio **A** e **C**, isola-se a treliça como um único corpo rígido, conforme ilustrado no **DFCL** da Figura 29b, e para  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$  escreve-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} X_A + F_{Bx} = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = -F_{Bx} \\ Y_A = -Y_C \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\vec{M}_A = (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{F}_B + (C - A) \wedge \vec{R}_C = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} + L(\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}) \wedge F_{Bx} \vec{i} + L\vec{i} \wedge Y_C \vec{j} = 0$$

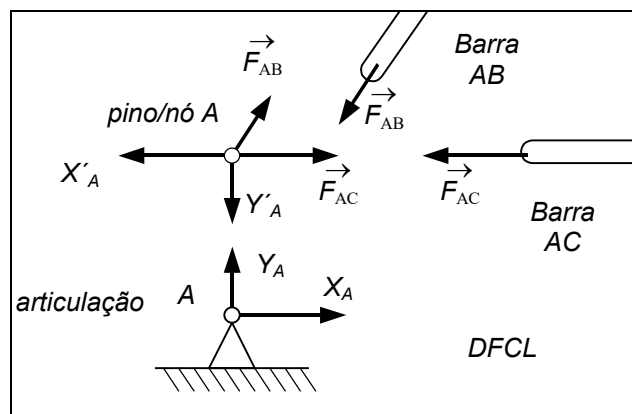
$$\vec{M}_A = -F_{Bx} L \sin 60^\circ \vec{k} + Y_C L \vec{k} = 0 \Rightarrow Y_C = F_{Bx} \sqrt{3}/2 \Rightarrow Y_A = -F_{Bx} \sqrt{3}/2$$

Portanto os valores de força para a treliça como um corpo rígido único são:

$$\boxed{X_A = -F_{Bx} \quad ; \quad Y_C = F_{Bx} \sqrt{3}/2 \quad ; \quad Y_A = -F_{Bx} \sqrt{3}/2}$$

Isolando o nó  $A$ , conforme ilustrado no **DFCL** da Figura 30, utilizando novamente  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$  e os valores já determinados (note que as reações nos nós são opostas às ações na treliça determinadas acima), obêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} -X'_A + F_{AB} \cdot \cos 60^\circ + F_{AC} = 0 \\ -Y'_A + F_{AB} \cdot \sin 60^\circ = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{AC} = X'_A - F_{AB} \cdot \frac{1}{2} \\ F_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = Y'_A \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow$$



**Figura 30 – Detalhe do Nó A**

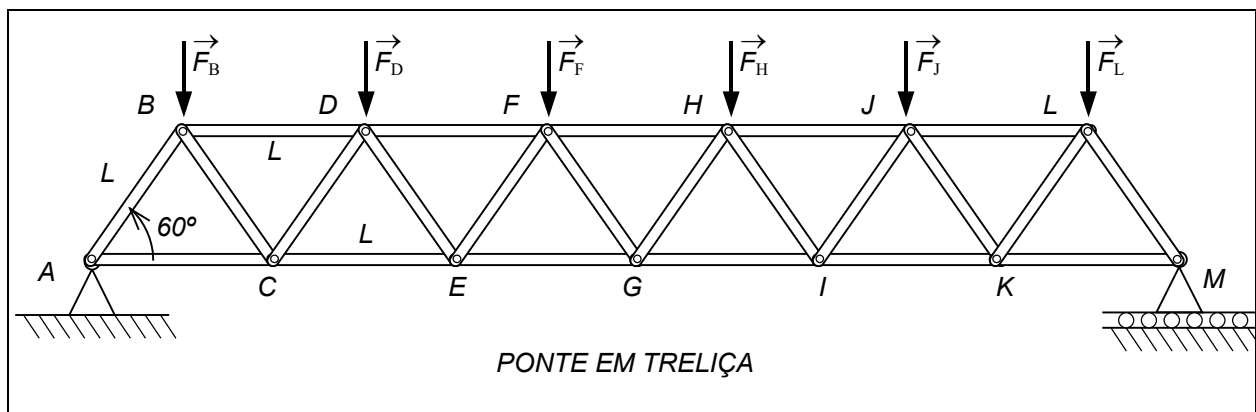
$$\begin{cases} F_{AC} = F_{Bx} - \frac{1}{2} F_{Bx} = \frac{1}{2} F_{Bx} \\ F_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Bx} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = F_{Bx} \\ \text{-----} \end{cases} \quad \text{Portanto a barra } AC \text{ e } AB \text{ estão sob tração (sinal positivo).}$$

Resolva o mesmo problema anterior considerando agora a força externa aplicada no ponto  $B$ , mas com sentido para baixo:  $\vec{F}_B = -F_{By} \vec{j}$ .

**Exemplo:** Treliça - Método das Seções

Determine a força na barras **FG** da ponte construída na forma de treliça, submetida às 6 forças  $\vec{F}_i = -F_{iy} \vec{j}$  aplicadas nos nós superiores, conforme mostrado na Figura 31, utilizando o MÉTODO DAS SEÇÕES.

**Resolução:** Sistema: Treliça. Referencial: **Oxy** e Pólo conveniente **A**. Teoremas: Equilíbrio Estático:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$  e  $\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$



**Figura 31 – Ponte de Treliça**

Para determinar as reações nos vínculos de apoio **A** e **M**, isola-se a treliça como um único corpo rígido, submetido a  $\vec{F}_i = -n \cdot F_y \vec{j}$  cargas verticais e escreve-se as seguintes expressões para **n** = 6 segmentos:

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_M + n \cdot F_y = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_M = 6F_y \\ \text{-----} \end{cases}$$



$$\vec{M}_A = (A-A) \wedge \vec{R}_A + (B-A) \wedge \vec{F}_B + (D-A) \wedge \vec{R}_D + \dots + (M-A) \wedge \vec{R}_M = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} + L(\cos 60^\circ \vec{i} + \sin 60^\circ \vec{j}) \wedge -F_{By} \vec{j} + \dots + 6L \vec{i} \wedge Y_M \vec{j} = 0$$

$$\vec{M}_A = -\frac{L}{2} F_{By} \vec{k} - \frac{3L}{2} F_{Dy} \vec{k} - \dots + 6L Y_M \vec{k} = 0$$

$$\sum (2n-1) \cdot \frac{L}{2} F_y = 6L Y_M \quad \Rightarrow \quad 36 \cdot \frac{L}{2} F_y = 6L Y_M$$

$$Y_M = 3 F_y \quad \Rightarrow \quad Y_A = 3 F_y$$

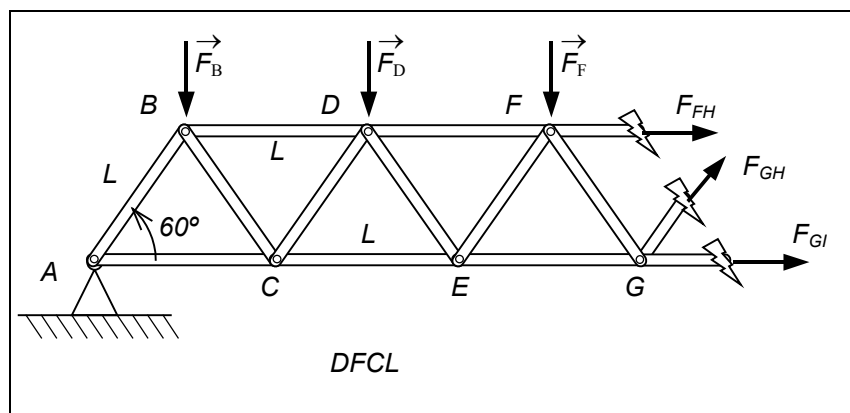


Figura 32 – Seção da Treliça

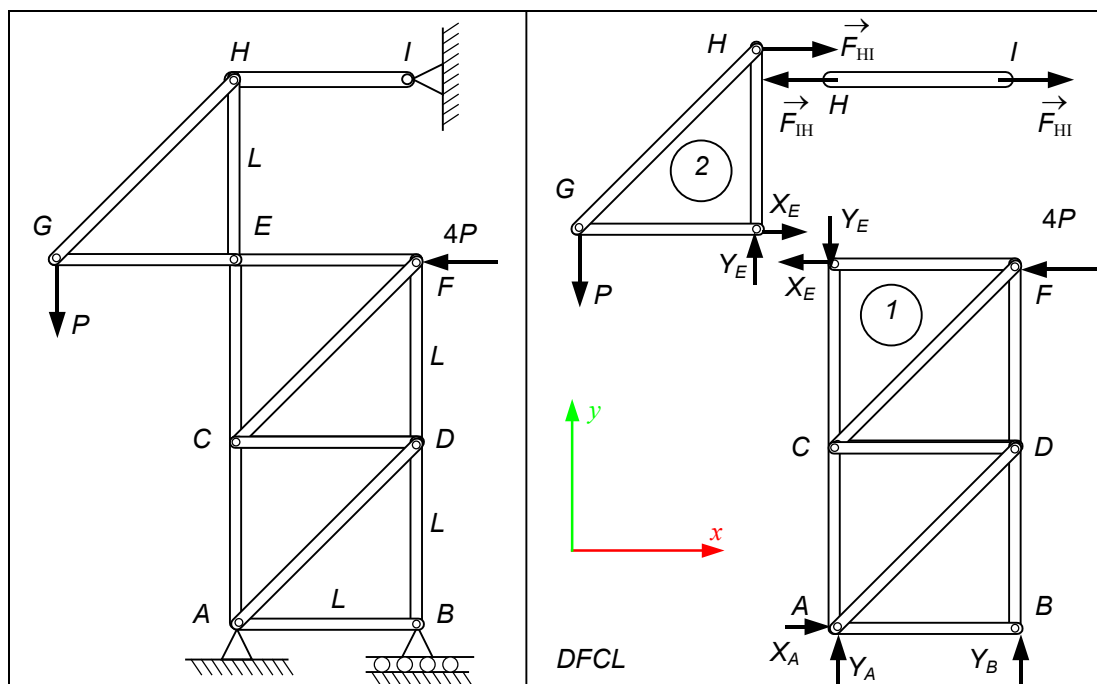
Portanto os valores de força para a seção de treliça como um corpo rígido, conforme apresentado na Figura 32, para o pólo em  $G$  são:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G = (A-G) \wedge \vec{R}_A + (B-G) \wedge \vec{F}_B + (D-G) \wedge \vec{F}_D + (F-G) \wedge \vec{F}_F + (F-G) \wedge F_{FH} \vec{i} = 0 \\ -3L \vec{i} \wedge Y_A \vec{j} + \left(-\frac{5}{2}\right)L \vec{i} \wedge (-F_B) \vec{j} + \left(-\frac{3}{2}\right)L \vec{i} \wedge (-F_D) \vec{j} + \left(-\frac{1}{2}\right)L \vec{i} \wedge (-F_F) \vec{j} + L \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \wedge F_{FH} \vec{i} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{FH} = \sqrt{3} F}$$

**Exemplo:** Sistema com dois pórticos treliçados

Considere o sistema constituído por duas treliças formando pórticos rígidos planos distintos, conforme ilustrado na Figura 33a. Note que o anel de articulação em *E* une os corpos rígidos 1 e 2.



**Figura 33 – Sistema de Pórticos**

Para determinar as reações nos nós do sistema isola-se os corpos rígidos: Barra *HI*, treliça *EGH* (corpo rígido nº 2) e pórtico *ABEF* (corpo rígido nº 1) conforme ilustrado nos sistemas de treliças apresentado na Figura 33b.

**Resolução:** Sistema: Barra de treliça *HI*, treliça *EGH* (corpo rígido nº 2) e treliça *ABEF* (corpo rígido nº 1). Referencial: *Oxy*. Teoremas: Equilíbrio Estático:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$$

Iniciando pelo corpo rígido nº 2 (treliça *EGH*) verifica-se de imediato, utilizando a equação de momento em relação ao pólo *E* que  $F_{HI}$  é igual a *P*. Por decorrência, utilizando a fórmula da resultante, obtêm-se:  $X_E = -F_{HI} = -P$  e  $Y_E = P$ .

Finalmente, tomando o pólo em *A* obtêm-se:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \sum (P_i - A) \wedge \vec{F}_i = 0 \\ (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (E - A) \wedge \vec{R}_E + (F - A) \wedge (-4P\vec{i}) &= 0 \\ \vec{0} + L\vec{i} \wedge Y_B\vec{j} + 2L\vec{j} \wedge (-X_E\vec{i} - Y_E\vec{j}) + (L\vec{i} + 2L\vec{j}) \wedge (-4P\vec{i}) &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{Y_B = 6P}$$

Experimente abrir a treliça **ABEF** utilizando o método das barras e determinar a força na barra **BD**.

### Exemplo: Quadro da Bicicleta

Considere a bicicleta de massa **m**, ilustrada na Figura 34a, como um corpo rígido em equilíbrio, contido no plano **Oxy**. Considere ainda o quadro formado por barras de treliça articuladas nas extremidades. Determine as forças nas barras de treliça para carga de um ciclista de peso **P** sobre o selim.

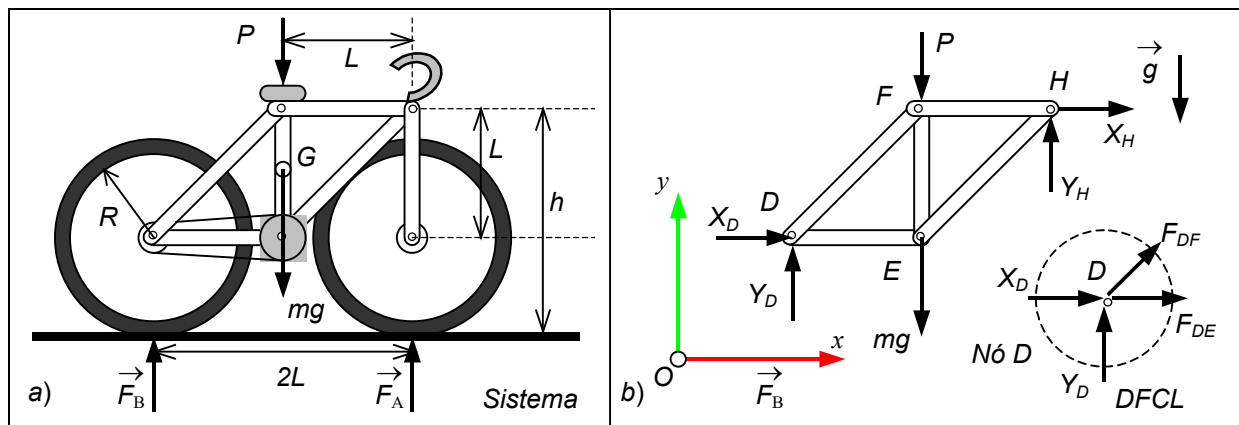


Figura 34 - Estrutura da Bicicleta

**Resolução:** Sistema: quadro estrutural da bicicleta **DEFH** em equilíbrio. DFCL: conforme ilustrada na Figura 34b. Teoremas: Utilizando o método dos nós, para o Equilíbrio Estático do nó **D** deve-se ter:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$

$$\text{Nó D} \begin{cases} R_x = X_D + F_{DE} + F_{DF} \cos 45^\circ = 0 \\ R_y = Y_D + F_{DF} \sin 45^\circ = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{DE} = -F_{DF} \sqrt{2} / 2 - X_D \\ F_{DF} = -Y_D \sqrt{2} \\ R_z = 0 \end{cases}$$

De maneira similar, para o nó **H**, tem-se:

$$\text{Nó H} \begin{cases} R_x = X_H - F_{HF} - F_{HE} \cos 45^\circ = 0 \\ R_y = Y_H - F_{HE} \sin 45^\circ = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{HF} = -F_{HE} \sqrt{2} / 2 + X_H \\ F_{HE} = Y_H \sqrt{2} \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Finalmente para o nó **F** tem-se que:

$$\text{Nó F} \begin{cases} R_x = F_{FH} - F_{FD} \cos 45^\circ = 0 \\ R_y = -F_{FE} - F_{FD} \sin 45^\circ = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{FH} = F_{FD} \sqrt{2} / 2 \\ F_{FE} = -F_{FD} \sqrt{2} / 2 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Considerando ainda  $Y_D = Y_H = (P + mg)/2$  e  $X_D = X_H = 0$ , conforme resolução do problema anterior, obtêm-se de cada nó:

$$\text{Nó D: } \boxed{F_{DF} = -(P + mg)\sqrt{2}/2} \text{ (compressão)} \Rightarrow \boxed{F_{DE} = (P + mg)/2} \text{ (tração)}$$

$$\text{Nó H: } \boxed{F_{HE} = (P + mg)\sqrt{2}/2} \text{ (tração)} \Rightarrow \boxed{F_{HF} = -(P + mg)/2} \text{ (compressão)}$$

$$\text{Nó F: } \boxed{F_{FE} = (P + mg)/2} \text{ (tração)} \Rightarrow \boxed{F_{FH} = -(P + mg)/2} \text{ (compressão)}$$

Note que apenas as barras diagonais têm os maiores valores em módulo.

Recomendações para resolução de problemas estruturais envolvendo treliças planas:

- Considerar inicialmente o sistema como um **corpo rígido único** estático e determinar as reações externas nos apoios.
- Método dos Nós:** acolher no nó selecionado as forças das barras e forças externas (*DFCL*). A soma vetorial das forças concorrentes no nó deve ser nula (condição de equilíbrio - 2 equações).
- Alternativa: **Método das barras:** Isola-se uma parte da estrutura seccionando três barras. Obêm-se um sistema de três equações de equilíbrio (Resultante e Momento nulos) para três forças incógnitas na direção de cada barra.
- Adotar uma **convenção de sentido** das forças: por exemplo: forças nos **nós** devido às barras sempre para fora do nó (portanto força de **tração** na barra). Forças nas **barras** seccionadas para fora e alinhadas (força de **tração** na barra). Se o sinal obtido na resolução das equações for negativo a barra estará submetida à **compressão**.

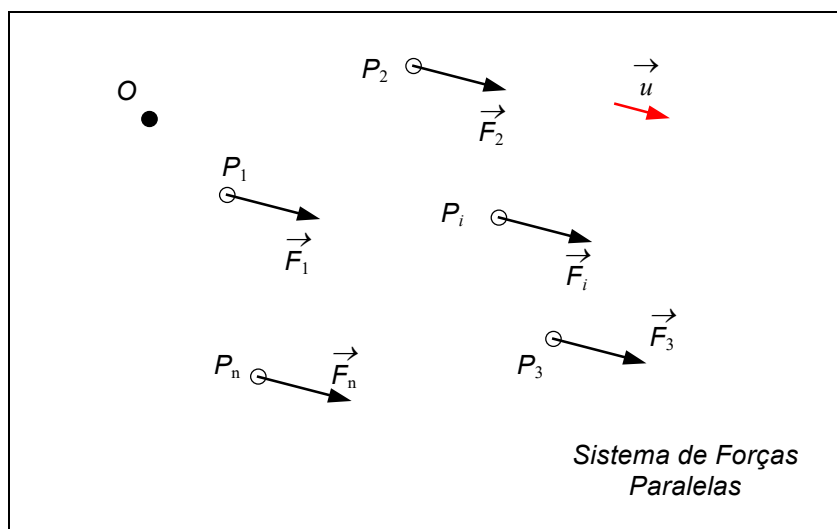
## 9. CENTRO DE MASSA

Para a conceituação do **CENTRO DE MASSA** de corpo do ponto de vista da mecânica dos sólidos, apresenta-se o conceito de forças distribuídas e forças paralelas e local de aplicação da resultante do sistema equivalente.

### 9.1. Sistema de Forças Paralelas

Um sistema de forças distribuídas e paralelas  $S$  é composto por conjunto de forças  $\vec{F}_i$ , aplicadas em pontos  $P_i$ , todas com a mesma direção do versor unitário  $\vec{u}$ , conforme ilustrado na Figura 35, tal que:

$$\vec{F}_i = h_i \vec{u} \quad (48)$$



**Figura 35 – Sistema de Forças Distribuídas Paralelas**

## 9.2. Definição de Corpo Rígido

Uma **partícula** pode ser idealizada como um ponto com dimensões físicas desprezíveis com massa não desprezível. Isso implica em ter toda sua massa concentrada em um único **ponto material**. Uma partícula ideal é, portanto um **ponto material** com massa não nula. Negligenciar suas dimensões significa também ignorar seu movimento de **rotação**. Um conjunto de partículas forma um corpo extenso e deformável. Se, entretanto as deformações forem, numa primeira aproximação, consideradas desprezíveis face aos movimentos globais do corpo, constitui-se um corpo indeformável. Portanto um agregado de partículas com distâncias entre elas invariante com respeito ao tempo, constitui um **corpo rígido**. Neste caso o corpo rígido deve ter obrigatoriamente sua atitude, descrita por seu movimento de rotação, considerada.

## 9.3. Distribuição de Massa

O corpo rígido homogêneo tem a distribuição de massa relacionada com sua forma. Desta distribuição duas propriedades são destacadas:

- CENTRO DE MASSA (momento de primeira ordem);
- MOMENTO DE INÉRCIA (momento de segunda ordem);

O centro de massa corresponde à posição do pólo onde o momento das forças paralelas associadas com as partículas do corpo, tem seu valor nulo.

## 9.4. Centro de Massa

O centro de massa **G** de um corpo rígido (agregado de partículas) é o ponto onde o momento de um sistema de forças paralelas equivalente associado tem valor nulo. O momento de um sistema de forças em relação ao pólo **O** é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{F}_i \quad (49)$$

Vamos localizar o ponto  $\mathbf{C}$  tal que o momento do campo de forças paralelas  $\vec{F}_i = h_i \vec{u}$  em relação a esse pólo seja nulo. Utilizando a formula de momento de forças em relação ao pólo  $\mathbf{C}$ :

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_i - \vec{C}) \wedge h_i \vec{u} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left[ \sum_{i=1}^n h_i \cdot (\vec{P}_i - \vec{C}) \right] \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad (50)$$

Para que a direção  $\vec{u}$  seja qualquer, exige-se que:

$$\sum_{i=1}^n h_i \cdot (\vec{P}_i - \vec{C}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n h_i \cdot (\vec{P}_i - \vec{O}) - (\vec{C} - \vec{O}) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\vec{C} - \vec{O}) = \frac{\sum_{i=1}^n h_i \cdot (\vec{P}_i - \vec{O})}{\sum_{i=1}^n h_i} \quad (51)$$

Considere agora o sistema de partículas de massa  $m_i$  do agregado de particular  $\mathcal{S}$ , submetidas ao campo de forças gravitacional  $\vec{F}_{gi} = m_i \vec{g}$  e o centro de massa  $(G - O)$  do corpo com partículas  $P_i$ :

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{P}_i - \vec{O})}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (52)$$

Para a localização do centro de massa em relação a origem  $\mathbf{O}$ :  $(G - O) = \vec{r}_i = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$  conforme ilustrado na Figura 36, ter-se-á

$$(G - O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (53)$$

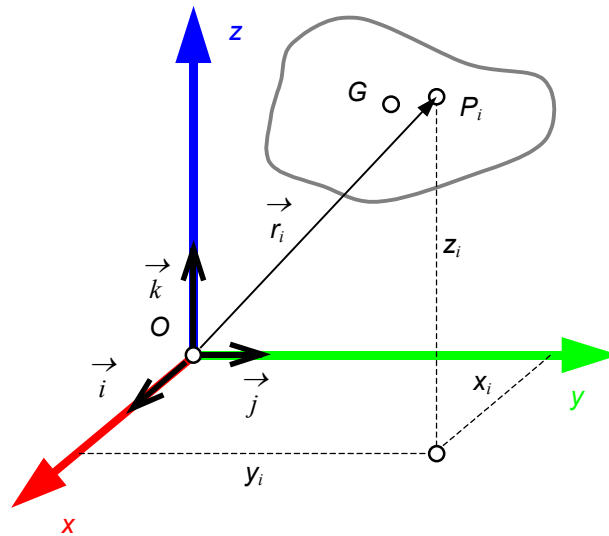


Figura 36 – Localização do Centro de Massa

Para um corpo de massa total  $m$  a posição do centro de massa ( $G - O$ ), descrito num sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$ , é obtida pelo somatório em cada coordenada independente:

$$\boxed{x_G = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m}} \quad ; \quad \boxed{y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m}} \quad \text{e} \quad \boxed{z_G = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{m}} \quad (54)$$

### 9.5. Propriedade do Centro de Massa

a) **Propriedade Proporcional Inversa:** O local do centro de massa  $G$  de um corpo rígido constituído de duas partículas ( $m_i, P_i$ ), é o ponto que divide o segmento ( $P_1 - P_2$ ) em partes inversamente proporcionais.

b) **Propriedade de Simetria:** Se as partículas  $P_i$  de um corpo rígido pertencerem a um plano  $\pi$  ou reta  $r$ , o centro de massa  $G$  pertencerá a esse plano ou reta.

c) **Propriedade Associativa:** O centro de massa  $G$  de um sistema de corpos rígidos coincide com o centro de massa determinado pela soma do produto da massa e posição de cada parte do sistema.

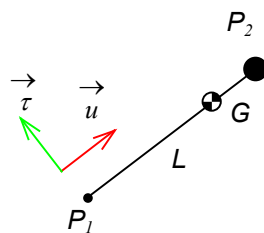


d) **Propriedade de Plano de Simetria:** Se as partículas  $P_i$  que constituem o corpo rígido, admitirem um plano  $\pi$  de simetria material, para massas idênticas, o centro de massa  $G$  pertencerá a esse plano.

e) **Propriedade do Centro de Simetria:** Se as partículas  $P_i$  pertencerem a um centro de simetria material, o centro de massa  $G$  coincidirá com esse centro. Ex. anel, disco ou esfera.

### Exemplo: Centro de Massa de Partículas

Considere duas partículas  $P_1$  e  $P_2$  de massas  $m_1 = 1m$  e  $m_2 = 4m$ , separadas da distância  $L$ , conforme ilustrado na figura. Determinar a posição do centro de massa.

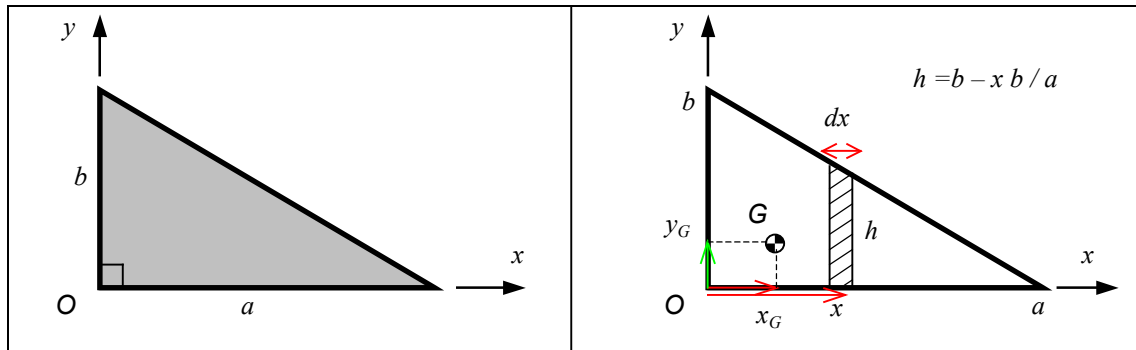


**Resolução:** adotando o sistema de coordenadas  $P_1 \vec{u} \vec{\tau}$  tem-se do somatório do momento de primeira ordem das partículas  $P_1$  e  $P_2$  de massas  $m_1 = 1m$  e  $m_2 = 4m$ , medido a partir o ponto  $P_1$  na direção  $\vec{u}$ :

$$(G - O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow u_G = \frac{u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{0 \cdot m + L \cdot 4m}{5m} = \frac{4}{5} L$$

### Exemplo: Integração

Determinar a posição do centro de massa de uma placa no formato triangular com densidade de área  $\rho$ , conforme dimensões mostradas na figura à esquerda.



**Resolução:** Sabendo que a massa total da placa triangular é  $m = a \cdot b \cdot \rho / 2$ , pode-se substituir o somatório discreto por uma integral de faixas infinitesimais de largura  $dx$  de altura  $h$  e massa elementar  $dm = \rho h \cdot dx$ , para cada altura ( $h = b - xb/a$ ) função da posição  $x$ , ao longo da base do triângulo retângulo de comprimento  $a$ , conforme mostrado na figura à direita:

$$x_G = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m} \Rightarrow x_G = \frac{\int_0^a dm \cdot x}{m} = \frac{\int_0^a (dx h \rho) \cdot x}{0.5 a b \rho} = \frac{\int_0^a h \cdot x dx}{0.5 a b} = \frac{\int_0^a (b - x b / a) \cdot x dx}{0.5 a b} \Rightarrow$$

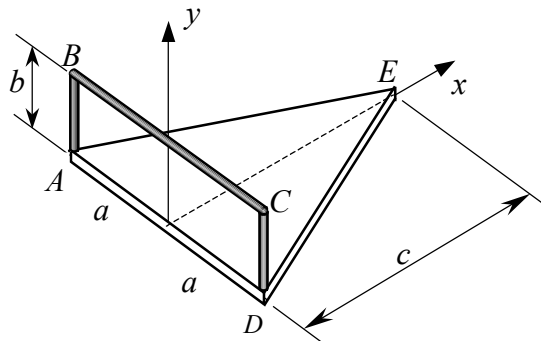
$$x_G = \frac{2}{a b} \left( \int_0^a b \cdot x dx - \int_0^a (b/a) \cdot x^2 dx \right) = \frac{2}{a b} \left( \frac{b}{2} x^2 \Big|_0^a - \frac{b}{3a} x^3 \Big|_0^a \right) = \frac{2}{a b} \left( \frac{b a^2}{2} - \frac{b a^3}{3a} \right) = \frac{1}{3} a$$

O mesmo vale para a outra direção onde obtêm-se por similaridade:  $y_G = \frac{1}{3} b$

### Exemplo: Centro de Massa de Sistema de Corpos

Considere a placa triangular **AED** com massa  $3m$ , as barras **AB** e **CD** têm massa  $m$  (cada uma) e a barra **BC** tem massa  $2m$ . Todos os sólidos são homogêneos.

- Determine as coordenadas do baricentro da placa triangular **AED**.
- Determine as coordenadas do baricentro da barra **ABCD**.
- Determine as coordenadas do baricentro do sólido composto pela placa **AED** e pela barra **ABCD**.



**Resolução:** Utilizando a expressão da posição do centro de massa:  $(G-O) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$  e a

propriedade de simetria obtêm-se:

a) Placa triangular:  $\bar{x}_P = \frac{c}{3}$ ;  $\bar{y}_P = 0$ ;  $\bar{z}_P = 0$  por simetria e problema plano.

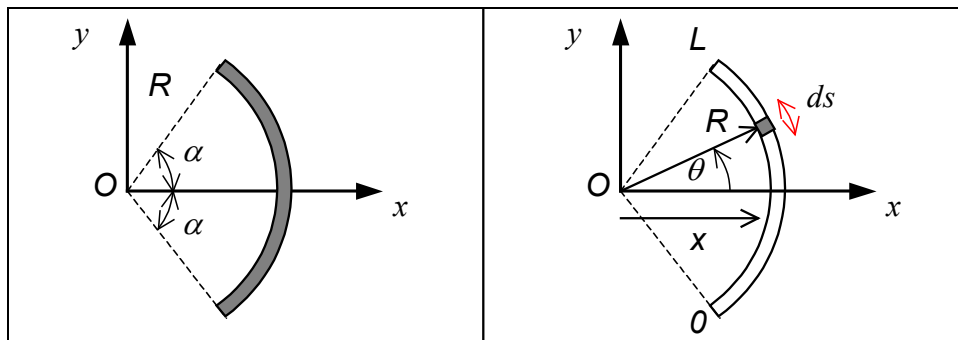
b) Barra:  $\bar{x}_B = 0$ ;  $\bar{y}_B = \frac{m \cdot \frac{b}{2} + 2m \cdot b + m \cdot \frac{b}{2}}{m + 2m + m} = \frac{3mb}{4m} = \frac{3b}{4}$ ;  $\bar{z}_B = 0$

c) Conjunto:  $\bar{x}_S = \frac{3m \cdot \frac{c}{3} + 4m \cdot 0}{3m + 4m} = \frac{mc}{7m} = \frac{c}{7}$ ;  $\bar{y}_S = \frac{3m \cdot 0 + 4m \cdot \frac{3b}{4}}{3m + 4m} = \frac{3mb}{7m} = \frac{3b}{7}$ ;  $\bar{z}_S = 0$

Caso uma das placas tenha um furo, pode-se considerar uma parte adicional com massa negativa.

### Exemplo: Massa Distribuída

Determinar a posição do centro de massa  $G$  de uma barra esbelta homogênea na forma de arco de circunferência de raio  $R$  com ângulo central  $2\alpha$ , conforme ilustrado na figura à esquerda.



**Resolução:** Por simetria  $y_G = 0$ . Dividindo o arco em pequenos segmentos de comprimento  $ds$  na posição  $\theta$ , e sabendo que a barra tem densidade linear de massa  $\mu$ , obtêm-se a massa elementar do elemento de arco  $dm = \mu \cdot ds$ . Substituindo o somatório discreto por uma integral de arcos infinitesimais  $ds$  de posição angular  $\theta$  ao longo do comprimento angular  $2\alpha$ , obtêm-se:

$$x_G = \frac{\int_0^m dm \cdot x}{\int_0^m dm} = \frac{\int_0^L (\mu ds) \cdot x}{\mu \int_0^L ds} = \frac{\int_0^L ds \cdot R \cos \theta}{L}$$

Tem-se ainda que  $ds = R d\theta$  para o intervalo  $-\alpha$  até  $\alpha$ . Trocando o intervalo de integração obtêm-se:

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta \cdot R \cos \theta = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{R^2}{R \cdot 2\alpha} \text{sen } \theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = R \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}$$

## 10. HIDROSTÁTICA

Um sistema de forças paralelas aplicadas a todos os pontos de uma superfície é um caso particular de forças distribuídas. Em geral, forças que atuam em todos os pontos de uma linha, superfície ou volume são ditas distribuídas. O termo **tensão** é geralmente entendido como uma medida da intensidade da força por unidade de área. Forças distribuídas num volume são chamadas de forças de volume como o peso do corpo, já visto no item 9.1. A **HIDROSTÁTICA** estuda a distribuição da força (**pressão**) exercida por fluidos perfeitos em repouso e pesados (submetidos à ação de forças de campo) sobre superfícies de confinamento.

### 10.1. Forças Distribuídas Sobre uma Superfície

Adotando por simplicidade uma superfície plana  $\pi$  com sistema de forças  $\vec{F}_i$  aplicadas em cada um dos seus pontos  $P_i$ . Sendo as forças normais ao plano tem-se que  $\vec{F}_i = f_i \vec{n}$  aplicada no ponto  $P_i$  ao longo de  $S$  do plano  $\pi$  representado pelo vetor  $\vec{n}$  normal a superfície, conforme ilustrado na Figura 37.

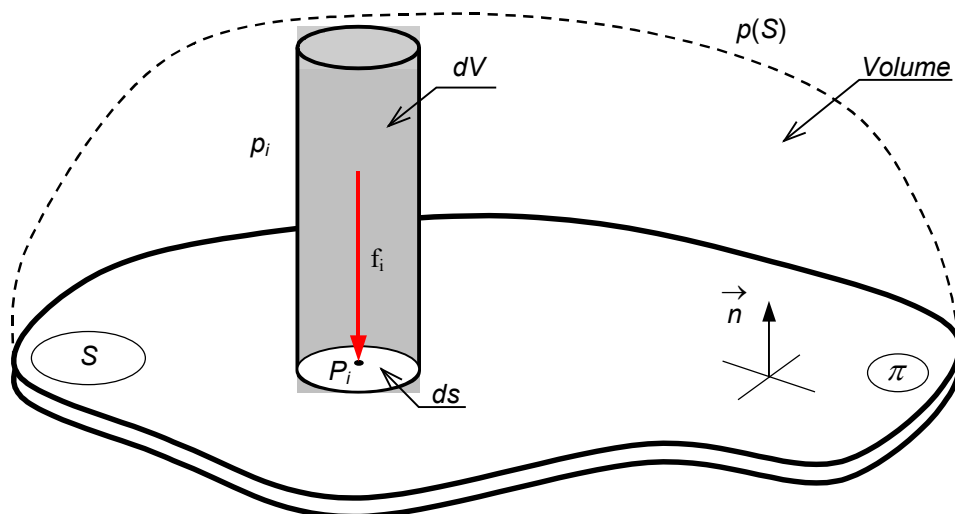


Figura 37 – Forças Distribuídas sobre uma Superfície

Seja  $p(S)$  uma função contínua de pontos genéricos  $P_i$  sobre a área  $S$  com intensidade:

$$p = \frac{f}{ds} \quad (55)$$

é uma função escalar positiva e contínua de  $S$  que é chamada de **PRESSÃO** no ponto  $P_i$ . Então a força que age na área elementar  $ds$  pode ser descrita por:

$$\vec{F}_i = f_i \vec{n} = (p_i \cdot ds) \vec{n} \quad (56)$$

A resultante  $\vec{R}$  do sistema de forças paralelas que agem sobre o plano  $\pi$  de área  $S$ , decorrente das **PRESSÕES HIDROSTÁTICAS** será chamada de **VOLUME das PRESSÕES** dado por:

$$\vec{R} = \sum_S \vec{F}_i = \int_S p_{(S)} \vec{n} ds = V \vec{n} \quad (57)$$

aplicada num ponto qualquer do **eixo central** (sistema do tipo 3 onde:  $I = 0$ ;  $\vec{R}_C \neq 0$  e  $\vec{M}_C = 0$ ) onde  $p$  é a pressão hidrostáticas do líquido ideal e  $V$  é o volume das pressões.

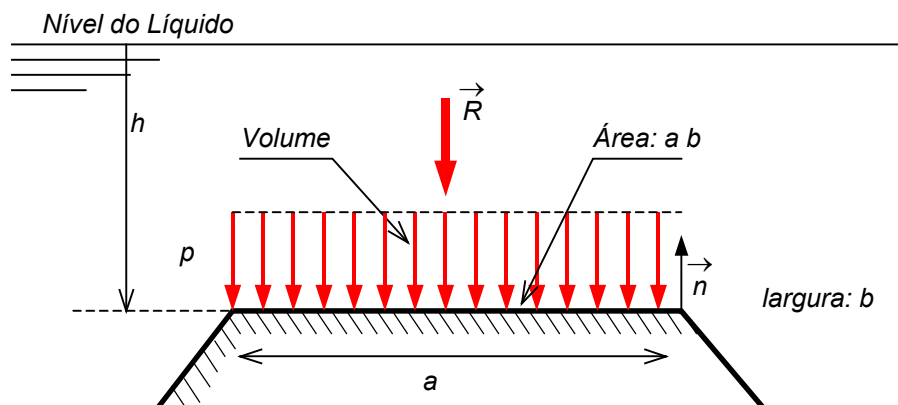
## 10.2. Ação de um Líquido numa Superfície Submersa

De acordo com a lei fundamental da **hidrostática** dos líquidos perfeitos a pressão hidrostáticas  $p$  num ponto a uma profundidade  $h$  de um líquido em repouso de peso específico  $\gamma$  (*gama*) é igual:

$$p = \gamma h \quad (58)$$

onde  $\gamma$  é o peso específico em  $[Newton/m^3]$ . Note que a massa específica é  $\rho$  (*rho*) em  $[kg/m^3]$  portanto  $\gamma = \rho g$  e portanto  $p = \rho g h$ .

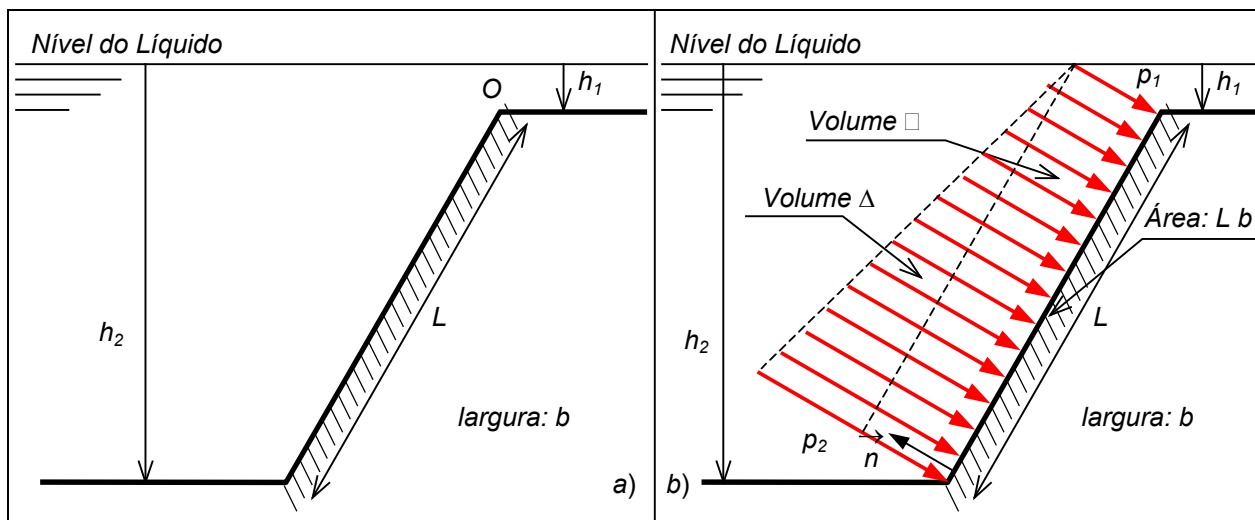
Se o líquido é perfeito, a pressão que ele exerce em cada ponto da superfície é normal a essa. Assim para uma superfície planar de área  $ab$  a Resultante do sistema é de forças paralelas com volume  $V$  decorrente da pressão hidrostática  $p$  é um prisma com base retangular  $a \times b$  de altura  $p$ , aplicada no eixo central da superfície.



A força total Resultante é dada pelo volume do prisma de área  $ab$  (largura  $b$ ) multiplicada pelo peso específico  $\gamma$  e sua linha de ação passa pelo centro de massa do volume:

$$\begin{aligned} p &= \gamma h \\ \vec{R} &= V \vec{n} = p \cdot (a \cdot b) \vec{n} \\ \vec{R} &= \gamma (a \cdot b \cdot h) \vec{n} \end{aligned} \quad (59)$$

No caso de uma superfície inclinada, conforme ilustrado na Figura 38a, tem-se que a pressão  $p$  varia linearmente ao longo da profundidade, formando um volume trapezoidal. Para determinar a forças resultante do campo de pressões hidrostáticas sobre a face lateral inclinada, que tem o formado de um trapézio, é conveniente decompor a pressão em um triângulo e um retângulo, conforme ilustrado na Figura 38b.



**Figura 38 – Pressão do Líquido sobre Face inclinada**

A pressão tem seus valores definidos pela profundidade  $h_1$  e  $h_2$  e o volume dado pela soma de um retângulo e um triângulo conforme ilustrado na Figura 38b:

$$p_1 = \gamma h_1 ; \quad p_2 = \gamma h_2$$

$$\vec{R} = V \vec{n} = (V_{\square}) \vec{n} + (V_{\Delta}) \vec{n}$$

$$V_{\square} = p_1 \cdot (L \cdot b) \quad ; \quad V_{\Delta} = (p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2$$

$$\vec{R} = \gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n}$$

O ponto de aplicação da força resultante da pressão do líquido corresponde ao baricentro do volume das pressões.

### Exemplo: Comporta

Considere uma comporta  $AB$  de comprimento  $L$  submersa no fluido em repouso a uma profundidade  $h_1$  instalada em um canal de profundidade  $h_2$ . Considerando o canal com largura  $b$ , articulação em  $A$  e apoio simples em  $B$ , determinar a força resultante normal equivalente do volume das pressões na comporta e a reação no apoio em  $B$ .



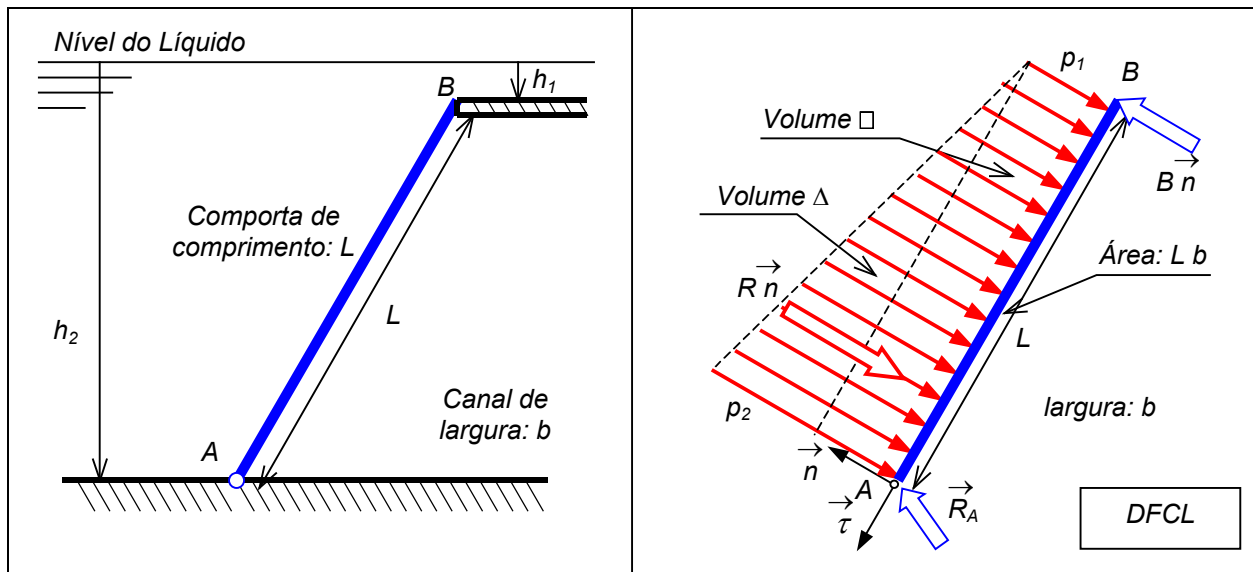


Figura 39 – Comporta em Canal

**Resolução:** Sistema: comporta de comprimento  $L$  apoiada nos vínculos  $A$  e  $B$  submersa no fluido. **Diagrama de forças:** Volume das pressões e Reações nos vínculos  $A$  e  $B$ . **Referencial e pólo:**  $A \vec{n} \vec{\tau}$ . **Teoremas:** Volume das pressões, Estática da comporta.

$$p_1 = \gamma h_1 ; p_2 = \gamma h_2 \quad \vec{R} = -V \vec{n} = -(V_{\nabla}) \vec{n} - (V_{\Pi}) \vec{n}$$

$$V_{\Pi} = p_1 \cdot (L \cdot b) \quad ; \quad V_{\nabla} = (p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2$$

$$\vec{R} = -\gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n}$$

O local de aplicação da resultante do volume das pressões é o baricentro do volume, determinado por:

$$(G - A) = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{(V_{\nabla} \cdot L / 3) + (V_{\Pi} \cdot L / 2)}{V_{\nabla} + V_{\Pi}} = \frac{((p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2) \cdot L / 3 + (p_1 \cdot (L \cdot b)) \cdot L / 2}{((p_2 - p_1) \cdot (L \cdot b) / 2) + (p_1 \cdot (L \cdot b))}$$

$$(G - A) = \frac{(\gamma \cdot (h_2 - h_1) \cdot (L \cdot b) / 2) \cdot L / 3 + (\gamma \cdot h_1 \cdot (L \cdot b)) \cdot L / 2}{(\gamma \cdot (h_1 + h_2) \cdot (L \cdot b) / 2)} = \frac{(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)} L$$

Fazendo o equilíbrio da comporta em torno do pólo em  $A$  obtêm-se da equação de momentos:

$$\vec{M}_A = (G - A) \wedge \vec{R} + (B - A) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$-\frac{(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)} L \vec{\tau} \wedge -\gamma \cdot L b (h_1 + h_2) / 2 \vec{n} = -L \vec{\sigma} \wedge B_n \vec{n} \quad \text{que é a reação em } B \text{ na direção } \vec{n}.$$

$$B_n = \frac{(2h_1 + h_2)}{3} \gamma \cdot L b$$

### Exemplo: Superfície não plana:

Para o caso de superfícies não planas o conceito de Volume das Pressões pode ser utilizado facilitando a solução do problema. Considere um tubo cilíndrico de comprimento  $L$  que tem como seção uma semicircunferência de raio  $R$  e está submetido, na sua face externa, à pressão da água a partir da profundidade  $h_1$ , conforme indicado na Figura 40a. Determinar o vetor Resultante das pressões sobre a calota semi-cilindrica. É dado o peso específico da água:  $\gamma = \rho g$ .

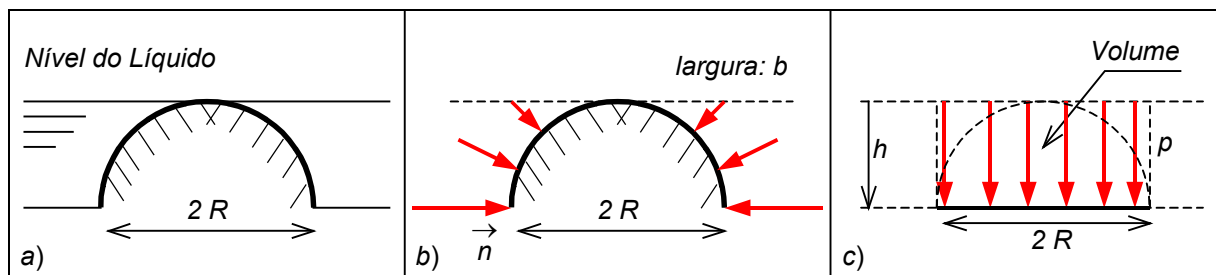


Figura 40 – Superfície semi-cilindrica

Inicialmente note que o campo de pressões é sempre perpendicular à superfície circular, conforme ilustrado na Figura 40b. Note também que as componentes horizontais da pressão sobre a calota se anulam. Considere agora que o volume das pressões sobre a base do semi-cilindro com área  $(2R \cdot b)$ , na profundidade  $h = R$  e largura  $b$ , conforme ilustrado na Figura 40c, corresponde à:

$$\vec{R}_{Base} = V \vec{n} = p \cdot Area = \gamma \cdot h (2R \cdot b) = \gamma \cdot 2R^2 b.$$

Finalmente o volume das pressões sobre a calota semi-cilindrica será o valor anterior menos a área da calota:

$$\vec{R}_{Calota} = (V_{\Pi} - V_{\Omega}) \vec{n} = \gamma \cdot (2R^2 - \pi R^2 / 2) b = \gamma \cdot R^2 (2 - \pi / 2) b.$$

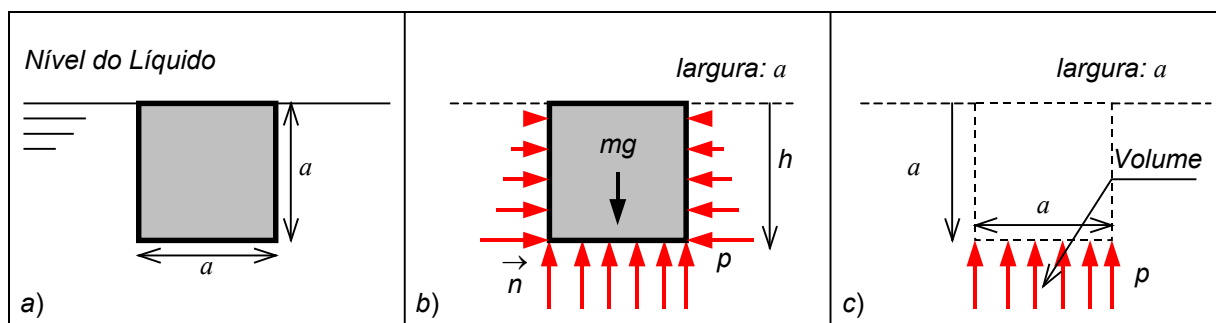
Verifique que para uma profundidade genérica  $h > R$  a Resultante será:

$$\vec{R}_{Calota} = \gamma \cdot R b (2h - \pi R / 2).$$

### Princípio de Arquimedes:

"*Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.*"

Considere um cubo de aresta  $a$  mergulhado integralmente num fluido em repouso de peso específico:  $\gamma = \rho g$ , conforme ilustrado na Figura 41a.



**Figura 41 – Superfície semi-cilíndrica**

Inicialmente note que o campo de pressões é sempre perpendicular à superfície do cubo, conforme ilustrado na Figura 41b. Note também que as componentes horizontais da pressão sobre os lados opostos do cubo se anulam. Considere agora a força resultante do volume das pressões sobre a base inferior do cubo com área ( $a^2$ ), na profundidade  $h = a$  e largura  $a$ , conforme ilustrado na Figura 40c, corresponde à:

$$\vec{R} = V \vec{n} = p \cdot \text{Area} = \gamma \cdot h \cdot a^2 = \gamma \cdot a^3.$$

Note que no equilíbrio do corpo totalmente submerso, o volume de líquido deslocado pelo cubo deve ser igual a peso próprio ( $mg$ ), ou seja, para corpos com densidade igual a do fluido. Essa relação vale para qualquer profundidade, pois ao submergir, haverá campos de pressões adicionais idênticos na face superior e na face inferior do cubo.

### Exemplo: Barragem

A Figura 42a mostra a seção transversal de uma barragem de gravidade com altura  $D$ , projetada para suportar uma lâmina d'água de altura  $h$ . Sabe-se que não há infiltração de água entre o solo e a barragem e o coeficiente de atrito nessa interface é  $\mu$ . São dados os pesos por unidade de volume da água,  $\gamma_A$ , e do material da barragem  $\gamma_B$ . A largura da barragem é  $L$  (perpendicular ao plano da figura). Determinar o mínimo valor que deve ter a dimensão  $a$  da barragem para que ela não escorregue. Sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é  $\mu$ , qual o mínimo valor que deve ter a dimensão  $a$  da barragem para que ela não tombe?

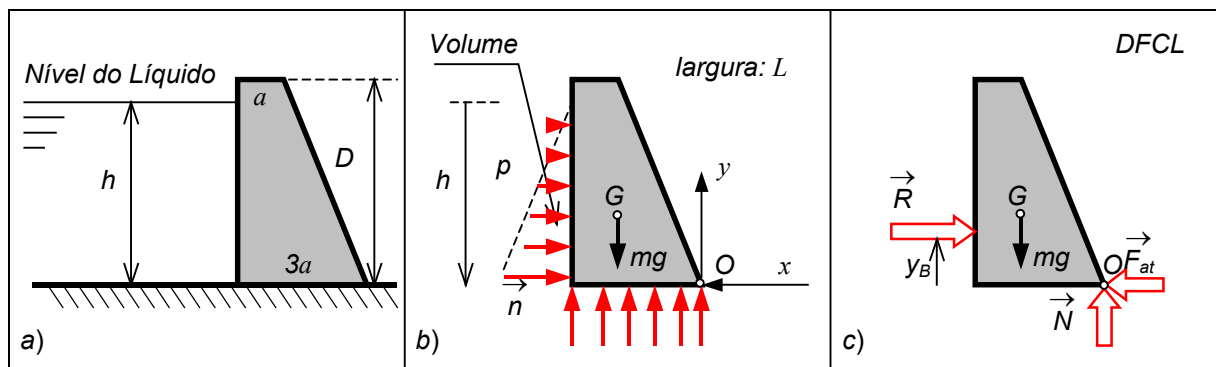


Figura 42 – Barragem

**Resolução:** Sistema: barragem com vínculo de apoio distribuído; Diagrama de Pressões e DFCL; Referencial e Pólo  $Oxy$ ; Teoremas: Centro de Massa, Resultante do Volume das Pressões hidrostáticas, Equilíbrio Estático.

a) a posição do centro de massa da barragem em relação ao sistema  $Oxy$  indicado na Figura 42b;

$$x_G = \frac{(aD(2a + a/2) + (2aD/2)(2 \cdot 2a/3))}{(aD + 2aD/2)} = \frac{23}{12}a$$

$$y_G = \frac{(aD(D/2) + (2aD/2)(D/3))}{(aD + 2aD/2)} = \frac{5}{12}D$$

b) a Resultante das pressões hidrostáticas sobre a barragem conforme a Figura 42c;

$$\vec{R} = V \vec{n} = p \cdot Area = \gamma_A \cdot h(hL)/2 = \gamma_A \cdot h^2 L / 2$$

c) a posição do baricentro dessas pressões, em relação ao sistema  $Oxy$  indicado;

$$x_B = 3a \quad ; \quad y_B = h/3$$

d) o mínimo valor que deve ter a dimensão ***a*** da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é ***μ***. Para essa condição  $\vec{R} \leq \vec{F}_{at}$  sendo o peso da barragem  $P = mg = \gamma_B 2aDL$ :

$$|\vec{R}| \leq \mu P \Rightarrow \gamma_A h^2 L / 2 \leq \mu \cdot \gamma_B 2aDL \Rightarrow a_{\min} = \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \frac{h^2}{4\mu D}$$

e) o mínimo valor que deve ter a dimensão ***a*** da barragem para que ela não tombe. Neste caso a reação normal será aplicada no ponto ***O***. Para não tombar o momento do peso próprio da barragem deve ser maior ou igual ao momento da resultante da pressão hidrostática. Assim, tomando o momento em relação ao pólo ***O***, obtêm-se:

$$\vec{M}_O = (x_G mg) - (y_B R) \Rightarrow \left( \frac{23}{12} a \right) \cdot (\gamma_B 2aDL) \geq \left( \frac{h}{3} \right) \cdot (\gamma_A h^2 L / 2) \Rightarrow a_{\min} = \sqrt{\frac{\gamma_A}{\gamma_B} \frac{h^3}{23D}}$$

## 11. ATRITO

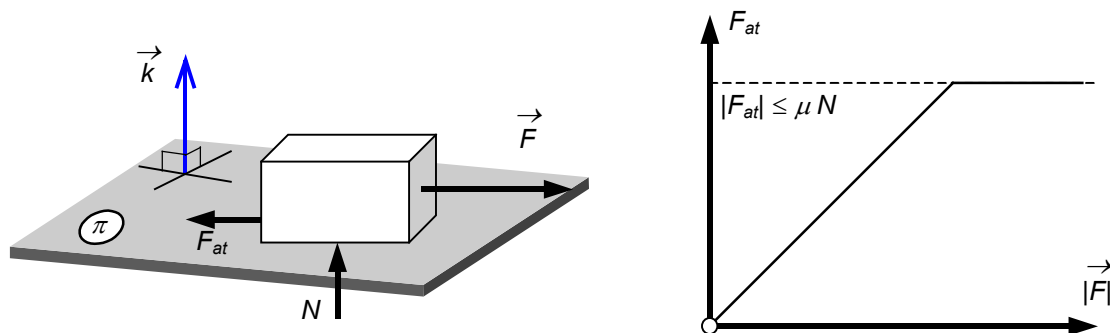
Observações experimentais constataam que um corpo em repouso apoiado sobre um plano submetido a uma força tangencial aplicada  $\vec{F}$  (ou momento  $\vec{M}$ ), permanecerá imóvel até a força (ou momento) atingir um valor limite a partir da qual o corpo inicia seu movimento. No plano de contato, o movimento pode ser de translação com direção determinada, de rotação de rolamento com eixo alinhado com o plano ou pivotamento quando o eixo de rotação é perpendicular ao plano. Desta forma classifica-se os tipos de movimento como:

- Movimento de Escorregamento;
- Movimento de Rolamento;
- Movimento de Pivotamento.

Para cada caso de tendência ao movimento, uma relação específica é identificada e relatada a seguir.

### 11.1. Atrito de Escorregamento

Quando o corpo em repouso apoiado sobre o plano for submetido a uma força tangencial aplicada  $\vec{F}$  com direção definida, haverá uma força de retenção na direção oposta que impede o movimento (princípio da ação e reação – 3ª Lei de *Newton*). Tal força é chamada de força de atrito  $F_{at}$ . Uma relação linear entre a força ativa e a força de atrito é observada, conforme apresentado na Figura 43. Note, entretanto que a relação linear ocorre apenas até o limite de aderência a partir do qual o movimento se inicia e a força tende a ficar constante.



**Figura 43 – Relação entre a força ativa e a força de atrito**

Conforme proposto por *Coulomb* (1736-1806) a força de atrito não ultrapassa um valor proporcional a força normal  $N$  de contato de forma que:

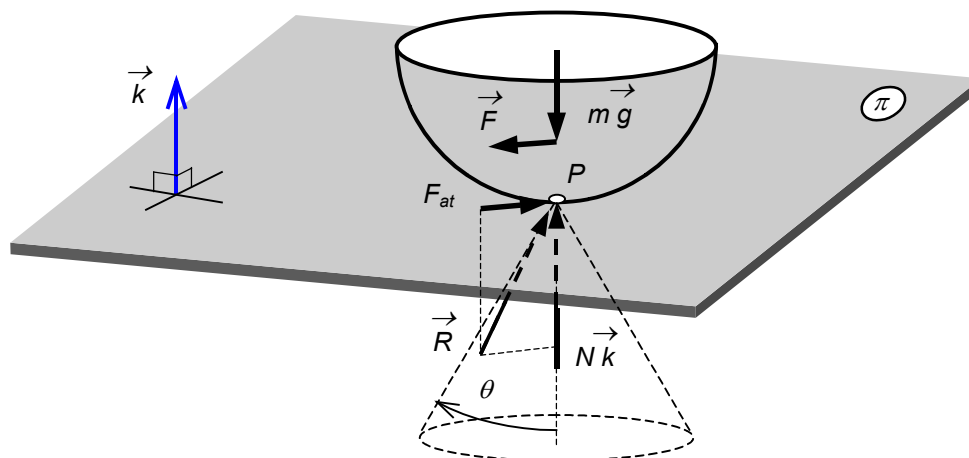
$$|F_{at}| \leq \mu N \quad (60)$$

O escalar  $\mu$  é chamado de coeficiente de atrito estático, sendo função da rugosidade superficial e das características dos materiais dos corpos envolvidos. Em escala macroscópica o atrito é dito seco se as superfícies não forem lubrificadas. Na iminência do movimento a força de atrito  $F_{at}$  atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento de deslizamento se inicia:

$$|F_{at}| = \mu N \quad (61)$$

Se houver contaminação ou lubrificação das superfícies o valor do coeficiente de atrito se reduz. Para movimento com escorregamento intenso há possibilidade formação de substrato de auto contaminação e o coeficiente de atrito também diminui (coeficiente de atrito dinâmico -  $\mu_D$ ).

**Cone de atrito** – Para uma reação normal  $N$ , o valor máximo da forças de atrito é  $\mu N$ . Isso significa que se a força aplicada  $\vec{F}$  for interior ao cone (abertura  $\theta = \arctan \mu$ ) conforme ilustrado na Figura 44, não haverá escorregamento ( $|F_{at}| \leq \mu \cdot N$ ).



**Figura 44 – Cone de atrito no Movimento de Deslizamento**

**Plano inclinado** – o valor máximo de inclinação de um plano para o que um corpo não escorregue para baixo é dado por:  $\alpha_{\text{MAX}} = \arctan \mu$ .

## 11.2. Momento de Atrito de Rolamento

Quando um cilindro é propulso a rolar sobre uma superfície, surge um binário reativo cujo momento se opõe à tendência ao movimento de rotação. Este binário chama-se de binário de atrito de rolamento  $M_{\text{atr}}$ . Considere um disco submetido a uma força  $F$  que tenta induzir o rolamento sobre uma superfície plana, conforme ilustrado na Figura 45a. A explicação física do aparecimento do binário restritivo supõe que a superfície de apoio se deforme, de maneira que o ponto de contato  $C$  se dá a uma distância  $\rho$  a frente do ponto que seria de contato se a superfície não se deformasse, conforme ilustrado na Figura 45b (Giacaglia, 1982). Neste caso o coeficiente de atrito de rolamento é definido como uma distância  $\rho$ . Note que no caso real, mesmo materiais duros (por exemplo: roda de aço do metrô) haverá sempre uma deformação mesmo que muito pequena.



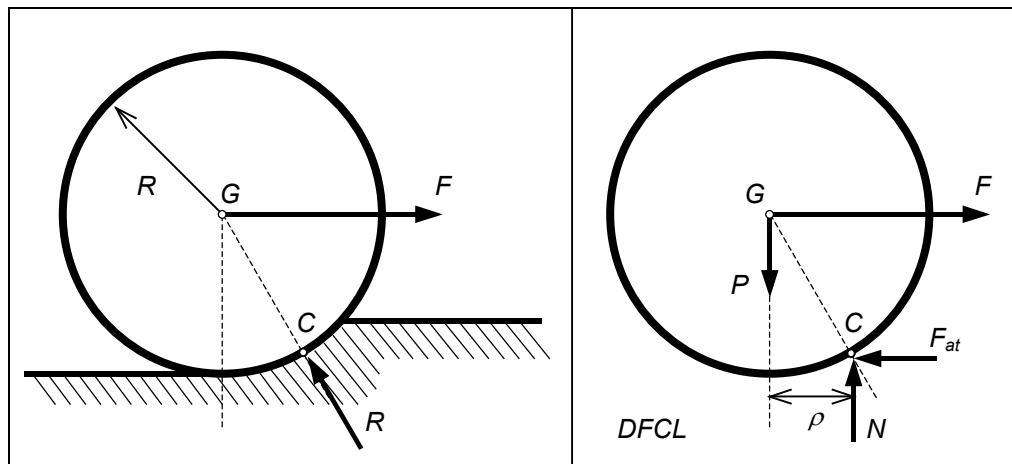


Figura 45 – Atrito de Rolamento

Antes de iniciar o movimento, verifica-se pelas fórmulas de equilíbrio ( $\vec{R} = 0$  e  $\vec{M}_C = 0$ ), utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre, conforme ilustrado na Figura 45b, verifica-se que:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ P - N = 0 \\ M_C = (-R \cdot F) + (\rho \cdot P) \cong 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{at} = F \\ N = P \\ R \cdot F = \rho \cdot P \end{cases} \quad (62)$$

Portanto quando há tendência ao rolamento, devido ao momento ativo externo ( $R \cdot F$ ) haverá uma resistência a este movimento caracterizado por um momento de atrito de rolamento  $M_{atr}$  tal que:

$$|M_{atr}| \leq \rho N \quad (63)$$

Na iminência do movimento o momento de atrito de rolamento  $M_{atr}$  atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento de rolamento se inicia:

$$|M_{atr}| = \rho N \quad (64)$$

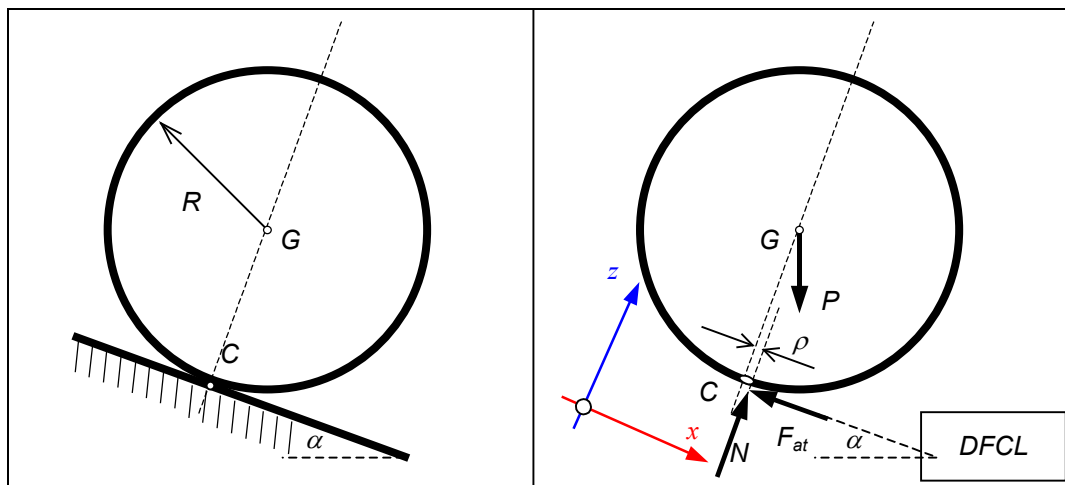
### Exemplo: Disco Sobre Plano

Considere um disco de raio  $R$  e peso  $P$ , apoiado sobre um plano com inclinação  $\alpha$ , conforme ilustrado na Figura 46a. Qual o máximo valor de  $\alpha$  compatível com o equilíbrio (Giacaglia, 1982). Considere os coeficiente de atrito de escorregamento  $\mu$  e coeficiente de atrito de rolamento  $\rho$ .

**Resolução:** a) **Sistema:** Disco de raio  $R$  e peso  $P$  e vínculo de apoio em  $C$  b) **DFCL**; c)

**Referencial:**  $Cxy$ ; d) **Teoremas:** para a condição estática tem-se:  $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ ;  $\vec{M}_C = \vec{0}$ ;

$$|F_{at}| \leq \mu \cdot N \quad \text{e} \quad |M_{atr}| \leq \rho \cdot N$$



**Figura 46 – Disco no Plano Inclinado**

As forças externas aplicadas ao disco em equilíbrio são obtidas do **DFCL**, ilustrado na Figura 46b, incluindo a força de atrito  $F_{at}$  aplicada no ponto  $C$  e momento de atrito de rolamento  $M_{atr} = \rho N$  aplicado no disco devido ao afastamento  $\rho$  da aplicação da força normal  $N$ , resultando nas seguintes equações estáticas para o problema plano:

$$\begin{cases} P \sin \alpha - F_{at} = 0 \\ P \cos \alpha - N = 0 \\ M_C = -R \cdot P \sin \alpha + \rho N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \sin \alpha = F_{at} \\ P = N / \cos \alpha \\ R P \sin \alpha = \rho N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{F_{at}}{N} \leq \mu \\ \tan \alpha \leq \frac{\rho}{R} \end{cases}$$

Logo tem-se que o ângulo de inclinação máximo do plano será o mínimo entre os valores obtidos:  $\boxed{\tan \alpha = \min(\mu, \rho / R)}$

### 11.3. Momento de Atrito de Pivotamento

De maneira genérica, dois corpos convexos em contato elástico com tendência ao movimento relativo angular devido a forçamentos ativos, desenvolvem forças e momentos reativos de contato aplicadas mutuamente na superfície comum de contato. Sendo os corpos convexos, haverá um plano tangente  $\pi$  no ponto de contato. Quando o corpo é propelido a pivotar sobre um superfície do outro, surge um binário cujo momento se opõe à tendência ao movimento de pivotamento. Este binário chama-se de binário de atrito de pivotamento  $\vec{M}_{atp}$ . Esta hipótese é baseado na existência de uma área de contato do corpo elástico deformado onde há distribuição da força ativa normal de contato e reações tangenciais de atrito formando binário.

Quando um corpo tende a girar em direção definida  $\omega_z \vec{k}$ , conforme ilustrado na Figura 47 ocorre o binário de atrito de pivotamento  $\vec{M}_{atp} = M_{atp} \vec{k}$ . Este valor é obtido pela integração das forças tangenciais que se opõem à tendência ao pivotamento (França, 2011) resultando em:

$$|M_{atp}| \leq \frac{2}{3} R \cdot \mu N \quad (65)$$

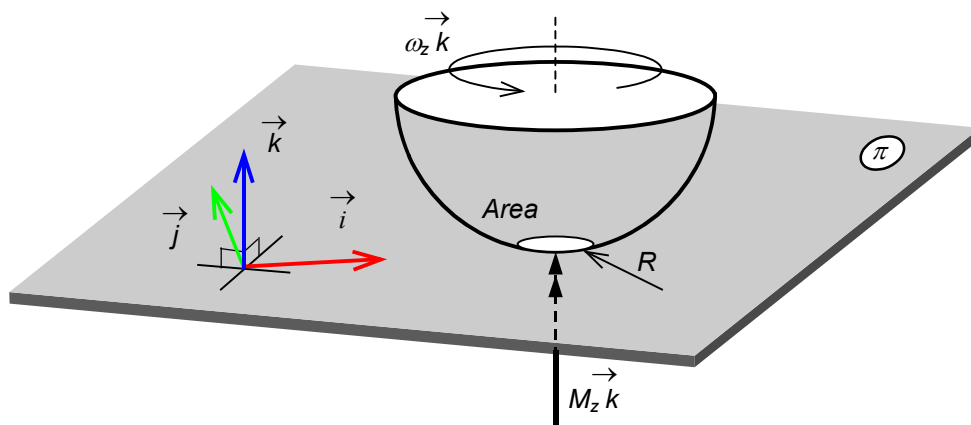


Figura 47 – Atrito de Pivotamento

De maneira similar aos casos anteriores, na iminência do movimento o momento de atrito de pivotamento  $M_{atp}$  atinge seu limite máximo a partir do qual o movimento angular de pivotamento se inicia:

$$|M_{atp}| = \frac{2}{3} R \cdot \mu N \quad (66)$$

### Exemplo: Bloco Deslizando ou Tombando

O bloco homogêneo de peso  $P$  e largura  $2a$  está em repouso sobre um plano horizontal, conforme ilustrado na Figura 48a. Calcular a máxima força horizontal  $F$  aplicada na altura  $h$ , compatível com o equilíbrio do bloco (França, 2011).

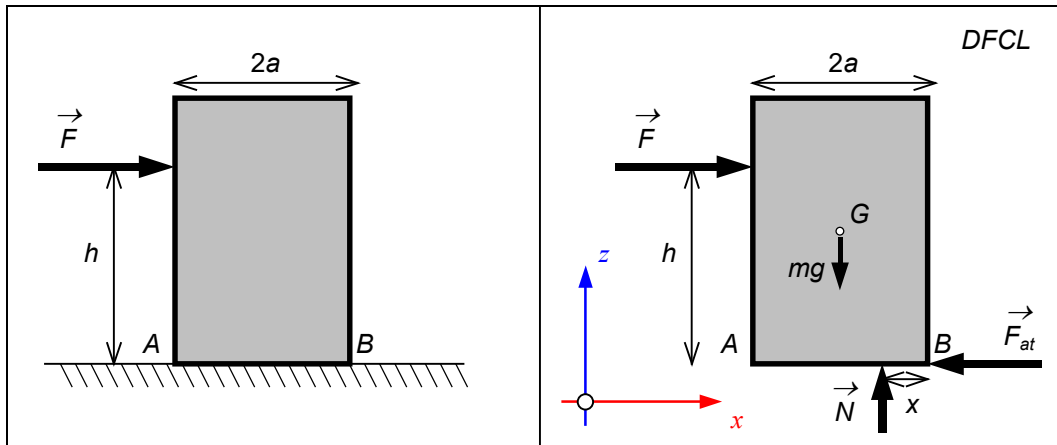


Figura 48 – Bloco Deslizando ou Tombando

**Resolução:** a) **Sistema:** bloco de massa  $m$  e vínculo de apoio distribuído  $AB$ ; b) **Diagramas:**  $DFCL$ ; c) **Referencial:**  $Oxz$  e pólo em  $B$ ; d) **Teoremas:**  $|F_{at}| \leq \mu N$ . Na iminência do movimento (sistema estático) valem:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ ; e  $\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$  e  $|F_{at}| \leq \mu N$ . Note que para o apoio distribuído a posição da resultante da reação normal  $N$  tem posição que pode variar ( $x$ ). Analisando o  $DFCL$  da Figura 48b e considerando o pólo em  $B$ , constata-se no equilíbrio estático que:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ N - mg = 0 \\ M_B = -h \cdot F + a \cdot mg - x \cdot N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = F_{at} \\ N = mg \\ h \cdot F = a \cdot mg - x \cdot N \end{cases}$$

Da segunda equação obtêm-se que  $N = mg$ . Da primeira equação considerando a iminência da tendência ao deslizamento, obtêm-se (utilizando  $F_{at} \leq \mu N$ ):  $F_{deslisa} = \mu mg$ . Da terceira equação de momento, considerando a tendência ao tombamento, a reação normal  $N$  do plano sobre o bloco resulta aplicada na extremidade  $B$  tal que:  $x = 0$ , obtendo-se portanto:  $F_{tombam} = a \cdot mg / h$ . Portanto a valor da força máxima na iminência do movimento será o mínimo entre os dois casos (tombamento e deslizamento):  $F_{\max} = \min(a \cdot mg / h, \mu mg)$

### Exemplo: Cilindro Deslizando ou Rolando

Um trator equilibra o tronco cilíndrico homogêneo de peso  $P$  e largura  $L$  ao longo da rampa inclinada (inclinação  $\alpha$ ). Nota-se que o cilindro tem dois pontos de contato, com a rampa em  $C$  e a pá do trator em  $E$ , que possuem o mesmo coeficiente de atrito  $\mu < 1$ , conforme ilustrado na Figura 49a (França, 2011). Determinar os valores do coeficiente de atrito  $\mu$  para que o cilindro esteja na iminência de:

- rolar para cima sem escorregando sobre a rampa ou
- escorregar para cima na rampa (sem escorregar na pá).

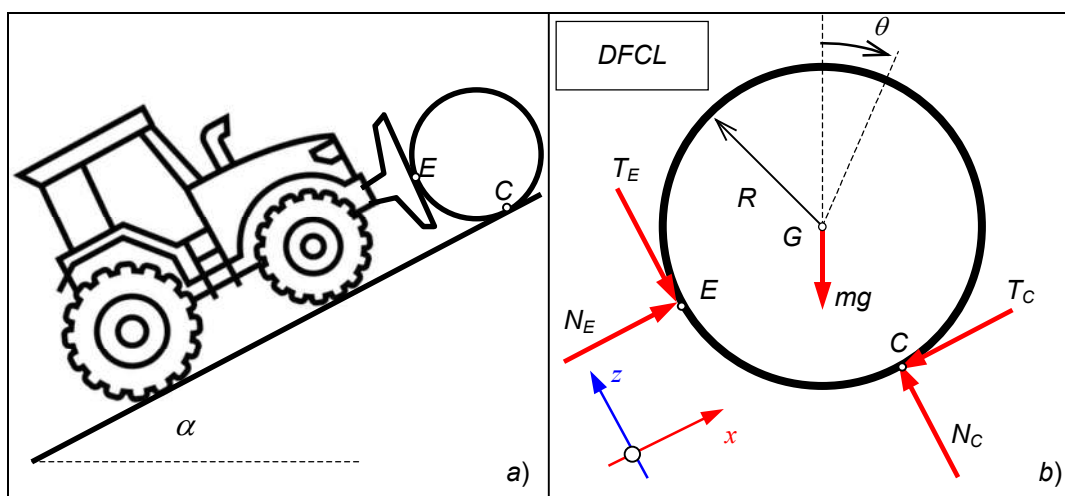


Figura 49 – Cilindro Rolando ou Escorregando

**Resolução:** a) **Sistema:** cilindro com vínculo de apoio em **C** e **E**; b) **Diagramas:** *DFCL*; c) **Referencial:** *Oxz* e Pólo em **G**; d) **Teoremas:** Equações de equilíbrio e relação de *Coulomb*  $|F_{at}| \leq \mu N$ . Na iminência do movimento (sistema estático) valem:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ ;  $\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$  e  $|F_{at}| = \mu N$ .

As forças externas aplicadas ao cilindro em equilíbrio são obtidas do *DFCL*, , conforme ilustrado na Figura 49b, resultam para o problema plano nas seguintes equações:

$$\begin{cases} N_E - T_C - mg \sin \alpha = 0 \\ N_C - T_E - mg \cos \alpha = 0 \\ M_G = R \cdot T_E - R \cdot T_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_E = mg \sin \alpha + T_C \\ N_C = mg \cos \alpha + T_E \\ T_E = T_C = T \end{cases}$$

a) Na iminência de rolar no plano (ponto **C**) e, portanto escorregar na pá (ponto **E**) tem-se:

$$\begin{cases} T = T_C \leq \mu \cdot N_C \\ T = T_E = \mu \cdot N_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_E = mg \sin \alpha + \mu \cdot N_E \\ T_C = T_E = T \end{cases} \Rightarrow N_E \cdot (1 - \mu) = mg \sin \alpha$$

$$\begin{cases} T = T_E = \mu \cdot N_E \\ N_E \cdot (1 - \mu) = mg \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_C = mg \cos \alpha + T_E \\ N_C = mg \cos \alpha + \mu \cdot (mg \sin \alpha / (1 - \mu)) \end{cases}$$

$$N_C = mg \cos \alpha + \frac{\mu \cdot mg \sin \alpha}{(1 - \mu)}$$

$$\begin{cases} T = T_C \leq \mu \cdot N_C \\ T = T_E = \mu \cdot N_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \cdot N_E \leq \mu \cdot N_C \\ N_E = mg \sin \alpha + \mu \cdot N_E \end{cases} \Rightarrow \frac{mg \sin \alpha}{(1 - \mu)} \leq mg \cos \alpha + \frac{\mu \cdot mg \sin \alpha}{(1 - \mu)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{(1 - \mu)} \leq \cos \alpha + \frac{\mu \cdot \sin \alpha}{(1 - \mu)} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{(1 - \mu)} - \frac{\mu \cdot \sin \alpha}{(1 - \mu)} \leq \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq 1$$

$$\boxed{\tan \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq 45^\circ}$$

b) Na iminência de escorregar no plano (ponto **C**) tem-se:  $\boxed{\tan \alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha \geq 45^\circ}$

No caso de  $\boxed{\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ}$  o cilindro estará na iminência de escorregar em qualquer contato.

### Exemplo: Movimento do Carretel

Considere um carretel com raio interno menor  $r$ , rolando sobre uma guia plana **AB**, apoiado no ponto **C**, conforme ilustrado na Figura 50a. O carretel está submetido a uma força horizontal ( $\vec{F}$ ,

$E$ ) aplicada pelo fio ideal, que se enrola na parte externa do carretel de raio  $R$ , a partir do ponto  $D$ . Considerando o coeficiente de atrito em  $C$ , suficiente para não escorregar e  $R > r$ , determinar para qual lado ocorre o movimento?

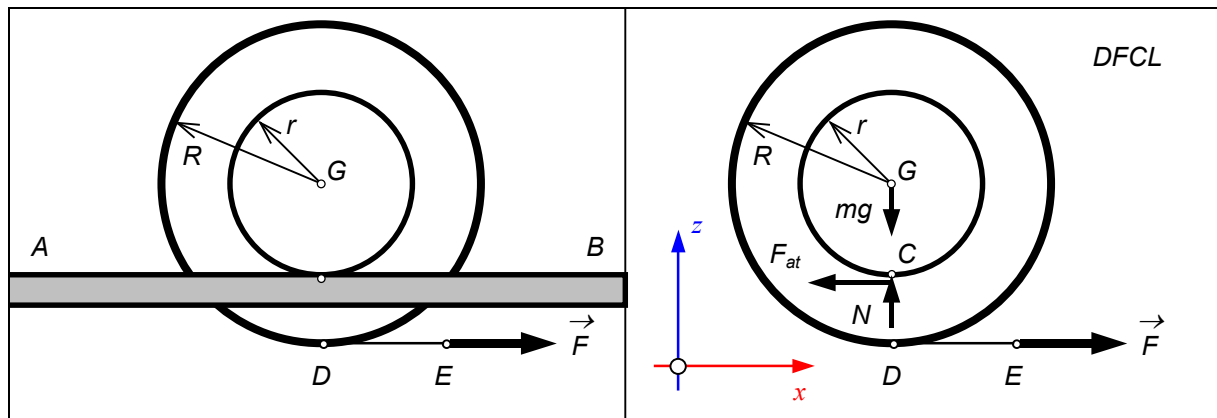


Figura 50 – Carretel submetido a Força

**Resolução:** a) **Sistema:** carretel com vínculo de apoio em  $C$  e fio  $DE$ ; b) **Diagramas:**  $DFCL$ ; c) **Referencial:**  $Oxz$  e Pólo em  $G$ ; d) **Teoremas:**  $|F_{at}| \leq \mu N$ . Na iminência do movimento (sistema estático) valem:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ ;  $\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$  e  $|F_{at}| = \mu N$ .

As forças externas aplicadas ao carretel em equilíbrio são obtidas do  $DFCL$ , ilustrado na Figura 50b, resultam nas seguintes equações:

$$\begin{cases} F - F_{at} = 0 \\ N - mg = 0 \\ M_G = R \cdot F - r \cdot F_{at} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = F_{at} \\ N = mg \\ R \cdot F - r \cdot F_{at} = 0 \end{cases}$$

Considerando que não há escorregamento  $F = F_{at}$  e sendo ( $R > r$ ) a equação de momento terá valor positivo, portanto tendência à rotação anti-horária ou movimento do carretel para esquerda, rolando em torno do ponto  $C$  de contato.

### Exemplo: Contato Múltiplo

Considere o carretel de massa  $m$  e centro de massa  $G$  que possui distribuição de massa tal que o momento de inércia em relação ao seu pólo  $A$  é dado por  $J_{Ay} = 5mR^2/4$  (Psub 2017). Sobre o carretel, enrola-se um fio ideal sujeito à ação das forças de módulo  $F$  constante, mas desconhecido. O carretel apóia-se constantemente sobre um suporte em formato “V”. O coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies nos pontos  $D$  e  $E$  é  $\mu$  e o ângulo  $\theta$  vale  $\pi/4$  radianos, conforme ilustrado na Figura 51. Nessas condições, pede-se o valor das forças constantes  $F$  aplicadas aos fios e capazes de proporcionar ao carretel uma aceleração angular de módulo  $\alpha$ .

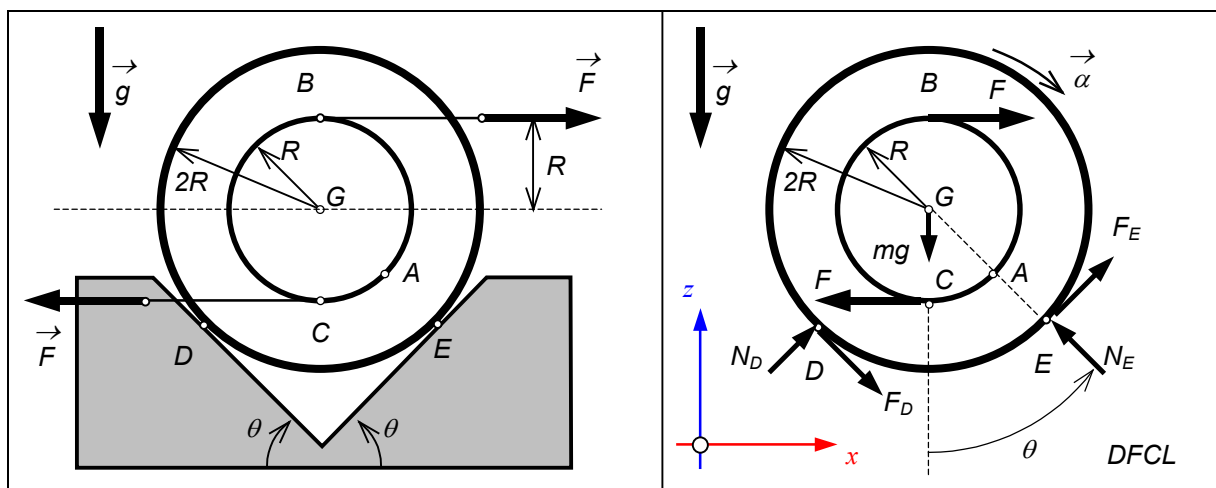


Figura 51 – Carretel submetido a Binário de Forças

**Resolução:** a) **Sistema:** carretel com vínculo de apoio em  $D$  e  $E$  e força  $F$  no fio ideal em  $B$  e  $C$ ; b) **Diagramas:** DFCL; c) **Referencial:**  $Oxz$  e Pólo em  $G$ ; d) **Teoremas:**  $|F_{at}| \leq \mu N$ . Na iminência do movimento (sistema estático) valem:  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ ;  $\vec{M}_G = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$  e  $|F_{at}| = \mu N$ .

Utilizando o TR e as forças externas aplicadas ao carretel são obtidas do DFCL, ilustrado na Figura 51b, resultam nas seguintes equações:



$$\begin{cases} \sum F_x = F - F + N_D \frac{\sqrt{2}}{2} + F_D \frac{\sqrt{2}}{2} - N_E \frac{\sqrt{2}}{2} + F_E \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \sum F_z = N_D \frac{\sqrt{2}}{2} - F_D \frac{\sqrt{2}}{2} + N_E \frac{\sqrt{2}}{2} + F_E \frac{\sqrt{2}}{2} - mg = 0 \end{cases}$$

Considerando que há escorregamento entre as superfícies em contato devido ao momento do binário de forças, podemos reescrever as equações como:

$$\begin{cases} \sum F_x = N_D(1 + \mu) - N_E(1 - \mu) = 0 \\ \sum F_z = N_D(1 - \mu) + N_E(1 + \mu) = mg\sqrt{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações obtêm-se:

$$N_D = \frac{mg\sqrt{2}(1 - \mu)}{2(1 + \mu^2)} \quad \text{e} \quad N_E = \frac{mg\sqrt{2}(1 + \mu)}{2(1 + \mu^2)}$$

$$F_D = \mu \frac{mg\sqrt{2}(1 - \mu)}{2(1 + \mu^2)} \quad \text{e} \quad F_E = \mu \frac{mg\sqrt{2}(1 + \mu)}{2(1 + \mu^2)}$$

Aplicando o **TQMA** em relação ao centro de massa **G** obêm-se:

$$J_{Gy} \vec{\alpha} = \vec{M}_G \Rightarrow -J_{Gy} \alpha \vec{j} = (B - G) \wedge \vec{F} + (C - G) \wedge \vec{F} + (D - G) \wedge \vec{F}_D + (E - G) \wedge \vec{F}_E$$

$$-J_{Gy} \alpha = -RF - RF + 2RF_D + 2RF_E$$

Fazendo a mudança de pólo do momento de inércia dado  $J_{Ay} = 5mR^2 / 4$ :

$$J_{Ay} = J_{Gy} + md_{A,G}^2 \Rightarrow J_{Gy} = J_{Ay} - mR^2 \Rightarrow J_{Gy} = mR^2 / 4$$

Substituindo na equação anterior e resolvendo para a força **F**:

$$-\frac{mR^2}{4} \alpha = 2R \left( -F + \frac{\mu mg\sqrt{2}}{2} \frac{(1 - \mu + 1 + \mu)}{(1 + \mu^2)} \right) \Rightarrow F = \frac{\mu mg\sqrt{2}}{(1 + \mu^2)} + \frac{mR\alpha}{8}$$

### 11.4. Direção da Força de Atrito

A direção da força de atrito é sempre contrária à direção da tendência ao movimento ( $V_{Cx}$ ) decorrente da **ação de uma força ou binário de forças** e portanto pode ser determinada pelo diagrama de força do corpo livre, conforme ilustrado na Figura 52. O corpo pode estar submetido a uma força ( $\vec{F}, G$ ) conforme ilustrado na Figura 52a ou um momento de binário  $\vec{M}$  (ver Figura 52b) ou ambos. Para cada caso de combinação de forçamentos obtêm-se uma direção específica para a força de atrito:

$$\begin{cases} F_x > 0 \text{ e } \vec{M} = 0 \Rightarrow V_{Cx} > 0 \Rightarrow F_{at} < 0 \\ F_x = 0 \text{ e } \vec{M} < 0 \Rightarrow V_{Cx} < 0 \Rightarrow F_{at} > 0 \end{cases} \quad (67)$$

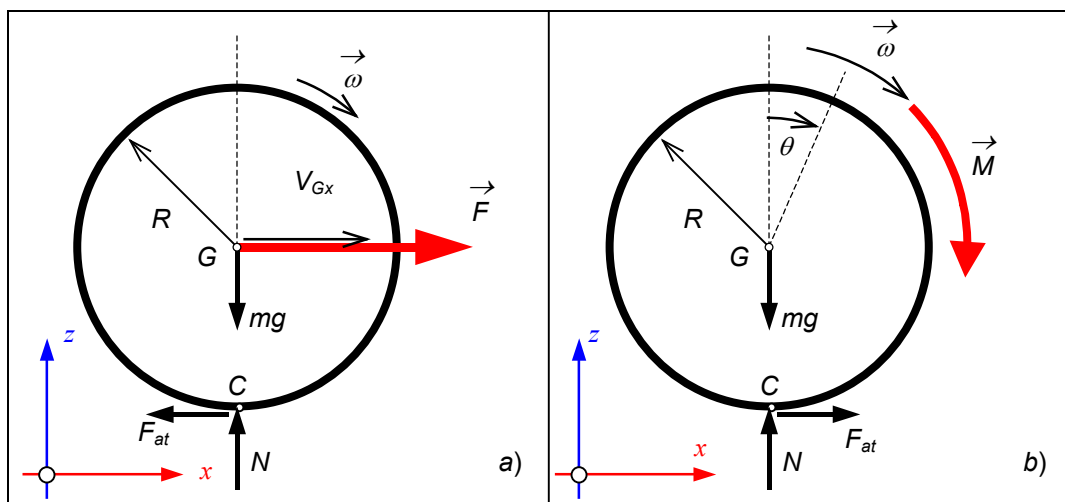


Figura 52 – Direção da Força de Atrito

Quando o corpo está submetido **simultaneamente** à força ativa externa ( $\vec{F}, G$ ) e o momento de binário  $\vec{M}$ , valem as seguintes relações:

$$\begin{cases} F_x > M/r \Rightarrow V_{Cx} > 0 \Rightarrow F_{at} < 0 \\ F_x < M/r \Rightarrow V_{Cx} < 0 \Rightarrow F_{at} > 0 \\ F_x = M/r \Rightarrow V_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{at} = 0 \end{cases} \quad (68)$$

Pode haver o caso em que uma única força seja aplicada no ponto  $D$ :  $(\vec{F}, D)$ , conforme ilustrado na Figura 53a. O sistema equivalente será  $(\vec{F}, G)$  e um binário  $\vec{M} = R \cdot F$ , conforme ilustrado na Figura 53b.

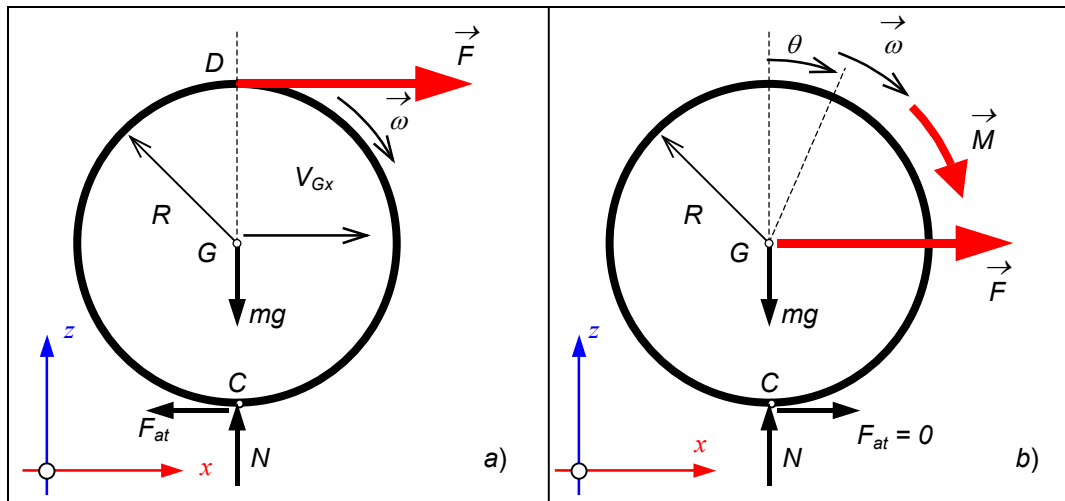


Figura 53 – Sistema Equivalente

Como para o sistema equivalente  $F_x = M / r \Rightarrow V_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{at} = 0$  ou seja, quando a força  $(\vec{F}, D)$  é aplicada em  $D$ , a translação e o rolamento ocorrem sem desenvolver força de atrito.

## 12. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- a) *França, L. N. F., Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, 3ª edição, São Paulo, p. 235.*
- b) *Boulos, P. Zagottis, D. L. (1991) Mecânica e Cálculo - um curso integrado. Editora Edgard Blucher. Vol.: 1, p. 267.*
- c) *Boulos, P. Camargo, I. (1997) Introdução à Geometria Analítica no Espaço. Editora Pearson Educacional. p. 239.*
- d) *Giacaglia, G. E. O. (1982) Mecânica Geral. Editora Campus. p. 375.*

## 13. Anexo A – Notação Vetorial

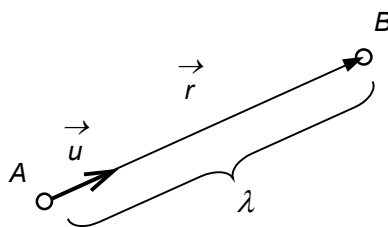
Existem grandezas físicas que tem intensidade e podem ser descritas por um único valor, por exemplo 70 kg de massa. Estas grandezas são denominadas grandezas **ESCALARES**. Por outro lado existem grandezas com **intensidade, direção e sentido**. Estas grandezas são denominadas grandezas **VETORIAIS**, como por exemplo uma força.

### 13.1. Vetor

Dois pontos  $A$  e  $B$  com posições definidas formam a reta  $(B - A)$  que tem direção e magnitude, conforme ilustrado na Figura 54. Tal reta constitui um vetor  $\vec{r}$  descrito como:

$$(B - A) = \vec{r} = +\lambda \cdot \vec{u} \quad (69)$$

onde  $\vec{u}$  é o vetor unitário (chamado de **versor**) que caracteriza a direção da reta  $(B - A)$ ,  $\lambda$  é a magnitude ou comprimento da reta e o sinal “+” caracteriza o sentido do vetor  $\vec{r}$ .



**Figura 54 – Pontos A e B formando um Vetor**

### 13.2. Reta

Uma reta  $\vec{r}$  é definida a partir de um ponto  $A$  com direção definida  $\vec{u}$ . Qualquer ponto  $B$  pertencente a esta reta é identificado pela seguinte equação:

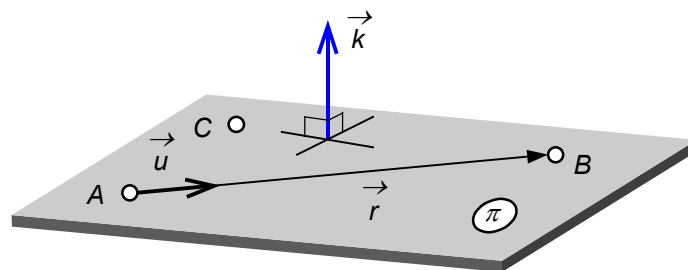
$$B = A + \lambda \cdot \vec{u} \quad (70)$$

onde  $\lambda$  é um escalar  $\in \Re$ , dado por  $\lambda = |\vec{r}|$  com magnitude ou módulo  $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  na direção unitária do versor  $\vec{u} = \vec{r}/|\vec{r}|$ .

### 13.3. Plano

Um plano  $\pi$  é definido por uma reta  $\vec{r}$  (dois pontos  $A$  e  $B$ ) e um ponto adicional ( $C$ ) conforme ilustrado na Figura 55. Tomando as duas retas concorrentes o plano  $\pi$  tem orientação definida pelo produto vetorial:

$$\rho \vec{k} = (B - A) \wedge (C - A) = \vec{r} \wedge \vec{v} \quad (71)$$



**Figura 55 – Descrição de um Plano**

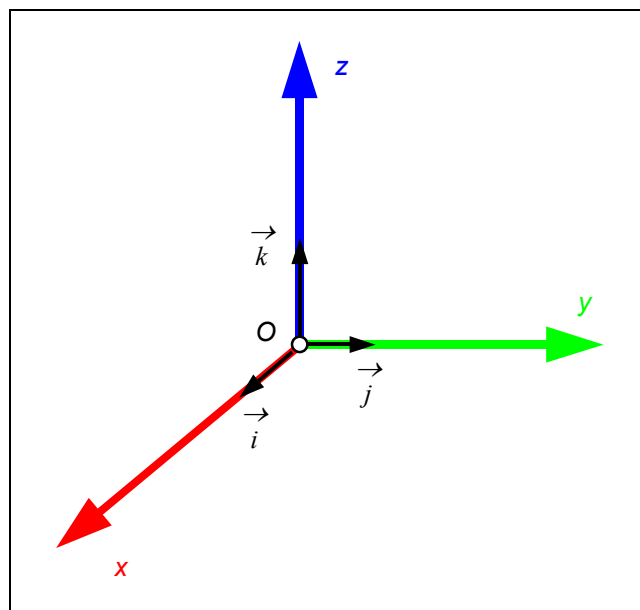
Por uma reta passam infinitos planos. Dois segmentos de retas podem ser:

- Concorrentes (formam um plano e se cruzam em ponto definido);

- Paralelos (formam um plano mas não se cruzam);
- Reversos (não formam um plano e não se cruzam).

### 13.4. Versores

Considere o sistema de coordenadas **Oxyz**, com eixos ortogonais independentes, ilustrado na Figura 56. A orientação de cada eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de coordenadas cartesiano é identificado por vetores unitários chamados de **VERSORES**. Utiliza-se a seguinte notação de versores unitários  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  conforme ilustrado na Figura 56.



**Figura 56 – Sistema de Coordenadas e Versores**

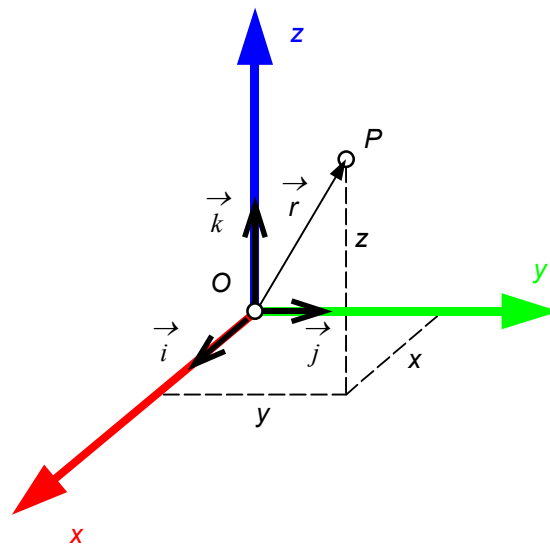
Vetores que representam no espaço  $\mathcal{R}^3$  podem ser:

- PARALELOS;
- CONCORRENTES;
- REVERSOS.

### 13.5. Representação Vetorial

A representação de um vetor está associado ao sistema de coordenadas adotado. Considere o sistema de coordenadas  $Oxyz$ , cartesiano no espaço  $\mathcal{R}^3$ , orientados segundo a base de versores unitários  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  independentes. O vetor  $\vec{r}$  que caracteriza a posição do ponto  $P$  no espaço  $\mathcal{R}^3$  é representado nesta base por três escalares  $(x, y, z)$  sendo respectivamente um em cada direção, conforme apresentado na Figura 57:

$$(P-O) = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (x, y, z) = \{x \ y \ z\}^T \quad (72)$$



**Figura 57 – Representação de Vetor**

outras formas de representação podem ser utilizadas. Por exemplo espessar o vetor na forma matricial (que considera implicitamente uma determinada base) ou em outra base:

$$(P-O) = (x, y, z)^T = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad (P-O) = \vec{r} = e_x \vec{E}_1 + e_y \vec{E}_2 + e_z \vec{E}_3 \quad (73)$$



O **MAGNITUDE** do vetor, que corresponde ao seu comprimento (ou módulo), é obtido por sua norma:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (74)$$

Note que o norma ou módulo do vetor  $\|\vec{r}\|$  é invariante e independe da base que o descreve.

Para o vetor  $(B - A)$  onde  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (B - A) = [(x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)] \\ |\vec{r}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \end{aligned} \quad (75)$$

### 13.6. Rotação de Base

Se o vetor posição  $\vec{r}$  for expresso em outra base, apenas suas componentes se alteram (o módulo permanece inalterado). Considerando por simplicidade apenas um movimento plano, na base  $Ee_1e_2$  e na base  $Oxy$  rotacionada do ângulo  $\theta$ . Pode-se expressar a posição do ponto  $P$  como:

$$\vec{r}_E = |\vec{r}|(\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) \Rightarrow (P - O)_{xy} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = |\vec{r}|(\cos(\phi - \theta)\vec{i} + \sin(\phi - \theta)\vec{j}) \quad (76)$$

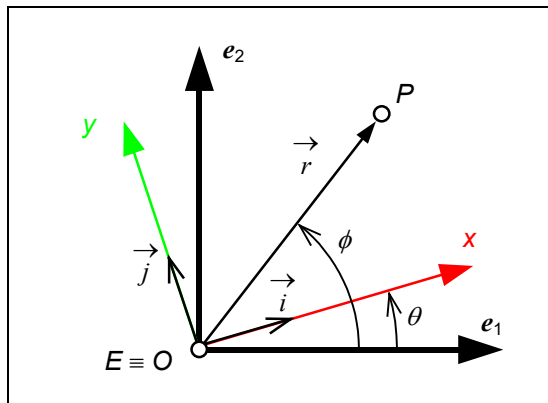


Figura 58 – Rotação de Base

Observe que as coordenadas em cada base são distintas para o mesmo vetor. Representa-se a conversão dos versores das bases na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Bmatrix} \quad (77)$$

### 13.7. Produto Escalar

Na geometria analítica o **PRODUTO ESCALAR** entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , é um escalar que corresponde a projeção de um vetor sobre o outro, conforme ilustrado na Figura 59a. Lembrando que o produto escalar de dois versores unitários ortogonais é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 & \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0 & \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{i} &= 0 & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1 & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{j} &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \end{aligned} \quad (78)$$

Portanto o produto escalar de dois vetores é obtido por:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = u_1 \vec{i} \cdot v_1 \vec{i} + u_1 \vec{i} \cdot v_2 \vec{j} + u_1 \vec{i} \cdot v_3 \vec{k} + \dots \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (79)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre os dois vetores.

### 13.8. Produto Vetorial

O **PRODUTO VETORIAL** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , nesta ordem, é o vetor único  $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathfrak{R}^3$  (Carmo, 1976) caracterizado por:

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \det(w, u, v) \quad (80)$$

para qualquer sistema de coordenadas unitário  $\vec{w} \in \mathfrak{R}^3$ . O determinante  $\det(w, u, v)$  significa que se expressa na base natural  $\{e_i\}$  no  $\mathfrak{R}^3$  onde:  $i = 1, 2$  e  $3$ .

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot e_i \quad ; \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \cdot e_i \quad \text{e} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot e_i \\ \det(w, u, v) &= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 \end{aligned} \quad (81)$$

onde:  $\vec{w} = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$  é uma base unitária:  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ .

#### Propriedades:

- a)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$  (produto vetorial ou cruzado);
- b)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$  (ordem dos termos afeta o produto);
- c)  $(a\vec{u} + b\vec{w}) \wedge \vec{v} = a\vec{u} \wedge \vec{v} + b\vec{w} \wedge \vec{v}$  (propriedade distributiva);
- d)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$  (somente se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem linearmente dependentes - alinhados);
- e)  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$  (pois  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) \wedge (\vec{v} \cdot \vec{u}) = 0$  pois são paralelos);

Decorre de e) que o produto vetorial não nulo é normal ao plano gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . O produto vetorial tem modulo idêntico à área do paralelogramo formado pelos dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e tem

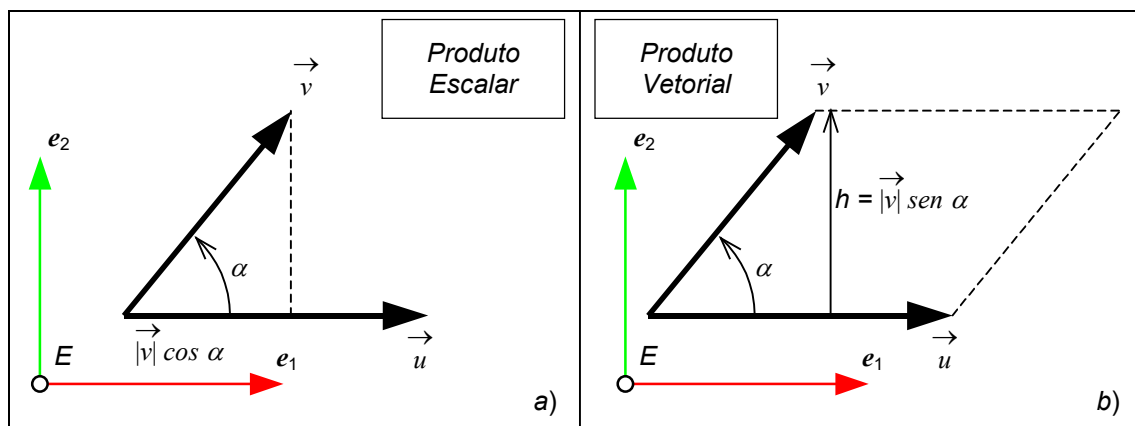
direção perpendicular ao plano formado por eles, conforme ilustrado na Figura 59b, sendo obtido na base  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  por:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (82)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha \quad (83)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre os dois vetores, conforme ilustrado na Figura 59b.



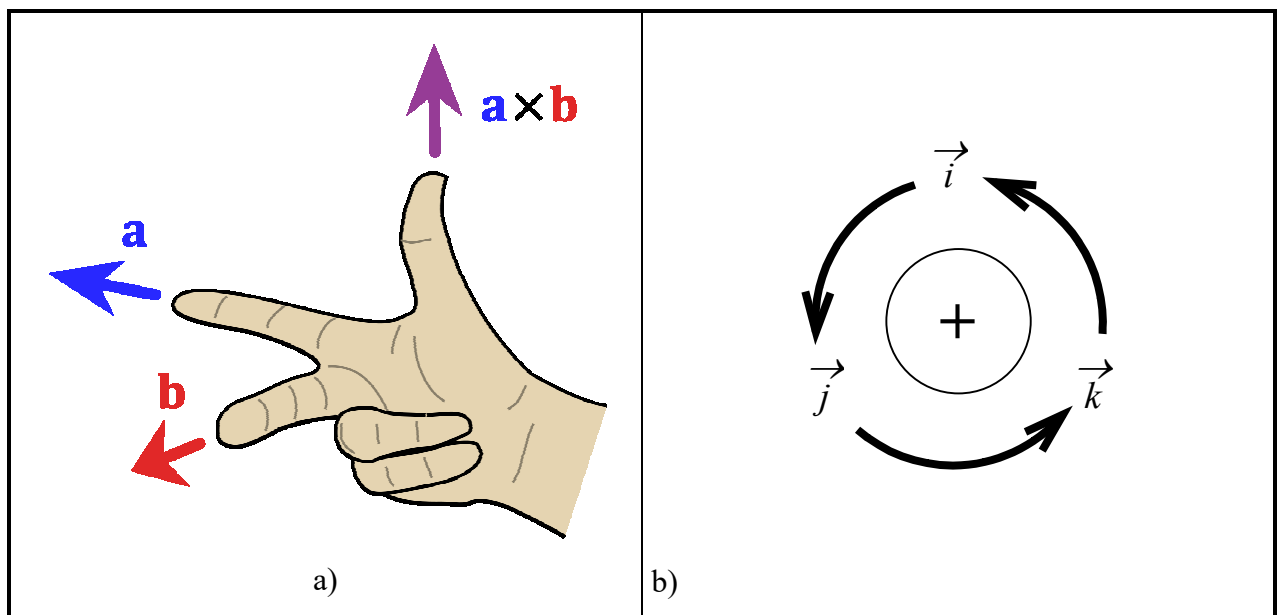
**Figura 59 – Produto Escalar e Vetorial**

Note que o Produto Escalar corresponde a magnitude da projeção do vetor  $\vec{v}$  sobre o versor unitário  $\vec{u}$  ( $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ ), conforme ilustrado na Figura 59a. O Produto Vetorial é um vetor de magnitude corresponde à área do paralelogramo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  ( $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$ ) que tem a direção ortogonal ao plano formado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , conforme ilustrado na Figura 59b.

Finalmente se os vetores:  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  e  $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$  variáveis no tempo, são diferenciáveis no intervalo  $(a, b)$  do  $\mathbb{R}^3$ , com  $t \in (a, b)$  decorre que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (84)$$

**REGRA DA MÃO DIREITA:** O produto vetorial pode ser apreciado no espaço e realizado de forma facilitada utilizando a regra da mão direita, conforme ilustrado na Figura 60.



**Figura 60 – Regra da Mão Direita**

Note que o produto vetorial é um vetor perpendicular ao plano formado pelos outros dois vetores, conforme ilustrado na Figura 60a. Deste forma tem-se que o produto vetorial dos versores ortogonais  $\vec{a} \wedge \vec{b} = ab\vec{k}$  (veja na Figura 60a) resultando o sentido anti-horário como positivo conforme ilustrado na Figura 60b. Utilizando novamente o determinante para os versores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  confirma-se que:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} - 0\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} = \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad (85)$$

O **PRODUTO MISTO** de três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  é um escalar que corresponde ao volume do paralelepípedo com área da base formada pelo produto vetorial (termos entre parêntesis) vezes a altura (produto escalar):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \quad (86)$$

A sequência dos vetores pode ser permutada e basta que dois vetores sejam alinhados (produto vetorial nulo) para que o produto misto seja nulo.

### DUPLO PRODUTO VETORIAL

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (87)$$

Note que o produto vetorial  $(\vec{b} \wedge \vec{c})$  será um vetor perpendicular ao plano formado por eles. Ou seja, não terá componentes na direção deste plano. Portanto o produto vetorial  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$  não terá componentes na direção de  $\vec{a}$ , conforme o lado direito da equação.

Na forma matricial:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \Rightarrow [\tilde{a}][\tilde{a}]\{c\} \quad (88)$$

onde  $[\tilde{a}]$  é a representação matricial anti-simétrica do vetor  $[a]$ .