

MECÂNICA II – PME 3200
NOTAS DE AULA –PARTE II

INTRODUÇÃO À MECÂNICA ANALÍTICA

Equações de *Lagrange*

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

Conteúdo

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Princípio de <i>D'Alembert</i> | 3 |
| 2 | Equação de <i>LAGRANGE</i> | 4 |
| 2.1 | Exemplo 1: Anel Arrastado por Aro Girante | 9 |
| 2.2 | Exemplo 2: Carro e Pêndulo Simples | 12 |
| 2.3 | Exemplo 3: Disco em Movimento | 25 |
| 3 | Função Dissipativa | 17 |
| 3.1 | Exemplo 3 – Bloco, Pendulo Composto e Forças | 19 |
| 3.2 | Exemplo 4 - Trem | 25 |
| 3.3 | Exemplo 5 - Pião | 31 |
| 3.4 | Exemplo 6 – Sistema com 3 GL..... | 36 |
| 4 | LINEARIZAÇÃO | 41 |
| 4.1 | Linearização Exemplo 1: Massa Pêndulo | 45 |
| 4.2 | Linearização Exemplo 2: Pêndulo Partícula | 52 |
| 4.3 | Linearização Exemplo 3: Carro Pêndulo Composto | 57 |
| 4.4 | Posição de Equilíbrio | 61 |
| 4.5 | Exemplo de Posição de Equilíbrio: Pêndulo Invertido | 63 |
| 4.6 | Linearização Exemplo 4: Partícula Guia Circular..... | 68 |
| 4.7 | Linearização Exemplo 5: Disco – Barra Guia..... | 74 |
| 5 | Vínculos Não-Holônomos..... | 80 |
| 6 | Vantagens e Desvantagens do Método Analítico..... | 81 |
| 7 | Referências Bibliográficas | 82 |
| 8 | Anexo A – Expansão em Série..... | 83 |
| 9 | Anexo B – Análise Modal | 84 |
| 9.1 | Exemplo Modal | 86 |
| 10 | Princípio de <i>Hamilton</i> | 88 |
| 11 | Equação de <i>Lagrange</i> | 90 |

Atenção: Utilize sempre a última versão deste documento.

1 Princípio de *D'Alembert*

O princípio de *D'ALAMBERT* (1743) expande o princípio dos **Trabalhos Virtuais (PTV)** do caso estático para o caso dinâmico. A variação temporal da quantidade de movimento de uma partícula de massa invariante, conforme a segunda lei de *Newton*, é descrita por:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m \vec{V}) = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V}_i + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}_i = m \vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

Para a “*i*-ésima” partícula um sistema de *N* partículas e seu respectivo somatório, obtêm-se:

$$\dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} (m_i \vec{V}_i) = \frac{dm_i}{dt} \vec{V}_i + m_i \frac{d}{dt} \vec{V}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{R} \quad (2)$$

A resultante **R** das forças aplicadas pode ser separada em forças internas e vinculares e as forças externas sendo que, apenas as forças externas realizam trabalho. Aplicando o **PTV** nesta partícula e realizando o somatório para o agregado de *N* partículas, obtêm-se a equação de equilíbrio dinâmico na forma de *D'Alembert* para vínculos ideais:

$$\delta W = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{vinc} - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ext} - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0} \quad (3)$$

Estendendo o princípio de *D'Alembert* para corpos rígidos, utilizando a fórmula de campo de acelerações, pode-se provar que:

$$\vec{a}_{Gi} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_i \wedge (G_i - O) + \vec{\omega}_i \wedge [\vec{\omega}_i \wedge (G_i - O)]$$

$$\sum_{j=1}^m [(\vec{F}_j^{ext} - m_j \vec{a}_j) \cdot \delta \vec{r}_{Gj} + (\vec{M}_{Gj} - [J]_{Gj} \vec{\alpha}_j) \cdot \delta \theta_j] = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (4)$$

$$d x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt \quad (7)$$

Para o deslocamento virtual δx_j (infinitesimal) que transcorre independente do tempo, obtêm-se:

$$\boxed{\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i} \quad (\text{I}) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

Retomando a expressão do trabalho virtual na forma de *D'Alembert* para deslocamentos virtuais generalizados aplicando o deslocamento virtual generalizado obtêm-se:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3N} m_j a_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (9)$$

O termo do primeiro somatório, considerando a inversão da ordem do somatório, é denominado de **FORÇA GENERALIZADA**:

$$\boxed{Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i}} \quad (\text{II}) \quad (10)$$

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3N} m_j a_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0} \quad (\text{III}) \quad (11)$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema material de N partículas é igual à:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \cdot \vec{V}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \cdot \dot{x}_j^2} \quad (\text{IV}) \quad (12)$$

A derivada parcial de T com respeito à derivada temporal da coordenada generalizada q_i , (utilizando a regra do produto) resulta em:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}} \quad (\text{V}) \quad \text{pois} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{x}_j \cdot \dot{x}_j) = 2 \left(\dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (13)$$

Retomando a expressão do deslocamento elementar da coordenada ordinária (equação I) e diferenciando com respeito ao tempo:

$$d x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot d q_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt \quad \text{dividindo por } dt \quad \dot{x}_j = \frac{d}{dt} x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad (14)$$

Derivando parcialmente a última expressão com respeito a $\partial \dot{q}_i$, restará apenas o i -ésimo termo do somatório e o último termo correspondente a derivada parcial em relação ao tempo não comparece:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}} \quad (\text{VI}) \quad (15)$$

Substituindo (VI) de volta na expressão da derivada parcial da energia cinética (V) obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (\text{VII}) \quad (16)$$

Tomando novamente a derivada temporal da expressão (VII) utilizando a regra da cadeia:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \left[m_j \cdot \ddot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \right]} \quad (\text{VIII}) \quad (17)$$

Utilizando novamente a regra da cadeia no último termo de (VIII), lembrando que $\mathbf{x}_j = \mathbf{f}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \quad (a) \quad (18)$$

Da expressão de \dot{x}_j derivando parcialmente em relação a ∂q_i

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad \text{derivada parcial} \quad \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \quad (\mathbf{b}) \quad (19)$$

Portanto as expressões **(a)** e **(b)** são idênticas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad (\mathbf{IX}) \quad (20)$$

Aplicando **(IX)** em **(VIII)** obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \left[m_j \cdot \ddot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \right] \quad (\mathbf{X}) \quad (21)$$

A derivada parcial da energia cinética na coordenada generalizada i , considerando a massa constante, resulta em:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial (m_j \cdot \dot{x}_j^2 / 2)}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{m_j}{2} \frac{\partial (\dot{x}_j \cdot \dot{x}_j)}{\partial q_i} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{m_j}{2} \frac{\partial (\dot{x}_j \cdot \dot{x}_j)}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \cdot 2 \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad (23)$$

Que é idêntica à última parcela da expressão **(X)**, resultando, portanto em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (24)$$

Utilizando a descrição da força generalizada Q_i , descrita em **(II)**, na expressão anterior:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (25)$$

Para as forças generalizadas conservativas Q_i , deriváveis da função potencial $V = V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$, obtêm-se para forças não conservativas Q_i^{NC} :

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^{NC} \quad (26)$$

que é a **EQUAÇÃO DE LAGRANGE** na forma de energia cinética T e potencial V :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k^{nc}} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

Para a função *Lagrangeana* $L = T - V$, resulta na equação de **Lagrange**:

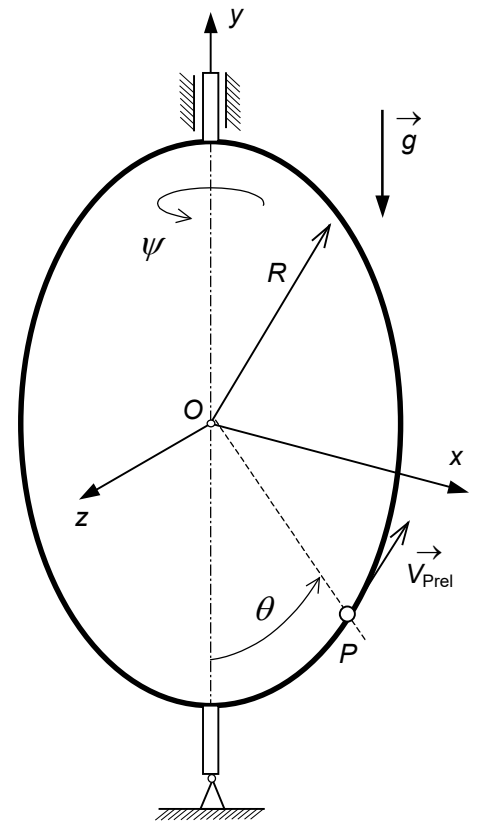
$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{NC}} \quad (28)$$

Obs.: Para sistemas **não-holônomo**s, deve-se utilizar os multiplicadores de *Lagrange* que não é objeto deste texto.

2.1 Exemplo 1: Anel arrastado por aro girante

Um pequeno anel P de massa m se move com velocidade angular relativa $\dot{\theta} \vec{k}$, mantendo-se em permanente contato com o aro de raio R e centro em O , sem atrito. Por sua vez, o aro de massa desprezível, gira em torno do eixo vertical Oy , com velocidade angular prescrita constante $\dot{\psi} \vec{j}$ arrastando o anel. Desprezando o atrito nos contatos, pede-se para determinar a equação de movimento do anel.

Resolução: Sistema: anel de massa m e vínculo devido ao aro de raio R . Graus de liberdade ordinários do sistema: θ e ψ , coordenadas generalizadas independentes $q_1 = \theta$ e $q_2 = \psi$. **Diagramas:** DVCL e DFCL. **Referencial** $Oxyz$ móvel solidário ao aro. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.



A posição relativa do ponto P é expressa no referencial móvel como:

$$(P-O) = x \vec{i} + y \vec{j} = R \sin \theta \vec{i} - R \cos \theta \vec{j}$$

Verifica-se que o anel (que tem movimento relativo) é arrastado pelo movimento do aro.

Portanto a velocidade do ponto P é obtida da composição de movimento como:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$$

Derivando a posição relativa em relação ao tempo, obtêm-se a velocidade relativa do anel P :

$$\vec{V}_{rel} = \frac{d}{dt}(P-O) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} = R \cos \theta \dot{\theta} \vec{i} + R \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{V}_{rel} = V_{rel} \vec{\tau}$$

A velocidade de arrastamento do ponto P é expressa no referencial móvel como:

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \dot{\psi} \wedge (P-O) = 0 + \dot{\psi} \vec{j} \wedge R(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$

$$\vec{V}_{arr} = -R \dot{\psi} \sin \theta \vec{k}$$

Finalmente a velocidade absoluta do ponto P e o quadrado resultam em:

$$\vec{V}_P = R(\cos \theta \dot{\theta} \vec{i} + \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} - \dot{\psi} \sin \theta \vec{k})$$

$$\vec{V}_P^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)$$

A energia cinética T do anel P resulta em:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_P^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)$$

A energia potencial V devido a ação da gravidade sobre o anel P resulta em:

$$V = mg(R - R \cos \theta)$$

Tomando as seguintes derivadas parciais e temporal da primeira coordenada generalizada $q_1 = \theta$ obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = mR^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgR \sin \theta$$

As EQUAÇÕES DE *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais das funções de energia cinética e potencial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais na equação de *Lagrange*, para a coordenada $q_1 = \theta$, obtêm-se a primeira equação escalar:

$$\boxed{(mR^2) \ddot{\theta} - mR^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = -mgR \sin \theta}$$

Note que o primeiro escalar da equação acima (mR^2) , corresponde ao momento de inércia do anel em torno do ponto O . O segundo termo corresponde à aceleração centrípeta $(R\dot{\psi}^2)$ do anel. Note ainda que o anel de massa m está submetido a ação gravitacional e vincular devido a trajetória prescrita de raio R imposta pelo aro.

Para a segunda coordenada generalizada $q_2 = \psi$, o movimento é determinado (prescrito $\dot{\psi} = cte$) e portanto $\ddot{\psi} = 0$. Tomando as seguintes derivadas parciais e temporal da segunda coordenada generalizada $q_2 = \psi$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = mR^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = mR^2 \ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais na equação de *Lagrange*, para a coordenada $q_2 = \psi$, obtêm-se a segunda equação escalar:

$$\boxed{mR^2 \ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} = Q_2}$$

As forças externas agentes sobre o anel são devido a gravidade e devido a guia de contato no plano perpendicular à velocidade relativa, ou seja no plano $\vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{u}$. Então, sobre o anel haverá uma componente de força de contato centrípeta $\vec{F}_c = -F_c \vec{u}$ e outra tangencial $\vec{F}_t = F_t \vec{k}$.

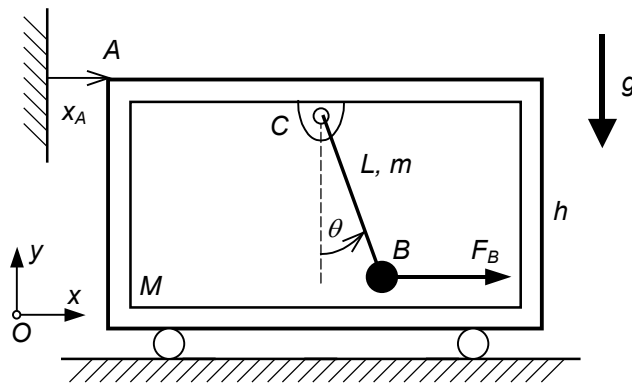
Para velocidade angular prescrita constante $\dot{\psi} \vec{j}$ ($\ddot{\psi} = 0$) e considerando a força generalizada

$Q_2 = M_y$ como o momento externo aplicado no aro devido a reação da força tangencial do anel obtêm-se

$$\boxed{M_y = -2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi}}$$

2.2 Exemplo 2: Carro e Pêndulo Simples

Um carro de massa M se movimenta no plano Oxy , conforme mostrado na figura. O veículo desliza sobre o plano sem atrito e suporta um pêndulo simples de massa m e comprimento L , suspenso na articulação ideal C onde descreve o ângulo θ . O pêndulo é submetido à força horizontal F_B aplicada no ponto B . Determinar as equações de movimento do sistema pelo método de *Lagrange*.



Resolução: Sistema: carro de massa M e pêndulo B de massa m e comprimento L . Graus de liberdade ordinários do sistema: x e θ ; coordenadas generalizadas independentes $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$. **Diagramas:** DVCL e DFCL. **Referencial Oxy .** **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

No plano cartesiano Oxy da figura, as coordenadas ordinárias das posições do ponto A do carro e do ponto B do pêndulo, se relacionam com as coordenadas generalizadas, conforme as seguintes relações:

$$\begin{aligned}(A-O) &= (x_A, y_A) = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} = x_A \vec{i} + h \vec{j} \\ (B-O) &= (B-C) + (C-O) = L(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) + x_A \vec{i} = (L \sin \theta + x_A) \vec{i} - \cos \theta \vec{j}\end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo, obtêm-se as velocidades dos pontos de interesse A e B utilizando a fórmula de campo de velocidades no sistema de coordenadas $Oxyz$ com versores \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} pode-se expressar a velocidade do carro e do centro de massa do pêndulo B , que tem

movimento relativo em torno da articulação C , que por sua vez é arrastado pelo movimento do carro (composição de movimento):

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \dot{x}_A \vec{i} = \vec{V}_C = \dot{x}_C \vec{i} = \dot{x} \vec{i} = \dot{q}_1 \vec{i} \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (B-C) = \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) \\ \vec{V}_B &= \dot{x} \vec{i} + L\dot{\theta}(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = (\dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + L\dot{\theta} \sin \theta \vec{j} \\ \vec{V}_B^2 &= \dot{x}^2 + 2L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo. O carro está apenas em translação (não tem rotação no plano considerado). Já o pêndulo tem translação e rotação conforme expressão anterior:

$$\begin{aligned}T &= T_{\text{vagão}} + T_{\text{Pêndulo}} \\ T &= \frac{1}{2} M \cdot \vec{V}_A^2 + \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_B^2 \\ T &= \left(\frac{M+m}{2} \right) \dot{x}^2 + mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função apenas da altura h da massa m do pêndulo sendo obtida por (as forças no vínculo ideal O não realizam trabalho):

$$V = V(\theta) = mg \cdot h = mg \cdot L(1 - \cos \theta)$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição (x e θ) e da velocidade (\dot{x} e $\dot{\theta}$) do sistema, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

As **EQUAÇÕES DE LAGRANGE** para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais das funções de energia cinética e potencial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\boxed{T = \left(\frac{M+m}{2} \right) \dot{x}^2 + mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2}$$

$$V = mg \cdot L(1 - \cos \theta)$$

Tomando as seguintes derivadas parciais da primeira coordenada generalizada $q_1 = x$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + mL \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M+m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e derivando com respeito ao tempo na equação de *Lagrange*, na coordenada $q_1 = x$, e considerando a força generalizada Q_1 , obtêm-se a primeira equação escalar:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1}$$

$$(M+m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = Q_1$$

Tomando as seguintes derivadas parciais da segunda coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL \cos \theta \dot{x} + mL^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL \cos \theta \ddot{x} - mL \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = -mL \sin \theta \dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgL \sin \theta$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* nas coordenadas $q_2 = \theta$, considerando a força generalizada Q_2 , obtêm-se mais uma equação escalar (note que o termo $\dot{x} \dot{\theta}$ se cancela):

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_2}$$

$$mL \cos \theta \ddot{x} + mL^2 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = Q_2$$

As forças generalizadas podem ser obtidas da fórmula própria ou utilizando a equivalência entre o trabalho virtual ordinário e generalizado:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \text{ou} \quad \delta W = \sum_{j=1}^k \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i$$

Utilizando o método de equivalência do trabalho virtual, tem-se por analogia que:

$$\vec{F}_B \cdot \delta \vec{r}_B = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2$$

Os deslocamentos virtuais podem ser obtidos das expressões das velocidades:

$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) \\ \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + L \frac{d\theta}{dt} (\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{i}) \Rightarrow d\vec{B} = (dx + L \cos \theta d\theta) \vec{i} + L \sin \theta d\theta \vec{j} \\ \delta \vec{B} &= (\delta x + L \cos \theta \delta \theta) \vec{i} + L \sin \theta \delta \theta \vec{j} \end{aligned}$$

Substituindo na expressão do trabalho virtual ordinário:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_B \cdot \delta \vec{r}_B = F_B \vec{i} \cdot (\delta x \vec{i} + L \cos \theta \delta \theta \vec{i} + L \sin \theta \delta \theta \vec{j}) \\ \delta W &= F_B \delta x + (F_B L \cos \theta) \delta \theta \end{aligned}$$

As forças generalizadas por analogia resultam para $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$ em:

$$\begin{aligned} \delta W &= F_B \cdot \delta x + (F_B L \cos \theta) \cdot \delta \theta \\ \delta W &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \end{aligned}$$

| |
|--|
| $Q_1 = F_B \quad \text{e} \quad Q_2 = F_B L \cos \theta$ |
|--|

Finalmente considerando as forças generalizadas as equações de movimento resultam em:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = F_B \\ mL \cos \theta \ddot{x} + mL^2 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = F_B L \cos \theta \end{cases}$$

Note ainda que as equações são dependentes das acelerações devido ao vínculo e forma um sistema linear que pode ser tratado por eliminação de variável utilizando:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\cos \theta}{L} \ddot{x} - \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{F_B}{mL} \cos \theta$$

3 Função Dissipativa

As forças generalizadas Q_i incluem forças não conservativas que não podem ser derivadas a partir de um potencial. Dentre essas forças existe uma classe que engloba as forças que são proporcionais à velocidade e resistem ao movimento (mesma direção da velocidade, mas em sentido oposto). Este tipo de força pode ser descrito como:

$$F = -c \cdot \dot{x} \quad (29)$$

Obtêm-se para as forças (\vec{F}, P) em coordenadas ordinárias:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_p = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{x}_2 \vec{j} + \dot{x}_3 \vec{k} \\ F_j &= -c_j \cdot \dot{x}_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 3N \end{aligned} \quad (30)$$

Assim o **TRABALHO VIRTUAL** realizado por **FORÇAS DISSIPATIVAS** aplicadas os N corpos de um sistema, são calculadas em coordenadas ordinárias como:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j = - \sum_{j=1}^{3N} c_j \cdot \dot{x}_j \cdot \delta x_j \quad (31)$$

Lembrando que os deslocamentos virtuais, sua derivada temporal e sua derivada parcial com respeito a $\partial \dot{q}_i$, são dados por:

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \quad ; \quad \delta \dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \delta \dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (32)$$

Portanto, substituindo no deslocamento virtual e na expressão do trabalho virtual, obtêm-se:

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \delta W = - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{3N} c_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right] \cdot \delta q_i \quad (33)$$

Lembrando também que a derivada parcial de \dot{x}_j^2 em relação \dot{q}_i resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{x}_j \cdot \dot{x}_j) = 2 \left(\dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2 \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_i} \quad (34)$$

Aplicando esta expressão na expressão do trabalho virtual obtêm-se:

$$\delta W = - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{3N} c_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{1}{2 \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_i} \right] \cdot \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \delta W = - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (c_j \cdot \dot{x}_j^2) \right] \cdot \delta q_i \quad (35)$$

Definido a função **R** (função dissipativa de **Rayleigh**) e substituindo no trabalho virtual obtêm-se:

$$R = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} (c_j \cdot \dot{x}_j^2) \quad \Rightarrow \quad \delta W = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \quad (36)$$

Lembrando da expressão do trabalho virtual das forças generalizadas e comparando com a expressão anterior, conclui-se que:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}} \quad (37)$$

Utilizando a expressão da forças generalizada dissipativa (**Rayleigh**), onde $R = f(\dot{x}_1, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ ou seja função das coordenadas generalizadas, podendo portanto ser deslocada para o lado direito da equação na fórmula de balanço de energia, obtêm-se:

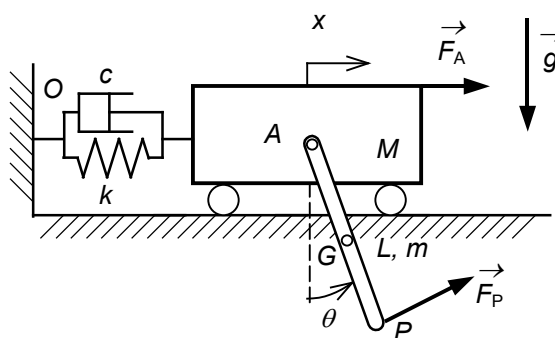
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{nc} \quad (38)$$

Finalmente descrevendo na forma tradicional de **Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{nc}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

3.1 Exemplo 3 – Carro, Pendulo Composto e Forças

No sistema mostrado na figura, o carro A de massa M , que desliza sobre o plano sem atrito, está interconectado a uma mola de rigidez k e um amortecedor com coeficiente de dissipação linear c . No centro do carro A , está articulado um pêndulo composto homogêneo de massa m e comprimento L . Uma força F_A horizontal é aplicada no carro e uma força F_B é aplicada na extremidade do pendulo ortogonal a ele. A mola tem deformação nula quando a coordenada x do ponto A vale zero. Determine as equações de movimento pelo método de *Lagrange*.



Resolução: Sistema: carro de massa M e pêndulo composto de massa m e comprimento L .

Diagramas: DVCL e DFCL. **Referencial:** $A\vec{u}\vec{v}\vec{k}$. Graus de liberdade independentes do sistema: x e θ . Molas de rigidez k . e amortecedor de coeficiente de dissipação linear c . Força

horizontal (F_A , A) Força ortogonal ao pêndulo (F_P , P). **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

Utilizando a fórmula de campo de velocidades pode-se expressar a partir da velocidade de G do carro, a velocidade do ponto P do pêndulo, que tem movimento relativo em torno da articulação G que por sua vez é arrastado pelo movimento do carro (composição de movimento). Pode-se utilizar qualquer sistema de coordenadas, como por exemplo \vec{u} , $\vec{\tau}$ e \vec{k} sendo \vec{u} na direção de \overline{PA} , para expressar a velocidade quadrática do ponto G (evitar o termo cruzado na energia potencial):

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \dot{x} \vec{i} \Rightarrow \vec{i} = \sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{\tau} \\ \vec{V}_G &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L / 2 \vec{u} \\ \vec{V}_G &= \dot{x} (\sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{\tau}) + L / 2 \dot{\theta} \vec{\tau} = \dot{x} \sin \theta \vec{u} + (\dot{x} \cos \theta + L / 2 \dot{\theta}) \vec{\tau} \\ \vec{V}_G^2 &= \dot{x}^2 \sin^2 \theta + \dot{x}^2 \cos^2 \theta + L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2 / 4 = \dot{x}^2 + L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2 / 4\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo. O carro está apenas em translação (não tem rotação no plano considerado) e o pêndulo tem translação e rotação (pólo em G), conforme expressão anterior:

$$\begin{aligned}T_{Total} &= T_{Bloco} + T_{Pendulo} \\ T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} M \cdot \vec{V}_A^2 + \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [J]_G \vec{\omega} \\ T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2 / 4) + \frac{1}{2} \frac{m L^2}{12} \dot{\theta}^2 \\ T &= \left(\frac{M+m}{2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da altura h do centro de massa G da massa m do pêndulo e da mola, sendo obtida por:

$$V = V(x, \theta) = V_{grav} + V_{elast} = mg \cdot h + \frac{1}{2} k x^2 = mg \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k x^2$$

A **DISSIPACÃO** (*Rayleigh*) é função da velocidade do carro:

$$R = R(\dot{x}) = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição (x e θ) e da velocidade (\dot{x} e $\dot{\theta}$) do sistema, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

As equações de *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais, forças dissipativas (R_i) e ações externas (Q_i):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = x$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + mL \cos \theta \dot{\theta} / 2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + mL / 2 \cos \theta \ddot{\theta} - mL / 2 \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e derivando com respeito ao tempo na equação de *Lagrange*, na coordenada $q_1 = x$, e considerando a força generalizada Q_1 , obtêm-se a seguinte equação escalar:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = Q_1 \\ (M + m)\ddot{x} + mL / 2 \cos \theta \ddot{\theta} - mL / 2 \sin \theta \dot{\theta}^2 + c\dot{x} + kx &= Q_1 \end{aligned}}$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mL}{2} \cos \theta \dot{x} + \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{mL}{2} \cos \theta \ddot{x} - \frac{mL \sin \theta}{2} \dot{x} \dot{\theta} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{mL \sin \theta}{2} \dot{x} \dot{\theta} \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{mgL}{2} \sin \theta \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* nas coordenadas $q_2 = \theta$, considerando a força generalizada Q_2 , obtém-se mais uma equação escalar (note que o termo $\dot{x} \dot{\theta}$ se cancela):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = Q_2 \\ \frac{mL \cos \theta}{2} \ddot{x} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{gL \sin \theta}{2} &= Q_2 \end{aligned}}$$

As forças generalizadas podem ser obtidas da fórmula própria ou utilizando a equivalência entre o trabalho virtual ordinário e generalizado:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \text{ou} \quad \delta W = \sum_{j=1}^k \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot dq_i$$

Utilizando o método de equivalência do trabalho virtual, tem-se por analogia que:

$$\vec{F}_A \cdot \delta \vec{A} + \vec{F}_P \cdot \delta \vec{P} = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2$$

O deslocamento virtual do ponto A e do ponto P onde a força horizontal F_A e a força ortogonal F_P estão aplicadas, pode ser obtido das expressões das velocidades:

$$\vec{V}_A = \dot{x} \vec{i} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} \Rightarrow \delta A x = \delta x$$

$$\vec{V}_P = (\dot{x} + L \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + L \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + L \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{i} + L \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j}$$

$$\delta \vec{P} = (\delta x + L \cos \theta \cdot \delta \theta) \vec{i} + (L \sin \theta \cdot \delta \theta) \vec{j}$$

Substituindo na expressão do trabalho virtual ordinário:

$$\begin{aligned}
\delta W &= F_A \vec{i} \cdot \delta x \vec{i} + F_p \vec{\tau} \cdot (\delta x \vec{i} + L \cos \theta \delta \theta \vec{i} + L \sin \theta \delta \theta \vec{j}) \\
\delta W &= F_A \delta x + F_p (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot (\delta x \vec{i} + L \cos \theta \delta \theta \vec{i} + L \sin \theta \delta \theta \vec{j}) \\
\delta W &= F_A \delta x + F_p \delta x + L F_p (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cdot \delta \theta \\
\delta W &= (F_A + F_p \cos \theta) \delta x + F_p L \delta \theta
\end{aligned}$$

As forças generalizadas por similaridade resultam para $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$ em:

$$\begin{aligned}
\delta W &= (F_A + F_p \cos \theta) \delta x + F_p L \delta \theta \\
\delta W &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2
\end{aligned}$$

que resulta por analogia em:

$$Q_1 = (F_A + F_p \cos \theta) \quad \text{e} \quad Q_2 = F_p L$$

Resultando finalmente nas duas equações diferenciais do sistema:

$$\begin{aligned}
(M + m) \ddot{x} + mL/2 \cos \theta \ddot{\theta} - mL/2 \sin \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{x} + k x &= F_A + F_p \cos \theta \\
\frac{mL \cos \theta}{2} \ddot{x} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mgL}{2} \sin \theta &= F_p L
\end{aligned}$$

Note que as equações têm termos de aceleração cruzados devido às forças do acoplamento do pino em A . Neste caso o sistema linear formado pode ser tratado por eliminação de variável

utilizando: $\ddot{\theta} = -\frac{3 \cos \theta}{2L} \ddot{x} - \frac{3g}{2L} \sin \theta + \frac{3F_p}{mL}$ e obtendo:

$$[M + m(1 - 3 \cos^2 \theta / 4)] \ddot{x} - m \sin \theta (L \dot{\theta}^2 / 2 + 3g \cos \theta / 4) + c \dot{x} + k x = F_A - F_p \cos \theta / 2$$

Pode-se também obter as forças generalizadas aplicando a definição de força generalizada:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Para duas forças (\vec{F}_A, A) (\vec{F}_p, P) com as seguintes componentes F_j e para posição P e A com as componentes x_j tem-se:

$$\vec{F}_A = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} = F_A \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$(A - O) = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = x \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{F}_P = F_4 \vec{i} + F_5 \vec{j} + F_6 \vec{k} = (F_P \cos \theta) \vec{i} + (F_P \sin \theta) \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$(P - A) = x_4 \vec{i} + x_5 \vec{j} + x_6 \vec{k} = (x + L \sin \theta) \vec{i} - (L \cos \theta) \vec{j} + 0 \vec{k}$$

Fazendo as derivadas parciais para $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$ de cada deslocamento x_j :

$$x_1 = x ; x_2 = 0 ; x_3 = 0 ; x_4 = (x + L \sin \theta) ; x_5 = (-L \cos \theta) ; x_6 = 0$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial x} = 1 ; \frac{\partial x_2}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial x_3}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial x_4}{\partial x} = 1 ; \frac{\partial x_5}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial x_6}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_2} \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial x_3}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial x_4}{\partial \theta} = L \cos \theta ; \frac{\partial x_5}{\partial \theta} = L \sin \theta ; \frac{\partial x_6}{\partial \theta} = 0$$

Aplicando os resultados obtidos no somatório da força generalizada, têm-se para cada coordenada generalizada os seguintes resultados:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_1} = \sum_{j=1}^3 F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x}$$

$$Q_1 = F_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + F_2 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial x} + F_3 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial x} + F_4 \cdot \frac{\partial(x + L \sin \theta)}{\partial x} + F_5 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial x} + F_6 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial x}$$

$$Q_1 = F_1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (F_L \cos \theta) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = F_A + F_L \cos \theta$$

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_2} = \sum_{j=1}^3 F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \theta}$$

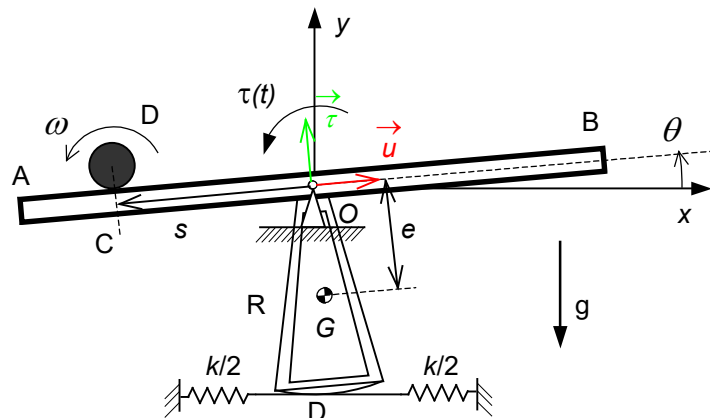
$$Q_2 = F_1 \cdot \frac{\partial(x)}{\partial \theta} + F_2 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + F_3 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + F_4 \cdot \frac{\partial(x + L \sin \theta)}{\partial \theta} + F_5 \cdot \frac{\partial(-L \cos \theta)}{\partial \theta} + F_6 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial \theta}$$

$$Q_2 = F_1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (F_P \cos \theta) \cdot (L \cos \theta) + (F_P \sin \theta) \cdot (L \sin \theta) + 0 \cdot 0 = F_P L$$

Portanto: $\boxed{Q_1 = F_A + F_P \cos \theta}$ e $\boxed{Q_2 = F_P L}$ (c.q.d.)

3.2 Exemplo 3: Disco em Movimento

Um disco de centro D , massa m e raio r , rola sem escorregar com velocidade angular ω , sobre a superfície AB , com posição do seu ponto de contato C definida pela cota s , medida ao longo da superfície AB , a partir do ponto O . O balancim de ABD massa M e momento de inércia J_{Oz} , tem movimento angular $\theta(t)$ em torno da articulação ideal em O fixa. O centro de massa G do balancim dista e do ponto de articulação em O . No setor de arco de raio R na extremidade inferior do balancim estão ancoradas duas molas de rigidez $k/2$ cada. As molas estão em seu comprimento livre quando $\theta = 0$. Um torque externo oscilatório $\tau(t) = \tau_o \cos(\Omega t)$ atua no balancim. Considerando as coordenadas generalizadas $q_1 = s$ e $q_2 = \theta$, determinar as equações de movimento em função dos parâmetros $m, r, M, J_{Oz}, e, g, R, k$.



Resolução: Sistema: disco de massa m e raio r e balancim de massa M . Graus de liberdade ordinários do sistema: s e θ ; coordenadas generalizadas independentes $q_1 = s$ e $q_2 = \theta$. **Diagramas:** DVC e DFCL. **Referencial Oxy .** **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

a) Para expressar a posição absoluta D do disco em função da posição s ao longo da superfície

AB , adota-se a base solidária ao balancim $O\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$ e obtêm-se: $(D-O) = (D-C) + (C-O)$

$$\Rightarrow (D-O) = -s\vec{u} + r\vec{\tau} \quad \text{ou} \quad (D-O) = -s(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + r(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

b) A velocidade ω do disco em função de \dot{s} pode ser obtida da cinemática considerando o rolamento sem escorregamento: $\boxed{\omega = \dot{s} / r}$

c) A função de Energia Potencial do sistema em função de s e θ e dos parâmetros r , e , g , m e M .

é obtida da expressão da Energia Potencial do sistema: $V = V_{Disco} + V_{Balancim} + V_{Mola}$

$$V_{Disco} = mg \cdot h_D = mg \cdot (s \sin \theta - r \cos \theta)$$

$$V_{Balancim} = Mg \cdot e(1 - \cos \theta)$$

$$V_{mola} = \sum \frac{1}{2} k_i x_i^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{k}{2} R^2 \theta^2 \right) = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

A Energia Potencial total do sistema resulta em:

$$\boxed{V = mg(s \sin \theta - r \cos \theta) + Mge(1 - \cos \theta) + (kR^2 \theta^2)/2}$$

d) Escreva a função a Energia Cinética do sistema em função de \dot{s} e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros m e J_{Oz} .

A energia cinética do sistema: $T = T_{Disco} + T_{Balancim}$. Para o disco **D** tem-se:

$$\vec{V}_{Disco} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$$

$$\vec{V}_{rel} = -\dot{s} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (D - O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (-s \vec{u} + r \vec{\tau}) = -s \dot{\theta} \vec{\tau} - r \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{Disco} = -(\dot{s} + r \dot{\theta}) \vec{u} - s \dot{\theta} \vec{\tau} \Rightarrow \vec{V}_D^2 = (\dot{s} + r \dot{\theta})^2 + s^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_D^2 + \frac{1}{2} \omega^T \cdot [J]_D \cdot \omega = \frac{1}{2} m \cdot [(\dot{s} + r \dot{\theta})^2 + s^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \omega^2$$

Considerando que o disco rola sem escorregar: $\boxed{\omega = \dot{s} / r}$

$$\boxed{T_{Disco} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m r \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m s^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m \dot{s}^2}$$

Para o balancim, utilizando o referencial móvel $O \vec{u} \vec{\tau} \vec{k}$ solidário ao conjunto, obtêm-se:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \quad \vec{V}_{rel} = 0$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (-e) \vec{\tau} = e \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_G^2 = e^2 \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T_{Balancim} = \frac{1}{2} M \cdot (e^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} [J_{Oz}] \dot{\theta}^2}$$

A Energia Cinética total do sistema resulta portanto em:

$$T = \frac{3}{4} m \dot{s}^2 + m r \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (m s^2 + M e^2 + J_{O_z}) \dot{\theta}^2$$

e) Deduza as equações de movimento utilizando o método de *Lagrange*, válida enquanto o disco permanece sobre a barra. Para a primeira coordenada generalizada $q_1 = s$ têm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3}{2} m \dot{s} + m r \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{s} + m r \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial s} = m s \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial s} = m g \cdot \sin \theta ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{s}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{s} + m r \ddot{\theta} - m s \dot{\theta}^2 + m g \cdot \sin \theta = 0$$

Para a segunda coordenada generalizada $q_2 = \theta$ obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r \dot{s} + (m s^2 + M e^2 + J_{O_z}) \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r \ddot{s} + (m s^2 + M e^2 + J_{O_z}) \ddot{\theta} + 2 m s \dot{s} \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = m g \cdot s \cos \theta + m g \cdot r \sin \theta + M g \cdot e \sin \theta + k R^2 \theta$$

Força generalizada: Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + M \cdot \delta \theta = \sum Q_i \cdot \delta q_i = 0$$

$$\tau \cdot \delta \theta = Q_2 \cdot \delta \theta \Rightarrow Q_2 = \tau$$

Finalmente a segunda equação para coordenada generalizada $q_2 = \theta$ resulta em:

$$m r \ddot{s} + (m s^2 + M e^2 + J_{O_z}) \ddot{\theta} + 2 m s \dot{s} \dot{\theta} + m g s \cos \theta + m g r \sin \theta + M g e \sin \theta + k R^2 \theta = \tau(t)$$

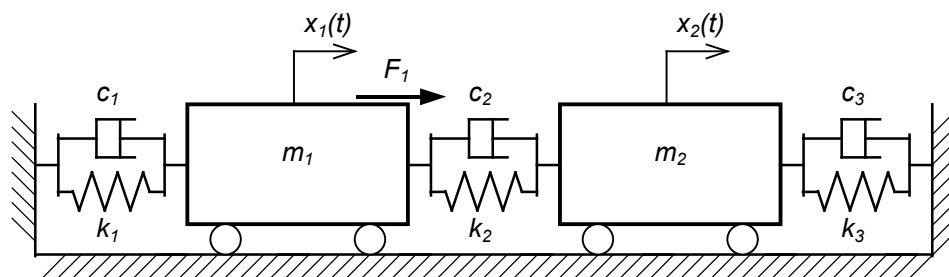
f) Fazendo a substituição de \ddot{s} da primeira equação na segunda, obtêm-se a equação diferencial de segunda ordem isolada em $\theta(t)$:

$$\ddot{s} = \frac{2}{3}(-r\ddot{\theta} + s\dot{\theta}^2 + g \sin \theta)$$

$$\left(J_{O_z} + m s^2 + \frac{2}{3} m r^2 + M e^2\right) \ddot{\theta} + \frac{5}{3} m r s \dot{\theta}^2 + 2 m s \dot{s} \dot{\theta} + m g s \cos \theta + \frac{5}{3} m g r \sin \theta + M g e \sin \theta + k R^2 \theta = \tau(t)$$

3.3 Exemplo 4 - Trem

Dois veículos em movimento livres num plano horizontal são interligados por molas e amortecedores lineares. As posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são medidas a partir das condições iniciais com as molas livres. O veículo da esquerda está submetido a uma força $F_1(t)$. Resolver o sistema pelo método de *Lagrange* e montar as equações de movimento na forma matricial.



Resolução: Sistema: Veículo de massa m_1 e veículo de massa m_2 . **DFCL:** forças das molas e amortecedores sobre os corpos, força externa F ; **Vínculos:** rolete inferior deslizante sem atrito e interligação entre os veículos e as paredes com conjuntos mola+amortecedor. Sistema de coordenadas generalizadas $q_1 = x_1(t)$ e $q_2 = x_2(t)$. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças dissipativas e fórmula de *Lagrange*:

$$T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad \text{e} \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

As forças dissipativas dos amortecedores são proporcionais à velocidade e obtidas pela função de *Rayleigh*:

$$R = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} c_j \cdot \dot{x}_j^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2} c_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 \cdot \dot{x}_2^2$$

As forças ativas externas F_1 podem ser obtidas por similaridade utilizando a expressão do trabalho virtual para $q_1 = x_1(t)$:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \quad \Rightarrow \quad F_1 \cdot \delta x_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = Q_1$$

Fazendo as derivadas parciais para a coordenada $q_1 = x_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 & \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) & \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned}$$

Fazendo as derivadas parciais para a coordenada $q_2 = x_2(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2 & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) & \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = c_3 \dot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{aligned}$$

Finalmente lançando os valores obtidos nas equações de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{nc}$$

| |
|--|
| $\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 &= F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$ |
|--|

Rearranjando as duas equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou simplesmente:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F\} \quad \text{onde} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Note que os termos fora da diagonal principal das matrizes de rigidez $[K]$ e amortecimento $[C]$ correspondem ao acoplamento entre os corpos, produzido pelo sistema mola+amortecedor que interliga os dois corpos.

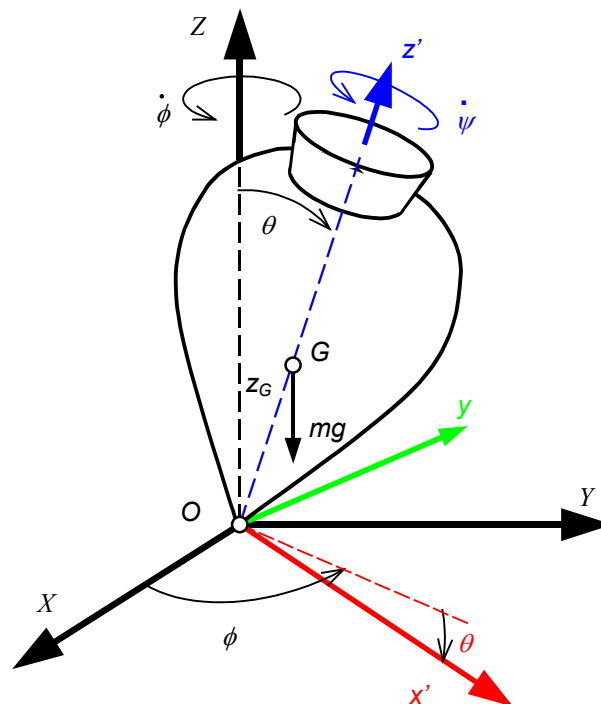
3.4 Exemplo 5 - Pião

Um rotor axi-simétrico (pião) de massa m se movimenta no espaço 3D, em torno do ponto de apoio em O , conforme ilustrado na figura. O pião gira com velocidade angular própria $\dot{\psi} \vec{k}$ em torno do eixo z sistema de coordenadas solidário ao eixo de simetria do pião $Oxyz$, que está inclinado do ângulo de nutação $\theta(t)$ em torno do eixo y . O pião tem velocidade angular de precessão $\dot{\phi} \vec{K}$ em torno do eixo vertical fixo Z . Determinar as equações de movimento do corpo rígido pelo método de *Lagrange*.

Resolução: Sistema: pião de massa m com altura do centro de massa z_G . Graus de liberdade ordinários do sistema: ângulos de *Euler*: ϕ , θ e ψ , coordenadas generalizadas independentes $q_1 = \phi$, $q_2 = \theta$ e $q_3 = \psi$. **Diagramas:** DVC e DFCL. **Referencial:** $Oxyz$, móvel, solidário ao corpo mas não girando com ele, com pólo em O fixo. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

Em relação a base móvel \mathbf{Oxyz} o pião é simétrico, a matriz de inércia é constante com os produtos de inércia nulos e o vetor velocidade angular tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{rel} &= \dot{\psi} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{arr} = \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{j} \\ \vec{\omega}_{abs} &= \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} \\ \vec{\omega}_{abs} &= \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}\end{aligned}$$



A Energia Cinética T para eixos principais e considerando o pólo \mathbf{O} fixo, é dada por:

$$\begin{aligned}T(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_O \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) \\ T(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2} \left(J_1 (-\dot{\phi} \sin \theta)^2 + J_2 \dot{\theta}^2 + J_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right)\end{aligned}$$

A Energia Potencial V devido a gravidade em função das coordenadas do centro de massa é dada por:

$$V(\phi, \theta, \psi) = mg \cdot h = mg \cdot z_G (1 - \cos \theta)$$

As forças generalizadas Q_i são todas nulas.

Fazendo as derivadas parciais e temporais para a primeira coordenada generalizada $q_1 = \phi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = J_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + J_3 \cos \theta (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{d}{dt} [J_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + J_3 \cos \theta (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})] \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando a expressão de *Lagrange* obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} &= Q_i^{nc} \\ \boxed{\frac{d}{dt} [J_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + J_3 \cos \theta (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})] = 0} \end{aligned}$$

Fazendo as derivadas parciais e temporais para a segunda coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= J_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - J_3 \sin \theta \dot{\phi} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg \cdot z_G \sin \theta \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando a expressão de *Lagrange* obtêm-se:

$$\boxed{J_2 \ddot{\theta} - J_1 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + J_3 \sin \theta \dot{\phi} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) + mg \cdot z_G \sin \theta = 0}$$

Fazendo as derivadas parciais e temporais para a terceira coordenada generalizada $q_3 = \psi$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = J_3 (\ddot{\psi} - \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + \cos \theta \ddot{\phi})$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

Finalmente utilizando a expressão de *Lagrange* obtêm-se:

$$\boxed{J_3 (\ddot{\psi} + \cos \theta \ddot{\phi} - \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi}) = 0}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [J_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] = 0 \\ J_2 \ddot{\theta} - J_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_3 \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = -mg \cdot z_G \cos \theta \\ J_3 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \end{cases}$$

Note que primeira equação na coordenada generalizada $q_1 = \phi$, tem velocidade angular de precessão $\dot{\phi} \vec{K}$ em torno do eixo vertical fixo Z ; a segunda equação na coordenada generalizada $q_2 = \theta$ está em torno do eixo dos nós y (ângulo de nutação $\theta(t)$), e a terceira equação na coordenada $q_3 = \psi$ de velocidade angular própria do pião $\dot{\psi} \vec{k}$ em torno do eixo z do sistema de coordenadas solidário ao eixo de simetria $Oxyz$.

Retomando a equação de rotação em torno de um ponto, expressa na base móvel, e anulando os termos descritos para esse caso ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$), obtêm-se uma única equação:

$$\begin{cases} -J_x \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) - J_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + J_z \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Ox} \\ J_y \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ J_z \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = M_{Ox} \\ [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta = M_{Oy} \\ 0 = M_{Oz} \end{cases}$$

Para a segunda equação ser possível é necessário a aplicação de um momento externo na direção \vec{j} que, neste caso, é produzido pela ação gravitacional devido a altura z_G do centro de massa do pião, conforme ilustrado:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (O - O) \wedge \vec{R}_O + (G - O) \wedge m\vec{g} \\ \vec{M}_O &= 0 + z_G \vec{k} \wedge -mg \vec{K} \\ \vec{M}_O &= z_G \vec{k} \wedge -mg (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \\ \vec{M}_O &= mg z_G \sin \theta \vec{j} \end{aligned}$$

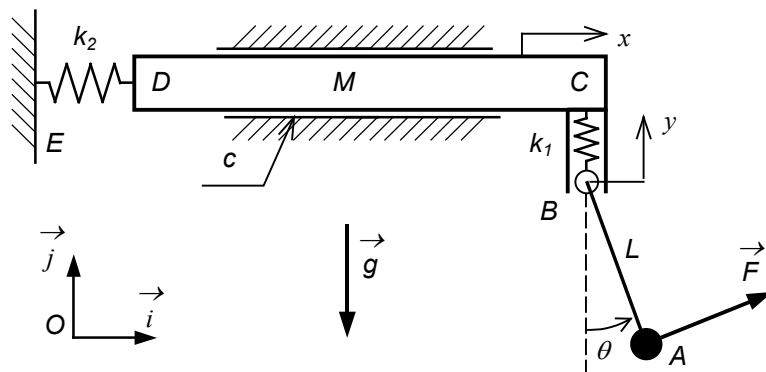
OBSERVAÇÃO: Mantendo a forma completa, a equação diferencial 113, torna-se quadrática de segunda ordem em $\dot{\phi}$, com duas soluções (ver *Pesce*, 2019):

$$\begin{aligned} [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta &= mz_G \sin \theta \\ \dot{\phi}^2 + \frac{J_z \dot{\psi}}{(J_z - J_x) \cos \theta} \dot{\phi} - \frac{mg z_G}{(J_z - J_x) \cos \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Quando $\cos \theta > 0$ e $J_z > J_x$ (pião achatado) a solução será um movimento **progressivo** (a direção da precessão será a mesma da rotação própria). Dependendo do aspecto do pião (esbelto ou bojudo) o movimento pode ser **retrógrado** (ver *Pesce*, 2019).

3.5 Exemplo 6 – Sistema com 3 GL

O mecanismo plano ilustrado na figura compõe-se de uma barra CD de massa M , que desliza com atrito viscoso linear de constante c na guia horizontal com posição x . Um pêndulo simples de comprimento L e massa m concentrada em A , que oscila com posição angular θ . A guia vertical solidária à extremidade da barra em C , restringe o movimento vertical y da articulação B do pêndulo e orienta a mola BC ligada rigidamente ao ponto C da barra e se movimenta com ela. A mola horizontal DE é ligada ao ponto fixo E e ao ponto D da barra. Uma força externa $F(t)$ é aplicada em A ortogonal a linha do pêndulo. A mola BC tem constante elástica k_1 e a mola DE k_2 respectivamente e massas desprezíveis. O atrito nos contatos também é desprezível. As coordenadas x e y são medidas a partir da configuração de equilíbrio estático do sistema.



Adotando x , y e θ como coordenadas generalizadas do sistema, pede-se:

- Escrever a função energia cinética;
- Escrever a função energia potencial;
- Deduzir as equações de movimento do sistema utilizando o método de Lagrange.

Resolução: Sistema: barra de massa M e pêndulo simples de massa m e comprimento L . Molas de rigidez vertical k_1 e horizontal k_2 . **Diagramas:** DVC. **Referencial Oxy .** Três graus de liberdade independentes do sistema: $q_1 = x$, $q_2 = y$ e $q_3 = \theta$. Uma força externa ortogonal (F , A) é aplicada. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

Utilizando a fórmula de campo de velocidades pode-se expressar a partir da velocidade de \mathbf{G} do carro, a velocidade do ponto \mathbf{P} do pêndulo, que tem movimento relativo em torno da articulação \mathbf{G} que por sua vez é arrastado pelo movimento do carro (composição de movimento):

$$\begin{aligned}\vec{V}_{Bloco} &= \dot{x} \vec{i} \\ \vec{V}_B &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \\ \vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge (A-B) = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L \vec{u} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + L \dot{\theta} \vec{\tau} \\ \vec{V}_A &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + L \dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = (\dot{x} + L \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + (\dot{y} + L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \\ V_A^2 &= \dot{x}^2 + 2L \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}^2 + 2L \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo. A barra está apenas em translação (não tem rotação no plano considerado) e o pêndulo tem translação e rotação, conforme expressão anterior:

$$\begin{aligned}T_{Total} &= T_{Bloco} + T_{Pendulo} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{V}_O^2 + m \vec{V}_O \cdot [\vec{\omega} \wedge (G-O)] + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [J]_O \{\omega\} \\ T(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} M \cdot \vec{V}^2 + \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_A^2 \\ T(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \dot{y}^2 + 2L \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2) \\ T &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + mL (\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}) \dot{\theta} + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Obs.: Pode-se alternativamente determinar a energia cinética do pêndulo utilizando o pólo B que

$$\text{é móvel, obtendo de maneira similar: } T_{Pendulo} = \frac{1}{2} m \vec{V}_B^2 + m \vec{V}_B \cdot [\dot{\theta} \vec{k} \wedge (A-B)] + \frac{1}{2} J_{Bz} \dot{\theta}^2.$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da altura h da massa m do pêndulo e das molas, sendo obtida por:

$$V = V(x, y, \theta) = V_{grav} + V_{elast} = mg \cdot h + mg y + \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 = mg \cdot L(1 - \cos \theta) + mg y + \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

A **DISSIPACÃO** (Rayleigh) é função da velocidade da barra:

$$R = R(\dot{x}) = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = x$, $q_2 = y$ e $q_3 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição (x , y e θ) e da velocidade (\dot{x} , \dot{y} e $\dot{\theta}$) do sistema, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

As equações de *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais, forças dissipativas (R_i) e ações externas (Q_i):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + mL \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = k_2 x \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c \dot{x} \end{aligned}$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e derivando com respeito ao tempo na equação de *Lagrange*, na coordenada $q_1 = x$, e considerando a força generalizada Q_1 , obtêm-se a seguinte equação escalar:

$$\boxed{(M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{x} + k_2 x = Q_1}$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_2 = y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} + mL \sin \theta \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} + mL \sin \theta \ddot{\theta} + mL \cos \theta \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial y} = k_1 y + mg \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = 0 \end{aligned}$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* nas coordenadas $q_2 = y$, considerando a força generalizada Q_2 , obtêm-se mais uma equação escalar (note que o termo $\dot{x}\dot{\theta}$ se cancela):

$$m\ddot{y} + mL \sin \theta \ddot{\theta} + mL \cos \theta \dot{\theta}^2 + k_1 y + mg = Q_2$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_3 = \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL(\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}) + mL^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mL(\cos \theta \ddot{x} + \sin \theta \ddot{y} - \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + \cos \theta \dot{\theta} \dot{y}) + mL^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial q_3} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = -mL \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = mL \dot{\theta} (\sin \theta \dot{x} - \cos \theta \dot{y}) + mgL \sin \theta \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{aligned}$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* nas coordenadas $q_3 = \theta$, considerando a força generalizada Q_3 , obtém-se mais uma equação escalar (note que o termo $\dot{x} \dot{\theta}$ se cancela):

$$mL(\cos \theta \ddot{x} + \sin \theta \ddot{y} + L \ddot{\theta}) + mgL \sin \theta = Q_3$$

As forças generalizadas podem ser obtidas da fórmula própria ou utilizando a equivalência entre o trabalho virtual ordinário e generalizado:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad \text{ou} \quad \delta W = \sum_{j=1}^k \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot dq_i$$

Utilizando o método de equivalência do trabalho virtual, tem-se por analogia que:

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{A} = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3$$

O deslocamento virtual do ponto A onde a força externa F está aplicada pode ser obtido da expressão da velocidade:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= (\dot{x} + L \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + (\dot{y} + L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \\ \frac{dA}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt} + L \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt} + L \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{j} \\ \delta A &= (\delta x + L \cos \theta \delta \theta) \vec{i} + (\delta y + L \sin \theta \delta \theta) \vec{j} \end{aligned}$$

Determinando o trabalho virtual ordinário em cada direção:

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot \delta \vec{A} = F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot [(\delta x + L \cos \theta \delta \theta) \vec{i} + (\delta y + L \sin \theta \delta \theta) \vec{j}] \\ \delta W &= (F \cos \theta \delta x + F \cos \theta L \cos \theta \delta \theta) + (F \sin \theta \delta y + F \sin \theta L \sin \theta \delta \theta) \\ \delta W &= F \cos \theta \cdot \delta x + F \sin \theta \cdot \delta y + FL \cdot \delta \theta\end{aligned}$$

As forças generalizadas por similaridade do trabalho virtual, resultam em:

$$Q_1 = F \cos \theta ; \quad Q_2 = F \sin \theta \quad \text{e} \quad Q_3 = FL$$

Resultando finalmente nas três equações diferenciais do sistema:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{x} + k_2 x &= F \cos \theta \\ m\ddot{y} + mL \sin \theta \ddot{\theta} + mL \cos \theta \dot{\theta}^2 + k_1 y + mg &= F \sin \theta \\ mL(\cos \theta \ddot{x} + \sin \theta \ddot{y} + L \ddot{\theta}) + mgL \sin \theta &= FL\end{aligned}$$

4 LINEARIZAÇÃO

Para aplicação de técnicas avançadas de análise como por exemplo em **Controle**, é necessário obter o sistema linearizado. Para atender a este requisito a aplicação da técnica de linearização para **PEQUENAS OSCILAÇÕES** em torno de um ponto de operação pode ser utilizada.

Lembrando do cálculo que uma função diferencial $\dot{x} = f(x)$, com posição de equilíbrio na origem $x_0 = 0$ tem sua descrição linearizada por expansão em série (*Mac Lauring* - ver detalhes no **Anexo A**) como:

$$\dot{x} = f(x) + x \cdot f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (40)$$

na mencionada posição de equilíbrio $x_0 = 0$ onde $f(x_0) = 0$, obtêm-se por expansão em série com termos de ordem superior agrupadas em $R_2(x)$ e desprezados:

$$\dot{x} = 0 + f'(0)x + R_2(x) \quad (41)$$

$$\dot{x} = f' \cdot x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \cdot x \quad (42)$$

sendo o movimento do sistema restrito a uma vizinhança da origem, a equação linearizada representará bem o seu comportamento.

Considere agora, um sistema descrito pela equação de *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (43)$$

Nas coordenadas generalizadas a energia cinética pode ser escrita na forma geral como:

$$T(q_i; \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \quad \text{onde} \quad \alpha_{j,k} = f(q_1, q_2, \dots, q_n \text{ e } \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (44)$$

Definindo para a posição de equilíbrio em torno da origem: $a_{i,j} = \alpha_{i,j}(0, 0, \dots, 0)$ então, a primeira parcela da expansão em série (ordem quadrática), será descrita como:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \quad (45)$$

onde:

$$\alpha_{j,k} = \alpha_{k,j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \cdot \partial \dot{q}_k} \quad \text{e particularmente} \quad \alpha_{j,j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j^2} \quad (46)$$

Agrupando de forma matricial obtêm-se o que é chamada de matriz **Hessiana** $[H]_T$ da função de energia cinética T dada por:

$$[H]_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2^2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Definindo $a_{(j,k)}$ na origem como:

$$a_{j,k} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \cdot \partial \dot{q}_k} \right]_{\text{origem}} \quad \text{obtêm-se:} \quad T_2(\dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j,k} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \quad (48)$$

Considere agora a expansão em série da função de Energia Potencial V , em torno da origem das coordenadas generalizadas:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \quad \text{onde} \quad V_1 = f(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ e } V_2 = f(q_1^2, q_2^2, \dots, q_n^2) \quad (49)$$

A primeira parcela V_0 , é o termo constante, que é arbitrário (cota de referencia da função potencial). Esta parcela não influi nas equações de movimento que são função da derivada parcial nas coordenadas generalizadas ($\partial V / \partial q_i$) e pode ser desconsiderada.

A segunda parcela $V_1 = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$, é o termo **linear** que tem a forma geral:

$$V_1 = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial V}{\partial q_j} \right] \cdot q_j \quad \text{onde} \quad V_1 = f(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (50)$$

Se a origem é um ponto de equilíbrio, a energia potencial é **mínima** neste ponto e todas as suas derivadas parciais primeiras se anulam na origem:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial q_j} \right]_{\text{origem}} = 0 \quad \text{portanto} \quad V_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (51)$$

A última parcela $V_2 = f(q_1^2, q_2^2, \dots, q_n^2)$, contém os termos **quadráticos** e tem a forma geral:

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{j,k} \cdot q_j \cdot q_k \quad \text{onde} \quad \beta_{j,k} = \beta_{k,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \cdot \partial q_k} \quad \text{e} \quad \beta_{j,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} \quad (52)$$

Agrupando de forma matricial obtêm-se o que é chamada de matriz **Hessiana** da função de energia potencial V :

$$[H]_V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

que é a parcela de menor ordem a ser considerada. Definindo $\mathbf{b}_{(j,k)}$ na origem como:

$$b_{j,k} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \cdot \partial q_k} \right]_{origem} \Rightarrow V_2(q_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{j,k} \cdot q_j \cdot q_k \quad (54)$$

A função *Lagrangeana* do problema linearizado será portanto $L_2 = T_2 - V_2$. Fazendo as derivadas parciais e temporais dos termos da função *Lagrangeana* obtêm-se:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \dot{q}_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k \quad (55)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k \quad (56)$$

Montando a equação de *Lagrange* linearizada para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio, obtêm-se finalmente:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = 0} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (57)$$

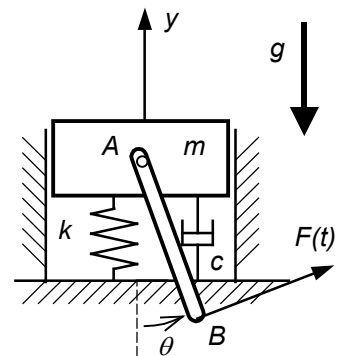
Esta equação também pode ser apresentada na forma matricial, utilizando as matrizes $[A]$ e $[B]$ e o vetor de coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [A]\{\ddot{q}\} + [B]\{q\} = \{0\} \quad (58)$$

onde se reconhece de imediato que $[A]$ é a matriz de **massa**, associada com as acelerações das coordenadas generalizadas e $[B]$ é a matriz de **rigidez**, associada com as coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ do sistema linearizado.

4.1 Linearização Exemplo 1: Massa Pêndulo

No sistema mostrado na figura, o bloco de massa m , está apoiado sobre uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante c . O bloco desliza sem atrito nas guias verticais. Uma barra AB de massa M e comprimento $2L$ está articulada no ponto A do bloco, formando o ângulo θ com a vertical. Uma força $F(t)$ é aplicada no ponto B da barra e ortogonal a ela. A mola têm comprimento livre y_0 . Determine as equações de *Lagrange* e linearize o sistema e identifique o ponto de equilíbrio.



RESOLUÇÃO: Sistema: barra (pêndulo) de massa M e comprimento $2L$ e bloco de massa m . Graus de liberdade independentes do sistema: $q_1 = y(t)$ e $q_2 = \theta(t)$. Força $F(t)$ ortogonal à barra. Mola de rigidez k . Amortecimento angular linear de coeficiente c . **DVC; DFCL; Referencial:** $Oxyz$. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e Dissipativas e equação de *Lagrange*.

No plano cartesiano Oxy da figura, as coordenadas ordinárias do bloco e da barra se relacionam com as coordenadas generalizadas $q_1 = y$ e $q_2 = \theta$, conforme as seguintes relações:

Utilizando a fórmula de campo de velocidades pode-se expressar a partir da velocidade de A do bloco a velocidade do centro de massa G da barra que tem movimento relativo em torno da

articulação A que por sua vez é arrastado pelo movimento vertical do bloco (composição de movimento):

$$\begin{aligned}\vec{V}_A &= \dot{y} \vec{j} \\ \vec{V}_G &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = \dot{y} \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \\ \vec{V}_G &= \dot{y} \vec{j} + L \dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = (L \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + (\dot{y} + L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \\ \vec{V}_G^2 &= \dot{y}^2 + 2L \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo. O bloco está apenas em translação (não tem rotação devido ao apoio nas superfícies guias laterais) e a barra tem translação e rotação, conforme expressão anterior:

$$\begin{aligned}T(\dot{y}, \theta, \dot{\theta}) &= T_{\text{bloco}} + T_{\text{Barra}} \\ T &= \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_A^2 + \frac{1}{2} M \cdot \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [J]_G \vec{\omega} \\ T &= \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M 2L \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(M \frac{(2L)^2}{12} \right) \dot{\theta}^2 \\ \boxed{T &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{y}^2 + M L \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + \frac{2}{3} M L^2 \dot{\theta}^2}\end{aligned}$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da altura h da massa m do bloco, da massa M da barra e da força elástica da mola de comprimento livre y_0 , sendo obtida por:

$$\begin{aligned}V &= V(y, \theta) = V_{\text{Bloco}_{\text{grav}}} + V_{\text{Barra}_{\text{grav}}} + V_{\text{elast}} = mg \cdot h_O + Mg \cdot h_G + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2 \\ \boxed{V &= mg \cdot y + Mg (y - L \cos \theta) + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2}\end{aligned}$$

A função dissipativa de **Rayleigh** é proporcional à velocidade das extremidades do amortecedor:

$$\boxed{R = R(\dot{y}) = \frac{1}{2} c \dot{y}^2}$$

As forças generalizadas Q_i podem ser obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais **PTV**:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum M_j \cdot \delta \theta_j = 0 = \sum Q_i \cdot \delta q_i \Rightarrow \vec{F}(t) \cdot \delta B = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2$$

O deslocamento virtual do ponto B é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = \dot{y} \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge 2L(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \\ \vec{V}_B &= \dot{y} \vec{j} + 2L \dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = 2L \dot{\theta} \cos \theta \vec{i} + (\dot{y} + 2L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \\ d B &= 2L d\theta \cos \theta \vec{i} + (dy + 2L d\theta \sin \theta) \vec{j}\end{aligned}$$

A força ordinária é: $\vec{F} = F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$

Portanto as forças generalizadas para $q_1 = y$ e $q_2 = \theta$ resultam em:

$$\begin{aligned}F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot \delta B &= Q_1 \cdot \delta y + Q_2 \cdot \delta \theta \\ \delta B &= 2L \delta \theta \cos \theta \vec{i} + (\delta y + 2L \delta \theta \sin \theta) \vec{j} \\ F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot (2L \delta \theta \cos \theta \vec{i} + (\delta y + 2L \delta \theta \sin \theta) \vec{j}) &= Q_1 \cdot \delta y + Q_2 \cdot \delta \theta \\ 2FL(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \delta \theta + F \sin \theta \delta y &= Q_1 \cdot \delta y + Q_2 \cdot \delta \theta\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_1 = F \sin \theta \quad e \quad Q_2 = 2FL}$$

Alternativamente pode-se utilizar a definição de forças generalizadas:

$$\begin{aligned}Q_i &= \sum_{j=1}^m \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \\ \vec{r}_B &= (A - O) + (B - A) = y \vec{j} + 2L(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) = 2L \sin \theta \vec{i} + (y - 2L \cos \theta) \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial q_1} &= \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial y} = 1 \vec{j} \quad e \quad \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}_B}{\partial \theta} = 2L \cos \theta \vec{i} + 2L \sin \theta \vec{j} \\ Q_1 &= F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot 1 \vec{j} = F \sin \theta \\ Q_2 &= F(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot 2L(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = 2FL\end{aligned}$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = y$ e $q_2 = \theta$; a função *Lagrangiana* depende da posição (y e θ) e da velocidade (\dot{y} e $\dot{\theta}$) do sistema, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})$$

As equações de *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i}$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (M + m)\dot{y} + ML \sin \theta \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= (M + m)\ddot{y} + ML \sin \theta \ddot{\theta} + ML \cos \theta \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = c \dot{y} \\ \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial y} = (M + m)g + k(y - y_0) \end{aligned}$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e derivando com respeito ao tempo na equação de *Lagrange*, na coordenada $q_1 = y$, e considerando a força generalizada Q_1 , obtêm-se a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1 \\ (M + m)\ddot{y} + ML \sin \theta \ddot{\theta} + ML \cos \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{y} + (M + m)g + k(y - y_0) &= F \sin \theta \end{aligned}$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ML \sin \theta \dot{y} + \frac{4ML^2}{3} \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ML \sin \theta \ddot{y} - ML \cos \theta \dot{\theta} \dot{y} + \frac{4ML^2}{3} \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = -ML \cos \theta \dot{y} \dot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = Mg L \sin \theta \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0\end{aligned}$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* na coordenada $q_2 = \theta$, considerando a força generalizada Q_2 , obtém-se mais uma equação escalar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta \\ ML \sin \theta \ddot{y} + \frac{4ML^2}{3} \ddot{\theta} + Mg L \sin \theta &= 2FL\end{aligned}$$

Assim as equações diferenciais do sistema para cada grau de liberdade são:

| |
|--|
| $\begin{aligned}(M+m)\ddot{y} + ML \sin \theta \ddot{\theta} + ML \cos \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{y} + (M+m)g + k(y - y_o) &= F \sin \theta \\ ML \sin \theta \ddot{y} + \frac{4ML^2}{3} \ddot{\theta} + Mg L \sin \theta &= 2FL\end{aligned}$ |
|--|

Note que os termos cruzados de aceleração (\ddot{y} e $\ddot{\theta}$) correspondem às forças do acoplamento na articulação em A . Neste caso o sistema linear formado pode ser tratado por eliminação de variável.

Ponto de Equilíbrio:

Para determinar o ponto de equilíbrio do sistema $q = [y \quad \theta]^T$, pode-se fazer nulas as acelerações e velocidades nas equações de movimento no ponto de equilíbrio estável $\bar{q} = [\bar{y} \quad \bar{\theta}]^T$.

$$(M+m)\ddot{y} + ML \sin \theta \ddot{\theta} + ML \cos \theta \dot{\theta}^2 + c \dot{y} + (M+m)g + k(y-y_0) = F \sin \theta$$

$$(M+m)g + k(y-y_0) = F \sin \theta \Rightarrow \bar{y} = [-(M+m)g + k y_0 + F \sin \theta] / k$$

$$ML \sin \theta \ddot{y} + \frac{4M L^2}{3} \ddot{\theta} + Mg L \sin \theta = 2FL$$

$$Mg L \sin \theta = 2FL \Rightarrow \bar{\theta} = \arcsen \frac{2F}{MgL}$$

Alternativamente, pode-se obter as derivadas parciais das funções potenciais que serão nulas no ponto de equilíbrio $\bar{q} = [\bar{y} \quad \bar{\theta}]^T$ do sistema homogêneo. Para a coordenada $q_1 = y$:

$$V = mg \cdot y + Mg(y - L \cos \theta) + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial y} \right]_{\bar{y}} = 0 \Rightarrow (M+m)g + k(y-y_0) = 0$$

$$\bar{y} = [-(M+m)g + k y_0] / k$$

Para coordenada $q_2 = \theta$

$$V = mg \cdot y + Mg(y - L \cos \theta) + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta} \right]_{\bar{\theta}} = 0 \Rightarrow Mg L \sin \bar{\theta} = 0$$

$$\bar{\theta} = n \cdot \pi \text{ (para } n \text{ par)}$$

Análise da Estabilidade:

A estabilidade do ponto de equilíbrio pode ser verificada inspecionando a matriz *Hessiana* da função potencial calculada no ponto de equilíbrio (deve ser definida positiva).

$$V = mg \cdot y + Mg(y - L \cos \theta) + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2$$

$$[H_V]_{\bar{q}} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right]_{\bar{q}} = 0 \Rightarrow \{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \bar{y} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 - (M+m)g/k \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Linearização das equações:

Para realizar a **linearização** das equações do sistema não amortecido, deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, e montar as equações na forma matricial:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas da energia cinética e potencial em relação as velocidade e coordenadas generalizadas:

$$T(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + M L \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + \frac{2}{3} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$V(y, \theta) = (M+m)g \cdot y - Mg L \cos \theta + \frac{1}{2} k (y - y_0)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2} = (M+m) \\ \alpha_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial \dot{\theta}} = M L \sin \theta \\ \alpha_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{y}} = M L \sin \theta \\ \alpha_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = \frac{4 M L^2}{3} \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = (M+m) \\ a_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial \dot{\theta}} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ a_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{y}} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ a_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = \frac{4 M L^2}{3} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k \\ \beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} = 0 \\ \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} = 0 \\ \beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = M g L \cos \theta \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = k \\ b_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ b_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ b_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Big|_{\substack{y=y_0=0 \\ \theta=0}} = M g L \end{array} \right\}$$

Utilizando os termos da matriz *Hessiana* acima, as duas equações finais resultam em:

$$i = 1 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot \dot{q}_k = a_{1,1} \cdot \ddot{y} + a_{1,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{1,1} \cdot \dot{y} + b_{1,2} \cdot \dot{\theta} = (M + m) \ddot{y} + k y = 0$$

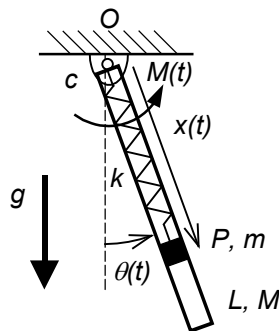
$$i = 2 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot \dot{q}_k = a_{2,1} \cdot \ddot{y} + a_{2,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{2,1} \cdot \dot{y} + b_{2,2} \cdot \dot{\theta} = \frac{4ML^2}{3} \ddot{\theta} + MgL \theta = 0$$

Rearranjando as equações linearizadas na forma matricial, obtêm-se finalmente:

$$\begin{bmatrix} (M + m) & 0 \\ 0 & \frac{4ML^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & MgL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.2 Linearização Exemplo 2: Pêndulo Partícula

Considere a partícula **P** de massa **m** deslizando sem atrito dentro do tubo guia de comprimento $2L$, massa **M**, sendo sustentado pela mola de rigidez **k** e comprimento livre x_0 . O movimento $x(t)$ ocorre em torno de articulação **O** lubrificada, produzindo uma dissipação linear de constante angular **c**. Um momento externo $M(t)$ é aplicado no tubo guia. Obtenha as equações de movimento e linearize o sistema.



RESOLUÇÃO: Sistema: tubo guia (pêndulo) de massa **M** e comprimento **L** e partícula de massa **m**. Graus de liberdade independentes do sistema: $q_1 = x(t)$ e $q_2 = \theta(t)$. Mola de rigidez **k**.

Amortecimento angular linear de coeficiente c . **DVC**; **Referencial**: $Oxyz$. **Teoremas**: Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

No plano cartesiano Oxy da figura, as coordenadas ordinárias da partícula e do tubo se relacionam com as coordenadas generalizadas $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$, conforme as seguintes relações:

$$\begin{aligned}(P-O) &= (x, y)_P = (x \sin \theta, -x \cos \theta) = (q_1 \sin q_2, -q_1 \cos q_2) \\ (G-O) &= (x, y)_{Tubo} = (L \sin \theta, -L \cos \theta) / 2 = (L \sin q_2, -L \cos q_2) / 2\end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo, obtêm-se as **velocidades** dos pontos P e do centro de massa G do tubo (Note que o termo cruzado do quadrado se anula):

$$\begin{aligned}\vec{V}_P &= (\dot{x} \sin \theta + x \cos \theta \dot{\theta}) \vec{i} + (-\dot{x} \cos \theta + x \sin \theta \dot{\theta}) \vec{j} \Rightarrow V_P^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 \\ \vec{V}_{Tubo} &= L(\cos \theta \dot{\theta} \vec{i} + \sin \theta \dot{\theta} \vec{j}) / 2 \Rightarrow V_{Tubo}^2 = L^2 \dot{\theta}^2 / 2\end{aligned}$$

Ou alternativamente compondo o movimento: $\vec{V}_P = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \rightarrow \vec{V}_{rel} = \dot{x} \vec{u} = \dot{x}(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i})$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge x(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \rightarrow \vec{V}_{arr} = \dot{\theta} x(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{V}_P = \dot{x}(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) + \dot{\theta} x(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{V}_P = (\dot{x} \sin \theta + \dot{\theta} x \cos \theta) \vec{i} + (-\dot{x} \cos \theta + \dot{\theta} x \sin \theta) \vec{j}$$

$$V_P^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2$$

Ou utilizando o referencial $O\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$ obtêm-se similarmente:

$$\vec{V}_{Prel} = \dot{x} \vec{u} \quad ; \quad \vec{V}_{Parr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge x \vec{u} = x \dot{\theta} \vec{\tau}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{Prel} + \vec{V}_{Parr} = \dot{x} \vec{u} + x \dot{\theta} \vec{\tau} \Rightarrow V_P^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2$$

$$\textbf{Energia Cinética: } T = T_{tubo} + T_{particula} \rightarrow T_O = \frac{1}{2} m V_O^2 + m \vec{V}_O \cdot [\vec{\omega} \wedge (G-O)] + \frac{1}{2} \{\omega\}' [J_O] \{\omega\}$$

$$\text{Tomando o pólo em } O: T_O^{tubo} = 0 + 0 + \frac{1}{2} \{\omega\}' [J_O] \{\omega\} \rightarrow T^{tubo} = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \dot{\theta}^2$$

$$T^{particula} = \frac{1}{2} m V_P^2 \rightarrow T^{particula} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2)$$

$$T = \left(\frac{1}{6} ML^2 + \frac{1}{2} mx^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Energia Potencial:

$$V(x, \theta) = Mg L(1 - \cos \theta) - mg x \cos \theta + \frac{k}{2} (x - x_0)^2$$

$$L = T - V = \left(\frac{1}{6} ML^2 + \frac{1}{2} mx^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - Mg L(1 - \cos \theta) + mg x \cos \theta + \frac{k}{2} (x - x_0)^2$$

Função de Dissipação de Rayleigh: $R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i \cdot \dot{q}_i^2$

Função de dissipação: $R = \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2$

Forças Generalizadas: $\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta x_j + M \cdot \delta \theta = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i$

$$M \cdot \delta \theta = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2$$

$$Q_x = 0 \quad \text{e} \quad Q_\theta = M$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Para a coordenada $q_1 = x$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m x \dot{\theta}^2 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -mg \cos \theta + k(x - x_0) \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$m(\ddot{x} - x \dot{\theta}^2) + k(x - x_0) - mg \cos \theta = 0$$

Note que esta é a equação *Newton*, complementada pela aceleração centrípeta $x\dot{\theta}^2$.

Para a coordenada: $q_2 = \theta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{1}{3} ML^2 + mx^2 \right) \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left(\frac{1}{3} ML^2 + mx^2 \right) \ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \left(Mg \frac{L}{2} + mgx \right) \sin \theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = c \cdot \dot{\theta}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{3} ML^2 + mx^2 \right) \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} + (Mg \frac{L}{2} + mgx) \sin \theta = M}$$

Note que o primeiro termo corresponde ao momento de inércia com parcela variável x da posição da partícula. O terceiro termo corresponde ao momento (braço x) devido a força de *Coriolis* $2m\dot{x}\dot{\theta}$.

Para realizar a linearização do sistema deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, e montar a equação na forma matricial:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot \dot{q}_k = Q_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas em relação as velocidade e coordenadas generalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = \left(\frac{1}{3} ML^2 + mx^2 \right) \\ \alpha_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} = 0 \\ \alpha_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} = 0 \\ \alpha_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = m \end{array} \right\} \text{ em torno da origem } \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = \frac{1}{3} ML^2 + mx_0^2 \\ a_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = 0 \\ a_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = 0 \\ a_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{\theta=0}^{x=0} = m \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = (mgx + MgL)\cos\theta \\ \beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = mg \sin\theta \\ \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} = mg \sin\theta \\ \beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \end{array} \right\} \text{ em torno da origem } \left\{ \begin{array}{l} b_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = mgx_0 + MgL \\ b_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = 0 \\ b_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = 0 \\ b_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{\theta=0}^{x=x_0} = k \end{array} \right\}$$

Obs.: seno $\theta = 0$ para $\theta = 0$. Utilizando os termos da matriz **Hessiana** acima, as duas equações finais resultam em:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad & \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{1,1} \cdot \ddot{\theta} + a_{1,2} \cdot \ddot{x} + b_{1,1} \cdot \theta + b_{1,2} \cdot x = Q_i \\ & \left(\frac{1}{3} ML^2 + mx_0^2 \right) \ddot{\theta} + (mx_0 + ML)g\theta = M(t) - c\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = 2 \quad & \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{2,1} \cdot \ddot{\theta} + a_{2,2} \cdot \ddot{x} + b_{2,1} \cdot \theta + b_{2,2} \cdot x = Q_i \\ & m \ddot{x} + kx = 0 \end{aligned}$$

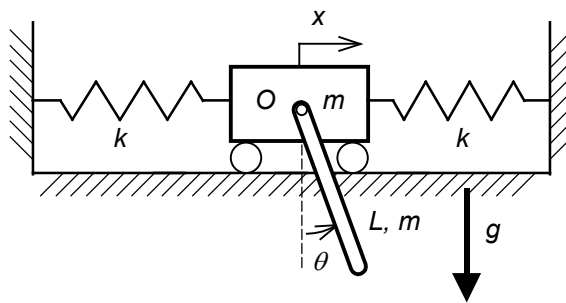
Na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} (ML^2/3 + mx_0^2) & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (ML + mx_0) & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M - c\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Note que para o sistema linearizado as matrizes tornaram-se diagonais e, portanto o acoplamento entre os movimentos não está mais descrito nas equações.

4.3 Linearização Exemplo 3: Carro Pêndulo Composto

No sistema mostrado na figura, o bloco de massa m , está interconectado com duas molas de rigidez k . No centro O do bloco, está articulada uma barra de comprimento L e massa m . As molas têm deformação nula quando a coordenada x do ponto O vale zero. Determine as equações de *Lagrange* e linearize o sistema.



Resolução: Sistema: bloco de massa m e pêndulo de massa m e comprimento L . DVC e DFCL; Duas molas de rigidez k . Graus de liberdade independentes do sistema: $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$. Referencial: Oxy . Teoremas: Energia Cinética, Energia Potencial, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

Utilizando a fórmula de campo de velocidades pode-se expressar a partir da velocidade de O do bloco a velocidade do centro de massa G do pêndulo que tem movimento relativo em torno da articulação O que por sua vez é arrastado pelo movimento do bloco (composição de movimento):

$$\vec{V}_O = \dot{x} \vec{i}$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L/2 (-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i})$$

$$\vec{V}_G = \dot{x} \vec{i} + L/2 \dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = (\dot{x} + L/2 \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} + L/2 \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{V}_G^2 = \dot{x}^2 + L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + L^2 \dot{\theta}^2 / 4$$

A **ENERGIA CINÉTICA** total do sistema é a soma da energia cinética de cada corpo. O bloco está apenas em translação (não tem rotação devido ao apoio na superfície) e o pêndulo tem translação e rotação, conforme expressão anterior:

$$\begin{aligned}
 T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= T_{\text{bloco}} + T_{\text{Pêndulo}} \\
 T &= \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_O^2 + \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [J]_G \vec{\omega} \\
 T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m \frac{L^2 \dot{\theta}^2}{4} + \frac{1}{2} m \frac{L^2}{12} \dot{\theta}^2 \\
 T &= m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2
 \end{aligned}$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da altura h da massa m do pêndulo e das forças elásticas das molas, sendo obtida por:

$$V = V(x, \theta) = V_{\text{grav}} + V_{\text{elast}} = mg \cdot h + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = mg \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + k x^2$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = x$ e $q_2 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição (x e θ) e da velocidade (\dot{x} e $\dot{\theta}$) do sistema, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

Não há forças dissipativas ($R_i = 0$) nem ações externas ($Q_i = 0$). As equações de *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + \frac{1}{2}mL \cos \theta \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= 2m\ddot{x} + \frac{1}{2}mL \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{1}{2}mL \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = 2kx\end{aligned}$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e derivando com respeito ao tempo na equação de *Lagrange*, na coordenada $q_1 = x$, e considerando a força generalizada Q_1 , obtêm-se a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x \\ 2m\ddot{x} + \frac{mL}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{mL}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 + 2kx &= 0\end{aligned}$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mL}{2} \cos \theta \dot{x} + \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{mL}{2} \cos \theta \ddot{x} - \frac{mL}{2} \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{mL}{2} \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{mgL}{2} \sin \theta\end{aligned}$$

Aplicando os resultados na equação de *Lagrange* nas coordenadas $q_2 = \theta$, considerando a força generalizada Q_2 , obtêm-se mais uma equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta \\ \frac{mL}{2} \cos \theta \ddot{x} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mgL}{2} \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

LINEARIZAÇÃO:

Para realizar a **linearização** do sistema deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, e montar a equação na forma matricial:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas da energia cinética e potencial em relação as velocidade e coordenadas generalizadas:

$$T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mL \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad V = V(x, \theta) = mg \cdot \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + k x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = 2m \\ \alpha_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} = \frac{mL \cos \theta}{2} \\ \alpha_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} = \frac{mL \cos \theta}{2} \\ \alpha_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = \frac{mL^2}{3} \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = 2m \\ a_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = \frac{mL}{2} \\ a_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = \frac{mL}{2} \\ a_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = \frac{mL^2}{3} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2k \\ \beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = 0 \\ \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} = 0 \\ \beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{mgL \cos \theta}{2} \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = 2k \\ b_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ b_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = 0 \\ b_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ \theta=0}} = \frac{mgL}{2} \end{array} \right\}$$

Utilizando os termos da matriz *Hessiana* acima, as duas equações finais resultam em:

$$i = 1 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{1,1} \cdot \ddot{x} + a_{1,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{1,1} \cdot x + b_{1,2} \cdot \theta = 2m \ddot{x} + \frac{mL}{2} \ddot{\theta} + 2k x = 0$$

$$i = 2 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{2,1} \cdot \ddot{x} + a_{2,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{2,1} \cdot x + b_{2,2} \cdot \theta = \frac{mL}{2} \ddot{x} + \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mgL}{2} \theta = 0$$

Na forma matricial obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 2m & \frac{mL}{2} \\ \frac{mL}{2} & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{mgL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Note que a matriz de inércia tem termos fora da diagonal principal que correspondem às forças do acoplamento do pino em O . Neste caso o sistema linear formado pode ser tratado por eliminação de variável.

4.4 Posição de Equilíbrio

Para que um função $x_j = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ a condição necessária para que um determinado ponto $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n)$ seja um ponto de equilíbrio é necessário que todas as derivadas parciais, calculadas naquele ponto específico, sejam nulas. Para definir se este ponto crítico é um ponto de máximo, mínimo ou de sela, é preciso calcular o determinante da matriz **Hessiana** e seus menores principais.

EXEMPLO: Para o exercício anterior a energia potencial foi determinada a partir do referencial em $(-x)$ para a partícula como:

$$V(x, \theta) = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + mg x (1 - \cos \theta) + \frac{k}{2} (x - x_0)^2$$

Tomando para a partícula o referencial em O , (termo $mg\,x$ não comparece) o ponto de equilíbrio ocorre quando as derivadas parciais da função potencial V são nulas:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial V(x, \theta)}{\partial \theta} = \left(Mg \frac{L}{2} + mg\,x \right) \sin \theta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial V(x, \theta)}{\partial x} = -mg \cos \theta + k(x - x_0) = 0$$

Da primeira equação (descartando o termo entre parêntesis) tem-se que $\sin \theta = 0$, que substituído na segunda, resulta em duas posições de equilíbrio vertical para baixo e para cima (para n par ou ímpar) resultando em:

$$\left(Mg \frac{L}{2} + mg\,x \right) \sin \theta = 0 \Rightarrow \bar{\theta} = 0 \text{ e } \bar{\theta} = n\pi \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{mg \cos \bar{\theta}}{k} \Rightarrow \bar{x} = x_0 \pm \frac{mg}{k} \text{ pois } \cos \bar{\theta} = \pm 1$$

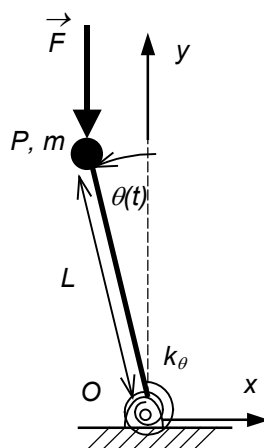
A matriz **Hessiana** permite verifica se os pontos de equilíbrio são estáveis ou instáveis:

$$[H]_V = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (mgx + MgL/2) \cos \theta & mg \sin \theta \\ mg \sin \theta & k \end{bmatrix}$$

4.5 Exemplo de Posição de Equilíbrio: Pêndulo Invertido

Considere o sistema composto por uma partícula P de massa m articulada em torno de O através de uma barra rígida de comprimento L e massa desprezível. O sistema se mantém no plano Oxy e a partícula é submetida a uma força vertical F . A barra é conectada a uma mola torcional de rigidez angular k_θ sendo que a posição neutra da mola ocorre para $\theta = 0$. Desconsiderando a ação gravitacional, pede-se:

- Descrever a expressão da energia cinética T do sistema em função da coordenada generalizada θ ;
- Escrever a expressão da energia potencial V do sistema;
- Obter a equação de movimento utilizando o método de *Lagrange*;
- Determine as posições de equilíbrio do sistema e a estabilidade em função da força vertical F . Verificar a existência de flambagem.
- Para cada caso de equilíbrio estável, linearize a equação de movimento e determinar a frequência de vibração nesta posição.



RESOLUÇÃO: Sistema: partícula P de massa m articulada em O com a barra de comprimento L . Graus de liberdade independentes do sistema: $\theta(t) = q_1$. Referencial e coordenadas $O\vec{i}\vec{j}$.

Teoremas: Energia Cinética, Energia Potencial, Função dissipativa, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

Utilizando a fórmula de campo de velocidades pode-se expressar a velocidade do ponto **P** a partir de **O** fixo:

$$\begin{aligned}\vec{V}_P &= \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) \\ \vec{V}_P &= 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L \vec{u} = L \dot{\theta} \vec{\tau} \\ (\vec{V}_P)^2 &= L^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** da partícula **P** com velocidade descrita conforme expressão anterior em torno do pólo **O** resultando em:

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \cdot (\vec{V}_P)^2 = \frac{1}{2} m \cdot L^2 \dot{\theta}^2$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da força **F** aplicada na partícula **P** e da mola de rigidez angular k_θ , sendo obtida por:

$$V = V(\theta) = FL \cos \theta + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2$$

Fazendo a coordenada generalizada $q_1 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição angular (θ) e da velocidade angular ($\dot{\theta}$) da barra, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(\theta, \dot{\theta})$$

A equação de *LAGRANGE* para a q_1 coordenada generalizadas é obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = \theta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_\theta \theta - FL \sin \theta$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e deriva temporal da coordenada $q_1 = \theta$ na equação de *Lagrange* obtêm-se a seguinte equação escalar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_1$$

$$\boxed{mL^2 \ddot{\theta} + k_\theta \theta - FL \sin \theta = 0}$$

Posição de Equilíbrio: A posição de equilíbrio ocorre quando as derivadas parciais da função potencial V são nulas ou fazendo a equação dinâmica com aceleração nula (condição de equilíbrio):

$$\frac{\partial (V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) - T_0)}{\partial q_i} = 0$$

$$\text{Para este caso: } V = \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 + FL \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = k_\theta \theta - FL \sin \theta$$

$$\text{Que resulta na expressão : } \quad \frac{k_\theta}{FL} \theta - \sin \theta = 0$$

A solução em função do ângulo θ está apresentada na Figura 1 a seguir:

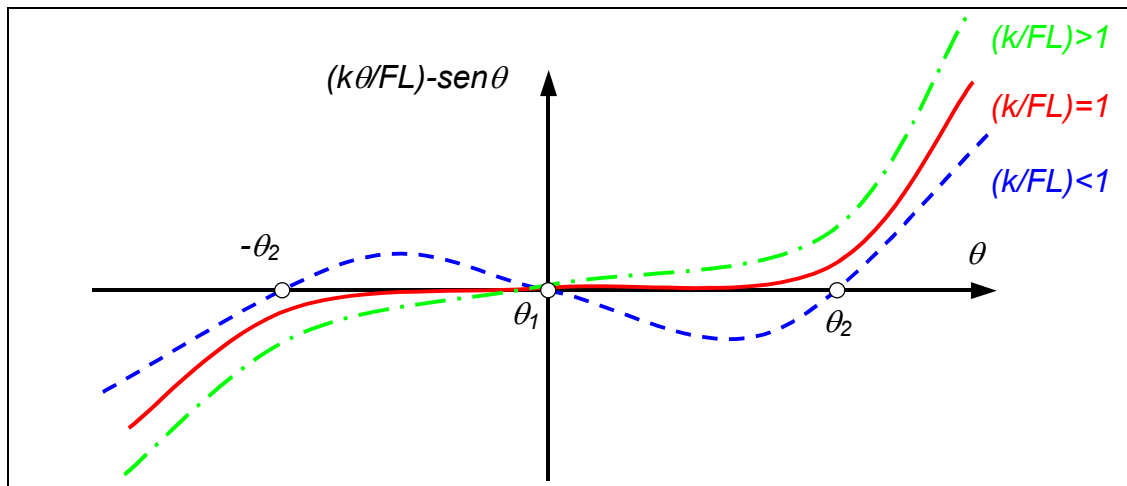


Figura 1 – Lugar da Raízes

A função indica que além da solução $\theta_1 = 0$ há duas outras para $-\theta_2$ e θ_1 quando $k_\theta < FL$

A solução $\theta_1 = \pi$ existe se $k_\theta = 0$.

Estabilidade: A solução é estável se:

$$\frac{\partial^2 (V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) - T_0)}{\partial q_i^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad k - FL \cos \theta > 0$$

a) Estabilidade para a solução $\theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\theta - FL > 0$

Estável se: $F < \frac{k_\theta}{L}$

Instável se: $F > \frac{k_\theta}{L}$

Bifurcação quando: $F = \frac{k_\theta}{L}$ quando se define a carga crítica de **flambagem**.

b) Estabilidade para a solução $\pm \theta_2$

Se: $F > \frac{k_\theta}{L}$ existem duas outras soluções em $\pm \theta_2$ para $0 < \theta_2 < \pi$

$$\text{Equação de equilíbrio em } \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{k_\theta}{FL} \theta_2 \quad \text{ou} \quad \cos \theta_2 = \frac{k_\theta}{FL} \frac{\theta_2}{\tan \theta_2}$$

$$\text{Lembrando que } k_\theta - FL \cos \theta > 0, \text{ obtêm-se: } k_\theta \left(1 - \frac{\theta_2}{\tan \theta_2} \right) > 0 \text{ que é sempre positiva}$$

portanto raízes estáveis.

RESUMINDO:

Se $F < \frac{k_\theta}{L}$ existe uma posição de equilíbrio **estável** em $\theta = 0$.

Se $F > \frac{k_\theta}{L}$ existem duas posições de equilíbrio **estáveis** em $\pm \theta_2$ simétricas e $\theta_1 = 0$ **instável**.

Frequência natural: Para cada posição de equilíbrio estável, pode-se linearizar a equação de movimento e determinar frequência de vibração naquela posição.

$$\text{Equação de movimento: } mL^2 \ddot{\theta} + k_\theta \theta - FL \sin \theta = 0$$

$$\textbf{Linearização:} \text{ movimento linearizado em torno } \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta \Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} + (k_\theta - FL) \theta = 0$$

$$\text{Para } F < \frac{k_\theta}{L} \text{ a frequência natural será } \omega^2 = \frac{k_\theta - FL}{mL^2}$$

Linearização: movimento linearizado em torno $\pm \theta_2$ substituindo variável $\Rightarrow \beta = \theta - \theta_2$ e utilizando fórmula de soma de ângulos ($\sin(\alpha + \beta)$):

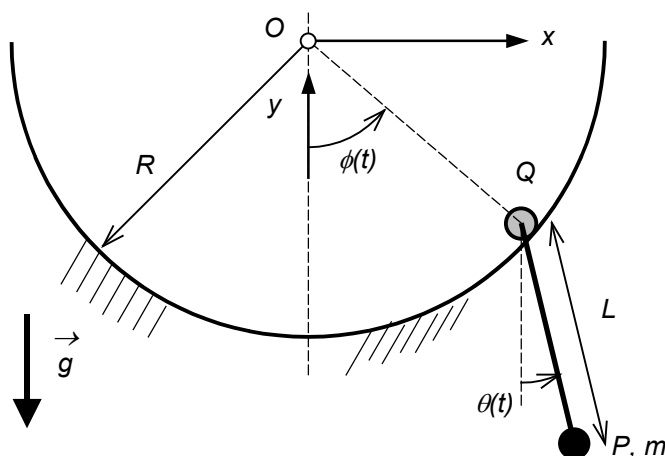
$$\begin{aligned} mL^2 \ddot{\beta} + k_\theta (\theta_2 + \beta) - FL \sin(\theta_2 + \beta) &= 0 \quad \text{pois } \ddot{\theta}_2 = 0 \\ \sin(\theta_2 + \beta) &= \cos \beta \sin \theta_2 + \sin \beta \cos \theta_2 \cong \sin \theta_2 + \beta \cos \theta_2 \\ mL^2 \ddot{\beta} + k_\theta (\theta_2 + \beta) - FL (\sin \theta_2 + \beta \cos \theta_2) &= 0 \\ k_\theta \theta_2 &= FL \sin \theta_2 \\ mL^2 \ddot{\beta} + (k_\theta - FL \cos \theta_2) \beta &= 0 \end{aligned}$$

A frequência natural será:
$$\omega^2 = \frac{k_\theta - FL \cos \theta_2}{mL^2}$$

4.6 Linearização Exemplo 4: Partícula em Guia Circular

Um rolete Q de massa desprezível desliza sobre uma pista cilíndrica ideal de raio R , mantendo-se no plano Oxy , e formando um ângulo ϕ em relação a vertical conforme indicado na figura. Uma partícula P de massa m , ligada a Q por uma haste de massa desprezível e comprimento L bascula com o ângulo θ .

- Descrever a expressão da energia cinética T do sistema em função das coordenadas generalizadas ϕ e θ ;
- Escrever a expressão da energia potencial V do sistema;
- Obter as equações de movimento utilizando o método de *Lagrange*;
- Supondo que o sistema realize pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio, obter as equações do movimento na forma linearizada.



Resolução: Sistema: partícula P de massa m formando um pêndulo de comprimento L e o rolete Q de massa nula que se movimenta sobre a pista cilíndrica de raio R . Graus de liberdade independentes do sistema: $\phi(t) = q_1$ e $\theta(t) = q_2$. **Referencial** e coordenadas $O\vec{i}\vec{j}$. **Teoremas:** Energia Cinética, Energia Potencial, Função dissipativa, Forças Generalizadas e equação de *Lagrange*.

A posição $\vec{r}(t)$ do ponto P em relação ao centro fixo O é descrita por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} = (P - O) \\ (P - O) &= (P - Q) + (Q - O) \\ (Q - O) &= R(\sin\phi\vec{i} - \cos\phi\vec{j}) \\ (P - Q) &= L(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}) \\ (P - O) &= (R\sin\phi + L\sin\theta)\vec{i} - (R\cos\phi + L\cos\theta)\vec{j}\end{aligned}$$

Portanto: $x_1 = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ e $x_2 = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$

$$x = R\sin q_1 + L\sin q_2 \quad e \quad y = -R\cos q_1 - L\cos q_2$$

Utilizando a fórmula de campo de velocidades e a identidade trigonométrica de soma de ângulos ($\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$), pode-se expressar a velocidade do ponto P a partir de O fixo:

$$\begin{aligned}\vec{V}_P &= \frac{d}{dt}[(R\sin\phi + L\sin\theta)\vec{i} - (R\cos\phi + L\cos\theta)\vec{j}] \\ \vec{V}_P &= (R\cos\phi\dot{\phi} + L\cos\theta\dot{\theta})\vec{i} + (R\sin\phi\dot{\phi} + L\sin\theta\dot{\theta})\vec{j} \\ \vec{V}_P^2 &= R^2\dot{\phi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2RL\cos(\theta - \phi)\dot{\phi}\dot{\theta}\end{aligned}$$

A **ENERGIA CINÉTICA** da partícula P com velocidade descrita conforme expressão anterior em torno do pólo O resultando em:

$$T(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m \cdot \vec{V}_P^2 = \frac{1}{2}m \cdot [R^2\dot{\phi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2RL\cos(\theta - \phi)\dot{\phi}\dot{\theta}]$$

A **ENERGIA POTENCIAL** é função da altura h da massa m da partícula P sendo obtida por:

$$V = V(\phi, \theta) = mg \cdot (1 - R\cos\phi - L\cos\theta)$$

Fazendo as coordenadas generalizadas $q_1 = \phi$ e $q_2 = \theta$; a função *Lagrangeana* depende da posição (ϕ e θ) e da velocidade ($\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$) da partícula, sendo definida como:

$$L = T - V \quad \text{onde} \quad L = L(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$$

As equações de *LAGRANGE* para q_i coordenadas generalizadas são obtidas pelas seguintes derivadas parciais e temporais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_1 = \phi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} + mRL \dot{\theta} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mR^2 \ddot{\phi} + mRL \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) - mRL \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mR^2 \ddot{\phi} + mRL \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) - mRL \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi) + mRL \dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} = mRL \dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = mgR \sin \phi \quad ; \quad Q_i^{nc} = 0 \end{aligned}$$

Aplicando os resultados das derivadas parciais e deriva temporal da coordenada $q_1 = \phi$ na equação de *Lagrange* e considerando a força generalizada Q_1 , (note que os termos indicados em vermelho se cancelam) obtêm-se a seguinte equação escalar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = Q_1$$

$$mR^2 \ddot{\phi} + mRL \cos(\theta - \phi) \ddot{\theta} - mRL \sin(\theta - \phi) \dot{\theta}^2 + mgR \sin \phi = 0$$

Realizando as seguintes derivadas parciais na coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} + mRL \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mL^2 \ddot{\theta} + mRL \ddot{\phi} \cos(\theta - \phi) - mRL \dot{\phi} \sin(\theta - \phi) (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mL^2 \ddot{\theta} + mRL \ddot{\phi} \cos(\theta - \phi) - mRL \dot{\phi} \cancel{\dot{\theta}} \sin(\theta - \phi) + mRL \dot{\phi}^2 \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = -mRL \dot{\phi} \cancel{\dot{\theta}} \sin(\theta - \phi) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgL \sin \theta \quad ; \quad Q_2^{nc} = 0\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando os resultados obtidos para a coordenada $q_2 = \theta$ na equação de *Lagrange* e considerando a força generalizada Q_2 , obtêm-se mais uma equação escalar:

$$\boxed{mL^2 \ddot{\theta} + mRL \cos(\theta - \phi) \ddot{\phi} + mRL \sin(\theta - \phi) \dot{\phi}^2 + mgL \sin \theta = 0}$$

Expressando na forma matricial, utilizando o vetor de coordenadas $q = \{\phi \quad \theta\}^T$ obtêm-se:

$$[M(q)]\{\ddot{q}\} + [C(q, \dot{q})]\{\dot{q}\} + [F]\{q\} = 0$$

onde:

$$\begin{aligned}[M(q)] &= \begin{bmatrix} mR^2 & mRL \cos(\theta - \phi) \\ mRL \cos(\theta - \phi) & mL^2 \end{bmatrix} \\ [C(q, \dot{q})] &= \begin{bmatrix} 0 & -mRL \sin(\theta - \phi) \dot{\theta} \\ mRL \sin(\theta - \phi) \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \\ [F(q)] &= [mgR \sin \phi \quad mgL \sin \theta]^T\end{aligned}$$

Note os termos fora da diagonal principal da matriz de massa $M(q)$, que é multiplicada pelas acelerações, correspondem ao acoplamento entre o cilindro e a partícula (força vincular). Note também que a matriz $C(q)$ é anti-simétrica.

LINEARIZAÇÃO: Utiliza-se das formas quadráticas da Energia Cinética e Energia Potencial para realizar a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio $\phi = 0$ e $\theta = 0$.

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \dot{q}_j \dot{q}_k \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_j q_k$$

Em seguida deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, e montar a equação na forma matricial:

$$a_{j,k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \Big|_{q_i^0} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \Big|_{q_i^0} \right) \quad \text{e} \quad b_{j,k} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{q_i^0}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = Q_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas da energia cinética

$$T = \frac{1}{2} m \cdot [R^2 \dot{\phi}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + 2RL \cos(\theta - \phi) \dot{\phi} \dot{\theta}] \quad \text{em relação às velocidade generalizadas e da função}$$

potencial $V = mg \cdot (1 - R \cos \phi - L \cos \theta)$ em relação às coordenadas generalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi}^2} = mR^2 \\ \alpha_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\theta}} = mRL \cos(\theta - \phi) \\ \alpha_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\phi}} = mRL \cos(\theta - \phi) \\ \alpha_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = mL^2 \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi}^2} \Big|_{\theta=0}^{\phi=0} = mR^2 \\ a_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\theta}} \Big|_{\theta=0}^{\phi=0} = mRL \\ a_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\phi}} \Big|_{\theta=0}^{\phi=0} = mRL \\ a_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \Big|_{\theta=0}^{\phi=0} = mL^2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = mgR \cos \phi \\ \beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} = 0 \\ \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} = 0 \\ \beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = mgL \cos \theta \end{array} \right\} \text{ em torno da origem } \left\{ \begin{array}{l} b_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0}^{\theta=0} = mgR \\ b_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} \Big|_{\phi=0}^{\theta=0} = 0 \\ b_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} \Big|_{\phi=0}^{\theta=0} = 0 \\ b_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Big|_{\phi=0}^{\theta=0} = mgL \end{array} \right\}$$

Utilizando os termos da matriz **Hessiana** acima, as duas equações finais resultam em:

$$i = 1 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{1,1} \cdot \ddot{\phi} + a_{1,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{1,1} \cdot \phi + b_{1,2} \cdot \theta = Q_1$$

$$mR^2 \ddot{\phi} + mRL \ddot{\theta} + mgR \phi = 0$$

$$i = 2 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{2,1} \cdot \ddot{\phi} + a_{2,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{2,1} \cdot \phi + b_{2,2} \cdot \theta = Q_1$$

$$mRL \ddot{\phi} + mL^2 \ddot{\theta} + mgL \theta = 0$$

Descrevendo o sistema na forma matricial obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} mR^2 & mRL \\ mRL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mgR & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

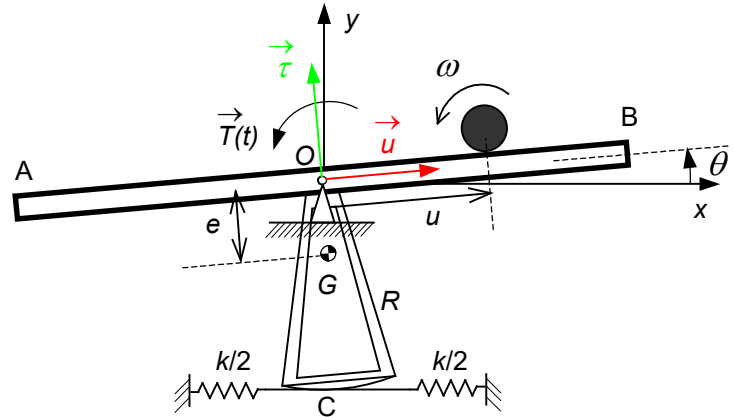
Note que para o sistema linearizado o acoplamento de forças entre os movimento devido ao vínculo permanece descrito na matriz de massas. O sistema linear de equações obtido pode ser tratado isolando as variáveis $\ddot{\phi}$ e $\ddot{\theta}$ por substituição.

Veja exemplo de movimento de pêndulo duplo em:

<https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>

4.7 Linearização Exemplo 5: Disco – Barra Guia

O balancim de massa M e momento de inércia J_{Gz} , tem movimento angular $\theta(t)$ prescrito em torno da articulação ideal em O fixo. O centro de massa G do balancim dista e do ponto O . O disco de massa m e raio r , rola sem escorregar sobre a guia AB , com posição definida pela cota u , medida ao longo da guia por um sensor de posição, a partir do ponto O . Este sistema também é conhecido como bola/barra.



Adicionalmente no setor de arco de raio R na extremidade inferior do balancim estão ancoradas duas molas de rigidez $k/2$ cada. As molas estão em seu comprimento livre quando $\theta = 0$. Um momento externo $\vec{T}(t)$ é aplicado no balancim. Considerando as coordenadas generalizadas $q_1 = u$ e $q_2 = \theta$, pede-se:

- a) Escreva a função de Energia Cinética do sistema em função de \dot{u} , $\dot{\theta}$ e dos parâmetros m , r , M e J_{Gz} . Dois corpos rígidos: balancim e o disco. Para o disco utilizando o referencial móvel $O\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$ solidário ao balancim, obtêm-se:

$$T = T_{Disco} + T_{Balancim}$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$$

$$\vec{V}_{rel} = \dot{u} \vec{u}$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (D - O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (u \vec{u} + r \vec{\tau}) = u \dot{\theta} \vec{\tau} - r \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_D = \dot{u} \vec{u} + u \dot{\theta} \vec{\tau} - r \dot{\theta} \vec{u} = (\dot{u} - r \dot{\theta}) \vec{u} + u \dot{\theta} \vec{\tau} \Rightarrow \vec{V}_D^2 = \dot{u}^2 - 2\dot{u} r \dot{\theta} + (r^2 + u^2) \dot{\theta}^2$$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2} m \cdot [\dot{u}^2 - 2\dot{u} r \dot{\theta} + (r^2 + u^2) \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \omega^2$$

Da cinemática do disco para rolamento sem escorregamento tem-se: $\omega = -\dot{u} / r$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2} m \cdot [\dot{u}^2 - 2\dot{u} r \dot{\theta} + (r^2 + u^2) \dot{\theta}^2] + \frac{1}{4} m \dot{u}^2$$

$$T_{Disco} = \frac{3}{4} m \dot{u}^2 - m r \dot{u} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m \cdot r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m u^2 \dot{\theta}^2$$

Para o balancim utilizando o referencial móvel $O\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$ solidário ao conjunto com O fixo, obtêm-se:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr} \quad \vec{V}_{rel} = 0$$

$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = 0 + \dot{\theta} \vec{k} \wedge (-e) \vec{\tau} = e \dot{\theta} \vec{u}$$

$$\vec{V}_G^2 = e^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_{Balancim} = \frac{1}{2} M \cdot (e^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} [J_{Gz}] \dot{\theta}^2$$

A Energia Cinética total do sistema resulta em:

$$T = \frac{3}{4} m \dot{u}^2 - m r \dot{u} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m u^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (e^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} [J_{Gz}] \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4} m \dot{u}^2 - m r \dot{u} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m u^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m r^2 + M e^2 + J_{Gz}) \dot{\theta}^2$$

b) Escreva a função de a Energia Potencial e de dissipação do sistema em função de u e θ e dos parâmetros m, r, g, R, k, M ;

$$V = V_{Disco} + V_{Balancim} + V_{Mola}$$

$$V_{Disco} = mg \cdot h = mg \cdot u \sin \theta$$

$$V_{Balancim} = mg \cdot h = Mg \cdot R(1 - \cos \theta)$$

$$V_{Mola} = \sum \frac{1}{2} k_i x_i^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{k}{2} R^2 \theta^2 \right) = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

A Energia Potencial total do sistema resulta em:

$$V = mg u \sin \theta + Mg \cdot R(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

c) Deduza as equações de movimento utilizando o método de *Lagrange*. Para a primeira coordenada generalizada $q_1 = u$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{3}{2} m \dot{u} - m r \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{u} - m r \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial u} = m u \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial u} = mg \cdot \sin \theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{u} - m r \ddot{\theta} - m u \dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0$$

Para a segunda coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -m r \dot{u} + (m u^2 + m r^2 + M e^2 + J_{Gz}) \dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = -m r \ddot{u} + (m u^2 + m r^2 + M e^2 + J_{Gz}) \ddot{\theta} + 2 m u \dot{u} \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg u \cos \theta + Mg R \sin \theta + k R^2 \theta$$

Força generalizada: Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + M \cdot \delta \theta = \sum Q_i \cdot \delta q_i = 0$$

$$T \cdot \delta \theta = Q_2 \cdot \delta \theta \Rightarrow Q_2 = T$$

Finalmente a segunda equação para coordenada generalizada $q_2 = \theta$ resulta em:

$$\boxed{-mr\ddot{u} + (mu^2 + mr^2 + M e^2 + J_{Gz})\ddot{\theta} + 2mu\dot{u}\dot{\theta} + mg u \cos \theta + MgR \sin \theta + kR^2 \theta = T(t)}$$

Fazendo a substituição de \ddot{u} da primeira equação na segunda, obtêm-se:

$$\ddot{u} = \frac{2}{3}(r\ddot{\theta} + u\dot{\theta}^2 - g \sin \theta)$$

$$\left(J_{Oz} + \frac{1}{3}mr^2 + mu^2 \right) \ddot{\theta} - \frac{2}{3}mru\dot{\theta}^2 + 2mu\dot{u}\dot{\theta} + mg \left(u \cos \theta - \frac{2}{3}r \sin \theta \right) + MgR \sin \theta + kR^2 \theta = T(t)$$

Linearização:

Para realizar a **linearização** das equações do sistema não amortecido, deve-se realizar as seguintes etapas: obter os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, fazer a simplificação na posição de equilíbrio da origem e obter os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, e montar as equações na forma matricial:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$, são obtidos das derivadas parciais duplas da energia cinética e potencial em relação as velocidade e coordenadas generalizadas:

$$T(u, \theta, \dot{u}, \dot{\theta}) = \frac{3}{4}m\dot{u}^2 - mr\dot{u}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mu^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(mr^2 + J_{Oz})\dot{\theta}^2$$

$$V(u, \theta) = mg u \sin \theta + Mg \cdot R(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k R^2 \theta^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u}^2} = \frac{3}{2}m \\ \alpha_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{u} \partial \dot{\theta}} = -mr \\ \alpha_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{u}} = -mr \\ \alpha_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} = mr^2 + J_{Oz} \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = \frac{3}{2}m \\ a_{1,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial \dot{\theta}} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = -mr \\ a_{2,1} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{y}} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = -mr \\ a_{2,2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = mr^2 + J_{Oz} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0 \\ \beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial \theta} = mg \cos \theta \\ \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial u} = mg \cos \theta \\ \beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = kR^2 \end{array} \right\} \quad \text{na origem} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = 0 \\ b_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = mg \\ b_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = mg \\ b_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0}^{u=0} = kR^2 \end{array} \right\}$$

Utilizando os termos da matriz *Hessiana* acima, as duas equações finais resultam em:

$$i = 1 \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{1,1} \cdot \ddot{u} + a_{1,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{1,1} \cdot u + b_{1,2} \cdot \theta = \frac{3}{2}m\ddot{u} - mr\ddot{\theta} + mg\theta = 0 \quad \text{e} \quad i = 2$$

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot q_k = a_{2,1} \cdot \ddot{u} + a_{2,2} \cdot \ddot{\theta} + b_{2,1} \cdot u + b_{2,2} \cdot \theta = -mr\ddot{u} + (mr^2 + J_{Oz})\ddot{\theta} + mg u + kR^2 \theta = 0$$

Rearranjando as equações linearizadas na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 3m/2 & -mr \\ -mr & (mr^2 + J_{Oz}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mg \\ mg & kR^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

As equações lineares obtidas pode ser isolas nas variáveis \ddot{u} e $\ddot{\theta}$ por substituição, obtendo:

$$\ddot{u} = \frac{2}{3}r\ddot{\theta} - \frac{2}{3}g\theta \quad \text{e} \quad \ddot{\theta} = \frac{mr\ddot{u} - mgu - kR^2\theta}{(mr^2 + J_{O_z})} \quad \text{e substituindo em cada equação, resulta em:}$$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + \frac{3}{2}J_{O_z}\right)\ddot{u} + mgru + [rkR^2 + (mr^2 + J_{O_z})g]\theta = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}mr^2 + J_{O_z}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{2}{3}mgr + kR^2\right)\theta + mgu = 0$$

Ou finalmente na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}mr^2 + \frac{3}{2}J_{O_z}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}mr^2 + J_{O_z}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr & [rkR^2 + (mr^2 + J_{O_z})g] \\ mg & \left(\frac{2}{3}mgr + kR^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que é apropriada para aplicação da técnica de controle.

5 Vínculos Não-Holônomos

Uma equação vincular cinemática que não pode ser integrada corresponde a um vínculo **NÃO-HOLÔNOMO**. Quando há vínculos não-holônomos no sistema (que não é objeto deste texto), utiliza-se de termos adicionais, chamados de **Multiplicadores de Lagrange**, para tratar explicitamente os efeitos vinculares. A equação de *Lagrange* do primeiro tipo tem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + C_i = Q_i^{nc} \quad (59)$$

onde as forças vinculares C_i são descritas por λ_k multiplicadores de *Lagrange* da seguinte forma:

$$C_i = \sum \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (60)$$

6 Vantagens e Desvantagens do Método Analítico

A técnica analítica que utiliza a equação de *Lagrange* para solução do sistemas mecânicos naturalmente tem vantagens e desvantagens. Lista-se a seguir alguns destes aspectos:

Vantagens: a) A abordagem de *Lagrange* gera automaticamente tantas equações quantos graus de liberdade houver. b) As equações de *Lagrange* usam naturalmente as coordenadas generalizadas do sistema. A formulação de *Lagrange* usa escalares relacionados com a energia ao passo que o equacionamento por *Newton* requer grandezas vetoriais. c) A abordagem *Lagrange* elimina naturalmente as forças de restrição vinculares. É possível fazer o mesmo com a abordagem direta (*newtoniana*), mas sua capacidade de minimizar o número de variáveis depende muito de habilidade. No método de *Lagrange* as forças são automaticamente tratadas, porque as forças generalizadas incluem apenas componentes de força em direções de movimentos admissíveis.

Desvantagens: a) Erros cometidos na formulação das energias cinética T , potencial V e trabalho não conservativo W_{nc} , poderão nunca ser percebidos. b) A física das forças e os diagramas de forças do corpo livre são ignorados. c) Deve-se sempre avaliar cada uma das equações obtidas pelo método de *Lagrange* e questionar se faz ou não sentido físico. d) A determinação das forças generalizadas pode ser tanto ou mais trabalhosa no método *Lagrangeano* quanto no método direto.

7 Referências Bibliográficas

Baruh, H. (1999) *Analytical Dynamics*. Rutgers University, Editora McGraw-Hill, pp. 718.

Goldstein, H. (1980) *Classical Mechanics*. Second Edition, Editora Addison-Wesley, p.

Greenwood, D. T. (1988) *Principles of Dynamics*. Second Edition, Editora Prentice-Hall. p. 337.

Arnold, R. N. Maunder L. (1961) *Gyrodynamics and its Engineering Applications*, Academic Press, p. 485.

Williams J. H. (1996) *Fundamentals of Applied Dynamics*. MIT, Editora John Wiley and Sons, pp. 884.

Lanczos, C. (1970) *The Variational Principles of Mechanics*. Editora Dover Publications, p. 418.

Meirovitch, L. (1970) *Methods of Analytical Dynamics*. Editora McGraw-Hill.

8 Anexo A – Expansão em Série

Relembrando do cálculo, considere que o comportamento de um sistema seja descrito pela equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ e que na origem $x = 0$ seja uma posição de equilíbrio. Sendo uma posição de equilíbrio sua variação nesta posição será nula, conforme descrito por:

$$\dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f(0) = 0 \quad (61)$$

A função f pode ser expandida em série (*Mac Lauring*) obtendo:

$$\dot{x} = f(x) + x \cdot f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (62)$$

Na mencionada posição de equilíbrio, onde $x = 0$, obtêm-se pela expansão em série:

$$\dot{x} = 0 + f'(0)x + R_2(x) \quad (63)$$

onde: $f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0}$ e $|R_2(x)|$ é de ordem de x^2 . A equação diferencial resulta, portanto em:

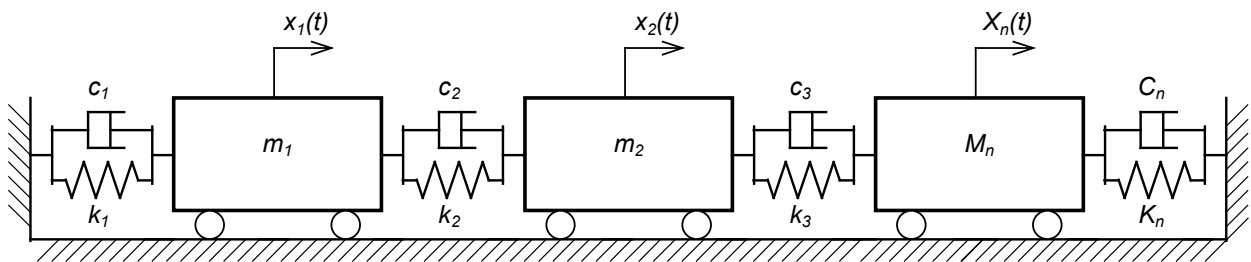
$$\dot{x} = f' \cdot x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \cdot x \quad (64)$$

que é a equação linearizada, associada à função $\dot{x} = f(x)$. Se o movimento do sistema permanece restrito a uma vizinhança da origem, a equação linearizada representará bem o seu comportamento.

9 Anexo B – Análise Modal

Para sistema mecânicos com mais de um grau de liberdade e acoplados, a transformação de coordenadas para outra base conveniente pode ser útil. As coordenadas modais que são coincidentes com os modos de vibrar, permite solucionar o problemas realizando uma análise modal analítica.

Considere o sistema discreto, livre não amortecido composto por duas massas com movimento horizontal conforme ilustrado na figura:



Sendo o sistema acoplado, haverão dois modos de vibrar: $\Phi_1 = \{x_{11} \ x_{12}\}^T$ e $\Phi_2 = \{x_{21} \ x_{22}\}^T$ com frequências naturais distintas ω_1 e ω_2 . Para $[C]=[0]$ e $[F]=[0]$ as equações do sistema na forma de *Newton* se reduzem à:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (65)$$

A historia temporal do movimento de cada grau de liberdade (x_1 e x_2), para um determinada frequência natural (ω_1) e portanto modo de vibrar $\Phi_i = \{x_{i1} \ x_{i2}\}^T$ será:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} \cdot e^{i\omega_1 t} \quad \text{ou simplesmente} \quad \{x\}_i = \{\Phi_i\} \cdot e^{i\omega_i t} \quad (66)$$

Utilizando esta solução e sua derivada de segunda ordem ($\{\ddot{x}\}_i = -\omega^2 \cdot \{\Phi\}_i \cdot e^{i\omega_i t}$) na equação dinâmica do sistema, obtêm-se:

$$-\omega^2 \cdot [M]\{\Phi\}e^{i\omega t} + [K]\{\Phi\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad e^{i\omega t} \cdot ([K] - \omega^2 \cdot [M])\{\Phi\} = \{0\} \quad (67)$$

como $e^{i\omega t} \neq 0$ resta solucionar o seguinte problema clássico de auto-valor e auto-vetor para $\lambda = \omega^2$:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M])\{\Phi\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad ([M]^{-1}[K] - \lambda \cdot [I])\{\Phi\} = \{0\} \quad (68)$$

Reescrevendo as equações na forma típica do auto-problema, obtêm-se a matriz dinâmica do sistema $[A] = [M]^{-1}[K]$, associada com os auto-valores $\lambda_i = \omega_i^2$ e os auto-vetores $\{\Phi_i\}$:

$$([M]^{-1}[K])\{\Phi\} = \lambda \cdot \{\Phi\} \quad \Rightarrow \quad [A]\{\Phi\} = \lambda \cdot \{\Phi\} \quad (69)$$

A solução típica do auto-problema é feito pelo cálculo do determinante:

$$\det([K] - \omega^2 \cdot [M]) = \{0\} \quad \text{ou} \quad \det([M]^{-1}[K] - \lambda \cdot [I]) = \{0\} \quad (70)$$

É importante constatar que os modos de vibrar representam uma base ortogonal no espaço. Desta forma a matriz modal apresenta as seguintes propriedades:

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} = 0 \quad (71)$$

sendo $\{\Phi_i\}$ o i -ésimo modo de vibrar associado com a i -ésima frequência natural ω_{ni} (idem para j). Assim tem-se que:

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\} = 1 \quad \text{e} \quad \{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_i\} = \omega_{ni}^2 \quad (72)$$

Neste caso os modos $\{\Phi_i\}$ são normalizados em relação a matriz e massa o que implica que a matriz modal $[\Phi] = [\{\Phi_1\} \ \{\Phi_2\} \ \dots \ \{\Phi_n\}]$ é ortonormal.

O sistema mecânico com múltiplos corpos (*Multibody System* - MBS) expresso em coordenadas físicas $\{x\}$, também pode ser expresso em coordenadas modais $\{q\}$, através da transformação de base, tal que:

$$\{x\} = [\Phi] \cdot \{q\} \quad (73)$$

Substituindo na equação anterior e pré multiplicando por $\{\Phi_i\}$ obtêm-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = 0 \quad (74)$$

Assumindo que a matriz modal $[\Phi]$ é normalizada em relação a matriz de massa $[M]$ e considerando a propriedade de ortogonalidade tem-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad \text{e} \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega] \quad (75)$$

onde $[\Omega] = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$. Aplicando esse resultado na equação anterior obtêm-se a equação modal do sistema mecânica com múltiplos corpos, expressa na base modal que é desacoplada e dada por:

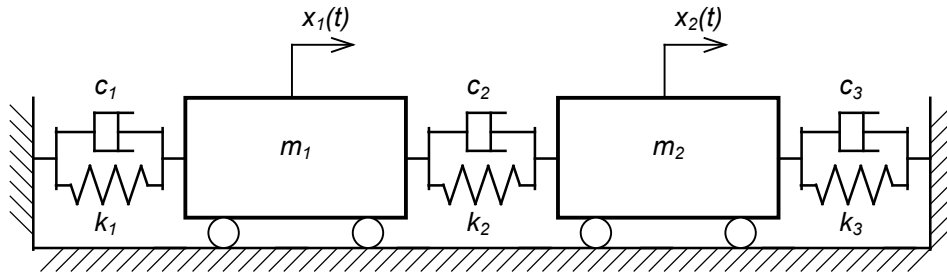
$$\{\ddot{q}\} + [\Omega] \cdot \{q\} = \{0\} \quad (76)$$

9.1 Exemplo Modal

Dois veículos em movimento livres num plano são interligados por molas e amortecedores lineares. As posições $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são medidas a partir das condições iniciais com as molas livres. Montar as equações de movimento na forma matricial e resolver o sistema pelo método de *modal*

calculando as frequências naturais e modos de vibrar, para os seguintes parâmetros do sistema:

$$m_1 = m_2 = m, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad \text{e} \quad k_1 = k_2 = k_3 = k$$



Resolução: Sistema: Veículo de massa m_1 e veículo de massa m_2 . **DFCL:** forças das molas e amortecedores sobre os corpos; Vínculos: rolete inferior deslizante sem atrito e interligação entre os veículos e as paredes com conjuntos mola+amortecedor. Utilizando o **TR** e montando na forma matricial as equações para os dois graus de liberdade obtêm-se:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Resolvendo o auto-problema determinando o polinômio característico em λ , obtido pelo determinando do sistema onde $\lambda = \omega^2$:

$$\det([K] - \lambda \cdot [M]) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \det \left(\begin{bmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & 2k - \lambda m \end{bmatrix} \right) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad (2k - \lambda m)^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 \frac{k}{m} \lambda + 3 \frac{k^2}{m^2} = 0 \quad \text{cujas raízes são os auto-valores ou frequências naturais: } \omega_{n1} = \sqrt{k/m} \quad \text{e}$$

$\omega_{n2} = \sqrt{3k/m}$ e substituído esses valores na equação do sistema obtêm-se os auto-vetores:

$$\Phi_1 = \{1 \quad 1\}^T \quad \text{e} \quad \Phi_2 = \{1 \quad -1\}^T.$$