

MECÂNICA II - PME 3200
NOTAS DE AULA - PARTE I

INTRODUÇÃO À MECÂNICA ANALÍTICA
Método de *Lagrange*

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

CONTEÚDO:

1	Introdução.....	3
2	Graus de Liberdade	3
3	Sistema de Coordenadas.....	4
4	Vínculos	6
4.1	Vínculos Holônomos.....	7
5	Graus de Liberdade de Sistema.....	8
6	Coordenadas Generalizadas	16
6.1	Quantidade de Movimento	20
6.2	Diferencial de uma Função	25
6.3	Deslocamento Virtual Generalizado	25
6.4	Trabalho Virtual	27
7	Método de Energia em Estática.....	28
7.1	Princípio do Trabalho Virtual	28
7.2	Princípio da Energia Potencial Mínima	30
7.3	Forças Vinculares.....	33
8	Força e Energia Potencial.....	34
9	Forças Generalizadas.....	36
10	Trabalho e Energia Cinética.....	38
11	Energia Cinética do Corpo Rígido	40
12	Quantidade de Movimento Generalizada.....	42
13	Equação de <i>Lagrange</i> para Partícula.....	43
14	Referencias Bibliográficas	47
15	Anexo A – Resumo de Derivadas Parciais.....	48
16	Anexo B - Diferenças Básicas entre os Métodos	49

ATENÇÃO: utilize sempre a última versão deste documento.

1 Introdução

A formulação para descrever o comportamento dinâmico de uma partícula foi proposta por *Newton* (*Principia*, 1687) e pode ser aplicada a um agregado de partículas (corpo rígido), considerando as forças vinculares internas que restringem os movimentos relativos entre elas. Utiliza-se de grandezas vetoriais como quantidade de movimento e força. Para um conjunto de partículas ou sistema de corpos rígidos interligados por vínculos, típico de sistemas mecânicos, a aplicação da formulação proposta por *Newton*, conhecida como “*Mecânica Vetorial*”, exige a explicitação das forças ativas e vinculares nem sempre de interesse.

Baseado no conceito de energia mecânica e considerando o sistema como um todo (movimentos de translação e rotação de múltiplos corpos), *Leibnitz* e *Lagrange* (1788) propuseram o que é conhecido como “*Mecânica Analítica*”. Utiliza-se de grandezas escalares fundamentais como a *Energia Cinética* e *Energia Potencial*. As restrições cinemáticas do movimento são levadas em conta, sem que seja necessário o cálculo das forças que as mantêm (utiliza o princípio dos trabalhos virtuais).

2 Graus de Liberdade

A posição ocupada no espaço *Euclidiano* E^3 por uma partícula P em movimento é perfeitamente descrita pelo terno de coordenadas cartesianas (ortogonais ou retangulares) x , y e z , expressas segundo os versores unitários $(\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k})$ do sistema de coordenadas $Oxyz$. Se o movimento é livre, as três coordenadas são funções independentes. Diz-se neste caso, que a partícula possui três “*Graus de Liberdade*”, cada um correspondendo a uma coordenada independente no E^3 . Em relação à origem O a posição da partícula P , expressa em coordenadas cartesianas é:

$$(P - O) = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

Também são chamadas de coordenadas ordinárias (x, y, z) que também pode ser apresentada na forma de matriz coluna: $[x \ y \ z]^T$.

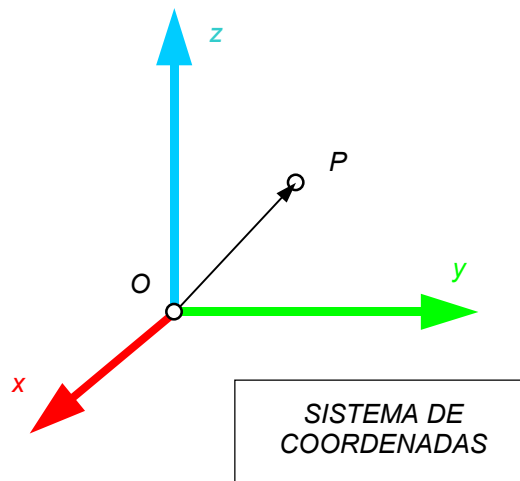


Figura 1 – Localização de uma Partícula P no Espaço E^3

3 Sistema de Coordenadas

Um **SISTEMA DE COORDENADAS** é uma *ênupla* de escalares (geralmente números reais) segundo direções específicas, necessários para especificar de forma unívoca, a posição de cada ponto no espaço n -dimensional. Geralmente tem uma origem e orientação.

O sistema de coordenadas cartesiano tri-ortogonal independente é a base tipicamente utilizada para descrever cada posição de pontos no espaço E^3 . Assim uma partícula P tem sua posição definida no espaço pelo vetor \vec{r} com as seguintes coordenadas na base ortogonal de eixos x, y, z , descrita pela orientação dos versores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$(P-O) = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2)$$

A mesma posição no espaço ocupada pelo ponto P pode ser descrita em outro sistema de coordenadas: ex. coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

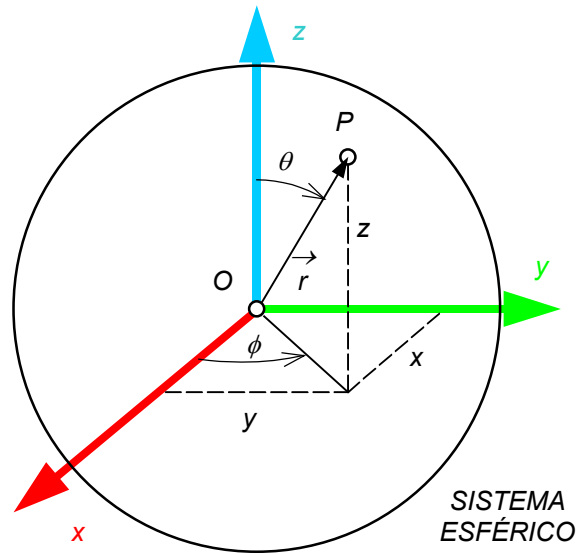


Figura 2 – Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ)

Há, portanto uma transformação de coordenadas T que correlaciona um mesmo ponto P do espaço, descrito por dois sistemas de coordenadas distintos (cartesiano $P(x, y, z)$ e esférico $P(r, \theta, \phi)$):

$$(x, y, z) = T(r, \theta, \phi) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = |\vec{r}| \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \phi \\ y = |\vec{r}| \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \phi \\ z = |\vec{r}| \cdot \cos \theta \end{array} \right. \quad (4)$$

4 Vínculos

Um vínculo é um dispositivo mecânico que restringe alguns dos movimentos de uma partícula ou corpo, com imposição de forçamentos. Esta restrição é feita por uma “**FORÇA DE REAÇÃO**” à intenção de movimento (mesma direção, mas sentido contrário). No caso da restrição de rotação de um corpo rígido, o vínculo reage com “**MOMENTO REATIVO**” na direção oposta correspondente. Assim como exemplo, uma partícula se movimentando sobre um plano (ver Figura 3) tem uma de suas coordenadas restrita a uma equação vincular Φ do tipo:

$$\Phi \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow F_\Phi = mg \quad (5)$$

onde a força vincular que sustenta este vínculo é: $F_\Phi = mg$. Há portanto, um grau de liberdade correspondente à coordenada z que foi restrita pelo **vínculo** Φ .

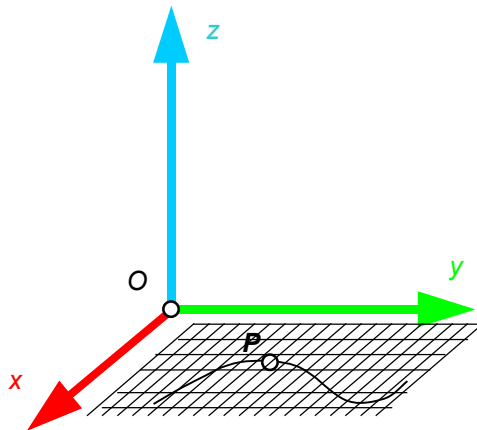


Figura 3 – Movimento no Plano xy

4.1 Vínculos Holônomos

Defini-se como vínculo **HOLÔNOMO** os vínculos geométricos ou os cinemáticos integráveis (França, 2011). Quando o vínculo pode ser descrito por relação geométrica ou uma equação diferencial exata, que pode ser integrada, o vínculo é denominado de holônomo.

$$\Phi_{\text{Geométrico}} \Rightarrow f(x, \theta, \text{etc.}) = 0 \quad e \quad \Phi_{\text{Cinemático}} \Rightarrow f(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \text{etc.}) = 0 \quad (6)$$

Exemplo vínculo geométrico: considere um pêndulo P de comprimento L que realiza movimento plano com ângulo de rotação θ em torno da articulação em O , conforme ilustrado na Figura 4a. Sendo $P = f(x, y)$ as coordenadas de seu centro de massa, a articulação em O cria um vínculo geométrico ao pêndulo (portanto **holônomo**) conforme:

$$\Phi \Rightarrow f(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (7)$$

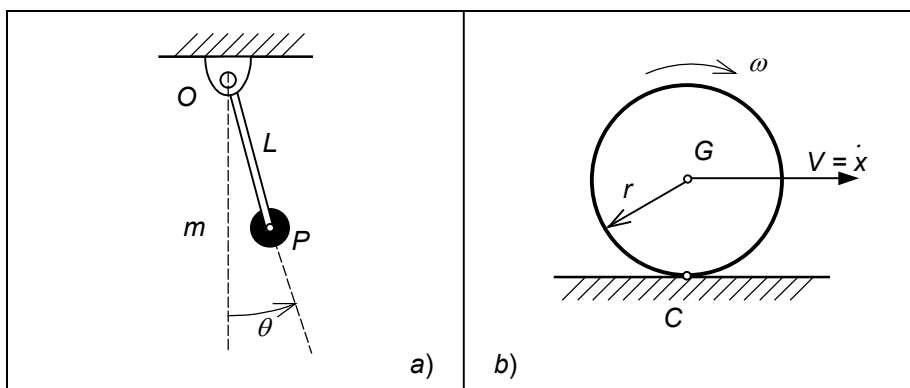


Figura 4 – Vínculo Geométrico e Cinemático

Exemplo de vínculo cinemático: considere um disco homogêneo de raio r que realiza movimento plano de rolamento sem escorregamento, com velocidade angular $\omega = \text{cte}$, sobre uma linha horizontal, conforme ilustrado na Figura 4b. Sendo $G = f(x, y)$ as coordenadas de seu centro de massa, o disco que rola sem escorregar em torno do ponto de contato C , está sujeito a um vínculo cinemático representado pela equação diferencial $\dot{x} = \omega r$, obtida da fórmula de campo de velocidades: $\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C)$.

$$\Phi \Rightarrow f(dC/dt) = 0 \Rightarrow \dot{x} - \omega r = 0 \quad (8)$$

A equação cinemática vincular $\dot{x} = \omega r$ é uma equação diferencial exata, que pode ser integrada, dando origem à equação algébrica $x = x_0 + \omega r t$. Portanto o vínculo em questão é **holônomo**.

Se uma das equações vinculares do sistema não for holônoma, o sistema é denominado **não-holônomo**. Para solucionar sistemas com vínculo não-holônomo, utiliza-se dos Multiplicadores de *Lagrange*. Este tipo de vínculo não será objeto deste texto.

5 Graus de Liberdade de Sistema

O número de graus de liberdade independentes de um sistema de “ n ” partículas é igual ao número de coordenadas que descreve a posição de cada partícula no espaço (Ex. E^3) menos o número “ m ” de equações vinculares:

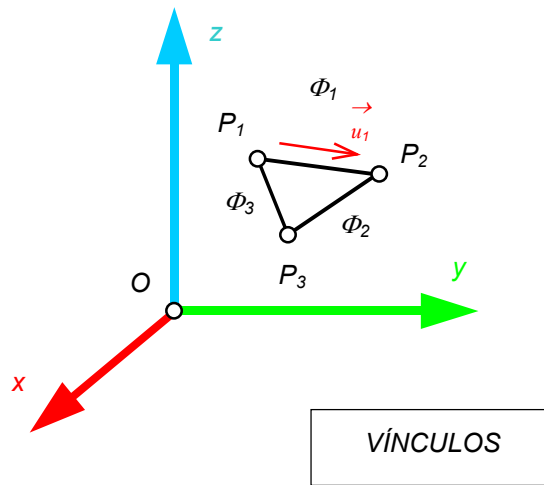
$$GL = 3n - m \quad (9)$$

onde n é o número de partículas cuja posição é descrita por três coordenadas no espaço e m é o número de equações de vínculos.

Exemplo: Sejam três partículas $[P_1(x_1, y_1, z_1); P_2(x_2, y_2, z_2); P_3(x_3, y_3, z_3)]$, conforme mostrado na figura, interligadas aos pares por barras rígidas, formando um corpo rígido triangular. A

configuração do sistema é dado pela localização das três partículas no E^3 , ou seja, nove coordenadas cartesianas. Cada barra mantém um vínculo $[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]$ entre as partículas, que pode ser descrito por uma equação vincular:

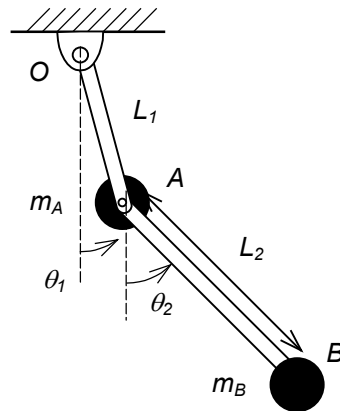
$$\Phi_1 \Rightarrow f(P_1, P_2, P_3) \Rightarrow (P_1 - P_2) = d_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(P_1 - P_2) \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad (10)$$



Portanto o sistema resulta com seis graus de liberdade independentes, típicos, portanto do movimento e atitude de um corpo rígido livre no espaço.

$$GL = (3 \cdot 3) - 3 = 6 \quad (11)$$

Exemplo: Um pêndulo duplo simples com movimento no plano é um exemplo interessante. Cada massa do pêndulo $[A; B]$ tem sua posição descrita no plano por duas coordenadas $[A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)]$.



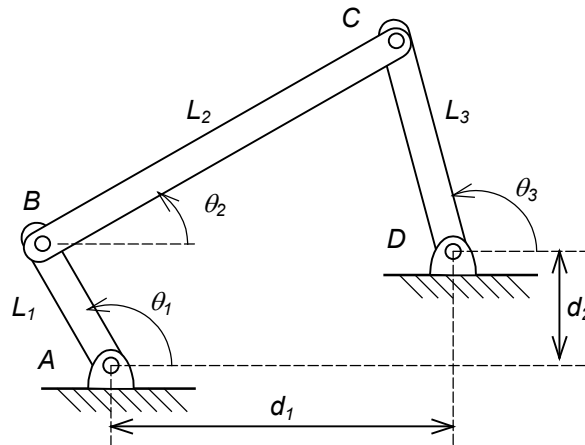
As equações de vínculo Φ_i , que impõem a trajetória de cada corpo, portanto vínculo geométrico (holônomo) são dadas por:

$$\begin{aligned}\Phi_A &\Rightarrow x_A^2 + y_A^2 - L_1^2 = 0 \\ \Phi_B &\Rightarrow x_B^2 + y_B^2 - L_2^2 = 0\end{aligned}\quad (12)$$

Utilizando a fórmula de graus de liberdade independentes, resulta, portanto em 2 graus de liberdade em θ_1 e θ_2 :

$$GL = (2 \cdot 2) - 2 = 2 \quad (13)$$

Outro exemplo é o mecanismo em cadeia fechada. Os sistemas mecânicos formados por vários corpos rígidos interligados sucessivamente sendo que, o último se interliga ao primeiro, forma uma cadeia fechada. Cada barra rígida de comprimento definido (L_1, L_2, L_3), conforme mostrado na figura a baixo, tem sua atitude descrita por um ângulo variável ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). (Note que as posições angular são dependentes umas das outras).



As equações de vínculo Φ_1 que restringem o movimento em cadeia fechada são duas e dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\Rightarrow L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - d_1 = 0 \\ \Phi_2 &\Rightarrow L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 - d_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Utilizando a fórmula de graus de liberdade independentes resulta, portanto em apenas um grau de liberdade angular:

$$GL = (1 \cdot 3) - 2 = 1 \quad (15)$$

ou seja, o movimento angular de uma das barras, afeta todos as outras na proporção ditadas pelas equações vinculares.

Exemplo: O movimento de um corpo rígido no plano Oxy , conforme mostrado na Figura 5, possui 3 Graus de Liberdade (r_x , r_y e θ). A localização dos pontos P e Q são fornecidas pelos vetores \vec{r} e \vec{q} no plano (quatro escalares):

$$\begin{aligned} (P-O) = \vec{r} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \\ (Q-O) = \vec{q} &= q_x \vec{i} + q_y \vec{j} \end{aligned} \quad (16)$$

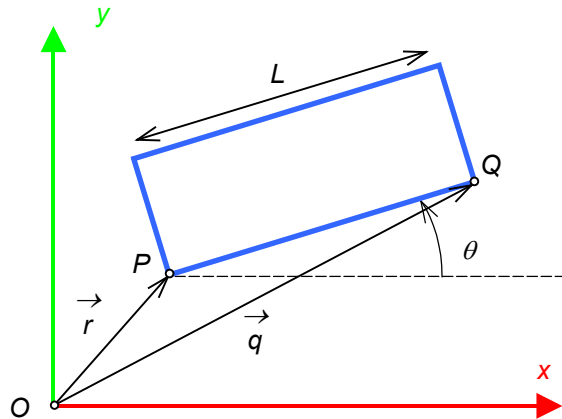


Figura 5 – Movimento no Plano

Entretanto há uma relação entre os quatro escalar que constitui o vínculo Φ que reduz um grau de liberdade:

$$\Phi = f_{\Phi}(r_x, r_y, q_x \text{ e } q_y) \quad \Rightarrow \quad \theta = a \tan \frac{(q_y - r_y)}{(q_x - r_x)} \quad (17)$$

Portanto o número mínimo de Graus de Liberdade independentes que descreve a posição e atitude do corpo no plano é:

$$GL = 4 - 1 = 3 \quad (18)$$

Considere a partícula $P(x, y, z)$ confinada, devido a ação vincular, a se movimentar sobre uma esfera de raio R conforme mostrado na Figura 6. Neste caso as três coordenadas que descrevem a posição da partícula P no espaço $(Oxyz)$ com origem em O , não são mais independentes, pois estão vinculadas pela condição vincular geométrica Φ (vínculo holônomo):

$$\Phi \quad \Rightarrow \quad (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 - r^2 = 0 \quad (19)$$

Note que a definição da condição vincular no sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) é muito mais simples do que no sistema cartesiano:

$$\Phi \Rightarrow r - R = 0 \quad (20)$$

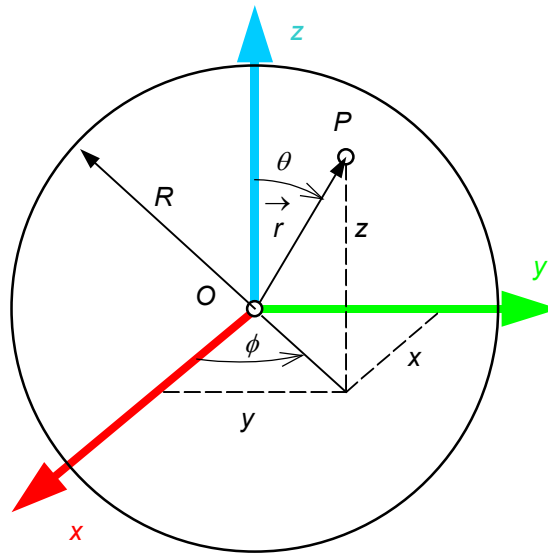


Figura 6 – Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ)

Há, portanto três coordenadas no espaço (seja cartesiano ou esférico) e uma condição vincular Φ , resultando em um sistema com apenas dois GRAUS DE LIBERDADE:

$$GL = 3 - 1 = 2 \quad (21)$$

Note ainda que a equação do vínculo geométrico envolve apenas variáveis que descrevem a configuração do sistema (x, y, z) ou (r, θ, ϕ) , portanto o vínculo em questão é geométrico e classificado como **holônomo**.

Exemplo: Considere o movimento plano de dois blocos A e B de massas m_A e m_B apoiados sem atrito sobre superfícies inclinadas PQ e QR e interligados por um fio ideal, conforme ilustrado na Figura 7. Determinar a relação entre os ângulos θ e ϕ de inclinação das superfícies para que o sistema se mantenha em equilíbrio utilizando o *PTV*.

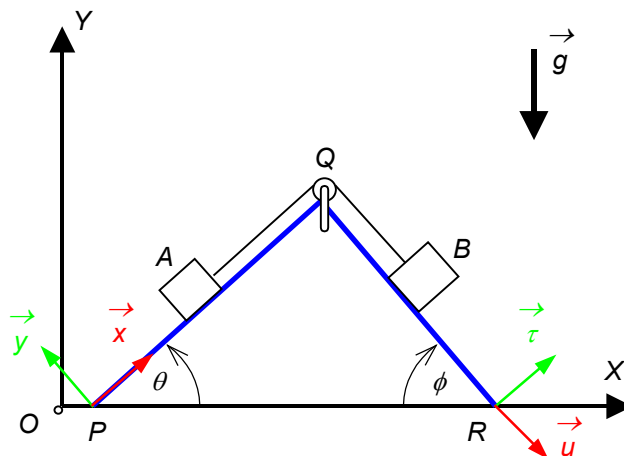


Figura 7 – Movimento no Plano

Resolução: a) Sistema: blocos A e B com massas m_A e m_B ; b) **DFCL**: Pesos $P_A = -m_A \cdot g \vec{J}$ e $P_B = -m_B \cdot g \vec{J}$; c) Graus de liberdade e vínculos: Para o problema plano, resulta em dois vínculos: $z_A = 0$ e $z_B = 0$. O bloco A se apóia sobre a reta PQ e o bloco B sobre a reta QR . Dessa forma, intervêm os vínculos unilaterais (não-holônomos) tal que $A_\tau \vec{\tau} \geq 0$ e $B_u \vec{u} \geq 0$. Considerando-se que não existem forças agentes no sistema capazes de provocar a perda de contato dos blocos com o prisma, devem-se considerar mais dois vínculos holônomos portanto $A_\tau \vec{\tau} = 0$ e $B_u \vec{u} = 0$. O cabo ideal que liga os dois blocos é inextensível, o que se expressa como: $(Q - A) + (B - Q) = L = cte$ é um vínculo de ligação entre os corpos. Sabemos que nos problemas planos (x, y, θ) o número de graus de liberdade $GL = (3 \times P) - m$; onde P é o número de corpos e m o número de restrições vinculares. Como as restrições impostas pelos vínculos indicados acima totalizam cinco, tem-se que: $GL = (3 \times 2) - 5 = 1$. Portanto este sistema possui 1 grau de liberdade.

O trabalho virtual é dado por:

$$\delta W = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + M \cdot \delta \theta = 0$$

Considerando que não há atrito e o deslocamento ocorre apenas na direção paralela ao plano haverá trabalho apenas devido a ação gravitacional. Assim, para cada bloco tem-se:

$$\delta W_A = m_A \vec{g} \cdot \delta \vec{A} = -m_A g \vec{J} \cdot \delta A_x \vec{i} \quad \text{e} \quad \delta W_B = m_B \vec{g} \cdot \delta \vec{B} = -m_B g \vec{J} \cdot \delta B \vec{u}$$

$$\vec{J} = \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i} = \cos \phi \vec{\tau} - \sin \phi \vec{u}$$

Substituindo: e

Para o fio inextensível vale: $\delta A_x = \delta B_u$

6 Coordenadas Generalizadas

A configuração de um sistema formado por N partículas pode ser expresso num determinado instante t no E^3 , por $3N$ escalares. Seja no sistema cartesiano (x, y, z) ou no sistema esférico (r, θ, ϕ) haverá sempre uma transformação T biunívoca de domínio.

$$(x, y, z) = T(r, \theta, \phi) \quad (22)$$

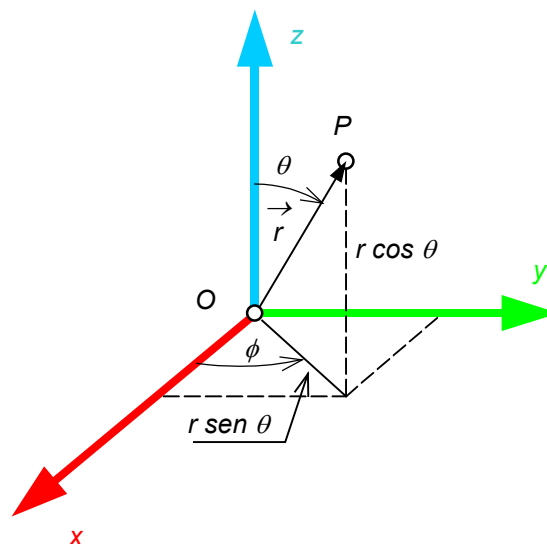
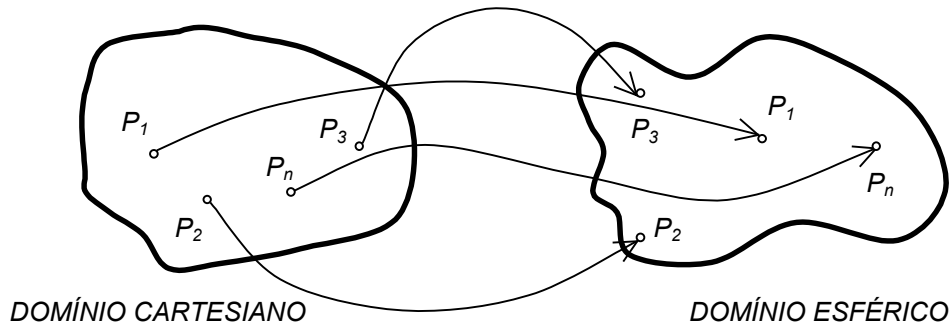


Figura 8 – Transformação de Coordenadas

Note que o sistema de coordenadas **cartesianas** (ordinárias) se utiliza grandezas de mesma unidade (apenas distâncias) ao passo que o sistema de coordenadas **esféricas** mistura grandezas de diferentes unidades (distâncias e ângulos de rotação). Um conjunto de coordenadas mistas utilizado para representar a configuração do sistema de partículas é chamado de **COORDENADAS GENERALIZADAS**. Um conjunto de coordenada (domínio) tem sua correlação com outro sistema de coordenadas, segundo expressões de mudança de domínio. Exemplo de expressões de mudança do domínio cartesiano para o domínio esférico dos pontos P_i são:

$$\begin{cases} x_i = |\vec{r}_i| \cdot \text{sen } \theta_i \cdot \cos \phi_i \\ y_i = |\vec{r}_i| \cdot \text{sen } \theta_i \cdot \text{sen } \phi_i \\ z_i = |\vec{r}_i| \cdot \cos \theta_i \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (23)$$



Em muitos casos a análise de sistemas mecânicos fica simplificada pela escolha apropriada do sistema de coordenadas. As funções de transformação de um conjunto de $3N$ COORDENADAS ORDINÁRIAS $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N})$ para um conjunto de COORDENADAS GENERALIZADAS INDEPENDENTES $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n)$ têm a forma geral:

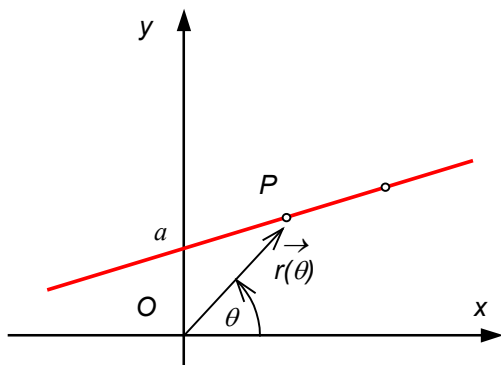
$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t); \\ x_2 &= f_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t); \\ x_3 &= f_3(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t); \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_{3N} &= f_{3N}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (24)$$

Associado a cada sistema de coordenadas existe um conjunto de restrições vinculares. Se este conjunto de coordenadas for **mínimo e independente**, o número de **Graus de Liberdade** será sempre o mesmo. Então para um conjunto de k coordenadas ordinárias e l vínculos haverá um conjunto de n coordenadas generalizadas e m vínculos, tal que:

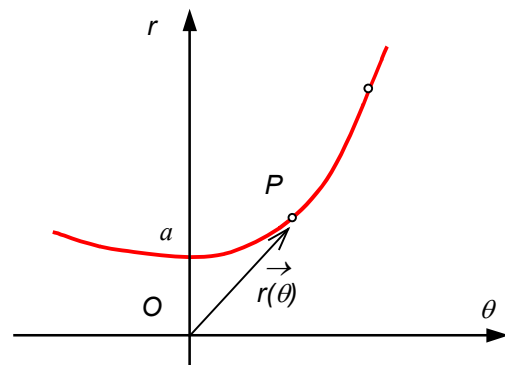
$$(k - l) = (n - m) = GL \quad (25)$$

Exemplos de mudança de domínio: No plano cartesiano Oxy , um conjunto de pontos ao longo de uma reta tem suas posições descritas por uma equação do tipo $y = f(x) = a + bx$.

No sistema de coordenadas polar (r, θ) o mesmo conjunto de pontos (reta) é descrito por $\vec{r}(\theta) = |\vec{r}|(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$.



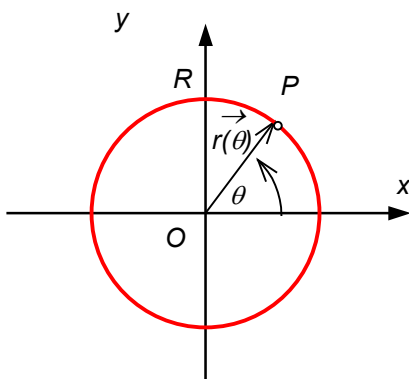
DOMÍNIO CARTESIANO



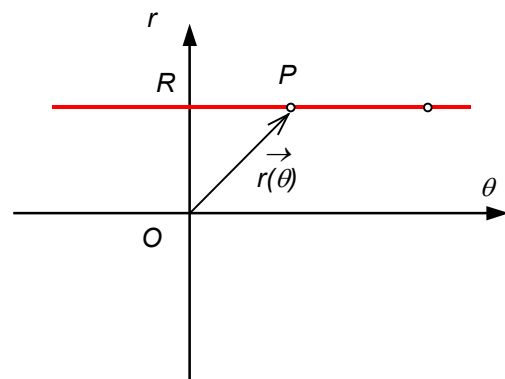
DOMÍNIO POLAR

Portanto a mudança de domínio de representação “*curvou*” o espaço descrito no domínio anterior.

Pergunta: Existe um sistema de coordenadas capaz de representar pontos de um círculo no plano cujas coordenadas são independentes?



DOMÍNIO CARTESIANO



DOMÍNIO POLAR

No sistema de coordenadas cartesiano (Oxy) a posição de cada ponto P de um círculo é descrito por: $x_p^2 + y_p^2 = R^2$.

Utilizando um sistema de coordenadas polar (r, θ) verifica-se que $r = R$ para qualquer θ , portanto independentes. Note ainda que $\partial \vec{r} / \partial \theta$ é tangente ao círculo (no domínio cartesiano) e $d/dt(\partial \vec{r} / \partial \theta) = cte$.

6.1 Quantidade de Movimento

Na mecânica analítica as equações de movimento são obtidas a partir da variação temporal da **Quantidade de Movimento Generalizada** $(\partial T / \partial \dot{q})$. Para tanto vamos determinar a **Energia Cinética** T de um corpo rígido de massa m em movimento plano Oxy , com velocidade \vec{V}_G conforme ilustrado na Figura 9.

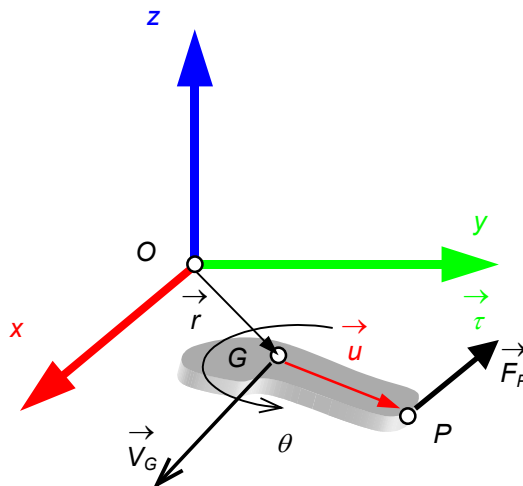


Figura 9 – Corpo em Movimento Plano

RESOLUÇÃO: Sistema: corpo rígido massa m ; DVCL: V_G , Sistema de Coordenadas $Oxyz$, fixo, conforme ilustrado na Figura 9. Teoremas: **Energia Cinética:**

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + m \vec{V}_G \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2} [\omega]^T [J]_o [\omega] \quad (26)$$

Derivando a posição do ponto G (note que os versores da base são fixos), obtêm-se a velocidade em coordenadas ordinárias:

$$(G - O) = \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \Rightarrow \frac{d}{dt} (G - O) = \vec{V}_G - \vec{V}_O = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \quad (27)$$

Graus de liberdade de um corpo livre com 3 restrições descritas por equações vinculares ($\Phi_1 \Rightarrow z=0$; $\Phi_2 \Rightarrow \phi=0$; $\Phi_3 \Rightarrow \psi=0$): $GL=(6 \times 1)-3=3$

Utilizando de coordenadas mistas (dois deslocamento e um ângulo) obtêm-se as seguintes coordenadas generalizadas: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \theta$

Utilizando a fórmula da **Energia Cinética** para um corpo rígido de massa m , considerando o pólo G :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \bar{\omega}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\theta}^2 \quad (28)$$

Fazendo a derivada parcial de T em relação à coordenada generalizada $q_1 = x$, obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x} = p_x \quad (29)$$

Para as demais direções generalizadas: $q_2 = y$ e $q_3 = \theta$, obtêm-se de maneira similar:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \cdot \dot{y} = p_y \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{Gz} \dot{\theta} = p_\theta = H_\theta \quad (30)$$

Obtendo as **Quantidades de Movimento Generalizadas**:

$$\boxed{p_{q_1} = p_x \quad ; \quad p_{q_2} = p_y \quad ; \quad p_{q_3} = H_\theta} \quad (31)$$

Realizando a derivada temporal da Quantidade de Movimento Generalizada na direção $q_1 = x$, considerando a massa constante, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} p_x = \frac{d}{dt} m \cdot \dot{x} + m \cdot \frac{d}{dt} \dot{x} = m \frac{d}{dt} \dot{x} = m a_x \quad (32)$$

Portanto a derivada temporal, da derivada parcial da **Energia Cinética Generalizada**, em relação a velocidade generalizada $\partial T / \partial \dot{q}$, tem unidade de força, neste caso será denominada de

Força Externa Generalizada Q_x , aplicada à partícula. Chamando $L = (T - V)$ de função *Lagrangeana*, que será detalhada mais à frente, esta expressão é conhecida como equação de *Lagrange*, ou de forma mais geral:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i} \quad (33)$$

Note que a força ordinária (\vec{F}_P, P), ilustrada na Figura 9, possui um sistema equivalente: ($\vec{F}_G, G + \vec{M}$) e utilizando o princípio dos Trabalhos Virtuais pode-se determinar as forças generalizadas Q_i , que será apresentado mais adiante.

Exemplo: Determinar a **Quantidade de Movimento Generalizada** da partícula P de massa m em movimento livre no espaço. **Resolução:** Sistema: partícula de massa m . DVCL: ; Sistema de coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ) ; **Teoremas:** Energia cinética da partícula.

Utilizando o sistema de Coordenadas Generalizadas (q_1, q_2, q_3) correspondente às coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , que se utiliza de coordenadas mistas (um deslocamento e dois ângulos) e fazendo $q_1 = r$; $q_2 = \theta$, e $q_3 = \phi$ a posição ordinária do ponto P resulta em :

$$\begin{aligned} (P-O) &= \vec{r} = r\vec{u} \\ \vec{u} &= (\sin \theta \cos \phi)\vec{i} + (\sin \theta \sin \phi)\vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{V}_P &= \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}} \end{aligned} \quad (34)$$

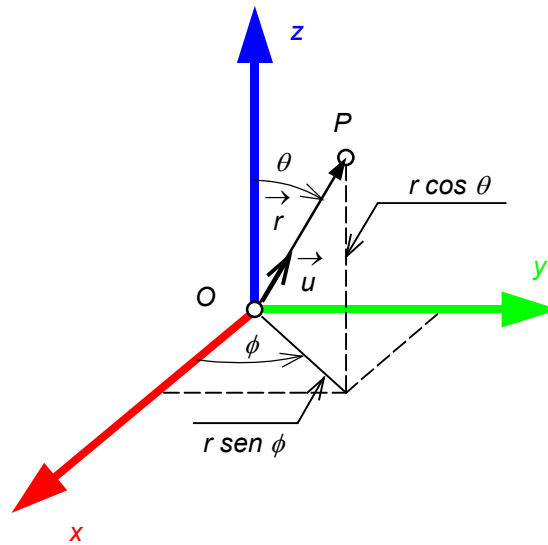


Figura 10 – Coordenadas Cilíndricas

Alternativamente a velocidade pode ser calculada utilizando diretamente as coordenadas ordinárias produzindo:

$$\begin{aligned}
 (P-O) &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \vec{i} + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k} \\
 \vec{V} &= (\dot{r} \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \dot{\phi}) \vec{i} \\
 &\quad + (\dot{r} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \operatorname{sen} \phi + r \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi) \vec{j} \\
 &\quad + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta) \vec{k}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Calculando a Energia Cinética T da partícula, obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2)
 \tag{36}$$

Cada parcela da **QUANTIDADE DE MOVIMENTO GENERALIZADA** em relação a cada coordenada generalizada (q_1, q_2, q_3) isoladamente resulta em:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2} m (2\dot{r}) = m\dot{r} = p_r \quad (37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m (r^2 2\dot{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} = J_\theta \dot{\theta} = \vec{H}_\theta \quad (38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} m (r^2 \sin^2 \theta 2\dot{\phi}) = m (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi} = J_z \dot{\phi} = \vec{H}_z \quad (39)$$

O primeiro resultado é a quantidade de movimento p_r associado com a coordenada generalizada r , o segundo resultado é a quantidade de movimento angular \vec{H}_θ para o movimento angular em torno de θ e o terceiro resultado é a quantidade de movimento angular \vec{H}_z em torno do eixo z . Verifica-se portanto que a descrição do movimento em outro sistema de coordenadas permite identificar propriedades específicas de interesse, neste caso a quantidade de movimento angular ordinária. Finalmente identifica-se para um sistema descrito em coordenadas generalizadas a **QUANTIDADE DE MOVIMENTO GENERALIZADA** como:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = p_i \quad (40)$$

(Obs: os termos cruzados irão surgir de $\partial L / \partial q_i$ na equação de **Lagrange**)

6.2 Diferencial de uma Função

Seja uma função $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \text{cte}$. A forma diferencial desta função pode ser obtida pela aplicação da regra da cadeia:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad (41)$$

que corresponde a inclinação da função f na direção q_i ($\delta f / \delta q_i$), multiplicada pelo deslocamento elementar dq_i na mesma direção. Expressando na forma compacta, obtêm-se:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (42)$$

6.3 Deslocamento Virtual Generalizado

Um deslocamento virtual de um sistema é uma mudança na sua configuração que resulta em uma variação arbitrária das suas coordenadas, consistente com os seus vínculos, em um dado instante t . Um deslocamento virtual é infinitesimal e se processa de maneira independente do tempo, mantendo as forças aplicadas e as configurações dos vínculos inalteradas.

Para um sistema de N partículas, cuja configuração é expressa pelas coordenadas cartesianas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{3N}$, um conjunto de deslocamentos virtuais será indicado por $\delta \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{x}_2, \dots, \delta \mathbf{x}_{3N}$.

Relembrando que as coordenadas ordinárias se relacionam com as coordenadas generalizadas de acordo com as funções:

$$x_j = f_j(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n, t) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (43)$$

O deslocamento elementar expresso nas coordenadas ordinárias podem ser relacionadas às coordenadas generalizadas através da seguinte expressão:

$$d x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} d q_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} d t \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (44)$$

Então o deslocamento virtual expresso nas coordenadas ordinárias também podem ser relacionado ao deslocamento virtual expresso nas coordenadas generalizadas como:

$$\boxed{\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 3N \quad (45)$$

onde $(\partial x_j / \partial t) = 0$

6.4 Trabalho Virtual

O trabalho realizado pelas forças F_1, F_2, \dots, F_{3N} , durante os deslocamentos virtuais $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N}$ ordinários é dado por:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j \quad \Rightarrow \quad \delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j \quad (46)$$

Utilizando a expressão do deslocamento virtual generalizado, deduzida anteriormente, obtêm-se:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} \left(\sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i \quad (47)$$

Como o trabalho virtual não depende do sistema de coordenadas utilizado, a parcela entre parênteses receberá o nome especial de força generalizada:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (48)$$

Como o trabalho virtual é sempre nulo, independente do sistema de coordenadas utilizado para expressá-los, obtêm-se por similaridade:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j} \quad (49)$$

7 Método de Energia em Estática

Métodos de energia podem ser aplicados na análise da estática dos sistemas mecânicos utilizando o PTV e o conceito de energia potencial mínima. A energia total (E) de um sistema mecânico é a soma da energia associada ao movimento: **Energia Cinética** (T) e a energia associada com forças elásticas ou de campo, chamada de: **Energia Potencial** (V). Portanto tem-se a energia total como a soma: $E = T + V$. A variação da energia mecânica (ΔE) é produzida pelo trabalho realizado (W) por forças ativas. As forças podem ser conservativas, decorrentes de função potencial ($W = -\Delta V$) ou não conservativas (W_{nc}).

7.1 Princípio do Trabalho Virtual

Considere uma barra articulada em equilíbrio estático, mostrada na Figura 11. A partir do PTV, pode-se determinar a posição de equilíbrio estático, calculando o trabalho virtual realizado durante uma deflexão infinitesimal. Nesse caso, a barra uniforme e homogênea de massa m , pode girar do ângulo θ em torno da articulação em A , devido a restrição vincular, sendo suportada por uma mola de rigidez k na extremidade B . Determinar a força na mola para a posição de equilíbrio.

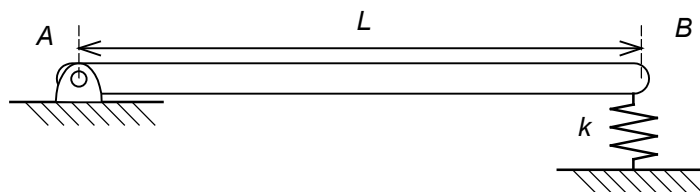


Figura 11 – Barra Articulada

Utilizando o PTV e o diagrama de forças sobre o corpo livre, descritos como:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta x_i = 0 \tag{50}$$

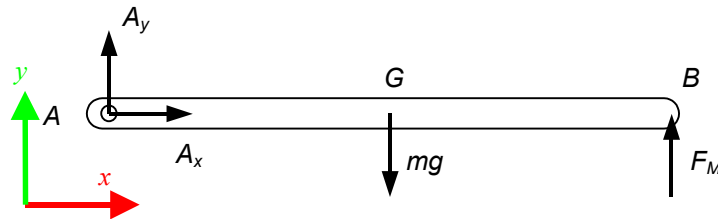


Figura 12 – Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre

O diagrama de forças sobre o corpo livre mostrado na Figura 12, exibe as forças na articulação *A* (componentes A_x e A_y expressas no sistema de coordenadas Oxy) e as força externas do peso mg devido a ação do campo gravitacional g , aplicado no centro de massa G e a força de mola F_M , aplicada na extremidade B .

Os deslocamentos virtuais podem ser obtidos do diagrama de velocidades do corpo livre (*DVCL*) que mostra que a articulação *A* tem velocidade nula. Utilizando a fórmula de campo de velocidades expressa no sistema de coordenadas Oxy , pode-se expressar as velocidades na extremidade B e do ponto médio G coincidente com o centro de massa, a partir do ponto *A* fixo, conforme apresentado na Figura 13.

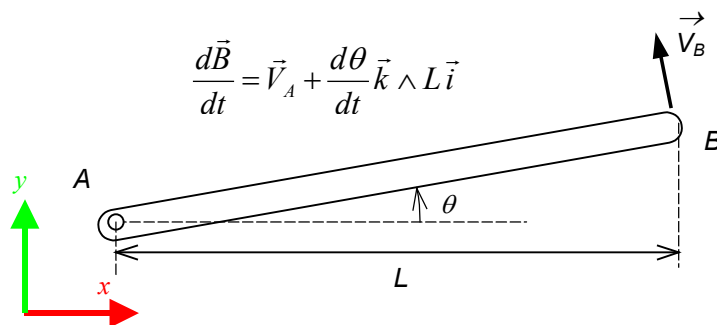


Figura 13 – Diagrama de Velocidades do Corpo

Deste diagrama fica nítido que para um deslocamento angular $d\theta$ infinitesimal (ou $\delta\theta$ virtual) do corpo, pode-se obter o deslocamento virtual para cada ponto de interesse:

$$\delta A = 0 \quad ; \quad \delta B_y = L \cdot \delta\theta \quad \text{e} \quad \delta G_y = L \cdot \delta\theta / 2 \quad (51)$$

Para a posição de equilíbrio estático horizontal e assumindo um deslocamento angular virtual $\delta\theta$, que não altera a configuração do sistema, o **PTV** afirma que: no equilíbrio estático, o trabalho virtual realizado por todas as forças para os deslocamentos virtuais correspondentes é nulo:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{R}_A \cdot \delta \vec{A} + \vec{F}_M \cdot \delta \vec{B} + m\vec{g} \cdot \delta \vec{G} = 0 \quad (52)$$

Utilizando os deslocamento virtuais expressos em $\delta\theta$, obtidos anteriormente:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{R}_A \cdot \delta \vec{A} + \vec{F}_M \cdot \delta \vec{B} + m\vec{g} \cdot \delta \vec{G} = 0 \\ \delta W &= 0 + F_{My} \cdot L \delta\theta - mg \cdot (L/2) \delta\theta = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Identificando finalmente a força da mola para a posição de equilíbrio \bar{y} :

$$F_{My} = \frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{y} = -\frac{mg}{2k}} \quad (54)$$

7.2 Princípio da Energia Potencial Mínima

Outro conceito relacionado à análise de estruturas elásticas é a possibilidade de avaliar a energia potencial total do sistema, incluindo energia de deformação armazenada em elementos estruturais devido à energia de deformação elástica e a cargas gravitacionais (Funções Potenciais). Isso pode ser ilustrado considerando-se uma massa sustentada por uma mola, conforme mostra na Figura 14, permitindo a determinação da posição de equilíbrio:

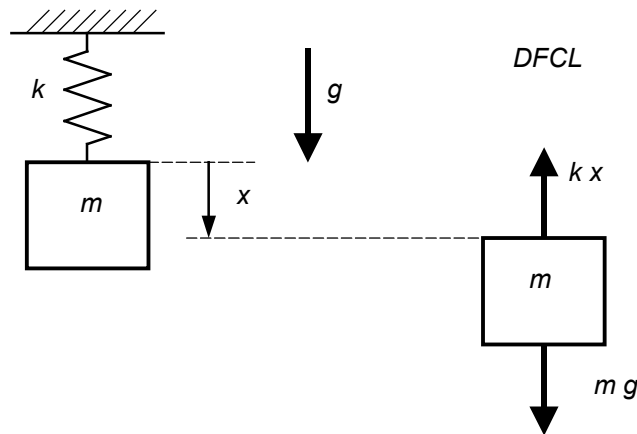


Figura 14 – Sistema massa mola

Conforme mostrado no diagrama de força sobre o corpo livre (na Figura 14 à direita) a origem é considerada na posição em que a força da mola é nula e a deflexão x é positiva para baixo. A **ENERGIA POTENCIAL TOTAL** do sistema para uma deflexão positiva da massa pode ser expressa pela integral do trabalho de todas as forças realizado ao longo do deslocamento dx como:

$$\begin{aligned}
 V &= -\sum_{i=1}^n \int \vec{F}_i \cdot dx = -\int_0^x (mg - kx) dx \\
 -\int_0^x (mg - kx) dx &= -mg \int_0^x dx + k \int_0^x x dx = -mgx + \frac{1}{2} k x^2 \quad (55) \\
 V &= -mgx + \frac{1}{2} k x^2
 \end{aligned}$$

O princípio da **ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA** afirma que "*De todos os estados que satisfazem as condições de contorno (restrições), o estado correto é aquele que torna a energia potencial total mínima*". O ponto de mínimo da função potencial $V(x)$ pode ser identificado matematicamente pela variação da função em relação a coordenada x , igualada a zero:

$$\frac{d}{dx} V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} V = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} k x^2 - mgx \right) = kx - mg \quad (56)$$

Portanto, a partir do conhecimento da energia potencial total do sistema e da aplicação desse princípio, pode-se obter diretamente a equação de equilíbrio estático e a deflexão x , em função da carga aplicada mg .

$$\frac{dV}{dx} = kx - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{mg}{k}} \quad (57)$$

Existe uma relação conceitual muito útil entre o **PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL** e o **PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA**. Se imaginarmos uma pequena deflexão virtual do sistema sobre sua posição de equilíbrio estático, pode-se modificar as equações obtidas acima para definir a variação da ENERGIA POTENCIAL em termos do TRABALHO VIRTUAL, que resulta de um pequeno deslocamento virtual δx , como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \delta V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \cdot \delta x = (kx - mg) \cdot \delta x = 0 \\ \delta V &= \delta W \end{aligned} \quad (58)$$

As duas expressões no lado esquerdo representam a **VARIAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL**, enquanto a expressão no lado direito mostra o **TRABALHO VIRTUAL**. Ambos são iguais a zero, porque esta é uma pequena variação sobre uma posição de equilíbrio estático para um sistema com apenas forças conservativas.

Lembrando que: $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i$ tem unidade de forçamento, o termo $\partial V / \partial q_i$ da equação anterior também tem unidade de forçamento e vai aparecer nas equações de *Lagrange* definidas adiante neste texto.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0} \quad (59)$$

7.3 Forças Vinculares

Sistemas vinculados são aqueles submetidos a restrições de movimento. Estas restrições são realizadas pela aplicação de forças. Este tipo de força é chamado de força vincular. Para uma ampla classe de sistemas mecânicos o trabalho virtual realizado por forças vinculares é nulo.

Exemplo: Duas partículas estão interligadas por uma haste rígida de massa desprezível, conforme ilustrado na Figura 15 à esquerda. Sendo F_1 a força vincular em P_1 e F_2 é a força vincular em P_2 . Duas regras são relevantes: a) pelo princípio da **ação e reação**, as forças transmitidas pela haste às partículas devem ser iguais, opostas e colineares. b) como a haste é considerada rígida, os deslocamentos de cada corpo na direção do versor que os une deve ser idênticos (indeformável). Expressando estas duas propriedades de forma vetorial:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = F \cdot \vec{u} \quad \text{e} \quad \Phi \Rightarrow \delta \vec{r}_1 \cdot \vec{u} - \delta \vec{r}_2 \cdot \vec{u} = 0 \quad (60)$$

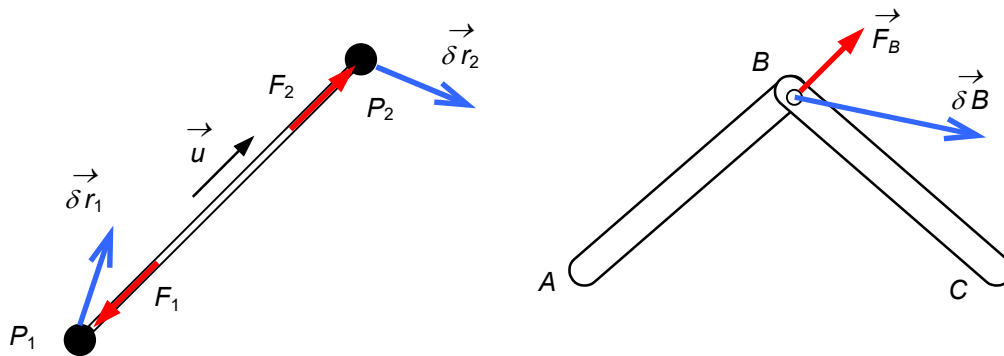


Figura 15 – Forças Vinculares

Aplicando o PTV em cada corpo e utilizando as relações de ação/reação e equação vincular Φ , obtêm-se:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = F_1 \vec{u} \cdot \delta r \vec{u} + F_2 \vec{u} \cdot \delta r \vec{u} = (F - F) \cdot \delta r \cdot \vec{u} = 0 \quad (61)$$

Observando as duas partículas, pode-se depreender que um agregado rígido de partículas terá inúmeros pares de forças internas que não realizam trabalho virtual. Também vínculos de deslocamento nulo não realizam trabalho. No caso particular de articulações ideais móveis, o deslocamento existe ($\delta \vec{B}$), mas as forças vinculares (\vec{F}_B e $\vec{F}_{B'}$) são iguais e contrárias, conforme ilustrado na Figura 15 à direita.

8 Força e Energia Potencial

A energia mecânica total de uma partícula de massa m submetida a um campo gravitacional é dado por:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 - mgz \quad (62)$$

Considere agora uma partícula submetida a uma força conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ função da posição e independentes do trajeto percorrido nem da velocidade (força gravitacional ou força de mola). O trabalho elementar realizado pela força devido a um deslocamento elementar $d\mathbf{r}$ é descrito por:

$$dW_{(r \rightarrow r+dr)} = \vec{F}(\mathbf{r}) \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \quad (63)$$

Da definição de função Potencial, tem-se a Energia Potencial V dada pelo trabalho realizado no mesmo deslocamento ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}+d\mathbf{r}$) (com sinal trocado):

$$dW = -dV \quad \text{integrando no intervalo } (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}+d\mathbf{r}): \quad \int_r^{r+dr} dW = -\int_r^{r+dr} dV \quad (64)$$

$$W_{(r \rightarrow r+dr)} = -[V_{(r+dr)} - V_{(r)}] \quad \text{ou} \quad W_{(r \rightarrow r+dr)} = -[V_{(x+dx, y+dy, z+dz)} - V_{(x, y, z)}] \quad (65)$$

Note que a Energia Potencial V é função das três coordenadas cartesianas (x, y, z) . Portanto seguindo a definição de derivada de função ($df = f(x+dx) - f(x) = (\partial f / \partial x) dx$):

$$\int_r^{r+dr} dV = (V_{(x+dx, y+dy, z+dz)} - V_{(x, y, z)}) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \quad (66)$$

onde cada termo contém a **derivada parcial** da função V em relação a cada uma das coordenadas (x, y, z) . Substituindo na expressão do trabalho obtêm-se:

$$W_{(r \rightarrow r+dr)} = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \right] \quad (67)$$

Tomando uma das coordenadas (por exemplo, dx) e mantendo os demais deslocamentos inalterados (note que dV é válida para pequenos deslocamentos) o trabalho realizado para o deslocamento infinitesimal (dx) resulta em:

$$W_{(r \rightarrow r+dx)} = - \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx \quad (68)$$

e o trabalho realizado pela força $F(r)$ quando ($dr = dx$) resulta em:

$$W_{(r \rightarrow r+dx)} = F_x \cdot dx \quad (69)$$

de onde se conclui, para esta e para as demais coordenadas, que:

$$\boxed{F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; F_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; F_z = - \frac{\partial V}{\partial z}} \quad (70)$$

portanto:

$$\vec{F} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (71)$$

De maneira geral para qualquer escalar $f(r)$, o vetor cujas componentes são as derivadas parciais de $f(r)$, é chamado de **GRADIENTE DA FUNÇÃO** (∇):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad \text{portanto} \quad \boxed{F = -\nabla V} \quad (72)$$

a energia potencial V é uma integral de F . Portanto qualquer força conservativa pode ser derivada de uma função potencial.

9 Forças Generalizadas

Considere um sistema de partículas cujas posições são especificadas pelas coordenadas cartesianas ordinárias x_1, x_2, \dots, x_k . O trabalho virtual das forças $F_1, F_2, F_j, \dots, F_k$ devido a deslocamentos virtuais arbitrários é descrito por:

$$\delta W = \sum_{j=1}^k F_j \cdot \delta x_j \quad (73)$$

Como as coordenadas ordinárias podem ser relacionadas com as coordenadas generalizadas através da expressão:

$$dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (74)$$

e considerando deslocamentos virtuais infinitesimais que se processam independente do tempo ($dt = 0$):

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (75)$$

Aplicando a transformação para coordenadas generalizadas, pode-se reescrever o trabalho virtual como:

$$\delta W = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \quad (76)$$

considerando que o trabalho pode ser expresso em qualquer sistema de coordenadas, o lado direito da equação corresponde ao trabalho das forças generalizadas em função de deslocamento virtuais generalizados. Portanto a forças generalizada Q_i na direção da coordenada generalizada q_i é dado por:

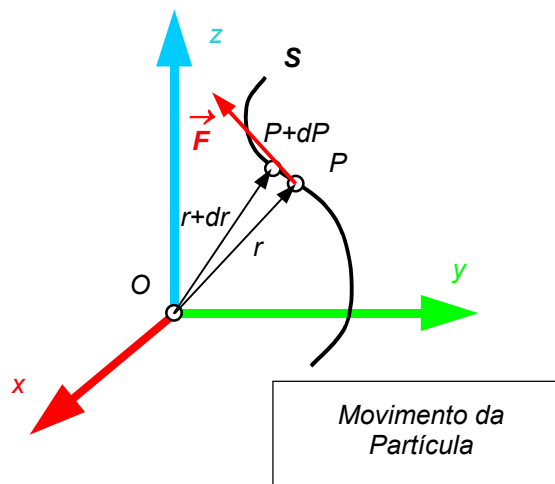
$$\boxed{Q_i = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (77)$$

A dimensão de uma força generalizada depende da dimensão da coordenada generalizada correspondente, mas o produto $Q_i \delta q_i$ deve ter sempre a dimensão de trabalho. Desta forma quando q_i corresponder a um deslocamento linear, a força generalizada terá a dimensão de força (*Newton*), mas quando q_i for um ângulo, a força generalizada Q_i terá dimensão de um momento de força (*Newton × metro*). A derivada parcial $(\partial x_j / \partial q_i)$ corresponde à variação da expressão de x_j na direção de q_i

10 Trabalho e Energia Cinética

O trabalho da força $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ aplicado a um ponto material, para o deslocamento elementar $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ é definido como:

$$dW_{(r \rightarrow r+dr)} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{integrando} \quad \int_r^{r+dr} dW = \int_r^{r+dr} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (78)$$



Tomando a 2ª lei de *Newton* e a variação da posição tem-se:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Rightarrow m \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \vec{F} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot dt \quad (79)$$

substituindo na expressão do trabalho elementar e integrando entre os instantes inicial (t_i) e final (t_f):

$$W_{(t_i \rightarrow t_f)} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \cdot \dot{\vec{r}} dt = m \int_{t_i}^{t_f} d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\vec{r}}^2 \Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}}_f^2 - \dot{\vec{r}}_i^2) \quad (80)$$

$$W_{(t_i \rightarrow t_f)} = \frac{1}{2} m (\vec{V}_f^2 - \vec{V}_i^2) = T_f - T_i \quad (81)$$

portanto o trabalho realizado pelas forças \mathbf{F} atuante na partícula de massa m constante é igual à variação da energia cinética T entre os instantes inicial (t_i) e final (t_f)::

$$\boxed{W_{(t_i \rightarrow t_f)} = \Delta T} \quad (82)$$

conhecido como **Teorema da Energia Cinética - TEC**.

11 Energia Cinética do Corpo Rígido

Considere um corpo rígido S animado de movimento em relação a um referencial fixo Σ . Um sistema de coordenadas solidário ao corpo descreve a posição do ponto P e sua velocidade angular ω .

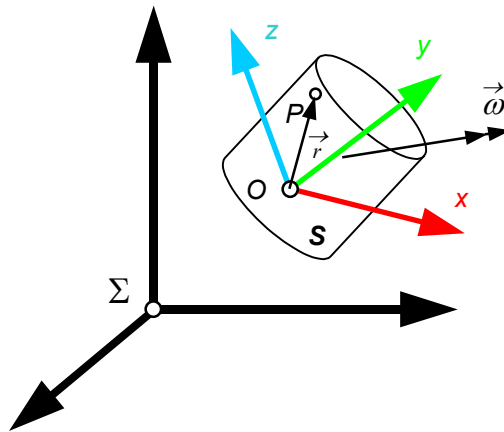


Figura 16 – Movimento do Corpo Rígido

A **ENERGIA CINÉTICA** T do corpo rígido S formado por n partículas de massa m_i é dado por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i^2 \quad (83)$$

Da formula de campo de velocidade pode-se expressar a velocidade de cada ponto P_i como:

$$\vec{V}_{P_i} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \quad (84)$$

Substituindo na formula da energia cinética e expandindo obtêm-se 3 somatórios:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 + \vec{V}_O \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \quad (85)$$

Para o primeiro somatório, obtêm-se para o pólo O único a massa total M :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 = \frac{1}{2} \vec{V}_O^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} M \cdot \vec{V}_O^2 \quad (86)$$

Para o segundo somatório, obtêm-se utilizando a propriedade do centro de massa e o fato da velocidade angular do corpo ser única:

$$\vec{V}_O \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i = M \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) \quad (87)$$

Para o terceiro somatório tem-se o quadrado de um produto vetorial. Resolvendo por partes fazendo o produto vetorial e depois o quadrado (produto escalar):

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \quad (88)$$

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \vec{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \vec{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \vec{k} \quad (89)$$

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \omega_x^2 \cdot (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y^2 \cdot (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z^2 \cdot (y_i^2 + x_i^2) - 2\omega_x \cdot \omega_y (x_i \cdot y_i) - 2\omega_x \cdot \omega_z (x_i \cdot z_i) - 2\omega_z \cdot \omega_y (z_i \cdot y_i) \quad (90)$$

Os termos quadráticos são reconhecidos como **MOMENTOS DE INÉRCIA** e os termos cruzadas são reconhecidos como **PRODUTOS DE INÉRCIA**.

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) ; J_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) ; J_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \quad (91)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i y_i ; J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i z_i ; J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i x_i \quad (92)$$

Reorganizando na forma matricial:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (93)$$

Adicionando os demais termos obtêm-se finalmente a expressão geral da **ENERGIA CINÉTICA** para um corpo rígido de massa m :

$$T = \frac{1}{2} m V_O^2 + m \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2} [\omega]^T [J]_O [\omega] \quad (94)$$

Casos particulares: Quando o pólo selecionado coincide com o centro de massa $O \equiv G$ ou tem velocidade nula ($V_O = 0$), a fórmula se reduz à:

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} [\omega]^T [J]_G [\omega] \quad (95)$$

Observe que o primeiro termo corresponde ao movimento de translação e o segundo termo à energia devido à rotação. Note ainda que a Energia Cinética é uma grandeza escalar e não depende do pólo escolhido.

12 Quantidade de Movimento Generalizada

A derivada parcial da energia cinética em relação à velocidade generalizada corresponde à quantidade de movimento naquela direção (ver item 6.1). No sistema de n coordenadas generalizadas a quantidade de movimento generalizada é descrita por:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}; \dots; p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}; \dots; p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}; \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (96)$$

13 Equação de *Lagrange* para Partícula

Considere uma partícula de massa m com posição cartesiana descrita por $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, em movimento livre no espaço E^3 , submetida a uma força conservativa $\mathbf{F}(r)$.

A **ENERGIA CINÉTICA** da partícula que depende de $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ é obtida por:

$$T = \frac{1}{2}m \cdot V^2 = \frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 = \frac{1}{2}m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (97)$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função apenas da posição sendo obtida por:

$$V = V(r) = V(x, y, z) \quad (98)$$

A função **Lagrangeana** depende da posição (x, y, z) e da velocidade $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ da partícula, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (99)$$

A **EQUAÇÃO DE LAGRANGE** para q_i coordenadas generalizadas, na forma tradicional, é obtida pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (100)$$

Tomando as seguintes derivadas parciais para a coordenada generalizada $q = x$ e lembrando que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \text{obtem-se:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \quad (101)$$

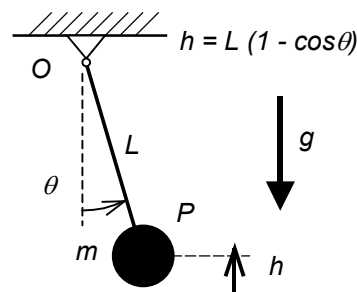
Aplicando na equação de *Lagrange*, na forma de energia, na coordenada x para partícula de massa invariante e força conservativa, obtém-se a equação escalar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - F_x = m\ddot{x} - F_x = 0 \quad (102)$$

que é a expressão na forma de *D'Alembert*. Pode-se estender para as outras coordenadas ($q_1 = x$; $q_2 = y$ e $q_3 = z$) obtendo-se exatamente o mesmo resultado da equação de *Newton*, como era de se esperar, desmembrada em cada direção:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} - F_x = 0 \\ m \cdot \ddot{y} - F_y = 0 \\ m \cdot \ddot{z} - F_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{x} = F_x \\ m \cdot \ddot{y} = F_y \\ m \cdot \ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (103)$$

EXEMPLO: Obtenha a equação de movimento utilizando o método de *Lagrange* de um pêndulo simples de massa m e comprimento L , conforme mostrado na figura, que se movimenta no plano devido à ação gravitacional:



Método de Resolução: Sistema: ponto P massa m ; sistema coordenadas: Oxy ; DVC: tomando o ponto fixo O (vínculo geométrico - holônomo) a expressão de campo de velocidade fornece:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L\vec{u} = L\dot{\theta} \vec{\tau} \quad (104)$$

A **ENERGIA CINÉTICA** da partícula é obtida pela massa m e sua velocidade V_p :

$$T = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \cdot V^2 = \frac{1}{2} m \cdot (L\dot{\theta} \vec{\tau})^2 = \frac{1}{2} m \cdot L^2 \dot{\theta}^2 \quad (105)$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função apenas da posição sendo obtida por:

$$V = V(r) = V(x, y, z) = mgh = mg \cdot L(1 - \cos \theta) \quad (106)$$

As **EQUAÇÕES DE LAGRANGE** para q_i coordenadas generalizadas que depende da posição (x, y, z) e da velocidade ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) da partícula, são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (107)$$

Tomando as derivadas parciais para $q = \theta$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg \cdot L \text{sen } \theta \quad (108)$$

Aplicando na equação de *Lagrange* na coordenada $q = \theta$ para partícula de massa invariante e força conservativa, obtêm-se a equação escalar na coordenada θ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} (mL^2 \dot{\theta}) + mgL \text{sen } \theta &= 0 \\ mL^2 \ddot{\theta} + mgL \text{sen } \theta &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

dividindo tudo por mL^2 , obtêm-se:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \text{sen } \theta = 0 \quad (110)$$

que é a bem conhecida equação não linear do pêndulo simples.

14 Referencias Bibliográficas

1. França, L. N. F., Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, 3ª edição, p. 235.
2. Baruh, H. (1999) Analytical Dynamics. Rutgers University, Editora McGraw-Hill, pp. 718.
3. Goldstein, H. (1980) Classical Mechanics. Second Edition, Editora Addison-Wesley.
4. Greenwood, D. T. (1988) Principles of Dynamics. Second Edition, Editora Prentice-Hall.
5. Williams J. H. (1996) Fundamentals of Applied Dynamics. MIT, Editora John Wiley and Sons, pp. 884.
6. Lanczos, C. (1970) The Variational Principles of Mechanics. Editora Dover Publications.
7. Meirovitch, L. (1970) Methods of Analytical Dynamics. Editora McGraw-Hill.

15 Anexo A – Resumo de Derivadas Parciais

Seja z uma função de duas variáveis independentes x e y : $z = f(x, y)$. A variação da função z é dado por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

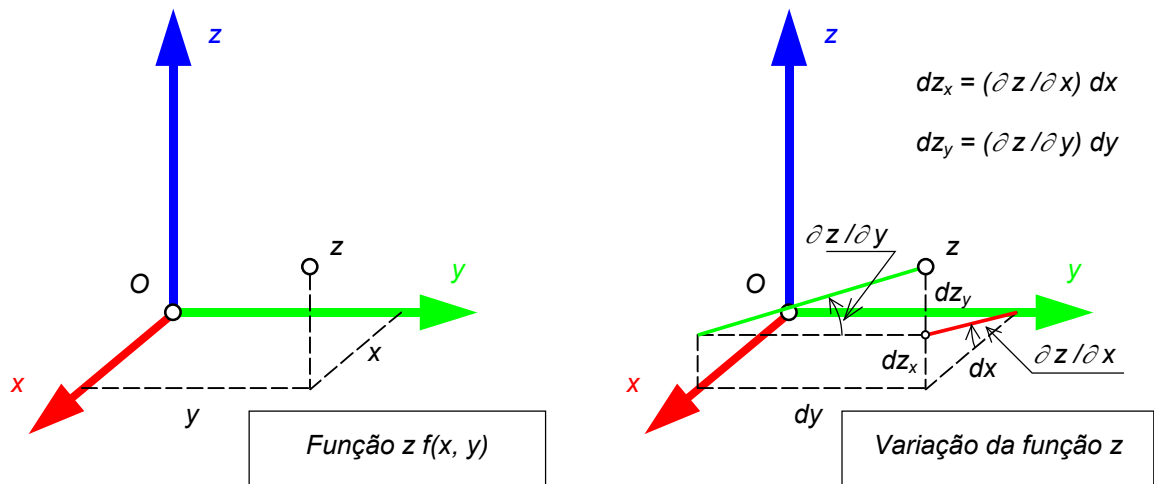


Figura 17 – Variação da Função $z = f(x, y)$

Portanto o diferencial da função z é dado pela soma das derivadas parciais em cada direção multiplicado pelo deslocamento elementar nesta direção:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

Note que: $\frac{\partial z}{\partial x}$ é a inclinação da função z na direção x e $\frac{\partial z}{\partial y}$ é a inclinação da função z na direção y .

16 Anexo B - Diferenças Básicas entre os Métodos

As diferenças básicas entre o métodos vetorial (*Newton- Euler*) e o método analítico (*Lagrange*) estão resumidas na Tabela 1.

Tabela 1 – Diferenças Básicas dos Métodos de Obtenção das Equações de Movimento

Técnica Direta Vetorial (<i>Newton-Euler</i>)	Técnica Analítica Indireta Escalar (<i>Lagrange</i>)
Utiliza grandezas vetoriais	Utiliza grandezas escalares
Requer a identificação das acelerações	Requer a identificação das velocidades
Requer a elaboração do <i>DFCL</i>	Não utiliza o <i>DFCL</i>
Exige até 6 equações para cada corpo	Produzirá um equação independente para cada <i>GL</i> identificado.
Todas as forças devem ser consideradas	As forças que não realizam trabalho (ex. vínculos ideais) são automaticamente eliminadas
Todas as forças são consideradas na mesma expressão	Forças conservativas e dissipativas são tratadas separadamente
As forças de interação são disponíveis.	As forças de interação devem ser determinadas posteriormente.
Requer recurso de tratamento vetorial para implementação numérica computacional	Fácil implementação numérica computacional