

Mecânica II – PME 3200

Notas de Aula – Parte 2

INTRODUÇÃO À DINÂMICA

Roberto Spinola Barbosa

CONTEÚDO:

1.	INTRODUÇÃO	4
2.	CORPO RÍGIDO.....	5
2.1.	Definição	5
2.2.	Distribuição de Massa	5
2.3.	Centro de Massa	6
3.	TEOREMA DA RESULTANTE	7
3.1.	Referencial Móvel	13
3.2.	Sistemas de Massa Variável.....	14
4.	TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA.....	15
4.1.	Trabalho e Energia Cinética	15
4.2.	Teorema da Energia Cinética	17
5.	PROPRIEDADES DO CORPO RÍGIDO	25
5.1.	Momento Polar de Inércia	25
5.2.	Momento de Inércia em Relação a Eixo	26
5.3.	Produto de Inércia	30
5.4.	Matriz de Inércia	31
5.5.	Translação de Eixos	33
5.6.	Momento em Torno de Outro Eixo	37
5.7.	Mudança de Sistema de Coordenadas	38
5.8.	Eixos Principais e Central	43
5.9.	Elipsóide de Inércia.....	43
6.	QUANTIDADE DE MOVIMENTO	44
6.1.	Quantidade de Movimento Translacional	44
6.2.	Quantidade de Movimento Angular.....	44
6.3.	Movimento Angular e Momento.....	45
7.	ATITUDE DE UM CORPO	46
7.1.	Rotações Finitas	47
7.2.	Cossenos Diretores	48
7.3.	Rotações Sucessivas	50
7.4.	Ângulos de Euler.....	52
7.5.	Rotação Infinitesimal	55

7.6.	Taxa de Variação de um Vetor.....	59
7.7.	Velocidade Angular.....	61
7.8.	Aceleração Angular.....	63
7.9.	Aceleração Complementar	65
8.	TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR.....	66
8.1.	Momento da Quantidade de Movimento.....	66
8.2.	Momento da Quantidade de Movimento Angular.....	68
8.3.	Mudança de Pólo.....	71
8.4.	Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TQMA.....	73
9.	ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO	82
9.1.	Rotação em Torno de um Eixo.....	82
9.2.	Rotação em Torno de Dois Eixos.....	89
10.	BALANCEAMENTO	95
10.1.	Balanceadora	100
10.2.	Interpretação Gráfica da Anti-simetria.....	101
11.	ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO FIXO	104
11.1.	Ângulos de Euler.....	104
11.2.	Aplicação do TQMA.....	105
11.3.	Precessão Livre (Giroscópio).....	108
11.4.	Precessão Estacionária (Pião).....	112
12.	MOVIMENTO GERAL.....	122
13.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
14.	ANEXO A - Momento da Quantidade de Movimento	124
15.	ANEXO B – Mudança de Pólo para Momento Angular.....	125
16.	ANEXO C – Pêndulo Esférico (Resolução I)	126
17.	ANEXO D – Pêndulo Esférico (Resolução II).....	136
18.	ANEXO E - Quaternions.....	132

ATENÇÃO: Utilize sempre a última versão deste documento.

1. INTRODUÇÃO

Esta monografia resume as notas de aula deste autor na disciplina de Mecânica II (PME3200), elaborada ao longo do seu aprimoramento didático junto à equipe de dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica (PME) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EP-USP). O texto pressupõe que o aluno domine os conceitos de Mecânica Clássica, incluindo os temas relativos à estática, à cinemática e à dinâmica do ponto, usualmente adquiridos no curso de Mecânica I da POLI. Admite-se ainda que o leitor detenha os conhecimentos elementares de álgebra vetorial, álgebra linear e de cálculo diferencial e integral, adquirido nas disciplinas dos primeiros anos básicos (biênio) do curso de engenharia.

O texto se inicia pelo trato da Dinâmica de Sistema de Partículas onde a propriedade do centro de massa é apresentada. O corpo rígido é idealizado considerando a invariância entre as distâncias de suas partículas, onde a distribuição de massa é descrita. Os referenciais fixo e móvel, sistemas de coordenadas e composição de movimentos são lembrados. Na sequência a Dinâmica de Corpo Rígido, translacional (Teorema da Resultante - **TR**) e rotacional (Teorema da Quantidade de Movimento Angular - **TQMA**). A formulação da energia cinética do corpo rígido (Teorema da Energia Cinética - **TEC**) também é lembrada.

Nesta segunda parte é apresentado o Teorema da Quantidade de Movimento Angular - **TQMA** com foco na movimentação tridimensional.

2. CORPO RÍGIDO

2.1. Definição

Uma partícula é “**idealizada**” como um corpo sem dimensões físicas o que implica em ter toda sua massa, considerada não desprezível, concentrada em um único ponto. Um partícula é portanto um ponto material com massa não nula. Negligenciar sua dimensão significa também ignorar seu movimento de rotação. Um grande conjunto de partículas formam um corpo extenso e deformável. Se entretanto as deformações forem, numa primeira aproximação, consideradas desprezíveis face aos movimentos globais do corpo, constitui-se um corpo indeformável. Portanto um agregado de partículas com distâncias entre elas invariante, constitui-se um corpo rígido. Neste caso o corpo rígido deve ter obrigatoriamente sua atitude, descrita por seu movimento de rotação, considerada.

2.2. Distribuição de Massa

O corpo rígido homogêneo tem a distribuição de massa relacionada com sua forma. Desta distribuição três propriedades são destacadas:

- Centro de massa (momento de primeira ordem);
- Momento de Inércia (momento de segunda ordem);
- Produto de Inércia (simetria na distribuição da massa)

O **centro de massa** corresponde a posição de um pólo onde o momento de um sistema de forças paralelas associadas com as partículas do corpo, tem seu valor nulo. O **momento de inércia** corresponde à distribuição de massa em relação a um eixo. O **produto de inércia** quantifica a não simetria na distribuição da massa em relação a um par de eixos.

2.3. Centro de Massa

O centro de massa G de um corpo rígido (agregado de partículas) é o ponto onde o momento de um sistema de forças paralelas associado tem valor nulo. O centro de massa $(G-O) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$ de um corpo com partículas P_i com posição $(P_i-O) = \vec{r}_i$ em relação a O e massa m_i é determinado por:

$$(G-O) = \frac{\sum \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad (1)$$

Para um corpo de massa total m a posição do centro de massa $(G-O)$, descrito num sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ a expressão se simplifica:

$$x_G = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{m} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{m} \quad \text{e} \quad z_G = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{m} \quad (2)$$

$$\boxed{G = O + x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}} \quad (3)$$

3. TEOREMA DA RESULTANTE

A mecânica *Newtoniana* está baseado em três leis que são válidas para referenciais fixos ou em movimento uniforme. Estes referenciais são chamados de inerciais ou *newtonianos*. A primeira lei de *Newton* estabelece que uma partícula mantém sua quantidade de movimento se não houver ação de forças sobre ela. Isso implica que para massa invariante $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{V}(t) = cte$.

Para uma partícula de massa constante submetida a resultante de um sistema de forças $\vec{R}(t) = \sum \vec{F}_i$ observando a segunda lei de *Newton*, tem variação proporcional da sua quantidade de movimento:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}(t)) = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V}(t) + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = m \cdot \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}(t) \quad (4)$$

Para um agregado de partículas P_i de forças ativas e reativas $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (internas – Princípio da Ação e Reação da terceira lei de *Newton*) e forças externas somadas resultam em:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad (5)$$

Utilizando a propriedade de centro de massa e suas derivadas temporais:

$$\sum_{i=1}^n m_i (P_i - G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\vec{V}_i - \vec{V}_G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\vec{a}_i - \vec{a}_G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = m \cdot \vec{a}_G \quad (6)$$

resultando finalmente o que é chamado de Teorema da Resultante (**TR**) ou segunda Lei de *Newton*.

$$\boxed{m \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{R}} \quad (7)$$

Portanto, tudo se passa como se o centro de massa G se move como um ponto material de massa total m sujeito à resultante \vec{R} das forças externas a ele aplicada.

Exemplo: Dinâmica Movimento Circular

Considere uma partícula P de massa m com movimento circular com velocidade tangencial \vec{V}_P constante amarrada num fio ideal de comprimento L fixado na articulação no ponto O , conforme ilustrado na Figura 1a (similar a uma *boleadeira*). Determinar a força T no vínculo O e o ângulo θ de equilíbrio?

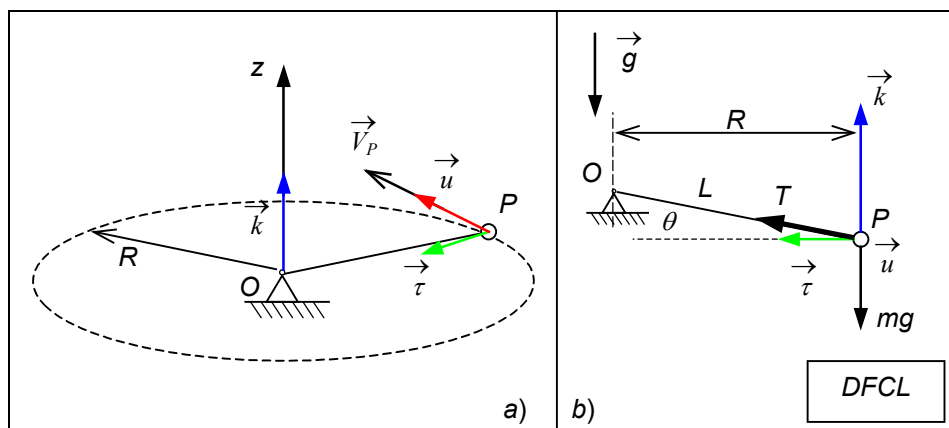


Figura 1 – Dinâmica da Partícula

Resolução: a) **Sistema:** partícula de massa m . b) **Referencial,** base e pólo: base móvel intrínseca $P\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$ solidária à partícula. c) **Diagramas:** DVC e DFCL conforme Figura 1b.

d) **Teoremas:** Campo de velocidade e aceleração e \vec{TR} . Para a trajetória circular tem-se:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0 + \omega \vec{k} \wedge L(-\cos\theta \vec{\tau} - \text{sen}\theta \vec{k}) = L\omega \cos\theta \vec{u}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega^2 L \cos\theta \vec{\tau}$$

$$m \vec{a}_P = \sum \vec{F} \Rightarrow m \omega^2 L \cos\theta \vec{\tau} = T(\cos\theta \vec{\tau} + \text{sen}\theta \vec{k}) - mg \vec{k}$$

$$\begin{cases} m a_{G\ddot{u}} = 0 \\ m \omega^2 L \cos \theta = T \cos \theta \\ T \sin \theta = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{G\ddot{u}} = 0 \\ T = mL\omega^2 \\ \theta = \arcsen \frac{mg}{T} = \arcsen \frac{g}{L\omega^2} \end{cases} \quad (\text{Note que o fio tem inclinação } \theta)$$

Exemplo: Movimento Circular

A cruzeta $OABP$ de massa desprezível, restringe a massa m na extremidade P , a uma distância L do eixo, a girar com velocidade angular $\vec{\omega}$, conforme mostrado na Figura 2a. Determinar as reações dinâmicas nos mancais A e B .

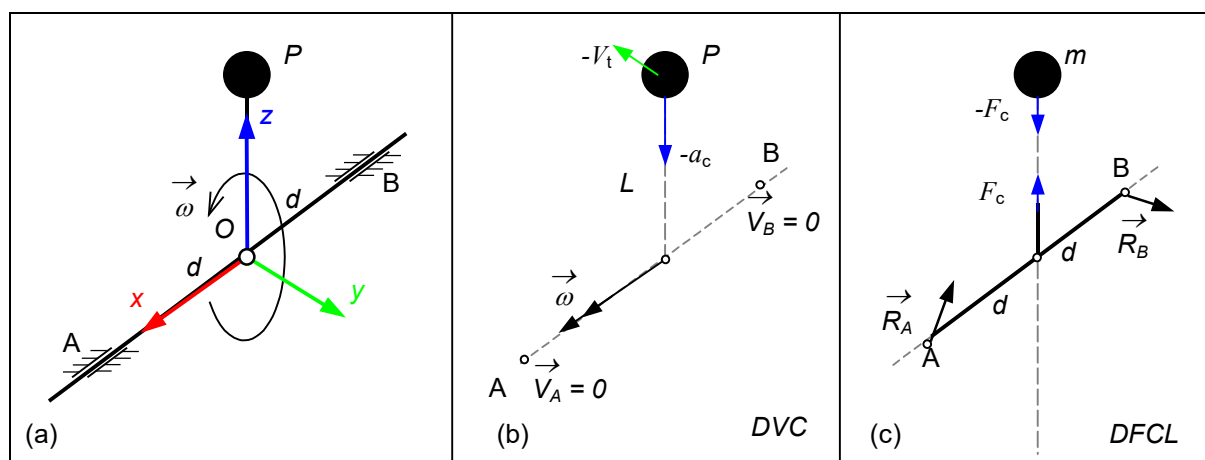


Figura 2 – Movimento Circular de Corpo Excêntrico

Método de Resolução: a) **Sistema:** O sistema é constituído por uma massa excêntrica vinculada à cruzeta que gira em torno do eixo AB . b) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial fixo centrado no pólo O com sistema de coordenadas $Oxyz$ móvel solidário ao sistema (ou seja girando junto com o sistema), a posição P da partícula, fica definida pelas coordenadas L na direção z . c) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*) a massa fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da cruzeta que recebe a reação centrífuga e as reações dos mancais \vec{R}_A e \vec{R}_B . d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações da cinemática, obtêm-se para o corpo P :

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega \vec{i} \wedge (\omega \vec{i} \wedge L_i \vec{k}) = -L\omega^2 \vec{k}$$
 que é a aceleração centrípeta, conforme apresentado na Figura 2b.

d) **Teoremas:** Aplicando o teorema da resultante (*TR*) no corpo, observando o *DFCL* apresentado na Figura 2c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se as reações dinâmicas:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{R}_A + \vec{R}_B + m \vec{g} \Rightarrow -m \cdot L \omega^2 \vec{k} = A_z \vec{k} + B_z \vec{k} - mg \vec{K} \Rightarrow A_z + B_z = -m \cdot L \omega^2 \Rightarrow$$

$$\vec{M}_O = (A-O) \wedge \vec{R}_A + (B-O) \wedge \vec{R}_B \Rightarrow \vec{M}_O = d \cdot A_z + d \cdot B_z = 0 \Rightarrow A_z = B_z = -m \cdot L \omega^2 / 2$$

Note que a excentricidade da massa produz forças em fase nos mancais. Tal força pode ser anulada compensando a excentricidade com a introdução de uma massa idêntica mas em posição oposta (o centro de massa passa a coincidir com o eixo de rotação), balanceando o sistema.

Exemplo: Sistema Massa-Mola

Considere uma partícula de massa m se movimentando sobre um plano sem atrito submetida a uma força externa $F(t)$ e vinculada à extremidade de uma mola de rigidez k . Tomando o referencial $Oxyz$ com a força gravitacional orientada para baixo na direção $O\vec{k}$, conforme ilustrado no Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre apresentado na Figura 3b, tem-se do Teorema da Resultante (**TR**) que $m \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$, sabendo que a força de mola é $F_m = -k(x - x_0)$ resultando em:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = F(t) - F_{mola} \\ m \cdot \ddot{y} = 0 \\ m \cdot \ddot{z} = N_1 + N_2 - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} + k(x - x_0) = F(t) \\ \ddot{y} = 0 \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases}$$

A expressão $m\ddot{x} + kx = 0$ quando x_0 é o comprimento livre da mola, é a conhecida como equação diferencial de segunda ordem em x do sistema oscilatório massa/mola livre.

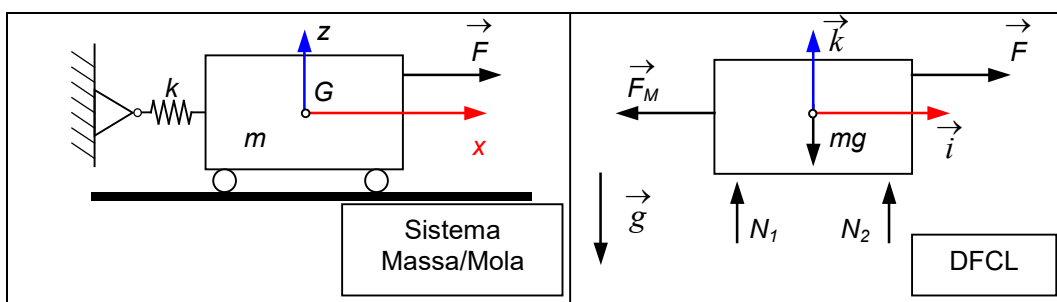


Figura 3 – Sistema Massa-Mola

A resolução de uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea (sem forçamento externo) a termos constantes (escalares m e k) é obtida pela observação de um movimento oscilatório do sistema quando retirado da posição de equilíbrio. Portanto considera-se que uma possível solução é um movimento de oscilação harmônica. Uma função harmônica oscilatória pode ser representada por $x(t) = X \cdot \text{sen}(\omega t)$. Utilizando esta função e sua derivada segunda em

relação ao tempo $\ddot{x}(t) = -\omega^2 X \cdot \text{sen}(\omega t)$ na equação diferencial obtêm-se o valor da frequência natural de vibrar do sistema, sendo portanto uma possível solução:

$$m\ddot{x} + kx = -m\omega^2 X \text{sen}(\omega t) + kX \text{sen}(\omega t) = 0 \Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)X \text{sen}(\omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.1. Referencial Móvel

A equação fundamental da dinâmica deve ser modificada quando se considera um referencial não fixo. Da formula de composição e movimentos tem-se que:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{com} \quad (8)$$

Observando a segunda lei de *Newton*, que é válida apenas para referenciais fixos (*Newtoniano* ou inercial), mas expressando os movimentos em um referencial móvel, tem-se que:

$$m \cdot \vec{a}_{rel} = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_{arr} - m \cdot \vec{a}_{com} \quad (9)$$

Chamando de forças “*fictícias*” de arrastamento e complementar, devido ao referencial móvel como: $\vec{F}_{arr} = -m \cdot \vec{a}_{arr}$ e $\vec{F}_{com} = -m \cdot \vec{a}_{com}$, obêm-se a equação de movimento expressa em referenciais não inercial:

$$\boxed{m \cdot \vec{a}_{rel} = \vec{F} + \vec{F}_{arr} + \vec{F}_{com}} \quad (10)$$

Ver exemplos de furacão e lançamento de pedra dentro de poço em *França* (2011) capítulo 9.2.

3.2. Sistemas de Massa Variável

Um sistema de massa variável que se movimenta com velocidade constante $\vec{V}(t)$ deve considerar que a massa expelida (ou admitida), terá uma velocidade própria $\vec{V}_{rel} = (\vec{V} - \vec{\mu})$. Observando a segunda lei de *Newton*, a variação da sua quantidade de movimento $\vec{p}(t)$ é proporcional a força motora ativa aplicada, na direção da linha da força:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{p}(t) &= \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}(t)) = \frac{d}{dt} m \cdot (\vec{V} - \vec{\mu})(t) + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}(t) \\ \frac{d}{dt} \vec{p}(t) &= \vec{\Phi} + \vec{F} \quad \text{onde} \quad \vec{\Phi} = -\dot{m} \cdot \vec{V}_{rel} \end{aligned} \quad (11)$$

Ou seja, quando um foguete expele “x” quilos por segundo de combustível à velocidade relativa $\vec{\mu}$, haverá uma força ativa de empuxo dada por: $\vec{\Phi} = \dot{m} \cdot (\vec{\mu} - \vec{V})$.

4. TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA

O Teorema da Energia Cinética (TEC) é ferramenta útil para a determinação de velocidade de partículas e agregados quando submetidos a campos potenciais. Também é útil para a compreensão da forma como a matéria é distribuída no corpo (matriz de inércia).

4.1. Trabalho e Energia Cinética

A ENERGIA CINÉTICA de uma partícula e de um agregado de “ n ” partículas, que é uma grandeza escalar, é dado por:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 \quad (12)$$

Diferenciando a expressão da energia cinética de um corpo rígido, com respeito ao tempo, resulta em:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i) \cdot m_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[2 \left(\vec{V}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}_i \right) \cdot m_i + (\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i) \cdot \frac{d}{dt} m_i \right] \quad (13)$$

Assumindo a invariância da massa do corpo rígido, o último termo se anula resultando em:

$$\frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot \vec{a}_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n P_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = P \quad (14)$$

que é a potência P das forças elementares aplicadas em cada partícula. Relembrando da expressão da potência:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} \quad \Rightarrow \quad P \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW \quad (15)$$

que é o trabalho elementar dW da força \vec{F} percorrendo o deslocamento $d\vec{r}$. Integrando ao longo do tempo e considerando o trabalho das forças internas e forças externas:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} P dt = \int_{t_0}^{t_1} dW \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} dT = \int_{t_0}^{t_1} dW^{ext} + \int_{t_0}^{t_1} dW^{int} \quad (16)$$

Para o caso de forças internas de ação e reação a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado apenas pelas forças externas entre os instantes considerados $[t_0, t_1]$:

$$T_1 - T_0 = W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{ext} + W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{int} = W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{ext} \quad (17)$$

$$\Delta T = W^{ext} \quad (18)$$

Para o caso de um conjunto de corpos com vínculos conservativos (trabalho das forças vinculares nulo), obtêm-se:

$$\sum T_1 - \sum T_0 = \sum W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{ext} + \sum W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{vinc} = \sum W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{ext} \quad (19)$$

$$\boxed{\Delta T = W_{(t_0 \Rightarrow t_1)}^{ext}} \quad (20)$$

Portanto a variação da **Energia Cinética** é igual à variação do **Trabalho** de forças potenciais entre dois instantes.

4.2. Teorema da Energia Cinética

Considere um corpo rígido com movimento genérico de roto-translação com velocidade \vec{V}_O e velocidade angular $\vec{\omega}$. Considere ainda um referencial móvel solidário ao corpo no ponto O , com o sistema de coordenadas tri-ortogonal xyz , conforme mostrado na Figura 4. A **ENERGIA CINÉTICA** T do ponto material P_i de massa m_i localizado na posição $(P_i - O) = \vec{r}_i$, que é uma grandeza escalar, e para o corpo como um todo (somatório), são obtidas de:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \cdot \vec{V}_i^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i^2 \quad (21)$$

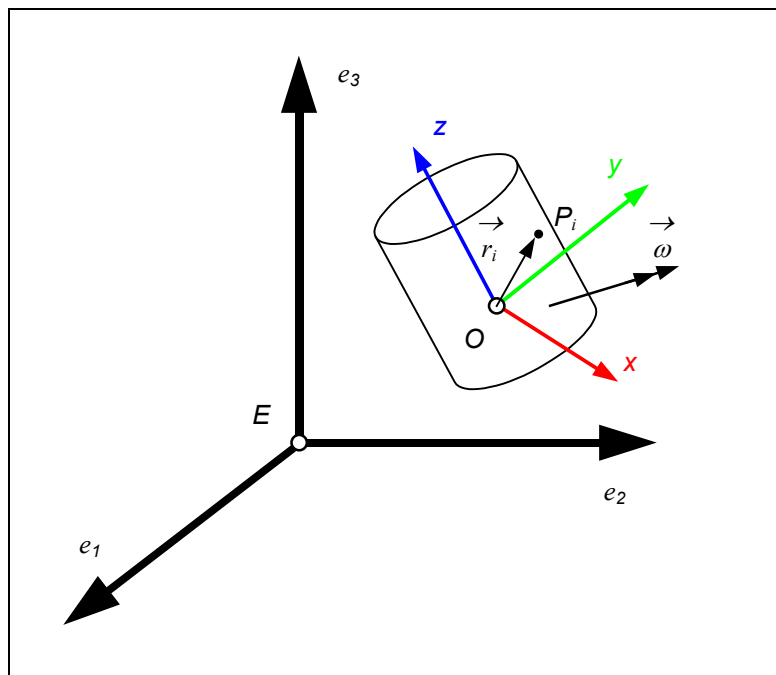


Figura 4 – Movimento do Corpo

A velocidade de qualquer ponto \vec{P}_i do corpo é dado pela fórmula de campo de velocidades $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ que substituindo na expressão anterior resulta em:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \quad (22)$$

Note que a fórmula de campo de velocidade vale para qualquer ponto i pertencente ao corpo rígido (ou extensão ideal do corpo). Expandindo o termo quadrático entre parêntesis da expressão anterior, obtêm-se três termos descritos a seguir:

$$T = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot 2\vec{V}_O (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \right) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \right) \quad (23)$$

Resolvendo o primeiro termo, lembrando que velocidade \vec{V}_O é única, obtêm-se o escalar:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 = \frac{1}{2} \vec{V}_O^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_O^2 \quad (24)$$

que é a energia cinética do corpo de massa total m devido ao movimento de translação \vec{V}_O .

Para o segundo termo têm-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot 2\vec{V}_O (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{V}_O \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i \quad (25)$$

relembrando do momento de primeira ordem: $(G-O) \cdot m = \sum m_i \cdot \vec{r}_i$ correspondendo à propriedade do centro de massa obtêm-se para o segundo termo o escalar:

$$\vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i = m \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G-O) \quad (26)$$

Para o terceiro termo $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2$, considerando a posição $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e a velocidade angular descrita na base móvel como $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, realiza-se inicialmente o produto vetorial do termo entre parêntesis:

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} + \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} + \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Fazendo o produto escalar correspondente ao quadrado de cada termo, recuperando o somatório dos elementos de massa m_i e rearranjando na forma matricial obtêm-se:

$$\begin{aligned} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} \cdot (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} &= \omega_y^2 \cdot z_i^2 - 2 \cdot \omega_y \omega_z \cdot y_i z_i + \omega_z^2 \cdot y_i^2 \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} \cdot (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} &= \omega_z^2 \cdot x_i^2 - 2 \cdot \omega_x \omega_z \cdot x_i z_i + \omega_x^2 \cdot z_i^2 \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \cdot (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} &= \omega_x^2 \cdot y_i^2 - 2 \cdot \omega_x \omega_y \cdot x_i y_i + \omega_y^2 \cdot x_i^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

ou de forma compacta:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\omega]^T [J]_O [\omega] \quad (30)$$

Este é o termo de energia devido à rotação do corpo. A matriz $[J]_O$ é quadrada, simétrica, de ordem 3, denominada **Matriz de Inércia** que retrata a forma como a massa é distribuída no corpo em relação ao sistema de coordenadas **Oxyz**. Os termos quadráticos na diagonal principal são denominados **Momentos de Inércia** em relação a eixos e os termos fora da diagonal são chamados de **Produtos de Inércia** em relação a pares de eixos coordenados.

Finalmente montando os três termos escalares denominados: energia cinética de translação, termo cruzado e termo de rotação, obtêm-se o escalar correspondente à **Energia Cinética** do sólido:

$$T = \frac{1}{2}mV_o^2 + m\vec{V}_o \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}[\omega]^t [J]_o [\omega] \quad (31)$$

Retomando a expressão do trabalho $\Delta T = W^{ext}$ para condições iniciais nulas, escreve-se o **Teorema da Energia Cinética (TEC)** como:

$$\boxed{\frac{1}{2}mV_o^2 + m\vec{V}_o \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}[\omega]^t [J]_o [\omega] = W^{ext}} \quad (32)$$

Casos particulares:

- a) Se a escolha das coordenadas auxiliares tiver a origem coincidente com o centro de massa ($O \equiv G$), a expressão da Energia Cinética se reduz à:

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}[\omega]^t [J]_G [\omega] \quad (33)$$

ou seja, a Energia Cinética medida em relação ao centro de massa G , é composta de duas parcelas associadas ao movimento de translação e outra ao movimento de rotação.

- b) Se o pólo escolhido for fixo $\vec{V}_o = 0$ então:

$$T = \frac{1}{2}[\omega]^t [J]_o [\omega] \quad (34)$$

ou seja, a Energia Cinética contém apenas termo devido à rotação. A Energia Cinética pode ser medida em relação a qualquer ponto do corpo ou extensão ideal (movimento solidário ao corpo) resultando sempre no mesmo escalar e, portanto, independe do pólo escolhido.

Exemplo: Disco rolando - TEC

Um disco homogêneo de massa m e raio R rola sem escorregar sobre um plano, acionado por um momento externo \vec{M} e retido por uma força externa $\vec{F}_{ext} = -F\vec{i}$, conforme mostrado na Figura 5. No instante inicial o disco possuía velocidade angular ω_0 e estava na posição x_0 . Calcule a velocidade angular $\vec{\omega}(t)$ em função da posição $x(t)$, a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ e as forças externas que agem sobre o disco.

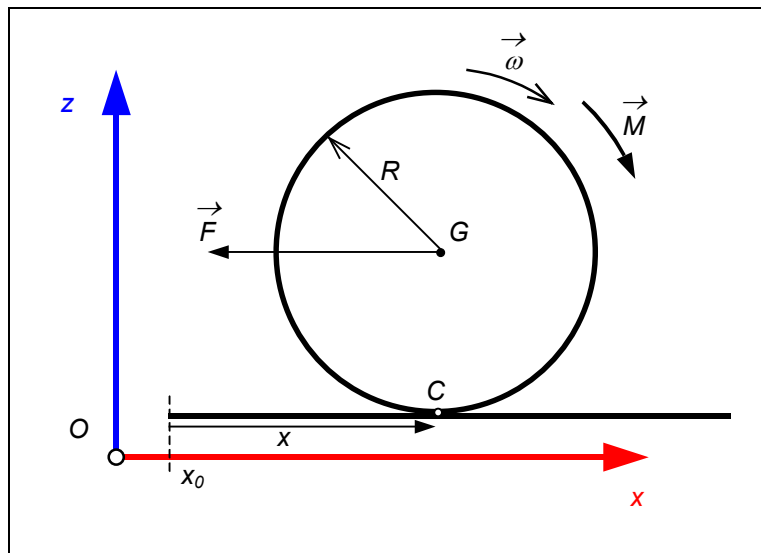


Figura 5 – Disco Rolando sem escorregar

Método de Resolução: a) O sistema é composto por um disco de massa m , raio R de centro em G , com rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$ acionado pelo momento externo \vec{M} e retido por uma força externa $\vec{F}_{ext} = -F\vec{i}$. b) Base Oxz fixa e pólo em G . c) Diagrama de velocidades e de forças conforme Figura 6. d) Teoremas: *TEC*.

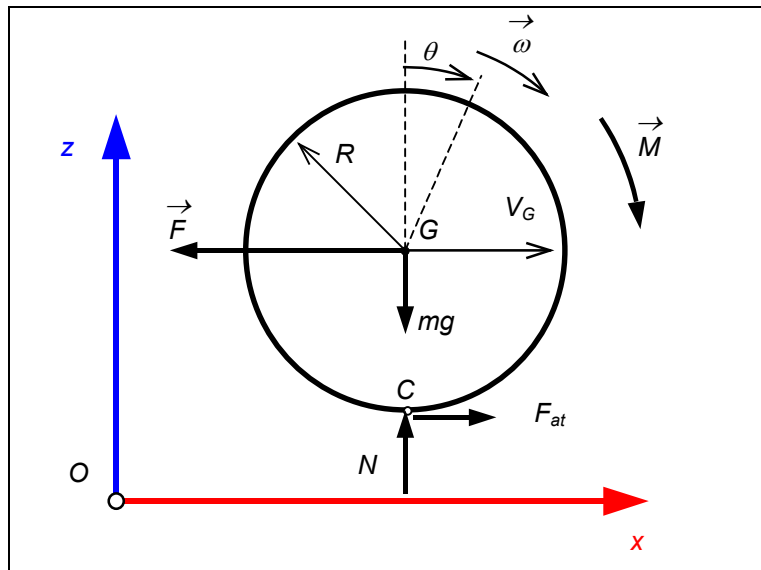


Figura 6 – Diagramas de Velocidade e de Força

Para determinar a velocidade do centro de massa utiliza-se da formula de campo de velocidades, considerando que o rolamento ocorre em torno do ponto C sem escorregamento, $\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) = 0 + \omega \vec{j} \wedge R \vec{k} = R\omega \vec{i}$. Considerando o pólo em G (termo cruzado nulo), a energia cinética é composta da parte translacional acrescida do termo rotacional por:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + m \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [J]_G \{\omega\} \text{ ou}$$

$$T = \frac{1}{2} m (R\omega \vec{i})^2 + \frac{1}{2} \{0 \quad \omega \quad 0\}^T \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_y \omega^2$$

$$\text{para } J_{Gy} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow T = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2$$

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por: $W^{ext} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \right)$ para deslocamento

$$x \vec{i} \text{ e ponto } C \text{ fixo: } W^{ext} = \int_{t_0}^{t_1} -mg \vec{k} \cdot dx \vec{i} + \int_{t_0}^{t_1} N \vec{k} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} F_{at} \vec{i} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} -F \vec{i} \cdot dG \vec{i} + \int_{t_0}^{t_1} M \cdot d\theta$$

$W^{ext} = -F \cdot x + M \cdot \theta$. Utilizando o **TEC** $\Rightarrow \Delta T = T - T_0 = W^{ext}$ e $x = \theta \cdot R$, obtêm-se:

$$\frac{3}{4} m R^2 \omega^2 = -F \cdot x + M \cdot \theta \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4}{3mR^2} \left(\frac{M}{R} - F \right) \cdot (x - x_0)$$

Derivando com respeito ao tempo e sabendo que $\dot{x} = V_G = \omega R$

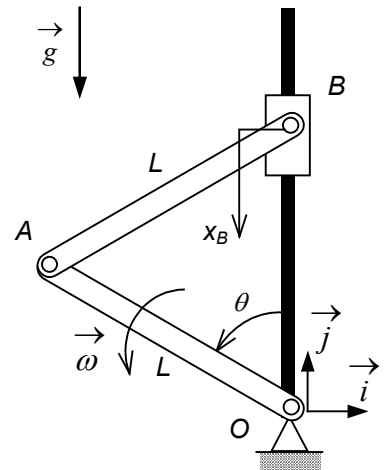
$$2\omega\dot{\omega} = 0 + \frac{4}{3mR^2} \left(\frac{M}{R} - F \right) \cdot \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{2}{3mR} \left(\frac{M}{R} - F \right)$$

As forças de contato no ponto C podem ser determinadas utilizando o **TR**: $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$ e o diagrama de forças sobre o corpo livre:

$$m \cdot \dot{\omega} R \vec{i} = (-F - F_{at})\vec{i} + (-mg + N)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = mg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{at} = -\frac{2M}{3R} - \frac{F}{3}}$$

Exemplo: Bloco deslizando - TEC

Considere o bloco B de massa m desliza sem atrito na vertical guiada pelo eixo fixo OB . A barra AB está articulada em A à barra OA que gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$ ao redor de O que é fixo. As barras OA e AB possuem massa m e comprimento L , conforme ilustrado na figura ao lado. Considere a posição inicial estacionária do sistema quando θ da barra OA é $\theta = 0^+$. Determinar a velocidade angular da barra AO.



Método de Resolução: a) Sistema: ?; b) Diagramas: ?; c) Referencial e Pólo: ?; d) Teoremas: ?.

a) Determinar a posição e velocidade do bloco B em função da posição angular θ da barra OA ;

$$(B - O) = (B - A) + (A - O) = L(\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) + L(\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) = 2L \cos \theta \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$x_B = -2L(1 - \cos \theta) \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_B = -2L \sin \theta \dot{\theta}$$

b) Determinar a Energia Cinética do bloco e de cada barra;

Para o bloco B : $T_B = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2 \quad \Rightarrow \quad T_B = (2mL^2 \sin^2 \theta) \omega^2$;

barra OA com pólo em O : $T_{OA} = \frac{1}{2} m \dot{x}_O^2 + \frac{1}{2} J_O \omega^2 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \dot{\theta}^2 = \left(\frac{1}{6} mL^2 \right) \omega^2$;

barra **AB** com pólo em **G** : $\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge (G-B)$ \Rightarrow

$$\vec{V}_G = -\dot{x}_B \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge L/2(-\cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{i}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V}_G = -2L \sin \theta \omega \vec{j} + L/2(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})\omega = (L/2 \cos \theta)\omega \vec{i} - (3/2L \sin \theta)\omega \vec{j}$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mV_{GAB}^2 + \frac{1}{2}J_{GAB}\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{4}\cos^2 \theta \omega^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{9L^2}{4}\sin^2 \theta \omega^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\omega^2$$

$$T_{AB} = \frac{mL^2}{24}(3\cos^2 \theta + 27\sin^2 \theta + 1)\omega^2 = \frac{3mL^2}{24}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 8\sin^2 \theta + 1/3)\omega^2$$

Para o sistema resulta em:

$$T = 2mL^2 \sin^2 \theta \omega^2 + \frac{1}{6}mL^2 \omega^2 + \frac{1}{3}mL^2(1 + 6\sin^2 \theta)\omega^2 = \frac{1}{3}mL^2(1 + 9\sin^2 \theta)\omega^2$$

c) Determinar o Trabalho das forças externas ao sistema;

Trabalho da força gravitacional do bloco **B**: $W_B = -\Delta U_{G_B} = -mg \cdot h = mg 2L(1 - \cos \theta)$; trabalho

do centro de massa da barra **OA** : $W_{OA} = -\Delta U_{G_{AO}} = mg \cdot h_{G_{AO}} = mg \frac{L}{2}(1 - \cos \theta)$; trabalho do

centro de massa da barra **AB** : $W_{AB} = -\Delta U_{G_{AB}} = mg \cdot h_{G_{AB}} = mg \frac{3L}{2}(1 - \cos \theta)$ \Rightarrow

$$W = 4mgL(1 - \cos \theta)$$

d) Utilizando o **TEC** determinar o valor da velocidade angular da barra **OA** em função de θ .

$$\Delta T = W^{ext} \Rightarrow \frac{mL^2}{3}(1 + 9\sin^2 \theta)\omega^2 = 4mgL(1 - \cos \theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12g}{L} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + 9\sin^2 \theta} \right)}$$

5. PROPRIEDADES DO CORPO RÍGIDO

5.1. Momento Polar de Inércia

Seja o sistema S de pontos materiais (P_i, m_i) , onde $i = 1, 2, \dots, n$ um agregado rígido de partículas, conforme mostrado na Figura 7. O **Momento Polar de Inércia** (momento de segunda ordem ou massa vezes distância ao quadrado) em relação ao pólo O , é determinado pelo escalar J_O tal que:

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O)^2 \quad (35)$$

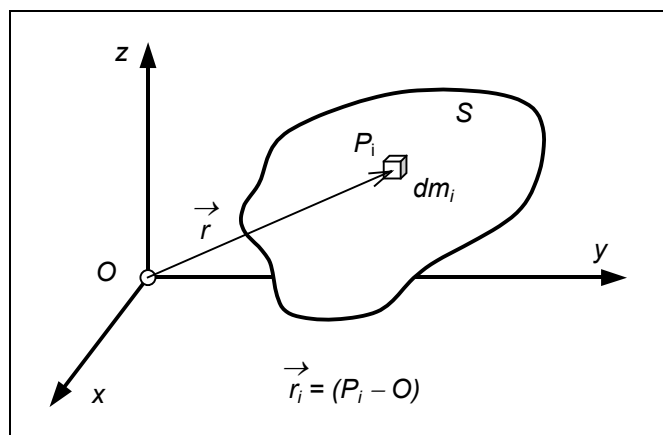


Figura 7 - Momento Polar de Inércia

Portanto para cada ponto material P_i de massa m_i , com distância $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ à origem O , tem-se:

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (36)$$

Pode-se também reduzir cada elemento material a uma partícula de massa dm e integrar ao longo do volume do corpo S conforme:

$$J_O = \int_{\text{corpo}} dm \cdot (P-O)^2 = \int_{\text{corpo}} dm \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (37)$$

Pode-se provar que: $2J_O = J_x + J_y + J_z$

5.2. Momento de Inércia em Relação a Eixo

Seja o sistema S de pontos materiais (P_i, m_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ um agregado rígido de partículas, conforme mostrado na Figura 8. O Momento de inércia J_r (momento de segunda ordem) em relação a reta $\vec{r} = r\vec{u}$ passante pelo ponto O , é dado pelo escalar:

$$J_r = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 \quad (38)$$

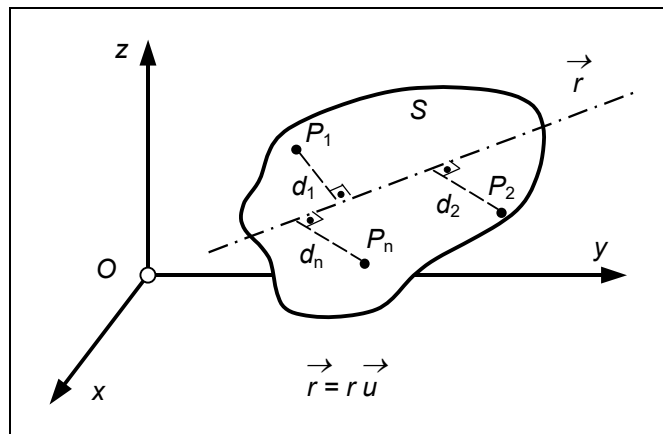


Figura 8 - Momento de Inércia em relação a um eixo

Portanto para cada ponto material P_i de massa m_i com distância d_i à reta $\vec{r} = r\vec{u}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_i &= (P_i - O) \cdot \text{sen } \theta_i \quad \Rightarrow \quad |d_i| = |(P_i - O)| |\vec{u}| \cdot \text{sen } \theta_i \\
 d_i^2 &= [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \quad \Rightarrow \quad J_r = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Para um agregado indeformável de partículas (corpo rígido) os momentos de inércia descritos num **Sistema de Coordenadas Cartesianas** $Oxyz$ resultam na seguinte forma:

$$\boxed{J_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)} \quad \boxed{J_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i^2 + x_i^2)} \quad \boxed{J_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)} \tag{40}$$

A forma como os momentos de inércia são organizados foi vista na dedução do Teorema da Energia Cinética (*TEC*) apresentado no 4.2.

Propriedade: Chama-se **Raio de Giração** “ i_r ” do sistema S em relação a reta $\vec{r} = r\vec{u}$, o escalar positivo, tal que:

$$J_r = M \cdot i_r^2 \quad \text{onde} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i \tag{41}$$

Propriedade: para sistemas planos ($z_i = 0$) $\Rightarrow J_z = J_x + J_y$

Exemplo: Determine a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da cruzeta $OABP_1P_2$ de massa desprezível, com duas massas m nas extremidades P_1 e P_2 , quando submetida a um binário de forças externas F_1 e F_2 (portanto momento M), conforme mostrado na Figura 9a.

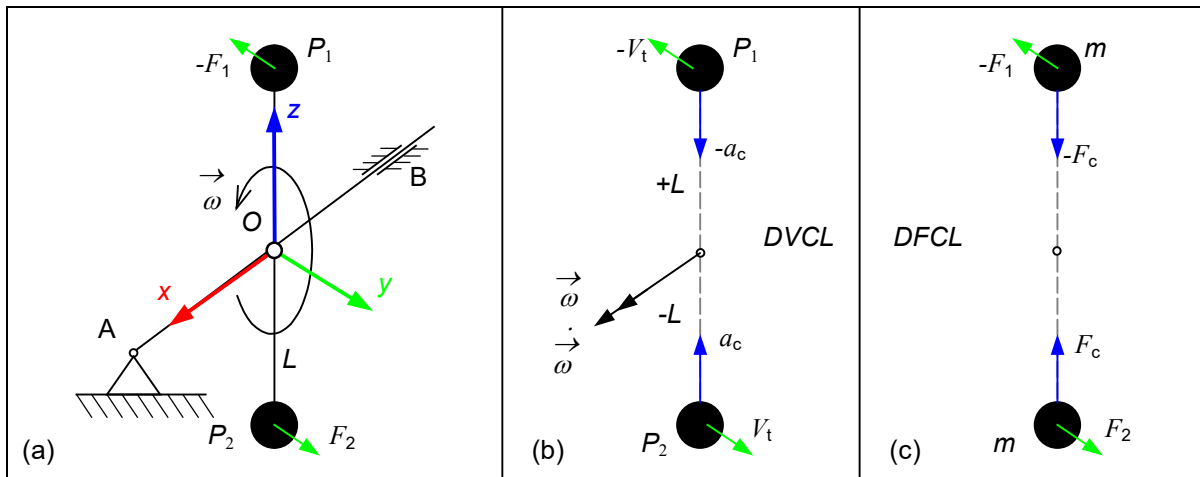


Figura 9 – Exemplo de Momento de Inércia

Método de Resolução: a) **Sistema:** O sistema é constituído por duas partículas de massa m , vinculadas e pela cruzeta que gira em torno do eixo AB . b) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial inercial centrado em O com sistema de coordenadas $Oxyz$, a posição P_1 e P_2 de cada partícula, fica definida pelas coordenadas $+L$ e $-L$, na direção z . c) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre ($DFCL$) cada massa fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da cruzeta e a força do binário externo. d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações da cinemática, obtêm-se para cada partícula P_i :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_p &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] \\
 \vec{a}_{P_1} &= 0 + \dot{\omega} \vec{i} \wedge L \vec{k} + \omega \vec{i} \wedge [\omega \vec{i} \wedge L \vec{k}] \\
 \vec{a}_{P_1} &= -L \dot{\omega} \vec{j} + \omega \vec{i} \wedge (-L \omega \vec{j}) = -L \dot{\omega} \vec{j} - L \omega^2 \vec{k} \\
 \vec{a}_{P_1} &= -a_t \vec{j} - a_c \vec{k} = \underbrace{-L \dot{\omega} \vec{j}}_{\text{Tangencial}} - \underbrace{L \omega^2 \vec{k}}_{\text{Centrípeta}}
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

que são as componentes de aceleração tangencial e centrípeta, conforme apresentado na Figura 9b.

d) **Teoremas:** Aplicando o teorema da resultante (TR) para cada partícula e observando o $DFCL$ apresentado na Figura 9c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se,

$$m \cdot \vec{a}_1 = \sum \vec{F} = -F_1 \vec{j} - F_c \vec{k} \quad \text{e} \quad m \cdot \vec{a}_2 = \sum \vec{F} = F_2 \vec{j} + F_c \vec{k}
 \tag{43}$$

O momento angular em torno do ponto O pode ser determinado pré-multiplicando vetorialmente os dois lados de cada expressão por $(L\vec{k} \wedge)$ e $(-L\vec{k} \wedge)$ respectivamente. Considerando que as forças centrípetas F_c se anulam, resulta em:

$$\begin{aligned} L\vec{k} \wedge m \cdot \vec{a}_1 &= L\vec{k} \wedge (-F_1)\vec{j} + L\vec{k} \wedge (-F_c)\vec{k} = LF_1\vec{i} \\ -L\vec{k} \wedge m \cdot \vec{a}_2 &= -L\vec{k} \wedge F_2\vec{j} - L\vec{k} \wedge F_c\vec{k} = LF_2\vec{i} \end{aligned} \quad (44)$$

Utilizando as acelerações de P_i determinadas anteriormente e considerando o sistema completo composto pelas duas partículas portanto, somando as equações obtêm-se:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} L\vec{k} \wedge m(-L\dot{\omega}\vec{j} - L\omega^2\vec{k}) = LF_1\vec{i} \\ -L\vec{k} \wedge m(L\dot{\omega}\vec{j} + L\omega^2\vec{k}) = LF_2\vec{i} \end{cases} \\ (2mL^2) \cdot \dot{\omega}\vec{i} = 2LF\vec{i} \quad \Rightarrow \quad J_x \dot{\omega} = \vec{M}_O \end{aligned} \quad (45)$$

Portanto o momento de inércia $J_x = 2mL^2$ (de maneira similar à inércia da massa) é a quantidade associada com a aceleração angular $\dot{\omega}$ produzida devido a ação de um binário de forças \vec{M}_O .

Alternativamente, verifica-se também que o variação do momento da quantidade de movimento

$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(2m \cdot \vec{V})$ é igual ao momento externo \vec{M}_O aplicado ao sistema:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} L\vec{k} \wedge m \cdot (-\dot{V}_1\vec{j}) = LF_1\vec{i} \\ -L\vec{k} \wedge m \cdot \dot{V}_2\vec{j} = LF_2\vec{i} \end{cases} \\ (P-O) \wedge 2m \cdot \dot{\vec{V}} = 2LF\vec{i} \quad \Rightarrow \quad (P-O) \wedge \dot{\vec{p}} = \vec{M}_O \end{aligned} \quad (46)$$

5.3. Produto de Inércia

O produto de inércia em relação a pares de eixos, de um conjunto agregado de partículas de massas m_i , por definição, é dado por:

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i \quad ; \quad J_{yz} = J_{zy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot z_i \quad ; \quad J_{zx} = J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot x_i \quad (47)$$

O significado físico do produto de inércia está associado com a simetria de distribuição das massas de cada partícula em torno do centro de massa. A forma como os produtos de inércia são organizados foi vista na dedução do Teorema da Energia Cinética (*TEC*) apresentado no 4.2.

Efeito do Produto de Inércia

Considere agora o sistema com duas massas m presas nas extremidades P_1 e P_2 da estrutura ABP_1P_2 , deslocadas entre si de uma distância $2d$ ao longo do eixo \overline{AB} com distância $2L$ e girando com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$ constante, conforme ilustrado na Figura 10a. Determinar as reações nos mancais A e B .

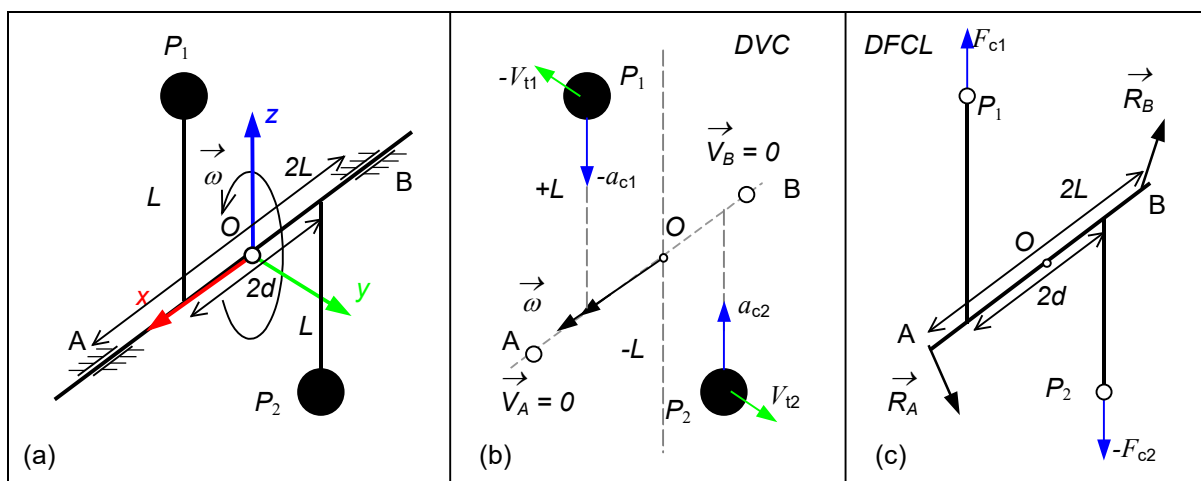


Figura 10 – Efeito do Produto de Inércia

Método de Resolução: a) **Sistema:** O sistema é constituído por duas partículas de massa m , vinculadas e pela cruzeta que gira em torno do eixo AB . b) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*) cada partícula fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da estrutura. c) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial inercial centrado em O com sistema de coordenadas $Oxyz$ móvel solidário ao sistema a posição P_1 e P_2 de cada partícula, fica definida pelas coordenadas $+L$ e $-L$ na direção z . d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações, obtêm-se para cada corpo P_i :

$$\vec{a}_p = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge L_i \vec{k} + \omega \vec{i} \wedge [\omega \vec{i} \wedge L_i \vec{k}] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{P_i} = \omega \vec{i} \wedge (-L_i \omega \vec{j}) = \mp L_i \omega^2 \vec{k} \quad \text{que é a aceleração centrípeta necessária para cada partícula}$$

percorrer a trajetória circular em torno do eixo \overline{AB} , conforme apresentado na Figura 10b. A reação sobre a estrutura é obtida do **TR**: $m_i \cdot \vec{a}_{P_i} = \mp m_i \cdot L_i \omega^2 \vec{k}$. Considerando a estrutura ABP_1P_2 em equilíbrio e calculando o momento em relação ao pólo O , utilizando o *DFCL* apresentado na Figura 10c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se,

$$\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (d\vec{i} + L\vec{k}) \wedge F_{c1} \vec{k} - (d\vec{i} + L\vec{k}) \wedge (-F_{c2}) \vec{k} + L\vec{i} \wedge \vec{R}_A - L\vec{i} \wedge \vec{R}_B = 0 \Rightarrow$$

$\vec{M}_O = -d F_{c1} \vec{j} - d F_{c2} \vec{j} + (L A_y \vec{k} - L A_z \vec{j}) - (L B_y \vec{k} - L B_z \vec{j}) = 0$. Tomando apenas a componente do momento na direção \vec{j} , obtêm-se: $(2mdL)\omega^2 \vec{j} = -L A_z \vec{j} + L B_z \vec{j}$ que é o binário de forças reativas nos mancais A e B separados de $2L$ necessário para conter o movimento centrípeto das massas, separadas pela distância $2d$. Note que o termo: $2mdL = J_{xz}$ corresponde ao produto de inércia e o binário tem a direção do plano formado pela estrutura. Para que a posição das partículas sejam constantes é necessário utilizar um sistema de coordenadas $Oxyz$ auxiliar que seja solidário à estrutura.

5.4. Matriz de Inércia

A matriz de inércia mede a distribuição da massa de um corpo em relação a um sistema de eixos coordenados, para um conjunto agregado de partículas, sendo por definição dada por:

$$[J]_O = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot x_i & \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot x_i & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}_O \quad (48)$$

Forma alternativa para determinação da matriz de inércia (ou **tensor** de inércia de segunda-ordem) é a utilização do produto escalar da posição $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ de cada partícula, expressa na forma matricial anti-simétrica (*skew-symmetric*):

$$[J]_O = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i]^t \cdot [\vec{r}_i] \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \cdot m_i \quad (49)$$

$$[J]_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & (z_i^2 + x_i^2) & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

Esta forma de representação é útil para implementação numérica pois facilita os cálculos.

Propriedades da Matriz de Inércia

- **Simetria** – devida a própria definição do produto de inércia ($J_{xy} = J_{yx}$);
- **Invariância** no traço – A soma dos momentos de cada eixo é igual o dobro do momento polar ($J_x + J_y + J_z = 2J_O$);
- **Positividade** – A matriz de inércia é “positiva definida” pois os momentos são formas quadráticas;
- **Composição** – A matriz de inércia de um corpo é a soma de “n” partições;
- Para sistemas **PLANOS** o momento de inércia vale: $J_z = J_x + J_y$

5.5. Translação de Eixos

A translação de eixos paralelos é um recurso muito útil na determinação dos termos da matriz de inércia em relação a outro sistema de coordenadas. O momento de inércia do ponto material P_i , de massa m_i , expresso em relação a reta \vec{u} é dado por:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \quad (50)$$

A posição do ponto material P_i , conforme mostrado na Figura 11 e o momento de inércia em relação ao eixo OX são:

$$\begin{aligned} (P_i - O) &= X_i \vec{I} + Y_i \vec{J} + Z_i \vec{K} \\ (P_i - G) &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad ; \quad (G - O) = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \\ J_{OX} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (Y_i^2 + Z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(y_i + b)^2 + (z_i + c)^2] \\ J_{OX} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) + 2b \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i + M \cdot b^2 + 2c \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i + M \cdot c^2 \\ J_{OX} &= \bar{J}_{Gx} + M \cdot d_{Xx}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

ou seja o momento de inércia no novo eixo (OX) é igual ao momento de inércia calculado no centro de massa G em relação ao eixo (Gx), adicionado a massa total M multiplicado pela distância ao quadrado $d_{Xx}^2 = b^2 + c^2$ entre os eixo X e x . Note que $\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i = 0$ devido a propriedade do centro de massa $\sum m_i \cdot (P_i - G) = 0$.

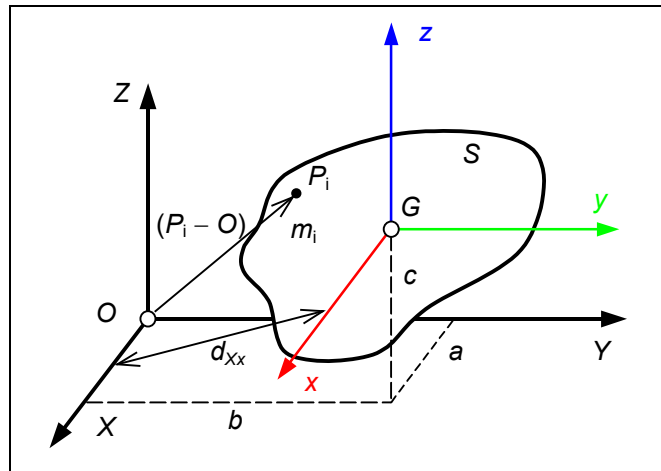


Figura 11 – Translação de eixos

De forma análoga a translação de eixos para **MOMENTO DE INÉRCIA** para os outros eixos resulta em:

$$J_{OX} = \bar{J}_{Gx} + M \cdot d_{Xx}^2 \quad ; \quad J_{OY} = \bar{J}_{Gy} + M \cdot d_{Yy}^2 \quad \text{e} \quad J_{OZ} = \bar{J}_{Gz} + M \cdot d_{Zz}^2 \quad (52)$$

Para o **PRODUTO DE INÉRCIA** do ponto material P_i de massa m_i , expresso em relação ao centro de massa no sistema de coordenadas $Gxyz$ e com massa total M , conforme mostrado na Figura 11, é:

$$\begin{aligned} J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot X_i \cdot Y_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i + a) \cdot (y_i + b) \\ J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i + b \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i + a \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i + ab \sum_{i=1}^n m_i \\ J_{OXY} &= \bar{J}_{Gxy} + M \cdot a \cdot b \end{aligned} \quad (53)$$

De forma análoga para os demais eixos obtêm-se:

$$J_{OXY} = \bar{J}_{Gxy} + M \cdot a \cdot b \quad ; \quad J_{OYZ} = \bar{J}_{Gyz} + M \cdot b \cdot c \quad \text{e} \quad J_{OZX} = \bar{J}_{Gzx} + M \cdot c \cdot a \quad (54)$$

Exemplo: Cálculo de Matriz Inércia

Considere o dispositivo com duas barras de massa m e comprimento L que estão ligadas a um eixo de massa desprezível que gira sobre dois mancais A e B , conforme ilustrado na Figura 12a. Determinar a posição do centro de massa G do sistema e a Matriz de Inércia em relação ao pólo O .

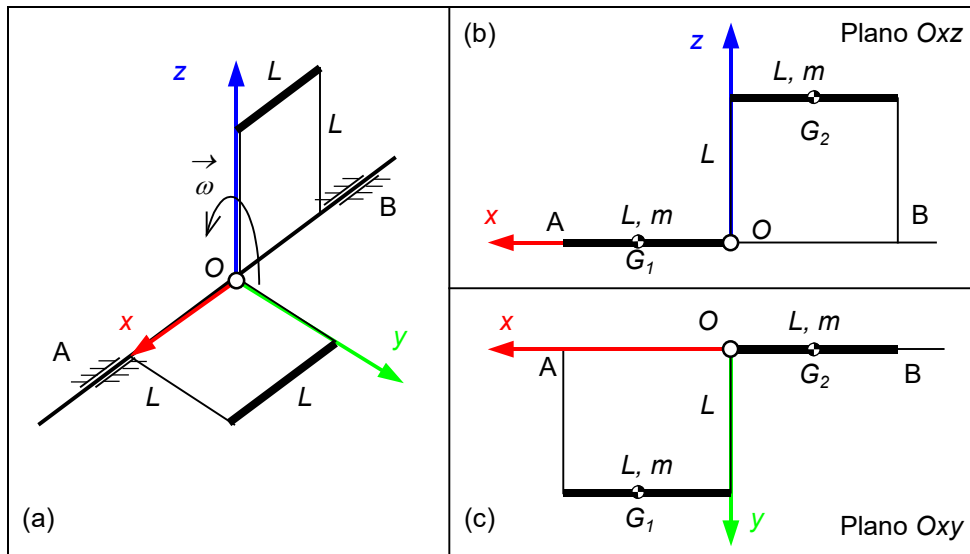


Figura 12 – Rotor excêntrico e assimétrico e Planos de Observação

Resolução: a) **Sistema:** sistema composto por duas barra de comprimento L e massa m e eixo suporte de massa desprezível. b) **Base e Pólo:** $Oxyz$. c) **Diagramas.** Planos de observação

Teoremas: Momentos, produtos e transporte. Considerando a simetria ao longo do eixo x , o

centro de massa é obtido por:
$$y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \Rightarrow y_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot L}{(m + m)} = \frac{L}{2} \quad e$$

$$z_G = \frac{m \cdot L + m \cdot 0}{(m + m)} = \frac{L}{2} \Rightarrow (G - O) = \frac{L}{2}(\vec{j} + \vec{k}) = (0 \quad L/2 \quad L/2)$$

Os momentos de inércia são obtido pela adição das barras: $J_{Ox} = J_{G_1x} + J_{G_2x} = 2mL^2$;

$$J_{Oy} = (\bar{J}_{G_1y} + m \cdot d_{y_1}^2) + (\bar{J}_{G_2y} + m \cdot d_{y_2}^2) = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m \cdot (L^2 + L^2/4) = \frac{5}{3}mL^2 = J_{Oz}$$

Os produtos de inércia são obtido pela adição das barras utilizando o transporte de eixos paralelos, conforme identificados na Tabela 1 e ilustrado no plano Oxz na Figura 12b e plano Oxy na Figura 12c:

Tabela 1 – Localização dos Centros de Massas das Barras

ITEM / COTA	x_G (a)	y_G (b)	z_G (c)	Obs.:
Barra A	$L/2$	L	0	G_1
Barra B	$-L/2$	0	L	G_2

$$J_{Oxy} = \sum \bar{J}_{Gxy} + mab = \left[0 + m \cdot \frac{L}{2} \cdot L \right] + \left[0 + m \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) \cdot 0 \right] = \frac{1}{2} mL^2$$

$$J_{Oyz} = \sum \bar{J}_{Gyz} + mbc = [0 + m \cdot L \cdot 0] + [0 + m \cdot 0 \cdot L] = 0$$

$$J_{Ozx} = \sum \bar{J}_{Gzx} + mca = \left[0 + m \cdot 0 \cdot \frac{L}{2} \right] + \left[0 + m \cdot L \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} mL^2$$

Portanto a matriz de inércia em relação ao pólo O , resulta em:

$$[J]_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}_O = mL^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 5/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 5/3 \end{bmatrix}_O$$

5.6. Momento de Inércia em Torno de Outro Eixo

O momento de inércia pode ser descrito em relação a outro eixo com orientação \vec{u} a partir da matriz de inércia determinada no sistema de coordenadas $Oxyz$. Para determinar como o momento de inércia se altera quando expressa em relação ao eixo $O\vec{u}$, considere cada ponto material P_i do corpo e o versor unitário \vec{u} que descreve a direção de outro eixo, conforme ilustrado na Figura 13, com vetores descritos por:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ (P_i - O) &= \vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}\end{aligned}\quad (55)$$

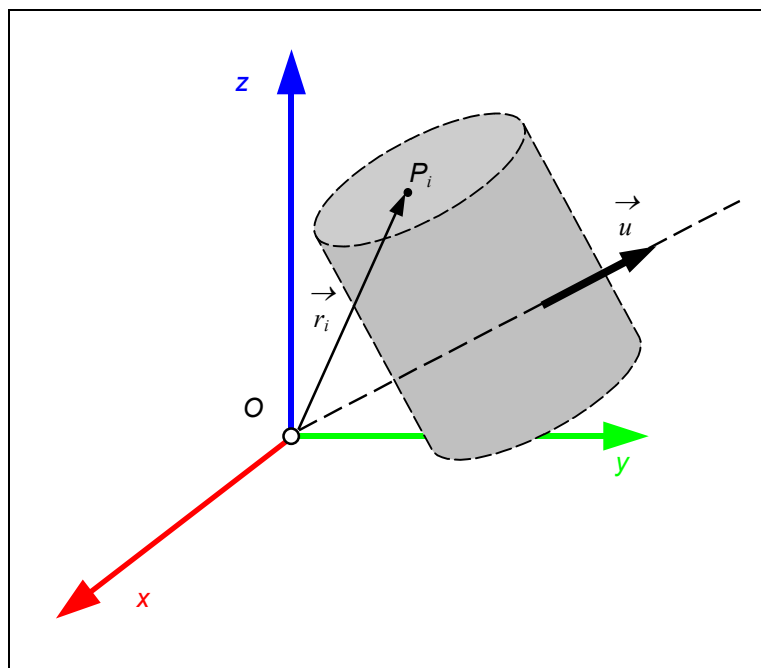


Figura 13 – Momento de Inércia em Relação ao Outro Eixo

O momento de inércia em relação ao eixo $O\vec{u}$ é dado por:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \quad (56)$$

Resolvendo o produto vetorial, o quadrado e voltando na expressão do momento de inércia, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 (P_i - O) \wedge \vec{u} &= (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \wedge (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \\
 (P_i - O) \wedge \vec{u} &= (y_i \cdot u_z - z_i \cdot u_y) \vec{i} + (z_i \cdot u_x - x_i \cdot u_z) \vec{j} + (x_i \cdot u_y - y_i \cdot u_x) \vec{k} \\
 (\vec{r}_i \wedge \vec{u})^2 &= (z_i^2 + y_i^2) u_x^2 + (z_i^2 + x_i^2) u_y^2 + (y_i^2 + x_i^2) u_z^2 - 2x_i y_i u_x u_y - 2y_i z_i u_y u_z - 2z_i x_i u_z u_x \quad (57) \\
 J_{O\vec{u}} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \\
 J_{O\vec{u}} &= J_{Ox} u_x^2 + J_{Oy} u_y^2 + J_{Oz} u_z^2 - 2J_{Oxy} u_x u_y - 2J_{Oyz} u_y u_z - 2J_{Ozx} u_z u_x
 \end{aligned}$$

Utilizando a notação matricial para o versor unitário $\{u\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^t$ resulta na forma:

$$J_{O\vec{u}} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oyx} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Ozx} & -J_{Ozy} & J_{Oz} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (58)$$

ou simplesmente o **escalar**:

$$\boxed{J_{O\vec{u}} = \{u\}^t [J]_O \{u\}} \quad (59)$$

ou seja para se obter o momento de inércia em relação a outro eixo com direção $O\vec{u}$, a partir da matriz de inércia descrita em relação a um sistema de coordenadas $Oxyz$, basta pré e pós-multiplicar pelas coordenadas do versor unitário do novo eixo. Note que o **ESCALAR** obtido corresponde a momento de inércia em relação ao eixo $O\vec{u}$.

5.7. Mudança de Sistema de Coordenadas

Em alguns casos pode ser interessante expressar a matriz de inércia em relação a outro sistema de coordenadas (outra base). Vamos verificar como a matriz de inércia calculada na base OE , identificada pelos versores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, se altera quando descrita na base OX identificada pelos

versores $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, conforme ilustrado na Figura 14. Em particular o versor \vec{x}_1 tem posição descrita em relação a base **OE** segundo as projeções do versor \vec{x}_1 sobre os eixos $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{x}_1 = (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3 \quad (60)$$

O produto escalar dos versores unitários é $(\vec{x}_i \cdot \vec{e}_j) = |\vec{x}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cdot \cos \alpha_{i,j}$ portanto $\vec{x}_1 = \cos \alpha_{11} \vec{e}_1 + \cos \alpha_{12} \vec{e}_2 + \cos \alpha_{13} \vec{e}_3$

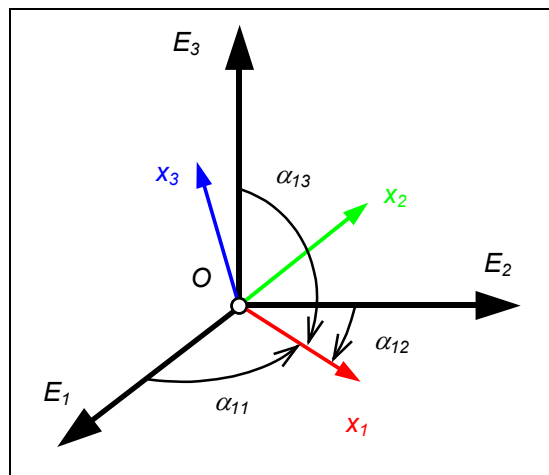


Figura 14 – Base Rotacionada

De maneira similar para os demais versores, obtêm-se um somatório ou na forma matricial resulta em:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \cos \alpha_{ij} \cdot e_j \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{X\} = [R] \cdot \{E\} \quad (61)$$

onde a matriz **[R]** é a matriz dos cossenos diretores

$$[R] = \begin{bmatrix} (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{x}_1 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_1) & (\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_2) & (\vec{x}_3 \cdot \vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Considere agora dois vetores \mathbf{p} e \mathbf{q} expressos na base \mathbf{OX} e relacionados entre si por uma matriz $[\mathbf{A}]$ de forma que $\{\mathbf{p}\}_{\mathbf{OX}} = [\mathbf{A}]_{\mathbf{OX}} \cdot \{\mathbf{q}\}_{\mathbf{OX}}$. Busca-se determinar a matriz $[\mathbf{A}]_{\mathbf{OE}}$ correspondente a transformação de base $[\mathbf{R}]$ (Pesce, 2001). Pré-multiplicando a expressão anterior pela transformação de base $[\mathbf{R}]$ e introduzindo a matriz identidade $[\mathbf{I}]$ de ordem 3, obtêm-se

$$[\mathbf{R}] \cdot \{\mathbf{p}\}_{\mathbf{OX}} = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{A}]_{\mathbf{OX}} \cdot [\mathbf{I}] \cdot \{\mathbf{q}\}_{\mathbf{OX}} \quad (63)$$

mas $[\mathbf{I}] = [\mathbf{R}]^{-1} \cdot [\mathbf{R}]$ e substituindo na expressão anterior resulta em:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}] \cdot \{\mathbf{p}\}_{\mathbf{OX}} &= [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{A}]_{\mathbf{OX}} \cdot [\mathbf{R}]^{-1} \cdot [\mathbf{R}] \cdot \{\mathbf{q}\}_{\mathbf{OX}} \\ \{\mathbf{p}\}_{\mathbf{OE}} &= [\mathbf{A}]_{\mathbf{OE}} \cdot \{\mathbf{q}\}_{\mathbf{OE}} \quad \text{onde} \quad [\mathbf{A}]_{\mathbf{OE}} = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{A}]_{\mathbf{OX}} \cdot [\mathbf{R}]^{-1} \end{aligned} \quad (64)$$

Considerando que a matriz a ser transformada seja a matriz de inércia $[\mathbf{J}]_{\mathbf{OE}}$ e que a matriz de mudança de base é ortogonal $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ obtêm-se a nova matriz de inércia calculada no base rotacionada como:

$$\boxed{[\mathbf{J}]_{\mathbf{OE}} = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{J}]_{\mathbf{OX}} \cdot [\mathbf{R}]^T} \quad \text{ou} \quad \boxed{[\mathbf{J}]_{\mathbf{OX}} = [\mathbf{R}]^T \cdot [\mathbf{J}]_{\mathbf{OE}} \cdot [\mathbf{R}]} \quad (65)$$

Exemplo: placa quadrada

Uma placa quadrada tem sua matriz e inércia descrita em relação ao centro de massa G considerando o sistema de coordenadas simétrico G_X conforme suas dimensões por:

Para determinar a matriz de inércia em relação a um novo sistema de coordenadas G_E rotacionado do ângulo θ determina-se a matrix de rotação para transformação de base.

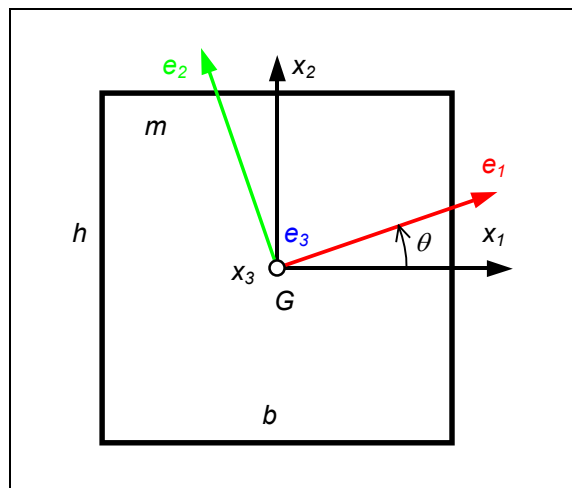


Figura 15 – Rotação de Base

Resolução: a) **Sistema:** placa quadrada de lado b e massa m ; b) **Base e Pólo:** base G_X rotacionada para GE . d) **Teoremas:** Matrix de Rotação de Eixos. A matrix de inércia da placa retangular é dado por:

$$[J]_{GX} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(h^2 + b^2) \end{bmatrix}_{GX}$$

para uma placa quadrada: $h = b$: e identificando a

para rotação θ de eixos $[R]$ obtem-se no sistema GE a nova matrix de inércia:

$$[J]_{GE} = [R] \cdot [J]_{GX} \cdot [R]^T :$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[J]_{GE} = mb^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{GX} \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = mb^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Verifica-se portanto que a matriz de inércia da placa quadrada não se modifica para variação angular θ os eixos coordenados, portanto possui simetria neste eixo.

5.8. Eixos Principais e Central

Pode-se demonstrar que fixada uma origem arbitrária O , existe associado a qualquer sistema material S , um referencial ortogonal $OXYZ$ para o qual os produtos de inércia são nulos. Os eixos deste referencial são chamados eixos **PRINCIPAIS** de inércia onde os momentos são chamados de momentos principais de inércia. Se a origem O for coincidente com o centro de massa G o sistema de coordenadas é chamado de **CENTRAL**. Para se obter uma nova base tal que a matriz de inércia seja diagonal (produtos de inércia nulos), resolve-se o auto-problema do sistema linear $[J]_O \{x\} = \lambda_i \cdot [I] \cdot \{x\}$ que corresponde a determinar os três novos eixos (auto-vetores) para os quais a matriz $[J]_O$ seja diagonal (auto-valores).

5.9. Elipsóide de Inércia

É possível provar que o lugar geométrico dos momentos de inércia em relação a variação de direção do eixo $O\vec{u}$, passante sempre por O , é uma superfície fechada de segundo grau e simétrica: um elipsóide (França, 2011). O maior eixo do elipsóide tem a magnitude do maior momento principal de inércia. A seção transversal média do elipsóide tem o diâmetro correspondente aos dois menores momentos principais de inércia.

6. QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Na mecânica clássica, quantidade de movimento (ou momento linear) é o produto da massa pela velocidade da partícula. Entretanto, um corpo pode estar animado de velocidade angular.

6.1. Quantidade de Movimento Translacional

Defini-se quantidade de movimento \vec{p} de um partícula de massa m com velocidade \vec{V} o vetor:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V} \quad (66)$$

Considerando a massa da partícula invariante e tomando sua derivada temporal, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{p} &= \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}) = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V} + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V} = m \vec{a} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F} \end{aligned} \quad (67)$$

ou seja, a variação da quantidade de movimento de uma partícula é decorrente da força a ela aplicada (segunda lei de *Newton*).

6.2. Quantidade de Movimento Angular

Defini-se o momento da quantidade de movimento \vec{H}_O , ou movimento angular, de um partícula de massa m com velocidade \vec{V} em relação ao pólo O , o vetor:

$$\vec{H}_O = (\vec{P} - O) \wedge m \vec{V} \Rightarrow \vec{H}_O = (\vec{P} - O) \wedge \vec{p} \quad (68)$$

6.3. Movimento Angular e Momento

De maneira muito simples pode-se correlacionar a quantidade de movimento angular com o momento fazendo a pré-multiplicação vetorial da expressão da segunda lei de *Newton* $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ por $(P-O)$, obtendo-se de imediato:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}} &= \vec{F} \\ (P-O) \wedge \dot{\vec{p}} &= (P-O) \wedge \vec{F} \\ \dot{\vec{H}}_O &= \vec{M}_O\end{aligned}\tag{69}$$

ou seja, a taxa de variação temporal o momento angular \vec{H}_O é igual ao momento em relação ao mesmo pólo O .

7. ATITUDE DE UM CORPO

A atitude de um corpo rígido é descrita pela direção que uma linha traçada no corpo (ex. reta AB da Figura 16) tem em relação a um sistema de coordenadas. Utilizando um sistema ortonormal de coordenadas $Oxyz$ com a base de versores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tem-se que uma linha AB do corpo tem sua projeção sobre os eixos coordenados como:

$$(A-B) = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (70)$$

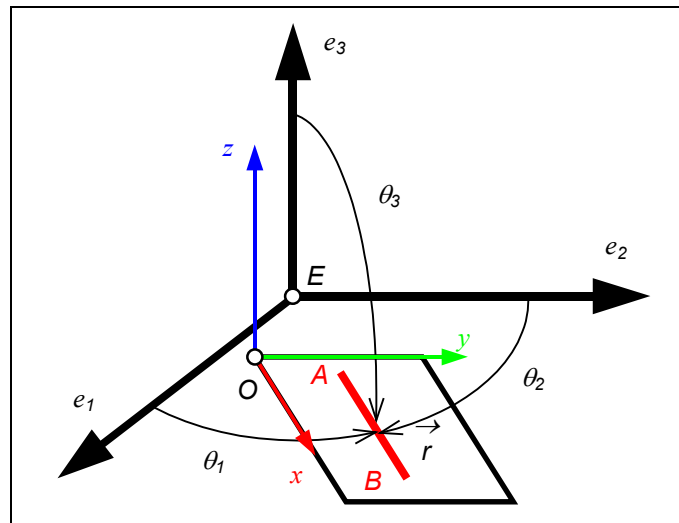


Figura 16 – Atitude do Corpo

Utilizando outro sistema ortonormal de coordenadas $(E e_1 e_2 e_3)$, a linha AB de comprimento $|\vec{r}|$, tem sua projeção sobre os eixos coordenados como:

$$\begin{aligned} (B-A) = \vec{r} &= \vec{r} \cdot e_1 + \vec{r} \cdot e_2 + \vec{r} \cdot e_3 \\ p = \vec{r} \cdot e_1 &= |\vec{r}| \cdot |e_1| \cdot \cos \theta_1 \\ q = \vec{r} \cdot e_2 &= |\vec{r}| \cdot |e_2| \cdot \cos \theta_2 \\ r = \vec{r} \cdot e_3 &= |\vec{r}| \cdot |e_3| \cdot \cos \theta_3 \\ (B-A) &= p e_1 + q e_2 + r e_3 \end{aligned} \quad (71)$$

onde os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 são os ângulos diretores de \vec{r} .

7.1. Rotações Finitas

A atitude de um corpo rígido no espaço é aspecto fundamental na dinâmica. A atitude do corpo corresponde a sua posição angular medida em relação a um sistema de coordenadas. Considere um plano articulado em dobradiças verticais, que se movimenta com ângulo θ , conforme mostrado na Figura 17. O sistema de coordenadas $Oxyz$, solidário ao plano, se movimenta junto a ele do mesmo ângulo θ , medido em relação ao sistema de coordenadas fixo $E e_1 e_2 e_3$.

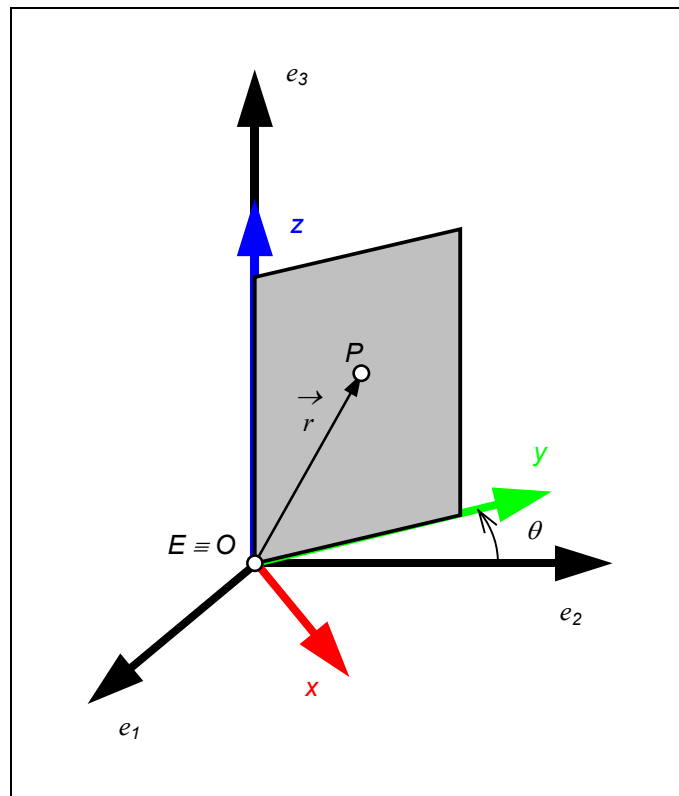


Figura 17 – Movimento Angular em Torno do Eixo

Para um ângulo $\theta = 0$, o vetor \vec{r} do ponto P , pertencente à porta, pode ser expresso na base móvel ou na base fixa conforme:

$$\begin{aligned}(P-O) = \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ (P-E) = \vec{r} &= p e_1 + q e_2 + r e_3\end{aligned}\quad (72)$$

onde: $x = p$, $y = q$ e $z = r$, para $\theta = 0$.

Para um ângulo $\theta > 0$, o vetor \vec{r} tem sua projeção alterada na base fixa $E e_1 e_2 e_3$ conforme

$$\begin{aligned}(P-O) = \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ (P-E) = \vec{r} &= x(\cos\theta + \text{sen}\theta)e_1 + y(-\text{sen}\theta + \cos\theta)e_2 + z e_3\end{aligned}\quad (73)$$

Portanto os versores unitários de cada base guardam a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{O x y z\} = [R]\{E e_1 e_2 e_3\}\quad (74)$$

A matriz que correlaciona as bases é chamada de matriz de transformação de rotação $[R]$. Note que cota vertical z não se altera, pois está alinhada com o eixo de rotação.

7.2. Cossenos Diretores

De forma geral um sistema de coordenadas rotacionado ($O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) em relação a outra ($E e_1 e_2 e_3$), com as origens coincidentes, conforme mostrado na Figura 18, tem seus versores correlacionados através de uma matriz de rotação. O vetor \vec{r} é descrito em cada base como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = p e_1 + q e_2 + r e_3\quad (75)$$

de onde se conclui que cada componente escalar em cada direção vetor \vec{r} em cada uma das bases coordenadas é dado por:

$$\begin{aligned} x &= \vec{r} \cdot \vec{i} & x &= \vec{r} \cdot \vec{j} & x &= \vec{r} \cdot \vec{k} \\ p &= \vec{r} \cdot e_1 & q &= \vec{r} \cdot e_2 & r &= \vec{r} \cdot e_3 \end{aligned} \quad (76)$$

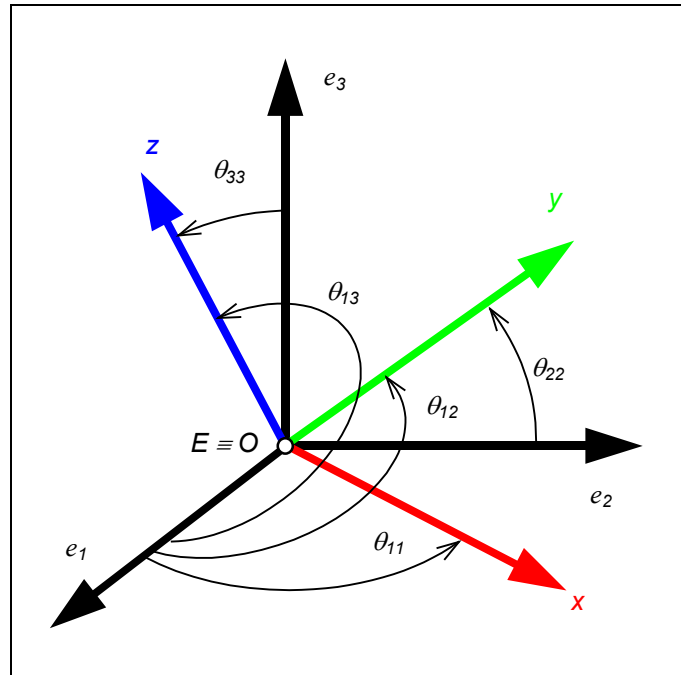


Figura 18 – Ângulos do Sistema de Coordenadas Rotacionado

Portanto o vetor \vec{r} também pode ser descrito na base $Oxyz$, como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{r} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{r} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{r} \cdot \vec{k})\vec{k} \\ \vec{r} &= (\vec{r} \cdot e_1)e_1 + (\vec{r} \cdot e_2)e_2 + (\vec{r} \cdot e_3)e_3 \end{aligned} \quad (77)$$

Assim os versores da base coordenada \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} podem ser descritos em função dos versores e_1, e_2 e e_3 como:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\vec{i} \cdot e_1)e_1 + (\vec{i} \cdot e_2)e_2 + (\vec{i} \cdot e_3)e_3 \\ \vec{j} &= (\vec{j} \cdot e_1)e_1 + (\vec{j} \cdot e_2)e_2 + (\vec{j} \cdot e_3)e_3 \\ \vec{k} &= (\vec{k} \cdot e_1)e_1 + (\vec{k} \cdot e_2)e_2 + (\vec{k} \cdot e_3)e_3 \end{aligned} \quad (78)$$

Note que para o produto vetorial dos versores unitários das bases, tem-se que: $\vec{i} \cdot e_1 = |\vec{i}| |e_1| \cos \theta_{11}$ que é o co-seno do ângulo formado pela rotação da base móvel, conforme identificado na Figura 18. Escrevendo a expressão anterior na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} \cdot e_1 & \vec{i} \cdot e_2 & \vec{i} \cdot e_3 \\ \vec{j} \cdot e_1 & \vec{j} \cdot e_2 & \vec{j} \cdot e_3 \\ \vec{k} \cdot e_1 & \vec{k} \cdot e_2 & \vec{k} \cdot e_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \quad (79)$$

Esta matriz $[R]$ é chamada de matriz dos cossenos diretores. Note que a definição da sequência do ângulo diretor $\theta_{(i,j)}$ é feita a partir do referencial e_1, e_2 e e_3 (neste caso fixo). Esta definição não é universal, pois existem textos com a definição oposta. É possível provar também que a matriz de transformação de rotação é ortonormal, ou seja, sua inversa é igual à transposta (Baruh, 1999). Portanto tem-se que $[R]^{-1} = [R]^T$ ou $[R] \cdot [R]^T = [I]$.

7.3. Rotações Sucessivas

O movimento angular geral pode ser produzido por uma sequência sucessiva de rotações. Uma sequência possível é descrita em termos de rotações sucessivas em torno de eixos expressos na base móvel (*body fix rotational sequence*). Tomando a sequência 3-2-1 em eixos da base móvel, utilizada na aviação conforme mostrado na Figura 19, obtêm-se os movimento de **orientação** (ângulo ϕ , em torno do eixo vertical $z \equiv Z$, Figura 19a), **elevação** (ângulo θ em torno do eixo transversal $y \equiv y'$, Figura 19b) e **rotação própria** (ângulo ψ em torno do eixo longitudinal $x' \equiv x''$, Figura 19c).

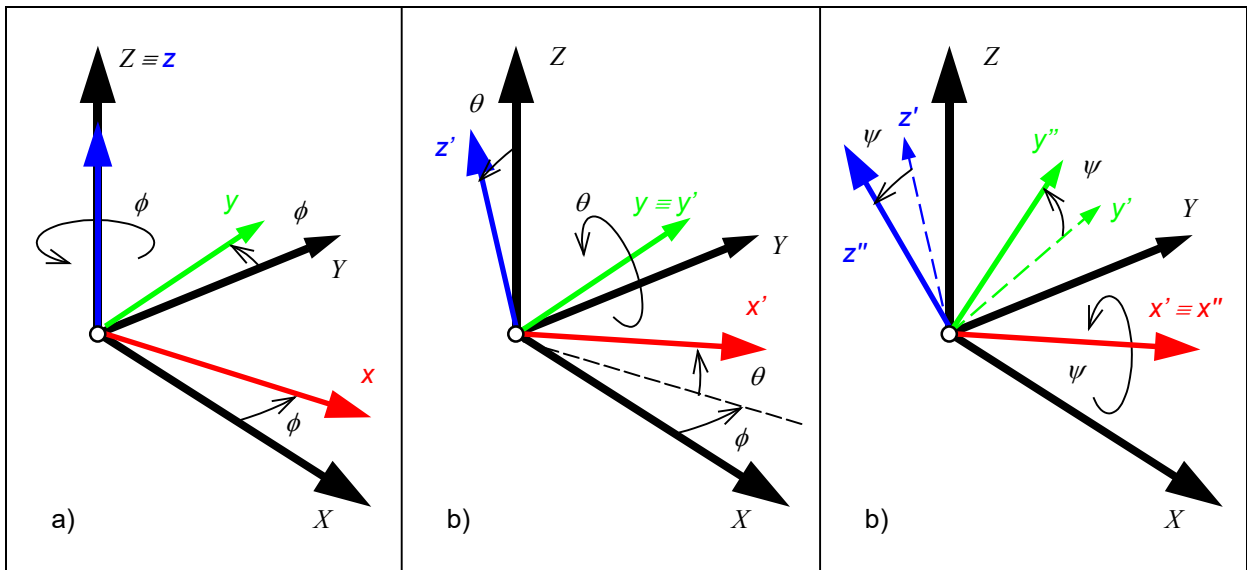


Figura 19 – Sequência de Rotações 3-2-1 (base móvel)

Para cada rotação em torno de um eixo existe um matriz de rotação relacionando cada transformação:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = [R_\phi] \{E\} \\
 \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = [R_\theta] \{x y z\} \\
 \begin{Bmatrix} \vec{i}'' \\ \vec{j}'' \\ \vec{k}'' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \text{sen}\psi \\ 0 & -\text{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} = [R_\psi] \{x' y' z'\}
 \end{aligned} \tag{80}$$

ou de forma resumida:

$$\{x'' y'' z''\} = [R_\psi][R_\theta][R_\phi] \{E\} \tag{81}$$

Existem 12 combinações possíveis de seqüências de rotações em eixos não paralelos do referencial móvel. Dependendo da conveniência da visualização a seqüência 3-2-3 é muito utilizada em dinâmica rotacional. Esta seqüência é chamada de Ângulos de Euler.

Note, entretanto, que uma sequência não é comutativa (mudando a sequência a orientação final se altera) não sendo, portanto, possível representar a rotação de coordenadas por uma operação de ângulos finitos.

7.4. Ângulos de Euler

No estudo da dinâmica rotacional é conveniente escolher um sistema de coordenadas adequado para a descrição dos movimentos angulares do corpo. Considere o disco de centro em O sujeito a três rotações sucessivas, conforme apresentado na Figura 20. O sistema cartesiano de coordenadas ($OXYZ$) orienta um referencial “fixo”, com o eixo Z indicando a vertical. O sistema de coordenadas móveis ($Oxyz$) com os versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} é solidário ao disco mas não gira com ele. O ângulo de rotação ϕ da base móvel é definido como o ângulo ($X\hat{O}x$), ou seja, o ângulo que o eixo x faz com o eixo X e descreve o movimento angular do disco no plano OXY , conforme mostrado na Figura 20a. O ângulo de rotação θ é definido por ($Z\hat{O}z'$), ou seja, o ângulo que o eixo z' faz com o eixo vertical Z , inclinando o disco em relação ao plano segundo a linha do eixo $y \equiv y'$, chamada de linha dos nós, conforme mostrado na Figura 20b. O último movimento, corresponde ao ângulo de rotação ψ em torno do eixo $z' \equiv z''$, conforme mostrado na Figura 20c.

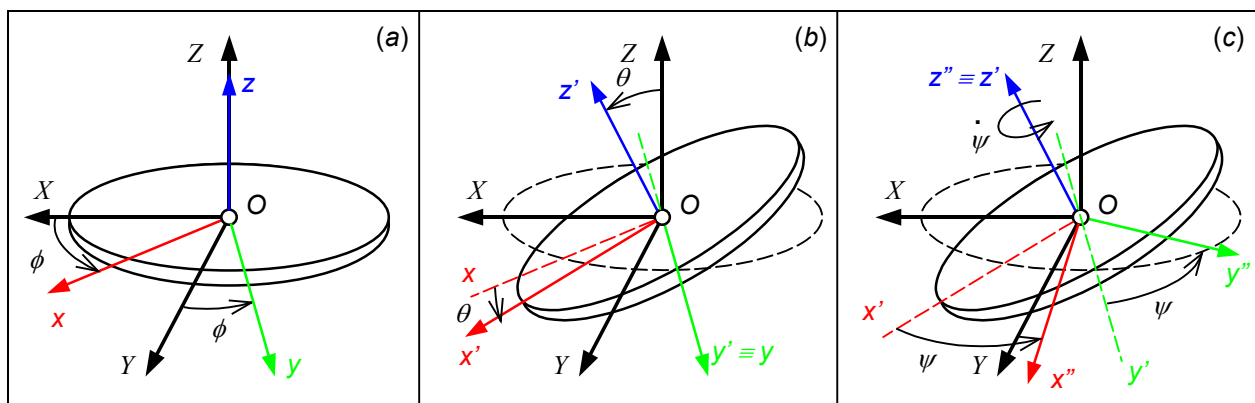


Figura 20 - Ângulos de Euler: Precessão (ϕ), Nutação (θ) e Rotação própria (ψ)

Esta sequência 3-2-3 de rotações é conhecida como ângulos de *Euler*. Nela identificam-se os ângulo de Precessão (ϕ), Nutação (θ) e Rotação própria (ψ) do disco, conforme mostrado na Figura 20. Note que o ângulo de Precessão é medido em relação ao referencial fixo. O ângulo de Nutação corresponde ao movimento de arrastamento do sistema de coordenadas móvel. Finalmente a rotação própria é medida em relação ao sistema móvel.

O versor \vec{j}' que orienta o eixo $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}'$ tem intersecção entre o plano \mathbf{OXY} e o disco quando inclinado de θ , formando a linha dos nós, ortogonal ao plano \mathbf{OZz} , conforme mostrado na Figura 21a. Esta orientação possui singularidade quando $\theta = 0$ e descrita por:

$$\vec{j} = \frac{1}{\sin \theta} (\vec{K} \wedge \vec{k}) \quad \text{pois} \quad \vec{j} \perp \vec{K}; \vec{j} \perp \vec{k} \therefore \vec{j} = \vec{K} \wedge \vec{k} = |\vec{K}| \cdot |\vec{k}| \sin \theta \quad (82)$$

(forma alternativa sem singularidade pode ser obtida utilizando a álgebra dos *quaternions* de *Hamilton*).

Considerando o movimento de rotação própria ψ do disco em torno do eixo z do sistema de coordenadas móvel, identifica-se a velocidade angular relativa do disco:

$$\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k} \quad (83)$$

O sistema de coordenadas móvel solidário disco é arrastado pelos movimentos de Nutação (θ) e Precessão (ϕ) definindo a velocidade angular de arrastamento:

$$\vec{\omega}_{arr} = \dot{\theta} \vec{j}' + \dot{\phi} \vec{K} \quad (84)$$

como $\vec{K} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}$ a soma das parcelas resulta na velocidade angular absoluta do disco:

$$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j}' + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}} \quad (85)$$

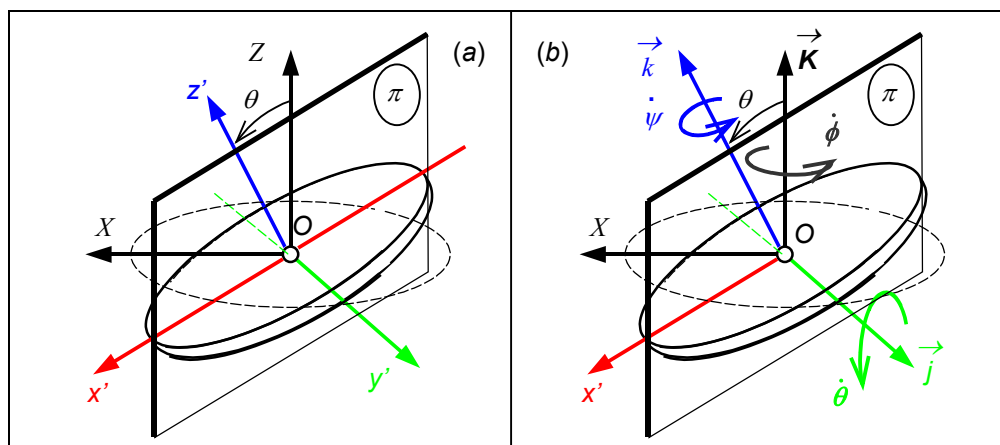


Figura 21 – Plano da Linha dos Nós e Velocidades Angulares

A velocidade angular de **Precissão** $\dot{\phi} = \dot{\phi} \vec{K}$, ocorre em torno do eixo fixo vertical Z . Devido ao movimento de **Nutação** com ângulo θ , forma-se o plano π dos versores OZx' , conforme mostrado na Figura 21a. A velocidade angular de **Nutação** $\dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{j}'$, ocorre na linha dos nós ao longo de y' , perpendicular a esse plano π . A velocidade angular **própria** $\dot{\psi} = \dot{\psi} \vec{k}$, ocorre em torno do eixo z' (relativo), conforme mostrado na Figura 21b.

Os ângulos de *Euler* serão utilizados mais adiante no trato dos movimentos em torno de um ponto fixo.

7.5. Rotação Infinitesimal

Para descrever a variação angular, inicia-se pela análise da rotação infinitesimal. Considere por exemplo, uma sequência de rotações θ_1 , θ_2 e θ_3 nos eixos 1, 2 e 3 da base móvel. A matriz de transformação de rotação (utilizando abreviação “s” para seno e “c” para cosseno) resulta em:

$$[R] = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\ -c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Tomando agora rotações θ_1 , θ_2 e θ_3 muito pequenas (infinitesimais) e substituindo por $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$ tal que: $\sin(\Delta\theta_i) \cong \Delta\theta_i$ e $\cos(\Delta\theta_i) \cong 1$ e substituindo na expressão anterior mas, desprezando os termo de ordem superior de $\Delta\theta_i$, obtêm-se:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Pode-se constatar que a matriz de rotação infinitesimal independe da sequência das rotações. A matriz de rotação também pode ser expressa somando a matriz identidade $[I]$:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = [I] - [\Delta\theta] \quad (88)$$

Assim um vetor pode ser expresso em referenciais rotacionados na seguinte forma:

$$\{r'\} = [R]\{r\} = ([I] + [\Delta\theta])\{r\} \quad \text{ou} \quad \{r\} = [R]^{-1}\{r'\} = ([I] - [\Delta\theta]^T)\{r'\} \quad (89)$$

Sendo a matriz $[\Delta\theta]$ anti-simétrica tem-se que $[\Delta\theta]^{-1} = [\Delta\theta]^T = -[\Delta\theta]$.

Decorre deste fato portanto que a transposta de $[R]$ é:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = [I] + [\Delta\theta] \quad (90)$$

Outra forma de analisar a rotação consiste em tomar um vetor submetido a duas rotações sucessivas $\Delta\theta_A$: e $\Delta\theta_B$ que é obtida pelo produto de $[R_A]$ $[R_B]$:

$$[R_A] \cdot [R_B] = ([I] + [\Delta\theta_A]) \cdot ([I] + [\Delta\theta_B]) = [I] + [\Delta\theta_A] + [\Delta\theta_B] + [\Delta\theta_A] \cdot [\Delta\theta_B] \quad (91)$$

Desprezando o termo de ordem superior ($[\Delta\theta_A] [\Delta\theta_B]$), constata-se que o produto é comutativo respeitando a representação vetorial (para mais detalhes consultar *Meirovitch*):

$$[R_A] \cdot [R_B] = [I] + [\Delta\theta_A] + [\Delta\theta_B] = [R_B] \cdot [R_A] \quad (92)$$

Considere agora que a base é rotacionada. Um vetor $\{x\}$ tem sua posição expressa inicialmente por $\{x_i\}$ e ao término da rotação da base por $\{x_f\}$. Portanto como o vetor permanece inalterado tem-se que a posição inicial $\{x_i\}$ pode ser obtida novamente pela transformação de rotação $[R]$ da base aplicada na posição final $\{x_f\}$:

$$\{x_i\} = [R] \{x_f\} \quad (93)$$

Expressando a posição transformada devido à rotação da base obtêm-se:

$$\{x'_i\} = [R] \{x_i\} \quad e \quad \{x'_f\} = [R] \{x_f\} \quad \therefore \quad \{x'_f\} = \{x_i\} \quad (94)$$

A variação da representação da posição inicial $\{x_i\}$ e final $\{x_f\}$ do vetor, durante a movimentação da base é:

$$\{\Delta x'\} = \{x'_f\} - \{x'_i\} = \{x_i\} - \{x'_i\} = [R]^T \{x'_i\} - \{x'_i\} \quad (95)$$

Mas como $[R]^T = [I] + [\Delta\theta]$ obtêm-se:

$$\{\Delta x'\} = [R]^T \{x'_i\} - \{x'_i\} = ([I] + [\Delta\theta])\{x'_i\} - \{x'_i\} = [\Delta\theta]\{x'_i\} \quad (96)$$

Eliminando o índice e considerando apenas um vetor genérico \vec{r} , obtêm-se finalmente:

$$\begin{aligned} \{\Delta x'\} &= [\Delta\theta]\{x'_i\} \\ \{\Delta r\} &= [\Delta\theta]\{r\} \\ \Delta\vec{r} &= \Delta\theta \wedge \vec{r} \end{aligned} \quad (97)$$

Para ilustrar este conceito considere a rotação infinitesimal $\Delta\theta$ de um ponto P , realizada em torno de um eixo, conforme mostrado na Figura 22.

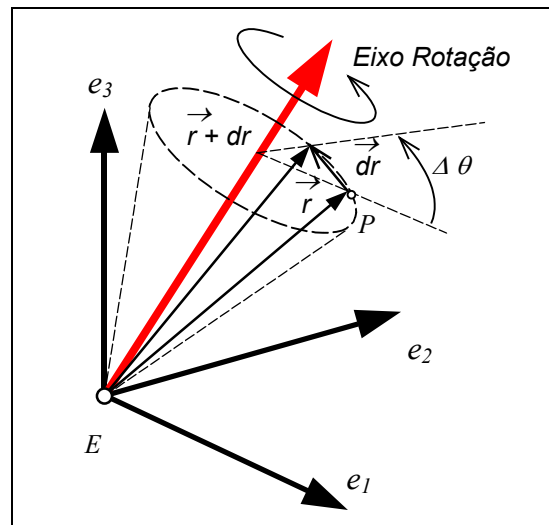


Figura 22 – Rotação em torno de um eixo (geometria de Rodrigues)

$$\begin{aligned} (P-O) &= \vec{r} + d\vec{r} \\ \Delta\vec{r} &= \Delta\theta \wedge \vec{r} \\ \Delta\theta &= \Delta\theta_1 \vec{e}_1 + \Delta\theta_2 \vec{e}_2 + \Delta\theta_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (98)$$

Tomando a variação infinitesimal e dividindo pelo incremento temporal Δt e considerando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \vec{\omega}$$
(99)

Substituindo a variação infinitesimal obtidas em $\Delta \vec{r} = \Delta \theta \wedge \vec{r}$ resulta em $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Para uma velocidade angular $\vec{\omega}$ obtêm-se:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta_i}{\Delta t} = \omega_i$$
(100)

Pode-se, portanto, descrever a taxa de variação do vetor posição na forma vetorial ou matricial como:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \{r\} = [\tilde{\omega}] \cdot \{r\}$$
(101)

De maneira similar, para a variação temporal dos versores unitários de uma base de coordenadas \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} , arrastada por uma variação angular $\vec{\omega}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{i} = -\omega_y \vec{k} + \omega_z \vec{j} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{j} = \omega_x \vec{k} - \omega_z \vec{i} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge \vec{k} = -\omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{i} \end{aligned}$$
(102)

Alternativamente também pode-se apresentar na forma matricial denominada anti-simétrica:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vec{i}} \\ \dot{\vec{j}} \\ \dot{\vec{k}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$
(103)

7.6. Taxa de Variação de um Vetor

A derivada de um vetor \vec{r} expresso em um sistema de coordenadas **OXYZ** fixo, é obtido pela variação das suas componentes em cada direção:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \dot{x}\vec{I} + \dot{y}\vec{J} + \dot{z}\vec{K} \\ \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{OXYZ} &= \dot{x}\vec{I} + \dot{y}\vec{J} + \dot{z}\vec{K}\end{aligned}\quad (104)$$

Entretanto, quando o mesmo vetor \vec{r} é expresso em um sistema de coordenadas móvel (**Gxyz**) sujeita a uma rotação com velocidade angular $\vec{\omega}_{arr}$ medido em relação ao referencial fixo, tem-se a sua derivada acrescida da variação dos versores dessa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, descrita como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \\ \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}} &= (\dot{r}_x\vec{i} + \dot{r}_y\vec{j} + \dot{r}_z\vec{k}) + \left(r_x\dot{\vec{i}} + r_y\dot{\vec{j}} + r_z\dot{\vec{k}}\right)\end{aligned}\quad (105)$$

Os três primeiros termos correspondem à variação do vetor \vec{r} quando observado da base de coordenadas móvel, que é chamada de derivada relativa (ou local).

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{rel} = \dot{r}_x\vec{i} + \dot{r}_y\vec{j} + \dot{r}_z\vec{k}\quad (106)$$

Lembrando que a variação dos versores da base móvel arrastados por $\vec{\omega}_{arr}$ são : $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i}$

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j}$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k}$, os três últimos termos da derivada resultam em:

$$\begin{aligned}\left(r_x\dot{\vec{i}} + r_y\dot{\vec{j}} + r_z\dot{\vec{k}}\right) &= r_x \cdot (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i}) + r_y \cdot (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j}) + r_z \cdot (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k}) \\ \vec{\omega}_{arr} \wedge (r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}) &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{r}\end{aligned}\quad (107)$$

Portanto a derivada total (ou absoluta) é obtida da soma:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{abs} = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{r} \quad (108)$$

Então, todo vetor descrito numa base móvel, tem sua derivada total (absoluta) obtida da soma da derivada parcial (ou relativa) e a variação da base, descrita pelo seguinte operador:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{abs} = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{r}} \quad (109)$$

Ou na forma matricial onde a matriz coluna $\{r_x, r_y, r_z\}^T$ contém os escalares do vetor e o símbolo $[\sim]$ é a matriz anti-simétrica da velocidade angular de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$ da base móvel:

$$\frac{d}{dt}\{\vec{r}\}_{abs} = \frac{d}{dt}\{\vec{r}\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}] \cdot \{\vec{r}\} \quad (110)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \left(\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}\right)_{rel} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}} \quad (111)$$

Esse operador será útil no trato de sistemas dinâmicos, descritos mais adiante, onde é conveniente manter a matriz de inércia constante, utilizando-se de bases móveis solidárias ao corpo rígido.

7.7. Velocidade Angular

A vetor velocidade angular Ω de um corpo rígido pode ser descrita num referencial fixo (e_1, e_2, e_3) ou em um referencial móvel $(\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k})$ como $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 + \Omega_3 e_3 \\ \vec{\omega} &= \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}\end{aligned}\quad (112)$$

Para uma seqüência de rotações, a velocidade angular é a soma de cada velocidade angular sucessiva, conforme apresentado no item 7.3. Portanto haverá uma matriz de transformação $[T]$ que relaciona a velocidade angular descrita no referencial móvel com o referencial fixo:

$$\{\omega\}^T = [T] \cdot \Omega \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix}\quad (113)$$

Retomando o caso do disco do item 7.4, a velocidade angular absoluta conforme a seqüência de *Euler* (3-2-3), conforme mostrado na Figura 23, suas respectivas projeções são dadas por:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi = \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{J}' + \dot{\psi} \vec{k}\quad (114)$$

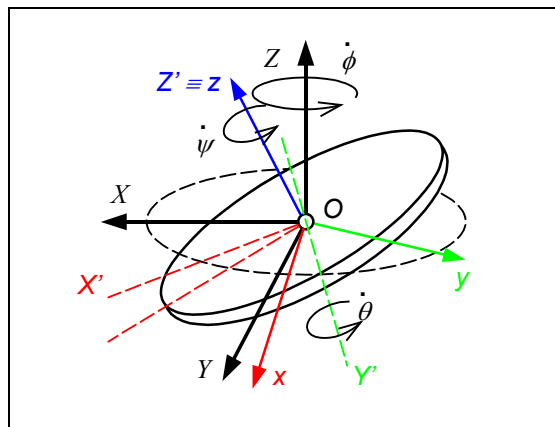


Figura 23 – Velocidade angular

A matriz de transformação de rotação é obtida de cada rotação sucessiva na sequência 3-2-3:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \vec{I}' \\ \vec{J}' \\ \vec{K}' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I}' \\ \vec{J}' \\ \vec{K}' \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{115}$$

Ou de forma matricial resumida:

$$\{x \ y \ z\} = [R_\phi][R_\theta][R_\psi]\{X \ Y \ Z\} = \{x \ y \ z\} = [T]\{X \ Y \ Z\} \tag{116}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & +c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & -s\theta c\psi \\ -s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi & +c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & +s\theta s\psi \\ c\phi s\theta & s\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \tag{117}$$

Utilizando a terceira coluna da matriz de rotação $[T]$ (Baruh, pg.419) para \vec{K} , e a segunda colunas para \vec{J}' , escolhendo o ângulo de direção $\phi = 0$, na equação anterior obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Omega} &= \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{J}' + \dot{\psi} \vec{k} \\
 \vec{\Omega} &= \dot{\phi} [(-s\theta c\psi) \vec{i} + (s\theta s\psi) \vec{j} + c\theta \vec{k}] + \dot{\theta} (s\psi \vec{i} + c\psi \vec{j}) + \dot{\psi} \vec{k}
 \end{aligned} \tag{118}$$

Ou na forma matricial mostrando explicitamente a matriz de transformação expressa no referencial móvel \mathbf{Oxyz} , ou através dos ângulos de Euler: onde $[T] \cdot [T'] = [I]$

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\psi s\theta & s\psi & 0 \\ +s\psi s\theta & c\psi & 0 \\ c\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (119)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi c\theta & -s\theta \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ c\phi s\theta & s\phi s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (120)$$

Esta expressão permite transformar uma velocidade angular $\vec{\omega}$, expressa no referencial móvel $Oxyz$, na velocidade angular expressa no referencial fixo ($E e_1 e_2 e_3$) segundo a variação dos ângulos de *Euler*.

7.8. Aceleração Angular

A aceleração angular α de um corpo rígido é descrita numa base fixa (e_1, e_2 e e_3) como a derivada da velocidade angular (os versores da base não mudam de posição):

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \dot{\omega}_1 e_1 + \dot{\omega}_2 e_2 + \dot{\omega}_3 e_3 \quad (121)$$

Pode-se entretanto expressar tanto a velocidade angular quanto a aceleração angular em termos de coordenadas móveis:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \\ \vec{\alpha} &= \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k} \end{aligned} \quad (122)$$

Derivando a velocidade angular expressa no sistema de coordenadas móvel solidário ao corpo (portanto com velocidade angular $\vec{\omega}$), obtêm-se:

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k} \quad (123)$$

Observando os resultados das derivadas nas diferentes bases (fixa e móvel) pode-se concluir que:

A aceleração angular é a simples derivação do vetor velocidade angular independente do sistema de coordenadas utilizado (*Baruh*, pág. 118). Quando entretanto a velocidade angular do corpo é expressa em outra base móvel (ex.: com velocidade angular $\vec{\omega}$) a aceleração angular resulta em:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega} \quad (124)$$

onde $\alpha_i \neq \dot{\omega}_i$.

Exemplo: Um suporte *ABCG* gira com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ em torno do eixo vertical *ABC*. Considere o disco de centro em *G*, mostrado na Figura 24, girando com velocidade angular “relativa” ao suporte $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ ambas expressas no referencial móvel, solidário ao suporte, com coordenadas *Bxyz*. Determine a aceleração angular do disco de centro *G*.

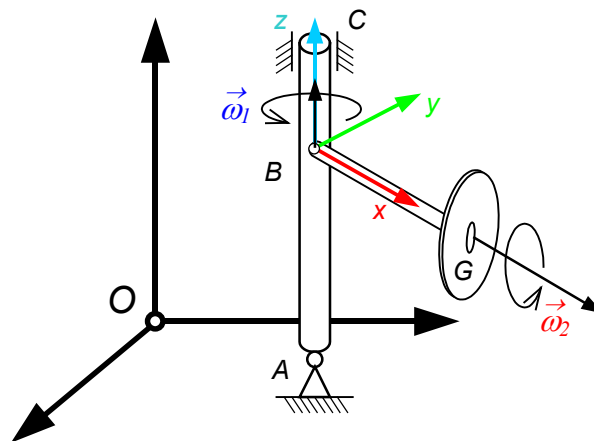


Figura 24 – Rotação em Dois Eixos

A aceleração angular total do disco é a derivada da soma das duas velocidades angulares (relativa e arrastamento):

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_1 + \frac{d}{dt}\vec{\omega}_2 \\ \vec{\alpha} &= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_{2-rel} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2\end{aligned}\tag{125}$$

7.9. Aceleração Complementar

Este conceito é facilmente comprovado quando se utiliza da técnica de composição de movimento, onde a aceleração complementar (*Resal*) é obtida por $\vec{\alpha}_{Resal} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$.

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \\ \vec{\alpha} &= \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{Resal} \\ \vec{\alpha} &= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_{2-rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_{2-rel} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2\end{aligned}\tag{126}$$

8. TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

A **Quantidade de Movimento** \vec{p} de uma partícula P de massa m e velocidade \vec{V} , num certo instante t , é dado por:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V} \quad (127)$$

A **Quantidade de Movimento** \vec{p}_i de um conjunto de uma partícula P_i de massa m_i e velocidade \vec{V}_i , num certo instante t , é dado por:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i \quad (128)$$

8.1. Momento da Quantidade de Movimento

Define-se o **Momento da Quantidade de Movimento** da partícula P_i de massa m_i em relação a um pólo O arbitrário qualquer como:

$$\vec{H}_{O_i} = (P_i - O) \wedge \vec{p}_i = (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad (129)$$

Para um agregado de n partículas, formando um corpo rígido, tem-se pela soma:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (130)$$

Derivando a expressão \vec{H}_O e o produto vetorial à direita, em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i - \vec{V}_O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \frac{d}{dt} (m_i \cdot \vec{V}_i) \quad (131)$$

Para massa da partícula invariante ($\dot{m}_i = 0$) e lembrando que $\vec{V}_i \wedge \vec{V}_i = 0$, obtêm-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^n -\vec{V}_O \wedge m_i \cdot \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot \vec{V}_i) \wedge \vec{V}_O + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (132)$$

Utilizando a propriedade do centro de massa e sua derivada temporal na expressão anterior:

$$(G - O) = \frac{\sum (P_i - O) \cdot m_i}{\sum m_i} \Rightarrow m \cdot (\vec{V}_G - \vec{V}_O) = \sum (\vec{V}_i - \vec{V}_O) \cdot m_i \Rightarrow m \cdot \vec{V}_G = \sum \vec{V}_i \cdot m_i \quad (133)$$

$$\dot{\vec{H}}_O = m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (134)$$

e lembrando da expressão do momento de forças $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$ em relação ao pólo O

(note que as forças internas não aparecem na expressão do momento) resulta finalmente em:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O} \quad (135)$$

ou seja, a taxa de variação temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao momento das forças externas em relação ao pólo O arbitrário qualquer, e mais um termo cruzado devido a velocidade do pólo escolhido.

Casos particulares: quando o pólo escolhido for fixo ou coincidente com o centro de massa G , o termo cruzado se anula e a expressão simplifica-se:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}} \quad (136)$$

8.2. Momento da Quantidade de Movimento Angular

Considere um conjunto de partículas P_i , formando um corpo rígido. O **Momento da Quantidade de Movimento** em relação ao pólo O , é dado por:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (137)$$

Para movimento de **translação** do corpo tem-se: $\vec{\omega} = \vec{0}$ $\vec{V}_i = \vec{V}_O = \vec{V}_G$ e substituindo na expressão anterior resulta em:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_G = \left[\sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O) \right] \wedge \vec{V}_G \quad (138)$$

Utilizando a propriedade do centro de massa o somatório resulta em:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O) = m \cdot (G - O) \quad (139)$$

Substituindo, resulta para corpo em **translação** a Momento da Quantidade de Movimento do centro de massa G do corpo rígido:

$$\boxed{\vec{H}_O = (G - O) \wedge m \vec{V}_G} \quad (140)$$

Para movimento geral de **roto-translação** do corpo, a velocidade do ponto P_i de massa m_i do corpo, localizado na posição $(P_i - O) = \vec{r}_i$ pode ser obtida pela fórmula de campo de velocidades $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ (note que neste caso o pólo O pertence ao corpo) que substituindo na expressão anterior resulta em dois somatórios:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_O + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \quad (141)$$

Utilizando a propriedade do centro de massa, o primeiro somatório resulta em:

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \cdot m_i \wedge \vec{V}_O = (G - O) \wedge m \vec{V}_O \quad (142)$$

Para o segundo somatório $\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)]$ considerando a posição do ponto P_i

$(P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$, para ponto O pertencente ao corpo e velocidade angular do corpo

$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, tem-se para o primeiro produto vetorial:

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} + \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} + \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (143)$$

Para o segundo produto vetorial $(P_i - O) \wedge \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$:

$$\begin{aligned} & [(\omega_x y_i^2 - \omega_y x_i y_i) - (\omega_z x_i y_i - \omega_x z_i^2)] \vec{i} + \\ & [(\omega_y z_i^2 - \omega_z y_i z_i) - (\omega_x y_i x_i - \omega_y x_i^2)] \vec{j} + \\ & [(\omega_z x_i^2 - \omega_x z_i x_i) - (\omega_y z_i y_i - \omega_z y_i^2)] \vec{k} \end{aligned} \quad (144)$$

Aplicando na formula do momento da quantidade de movimento angular:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O = (G - O) \wedge m \vec{V}_O + \sum m_i \{ & \\ & [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] \vec{i} + \\ & [\omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \omega_x x_i y_i - \omega_z y_i z_i] \vec{j} + \\ & [\omega_z (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i] \vec{k} \} \end{aligned} \quad (145)$$

Chamando de **Momentos e Produtos de Inércia** os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) = J_x \quad ; \quad \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) = J_y \quad \text{e} \quad \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = J_z \\ \sum m_i x_i y_i = J_{xy} = J_{yx} \quad ; \quad \sum m_i y_i z_i = J_{yz} = J_{zy} \quad \text{e} \quad \sum m_i z_i x_i = J_{zx} = J_{xz} \end{aligned} \quad (146)$$

e voltando a substituir na formula anterior, resulta no momento angular para corpo em relação ao pólo O em:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O = (G - O) \wedge m \vec{V}_O + [\\ (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \vec{i} + \\ (J_y \omega_y - J_{xy} \omega_x - J_{yz} \omega_z) \vec{j} + \\ (J_z \omega_z - J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y) \vec{k}] \end{aligned} \quad (147)$$

Na forma vetorial mista:

$$\boxed{\{\vec{H}\}_O = (\{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\} [J]_O \{\omega\}) + (G - O) \wedge m \vec{V}_O} \quad (148)$$

Note que devido a utilização da fórmula de campo de velocidade, o pólo O deve pertencer ao corpo rígido.

Alternativamente, expressando de forma matricial, utilizando o vetor posição $(G - O) = \vec{r}_G = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$ expresso na forma anti-simétrica (*skew symmetric matrix* : $[A]^T = -[A]$), obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{Ox} \\ V_{Oy} \\ V_{Oz} \end{Bmatrix} \quad (149)$$

ou na forma compacta de produto matricial (*skel symmetric*):

$$\{H_O\} = ([J]_O \{\omega\}) + m \cdot [\vec{r}] \{V_O\} \quad (150)$$

A matriz $[J]_O$ é quadrada, simétrica, de ordem 3, denominada **Matriz de Inércia** que retrata a forma como a massa é distribuída no corpo em relação ao sistema de coordenadas **Oxyz**, conforme organizado na dedução do item 8.2. Os termos quadráticos na diagonal principal são denominados **Momentos de Inércia** em relação a eixos e os termos fora da diagonal são chamados de **Produtos de Inércia** em relação a pares de eixos coordenados. Note que o ponto O pertence ao corpo ou extensão ideal dele.

Propriedades:

- Se o pólo selecionado O , pertencente ao corpo, for coincidente com o centro de massa ou tiver velocidade nula, a expressão de momento da quantidade de movimento se reduz à:

$$\{H_O\} = [J]_O \{\omega\};$$
- Note que se a matriz de inércia não for diagonal (produtos de inércia diferentes de zero), o vetor \vec{H}_O não terá a mesma direção da velocidade angular $\vec{\omega}$. Se o movimento de rotação for confinado por mancais estes terão reações opostas formando binário. Se o movimento de rotação for livre o binário moverá o eixo de rotação para direção principal de inércia (eixo tal que a matriz de inércia seja diagonal).

8.3. Mudança de Pólo

A quantidade de movimento angular \vec{H}_O , com pólo O pertencente ao corpo rígido, pode ser determinada em outro pólo arbitrário qualquer (por exemplo pólo Q) utilizando a fórmula de mudança de pólo descrita por:

$$\boxed{\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O - Q) \wedge m \vec{V}_G} \quad (151)$$

Demonstração: considere o corpo rígido formado por um sistema de partículas P_i de massa m_i e velocidade \vec{V}_{P_i} . O momento da quantidade de movimento em relação ao pólo O da partícula P_i é dado por: $\vec{H}_{O_i} = (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_{P_i}$. Para o sistema de partículas (corpo rígido - CR), o momento

da quantidade de movimento em relação ao mesmo pólo O é obtido pelo somatório:

$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_{P_i}$. Em relação ao outro pólo qualquer, por exemplo Q , tem-se:

$\vec{H}_Q = \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \wedge m_i \cdot \vec{V}_{P_i}$ e fazendo a diferença: $\vec{H}_Q - \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n [(P_i - Q) - (P_i - O)] \wedge m_i \cdot \vec{V}_{P_i} \Rightarrow$

$\vec{H}_Q = \vec{H}_O + \sum_{i=1}^n (O - Q) \wedge m_i \cdot \vec{V}_{P_i}$ e utilizando a propriedade do centro de massa obtêm-se:

$$\boxed{\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O - Q) \wedge m \vec{V}_G} \quad c.q.d.$$

É notável a similaridade com a fórmula de mudança de pólo para momento de forças:

$\vec{M}_Q = \vec{M}_O + (O - Q) \wedge \vec{R}$ devido ao vínculo cinemático de corpo rígido.

8.4. Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TQMA

Finalmente retomando a expressão do momento angular $\{\vec{H}\}_O = \{(\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k})[J]_O\{\omega\}\} + (G-O) \wedge m\vec{V}_O$ e derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = \dot{\vec{H}}_O + (\vec{V}_G - \vec{V}_O) \wedge m\vec{V}_O + (G-O) \wedge m\vec{a}_O \quad (152)$$

e lembrando da expressão do momento $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O + m\vec{V}_G \wedge \vec{V}_O$ e substituindo na equação anterior, obtêm-se finalmente o **Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)** para o corpo rígido de massa constante em relação ao pólo O pertencente ao corpo:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O + (G-O) \wedge m\vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}} \quad \text{TQMA} \quad (153)$$

Relembrando que um vetor \vec{H}_O , expresso em uma base de coordenadas móvel ($Oxyz$), com a origem O fixo no corpo e versores sujeitos a um arrastamento com velocidade angular $\vec{\omega}$, tem-se a sua derivada como:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k} \\ \dot{\vec{H}}_O &= (\dot{H}_x \vec{i} + \dot{H}_y \vec{j} + \dot{H}_z \vec{k}) + (H_x \dot{\vec{i}} + H_y \dot{\vec{j}} + H_z \dot{\vec{k}}) \end{aligned} \quad (154)$$

Os três primeiros termos correspondem à variação temporal do vetor quando observado da base de coordenadas móveis solidárias ao corpo, que é chamada de derivada relativa (ou local).

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{H}_O \right)_{rel} = \dot{H}_x \vec{i} + \dot{H}_y \vec{j} + \dot{H}_z \vec{k} \quad (155)$$

Considerando a derivada dos versores da base móvel arrastados por $\vec{\omega}_{arr} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ (três últimos termos), resultam em:

$$\begin{aligned} \left(H_x \dot{\vec{i}} + H_y \dot{\vec{j}} + H_z \dot{\vec{k}} \right) &= H_x (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i}) + H_y (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j}) + H_z (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k}) \\ \vec{\omega}_{arr} \wedge (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}) &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_O \end{aligned} \quad (156)$$

Finalmente somando os dois termos obtém-se a derivada total (ou absoluta):

$$\dot{\vec{H}}_O = \frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}_O \right)_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_O \quad (157)$$

\uparrow **rotação própria** \uparrow **binário giroscópico**

ou na forma matricial, onde $\{ \}$ são os escalares do vetor $[3 \times 1]$, descritos como matriz coluna e $[\sim]$ a matriz anti-simétrica (*skew symmetric matrix*):

$$\left(\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} \right)_{abs} = \left(\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} \right)_{rel} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} \quad (158)$$

Casos particulares:

a) Se a escolha das coordenadas auxiliares tiver a origem coincidente com o centro de massa ($O \equiv G$), e solidário ao corpo, a expressão da equação de rotação do corpo rígido se reduz à:

$$\dot{\vec{H}}_G = \frac{d}{dt}([J]_G \{\vec{\omega}\}) = \frac{d}{dt}([J]_G \{\vec{\omega}\})_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge ([J]_G \{\vec{\omega}\}) = \vec{M}_G^{ext} \quad (159)$$

Fazendo a derivada da quantidade de movimento expressa num referencial móvel:

$$\frac{d}{dt}([J]_G \{\vec{\omega}\})_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = \vec{M}_G^{ext} \quad (160)$$

ou na forma matricial utilizando $\{H_G\} = [J]_G \{\omega\}$ e a matriz anti-simétrica $[\tilde{\omega}]$:

$$\boxed{[J]_G \{d\omega_{abs} / dt\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}] [J]_G \{\omega_{abs}\} = \{M_G^{ext}\}} \quad (161)$$

ou seja, a variação da quantidade de movimento angular corresponde ao momento das forças externas em relação ao mesmo pólo. O primeiro termo da equação anterior é chamado de **Rotação Própria** e o segundo termo de **Binário Giroscópico**.

b) Se o corpo for simétrico, o sistema de coordenadas for solidário ao corpo, coincidente com o centro de massa ($O \equiv G$) e orientado segundo eixos principais (matriz de inércia diagonal com momentos $J_1, J_2,$ e J_3 e produtos $J_{xy}, J_{yz},$ e J_{zx} todos nulos) então:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{Bmatrix} \quad (162)$$

Que resulta nas equações na forma de ***Euler***:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_{Gx} \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_{Gy} \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_{Gz} \end{cases} \quad (163)$$

Note que para o referencial solidário ao corpo: $\vec{\omega}_{arr} = \vec{\omega}_{abs}$; $\vec{\omega}_{rel} = 0$ e portanto:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_{abs} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \frac{d}{dt} \vec{\omega}_{abs}.$$

c) Para corpos girando em torno de um eixo (ex. $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$ em torno do eixo z) e sem simetria em relação ao centro de massa, os produtos de inércia não serão nulos (o sistema de coordenadas deve ser solidário ao corpo para manter a matriz de inércia constante) e mesmo com aceleração angular nula ($\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \vec{0}$) haverá termos quadráticos na velocidade angular multiplicado por produtos de inércia (que corresponde à sistemas desbalanceados) resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{Bmatrix} \quad (164)$$

$$\omega_z^2 (J_{zy} \vec{i} - J_{zx} \vec{j}) = M_{Gx} \vec{i} + M_{Gy} \vec{j}$$

Caso particular: caso do pólo Q seja arbitrário qualquer não pertencente ao corpo, a fórmula do *TQMA* se modifica (Pesce, 2001 - pg. 66):

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O + (G - O) \wedge m \vec{a}_O + (O - Q) \wedge m \vec{a}_G = \vec{M}_Q^{ext}} \quad (165)$$

Note ainda que derivando a expressão de mudança de pólo: $\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O - Q) \wedge m \vec{V}_G$ em relação ao tempo obtêm-se: $\dot{\vec{H}}_Q = \dot{\vec{H}}_O + (\vec{V}_O - \vec{V}_Q) \wedge m \vec{V}_G + (O - Q) \wedge m \vec{a}_G$.

Lembrando que: $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O$ independe do pólo escolhido e substituindo tem-se:

$$\dot{\vec{H}}_Q = \vec{M}_O^{ext} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O + (\vec{V}_O - \vec{V}_Q) \wedge m \vec{V}_G + (O - Q) \wedge m \vec{a}_G.$$

Utilizando a fórmula de mudança de pólo para momento: $\vec{M}_Q^{ext} = \vec{M}_O^{ext} + (O - Q) \wedge \vec{R}$ resulta

$$\text{rearranjando em: } \dot{\vec{H}}_Q = \vec{M}_Q^{ext} - (O - Q) \wedge \vec{R} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O + (\vec{V}_O - \vec{V}_Q) \wedge m \vec{V}_G + (O - Q) \wedge m \vec{a}_G.$$

Finalmente utilizando o teorema da resultante $m \vec{a}_G = \vec{R}$ obtêm-se novamente a expressão:

$$\dot{\vec{H}}_Q = \vec{M}_Q^{ext} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O, \text{ deduzida no item 8.1 que é válida para um pólo arbitrário.}$$

Exemplo: Bola de bilhar

Uma esfera de raio R e massa m é lançada sobre um plano com velocidade de translação \vec{V}_G . Determinar a posição, o instante e a velocidade angular do início do rolamento sem escorregamento. Considere que a esfera não descola do plano e que o coeficiente de atrito entre a esfera e a superfície seja igual a μ .

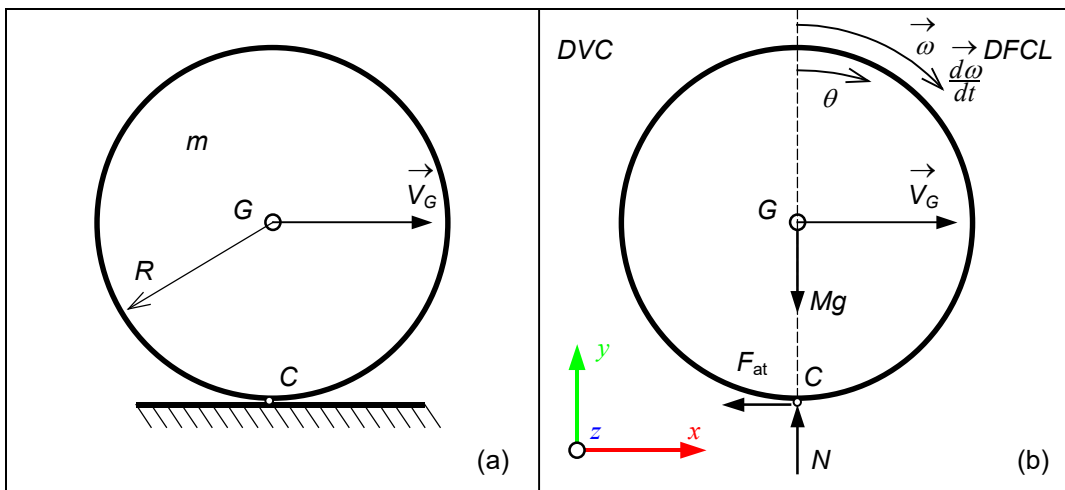


Figura 25 – Dinâmica do Corpo Rígido

Resolução: a) **Sistema:** esfera de raio R e massa m ; b) **Diagramas:** *DVC*, *DFCL*, conforme ilustrado na Figura 25b. c) **Base e Pólo:** Móvel solidário à esfera mas não girante $Oxyz$. d) **Teoremas:** *TR* e *TQMA*.

Para o movimento inicial de translação pura, com velocidade inicial $\vec{V}_G = V_G \vec{i}$, a condição cinemática de contato no ponto C ocorre por escorregamento puro. Neste caso a relação de *Coulomb* ($|F_{at}| \leq \mu N$) atinge seu limite máximo e a força de atrito, que é contrária à direção do movimento fica: $F_{at} = \mu N$. Aplicando o *TR* na esfera obtêm-se: $m\vec{a}_G = -F_{at} \vec{i} + N \vec{j} - m\vec{g}$ considerando o movimento plano:

$$\begin{cases} m a_{Gx} = -F_{at} \\ m a_{Gy} = N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{Gx} = -F_{at} / m = -\mu g \\ N = mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_{Gx} = -\mu g}$$

Aplicando o **TQMA** na esfera, considerando o pólo **G**, tem-se que

$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G-O) \wedge m \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}$ e observando o **DFCL**, obtêm-se:

$$J_{Gz} \dot{\omega} = (C-G) \wedge \vec{F}_{at} \quad \Rightarrow \quad J_{Gz} (-\dot{\omega}) \vec{k} = -R \vec{j} \wedge -F_{at} \vec{i} = -R F_{at} \vec{k} \quad \text{para } F_{at} = \mu N \text{ e}$$

$N = mg$ obêm-se: $\dot{\omega} = -\frac{R F_{at}}{J_{Gz}} = -\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}$ que a aceleração angular constante, enquanto houver

escorregamento. Considerando um movimento uniformemente variado (aceleração angular

constante) pode-se integrar: $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \dot{\omega} dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\omega} dt \Rightarrow \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega_f} = \dot{\omega} \cdot t \Big|_{t_0}^{t_f}$

$$\Rightarrow (\omega_f - \omega_0) = -\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} (t_f - t_0) \quad \text{para } t_0 = 0 \text{ e } \omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = -\frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t_f} \text{ Eq.: I.}$$

Considerando um movimento uniformemente variado (aceleração constante) pode-se integrar:

$$a = \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad dV = a dt \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V_f} dV = \int_{t_0}^{t_f} a dt \quad \Rightarrow \quad V \Big|_{V_0}^{V_f} = a \cdot t \Big|_{t_0}^{t_f} \quad \Rightarrow$$

$$(V_f - V_0) = -\mu g (t_f - t_0) \quad \text{para } t_0 = 0 \text{ e } V_0 = V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_f = V - \mu g t_f} \text{ Eq.: II.}$$

Utilizando as equações **I** e **II** e lembrando da relação cinemática $V_f = -R\omega_f$ resulta: $\boxed{t_f = \frac{2}{3} \frac{V}{\mu g}}$

Considerando um movimento uniformemente variado tem-se: $s = s_0 + V_0 t + 0.5 a t^2$ $s = \frac{4}{9} \frac{V^2}{\mu g}$

Qual será o valor da força de atrito após este instante?

Exemplo: Dinâmica do Monociclo

Considere o problema da dinâmica do monociclo motorizado mostrado na Figura 26a. Um modelo simplificado de representação física composto de um disco (representando a roda motorizada) e uma barra homogênea (representando a estrutura do veículo, carcaça do motor elétrico e passageiro), está ilustrado na Figura 26b. Determinar o torque $T(t)$ do motor elétrico necessários para manter uma aceleração translacional constante do monociclo e o valor do ângulo $\theta(t)$ de regime constante. Considere o contato unilateral de rolamento do disco com a superfície sem escorregamento e sem descolamento.

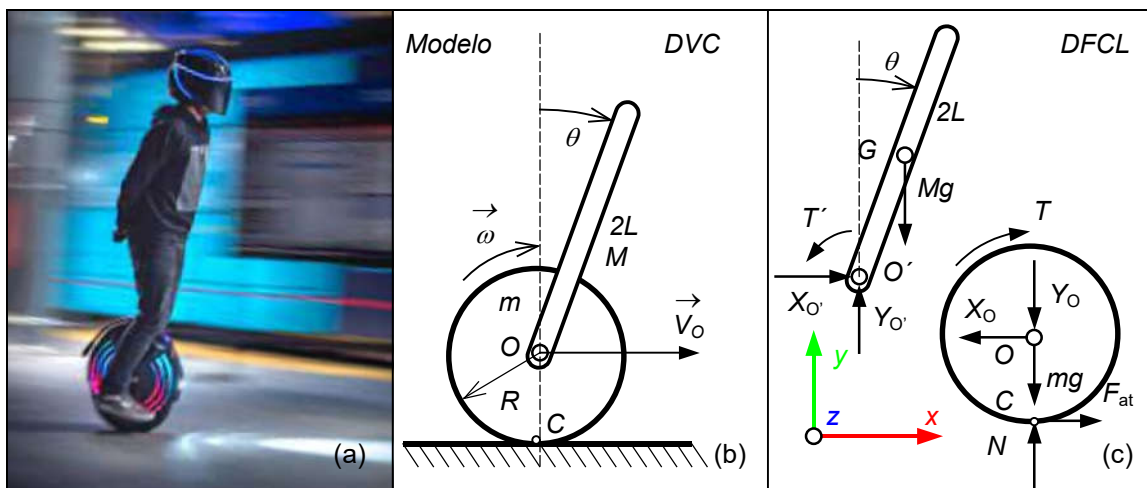


Figura 26 – Dinâmica do Monociclo

Resolução: a) **Sistema:** sistema composto por um disco de raio R e massa m e uma barra de comprimento $2L$ e massa M . Há um vínculo de contato de rolamento em C e uma articulação em O ; b) **Diagramas:** *DVC*, *DFCL*, conforme ilustrado na Figura 26c. c) **Base e Pólo:** Móvel solidário ao disco mas não girante $Oxyz$. d) **Teoremas:** *TR* e *TQMA*.

Da condição cinemática de contato de rolamento sem escorregamento nem descolamento, rotação do disco $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$, obtêm-se a velocidade e aceleração do centro do disco:

$$\vec{V}_O = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (O - C) \Rightarrow \vec{V}_O = 0 - \omega \vec{k} \wedge R \vec{j} = R\omega \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_O = R\alpha \vec{i}.$$

Utilizando o **TQMA** na barra, considerando o **pólo acelerado** em **O'**, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G-O) \wedge m \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad \text{para a barra de comprimento } 2L \text{ homogênea e simétrica e}$$

observando o **DFCL**, obtêm-se:

$$-J_{Oz} \ddot{\theta} \vec{k} + L(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \wedge a_{Ox} \vec{i} = L(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \wedge -Mg \vec{j} + T' \vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$-J_{Oz} \ddot{\theta} - ML a_{Ox} \cos \theta = -MLg \sin \theta + T' \quad ; \quad \text{considerando a condição de equilíbrio quando}$$

$$\theta = \text{cte} \quad \therefore \quad \dot{\theta} = 0 \quad \therefore \quad \ddot{\theta} = 0 \quad \text{obtêm-se: } \boxed{T' = ML(g \sin \theta - a_{Ox} \cos \theta)}$$

Aplicando o **TR** no disco: $m \vec{a}_O = \vec{R}_O + \vec{R}_C + m \vec{g} \Rightarrow mR\alpha \vec{i} = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} + F_{at} \vec{i} + N \vec{j} - mg \vec{j}$

$$\begin{cases} mR\alpha = -X_O + F_{at} \\ 0 = -Y_O + N - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{at} = mR\alpha + X_O \\ N = Y_O + mg = (M+m)g \end{cases}$$

Para aplicar o **TQMA**, obtêm-se inicialmente o momento da quantidade de movimento considerando o pólo em **C** do disco homogêneo e simétrico (matriz de inércia diagonal):

$$\{\vec{H}_C\} = [J]_C \{\vec{\omega}\} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_C \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{Cz} \omega_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_C = -J_{Cz} \omega_z \vec{k} \quad ;$$

Utilizando o **TQMA** descrito por: $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G-O) \wedge m \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}$, considerando o pólo **C**

acelerado do disco e identificando o momento externo aplicado ao disco observando o **DFCL**,

obtêm-se: $\dot{\vec{H}}_C + (G-C) \wedge m \vec{a}_C = \vec{M}_C^{ext} \Rightarrow$

$$-J_{Cz} \dot{\omega}_z \vec{k} + (R \vec{j} \wedge mR\omega^2 \vec{j}) = -T \vec{k} + (O-C) \wedge -X_O \vec{i} \Rightarrow -J_{Cz} \dot{\omega}_z \vec{k} = -T \vec{k} + R X_O \vec{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\omega}_z = \frac{T - R X_O}{J_{Cz}}}$$

Aplicando o **TR** na barra: $M \vec{a}_G = \vec{R}_{O'} + M \vec{g}$

A aceleração do centro de massa **G** da barra é: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \ddot{\theta} \wedge (G-O) + \dot{\theta} \wedge [\dot{\theta} \wedge (G-O)] \Rightarrow$

$$\vec{a}_G = R\alpha \vec{i} - \ddot{\theta} \vec{k} \wedge L(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) - \dot{\theta} \vec{k} \wedge [-\dot{\theta} \vec{k} \wedge L(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_G = R\alpha \vec{i} + L\ddot{\theta}(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) - L\dot{\theta}^2(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \quad \text{para } \theta(t) \text{ constante } (\dot{\theta} = 0 \text{ e } \ddot{\theta} = 0)$$

$$\begin{cases} MR\alpha = X_{O'} \\ 0 = Y_{O'} - Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{O'} = M a_{Ox} \\ Y_{O'} = Mg \end{cases}$$

A título ilustrativo aplicando novamente o **TQMA** na barra, considerando agora o pólo em **G**, obtêm-se inicialmente o momento da quantidade de movimento para o barra de comprimento $2L$ homogênea e simétrica:

$$\{\vec{H}_G\} = [J]_G \{\dot{\theta}\} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{Gz} \dot{\theta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_G = -J_{Gz} \dot{\theta} \vec{k} \quad ; \text{ derivando com}$$

relação ao tempo e obtendo o momento externo observando o **DFCL**, termo cruzado nulo e considerando que $\ddot{\theta} = 0$, obtêm-se: $-J_{Gz} \ddot{\theta} \vec{k} = \vec{T}' + (O' - G) \wedge (X_{O'} \vec{i} + Y_{O'} \vec{j}) \Rightarrow$

$$0 = T' \vec{k} - L(\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \wedge (X_{O'} \vec{i} + Y_{O'} \vec{j}) \Rightarrow T' = L(-X_{O'} \cos \theta + Y_{O'} \sin \theta) \text{ utilizando os}$$

$$\text{valores das forças em } O': \boxed{T' = ML(g \sin \theta - a_{Ox} \cos \theta)}$$

Note no **DFCL** que o motor de acionamento do conjunto produz um torque **T** de interação interna que aciona o disco e reage na barra com **T'**.

$$\text{Finalmente considerando: } a_{Ox} = R\alpha = R\dot{\omega} \quad ; \quad X_{O'} = M a_{Ox} \quad \text{e} \quad J_{Cz} = \bar{J}_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{T - R X_{O'}}{J_{Cz}} \Rightarrow T = J_{Cz} \dot{\omega} + R X_{O'} = \frac{3}{2}mR^2 \frac{a_{Ox}}{R} + R M a_{Ox} \Rightarrow \boxed{T = (M + 3m/2)R a_{Ox}}$$

Adicionalmente a aceleração é função do ângulo razão entre as massas (**M/m**), entre as dimensões (**L/R**) e gravidade (**g**):

$$\dot{\omega}_z = \frac{T - R X_{O'}}{J_{Cz}} \Rightarrow -\frac{a_{Ox}}{R} = \frac{-L(M a_{Ox} \cos \theta - Mg \sin \theta) - R M a_{Ox}}{J_{Cz}}$$

$$\boxed{a_{Ox} = \frac{(M/m)(L/R) \sin \theta}{[(M/m)(L/R) \cos \theta + (M/m)(2/3R) - 1]} g}$$

9. ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO

Com a intenção de facilitar a assimilação da técnica de resolução de sistemas dinâmicos rotativos, grupos de problemas típicos de movimentação, com complexidade crescente, serão abordados. Assim, a rotação de corpo em torno de um eixo fixo, rotação composta, rotação em torno de um ponto e movimento tridimensional livre, foram selecionados, agrupados e apresentados a seguir.

9.1. Rotação em Torno de um Eixo Fixo

Determinar as reações nos mancais do rotor com eixo fixo. Considere o corpo rígido S apoiado sobre o anel em A e a articulação B , girando com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ em torno de eixo fixo, conforme mostrado na Figura 27a.

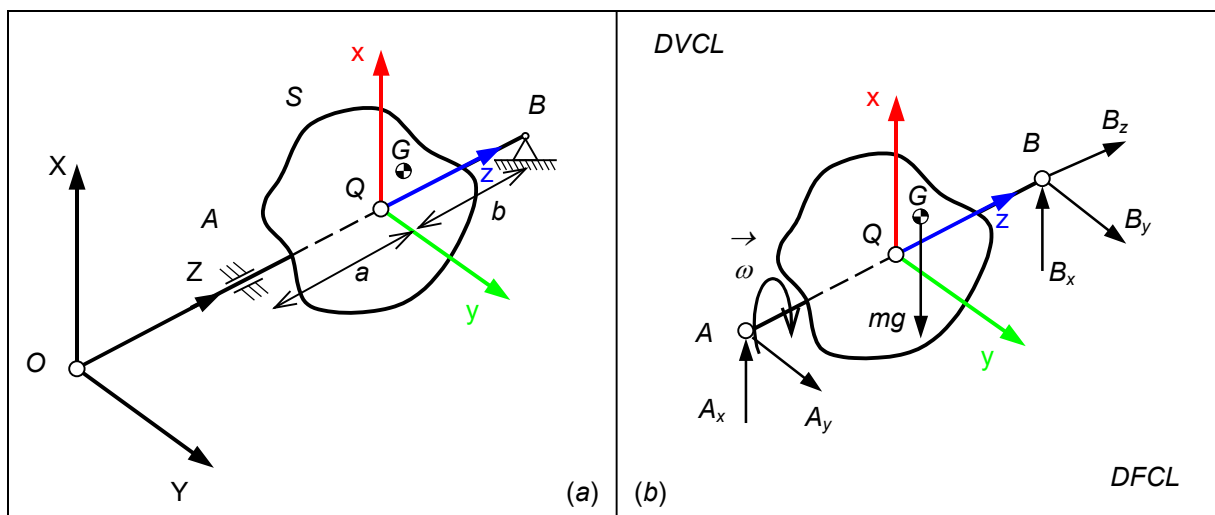


Figura 27 – Rotor com Eixo Fixo

As reações dinâmicas nos mancais podem ser obtidas pelo Teorema da Resultante (**TR**) e observando o diagrama de forças sobre o corpo livre, conforme ilustrado na Figura 27b, obtêm-se:

$$m \vec{a}_G = \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}^{ext} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{R}_A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \vec{R}_B = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \end{cases} \quad (166)$$

De forma genérica o centro de massa **G** pode não coincidir com o eixo de rotação. Portanto sua aceleração deve ser obtida pela fórmula de campo de acelerações, expressa no referencial auxiliar móvel **Qxyz** solidário ao corpo. Considerando apenas por simplicidade o centro de massa contido no plano **GQxy** (portanto $(G-Q) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j}$), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-Q) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-Q)] \\ \vec{a}_G &= \dot{\omega} \vec{k} \wedge (x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) - \omega^2 (x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) \\ \vec{a}_G &= \dot{\omega} x_G \vec{j} - \dot{\omega} y_G \vec{i} - \omega^2 x_G \vec{i} - \omega^2 y_G \vec{j} \\ \vec{a}_G &= -(\dot{\omega} y_G + \omega^2 x_G) \vec{i} + (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) \vec{j} \end{aligned} \quad (167)$$

Note que a coordenada $z_G \vec{k}$ não comparece na expressão, portanto não afetando o resultado. Substituindo a aceleração do centro de massa na equação do **TR**, obtêm-se:

$$\begin{cases} -m \cdot (\dot{\omega} y_G + \omega^2 x_G) = A_x + B_x + F_x^{ext} \\ +m \cdot (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) = A_y + B_y + F_y^{ext} \\ 0 = B_z + F_z^{ext} \end{cases} \quad (168)$$

Desprezando as forças externas: $F_x = F_y = F_z = 0$ (ex. gravidade), restam duas equações e quatro incógnitas: A_x , A_y , B_x e B_y . Note que as equações são dependentes de ω^2 e $\dot{\omega}$. Para obter mais relações entre as incógnitas, utiliza-se a expressão do momento angular \vec{H}_Q do corpo em relação ao pólo **Q** fixo:

$$\vec{H}_Q = [J_Q] \cdot \vec{\Omega} + (G-Q) \wedge m \vec{V}_Q \quad (169)$$

Considerando o sistema de coordenadas móvel $\mathcal{Q}xyz$ com versores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} solidário ao corpo \mathcal{S} e o pólo em \mathcal{Q} fixo (portanto $\vec{V}_Q = 0$) e a velocidade angular $\vec{\Omega} = \vec{\omega} = \omega \vec{k} = (0, 0, \omega) = \{0, 0, \omega\}^T$, obtêm-se:

$$\vec{H}_Q = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_x & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} + 0 = \begin{Bmatrix} -J_{xz}\omega \\ -J_{yz}\omega \\ J_z\omega \end{Bmatrix} = -J_{xz}\omega \vec{i} - J_{yz}\omega \vec{j} + J_z\omega \vec{k} \quad (170)$$

Utilizando o **TQMA** na forma vetorial, com o pólo em \mathcal{Q} fixo (portanto $\vec{a}_Q = 0$), obtêm-se derivando \vec{H}_Q , as equações adicionais necessárias para solucionar o problema.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{H}_Q + (G-Q) \wedge m \vec{a}_Q &= \vec{M}_Q^{ext} \\ \frac{d}{dt} \vec{H}_Q &= -J_{xz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{yz} \dot{\omega} \vec{j} + J_z \dot{\omega} \vec{k} - J_{xz} \omega \dot{\vec{i}} - J_{yz} \omega \dot{\vec{j}} + J_z \omega \dot{\vec{k}} \\ \dot{\vec{i}} &= \vec{\omega} \wedge \vec{i} = \omega \vec{k} \wedge \vec{i} = \omega \vec{j} \quad ; \quad \dot{\vec{j}} = -\omega \vec{i} \quad ; \quad \dot{\vec{k}} = 0 \\ \dot{\vec{H}}_Q &= -J_{xz} \dot{\omega} \vec{i} - J_{yz} \dot{\omega} \vec{j} + J_z \dot{\omega} \vec{k} - J_{xz} \omega^2 \vec{j} + J_{yz} \omega^2 \vec{i} = \vec{M}_Q^{ext} \end{aligned} \quad (171)$$

O momento das forças vinculares é determinado por $\vec{M}_Q^{ext} = \sum (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i$. Tem-se ainda que a ação externa da gravidade $m \vec{g} = -m g \vec{I}$ produz um momento. Projetando o versor vertical no referencial móvel obtêm-se: $\vec{I} = (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j})$ que resulta em $m \vec{g} = -m g (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j})$ onde: $(G-Q) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j}$ e $\omega = d\theta/dt$. Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q^{ext} &= (A-Q) \wedge \vec{R}_A + (B-Q) \wedge \vec{R}_B + (G-Q) \wedge m \vec{g} = (x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) \wedge -m g \vec{I} \\ \text{mas } \vec{I} &= (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j}) \\ \vec{M}_Q^{ext} &= -m g \cdot [(x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) \wedge (\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j})] \\ \vec{M}_Q^{ext} &= (-a \vec{k}) \wedge \vec{R}_A + b \vec{k} \wedge \vec{R}_B + m g \cdot (x_G \text{sen} \theta + y_G \cos \theta) \vec{k} \end{aligned} \quad (172)$$

Isolando as 3 equações diferenciais de segunda ordem em cada direção \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , obtêm-se:

$$\begin{cases} -J_{zx} \dot{\omega} + J_{zy} \omega^2 = a \cdot A_y - b \cdot B_y + 0 \\ -J_{yz} \dot{\omega} + J_{zx} \omega^2 = -a \cdot A_x + b \cdot B_x + 0 \\ J_z \dot{\omega} = mg(x_G \sin \theta + y_G \cos \theta) \end{cases} \quad (173)$$

Note que as 3 equações adicionais também são dependentes de ω^2 e $\dot{\omega}$.

Da última equação da expressão anterior, constata-se a aceleração angular do eixo $\dot{\omega}$ é devido ao momento da gravidade e da excentricidade ($G-Q$) e um eventual torque de acionamento externo (ex.: motor), restando mais duas equações. Considerando a velocidade angular constante ($\omega = \text{cte} \therefore \dot{\omega} = 0$) e desprezando a ação gravitacional, as reações dos mancais A e B no plano Qxy resultam final mente em:

$$\begin{cases} -m \omega^2 x_G = A_x + B_x \\ -m \omega^2 y_G = A_y + B_y \\ J_{yz} \omega^2 = a \cdot A_y - b \cdot B_y \\ J_{xz} \omega^2 = -a \cdot A_x + b \cdot B_x \end{cases} \quad (174)$$

Note que as quatro equações para a identificação das reações nos mancais (quatro incógnitas: A_x , A_y , B_x e B_y) são dependentes de ω^2 .

Exemplo: rotação em torno de um eixo fixo

Considere o problema de rotação em torno de um eixo fixo do corpo rígido único composto por duas barras de massa m e comprimento L que estão ligadas a um eixo por barras radiais de massas desprezíveis comprimento L , conforme ilustrado na Figura 28a. Um motor externo produz um torque $\vec{T}(t) = M_x(t) \vec{i}$ variável e controlado de forma a girar o corpo com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$ em torno dos mancais A e B . Determinar, desconsiderando a ação gravitacional, as reações dinâmicas nos mancais A e B .

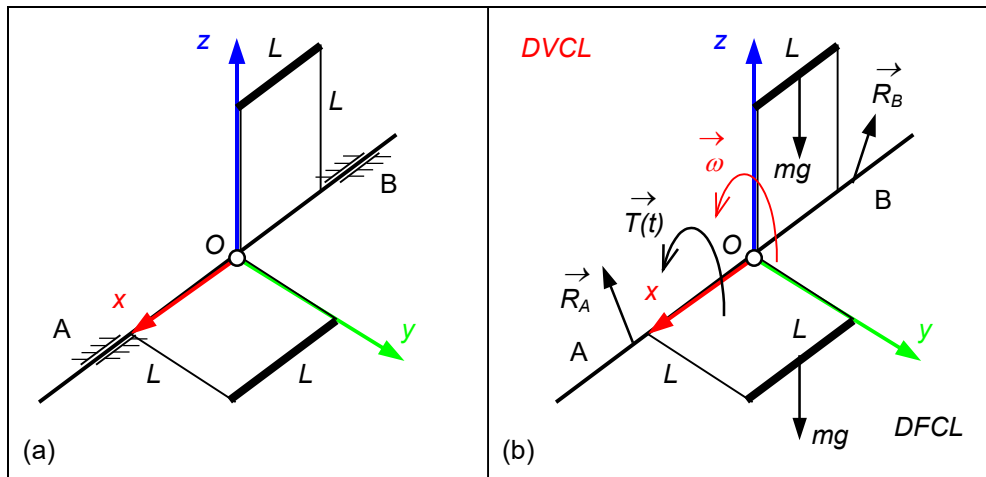


Figura 28 – Rotor excêntrico e assimétrico

Resolução: a) **Sistema:** sistema composto por duas barra de comprimento L e massa m , eixo suporte de massa desprezível e dois vínculos A e B . b) **Diagramas:** DFCL, conforme ilustrado na Figura 28b. c) **Referencial** e Pólo: $Oxyz$. d) **Teoremas:** TR e TQMA.

A posição do centro de massa é dado por: $(G - O) = \frac{L}{2}(\vec{j} + \vec{k}) = (0 \quad L/2 \quad L/2)$.

A aceleração do centro de massa é: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \Rightarrow$

$\vec{a}_G = -\frac{L}{2}\omega_x^2(\vec{j} + \vec{k})$. Aplicando o **TR** no eixo: $2m\vec{a}_G = (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A + Z_B)\vec{k} + 2m\vec{g} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -mL\omega^2 = Y_A + Y_B + 2mg \cos \theta \\ -mL\omega^2 = Z_A + Z_B + 2mg \sen \theta \end{cases}$$

Utilizando o **TQMA** descrito por: $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G - O) \wedge m\vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}$, considerando o pólo fixo O

$\therefore \vec{a}_O = \vec{0}$ obtêm-se inicialmente o momento da quantidade de movimento:

$$\{\vec{H}_O\} = [J]_O \{\vec{\omega}\} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_x & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_O = J_x \omega_x \vec{i} - J_{xy} \omega_x \vec{j} - J_{xz} \omega_x \vec{k}$$

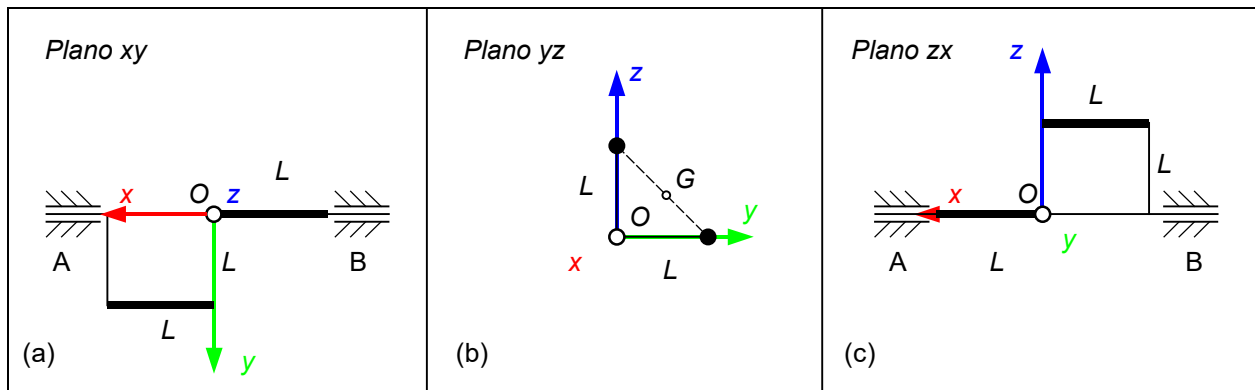


Figura 29 – Vista do Sistema nos Planos Ortogonais

Observando o plano de rotação Oyz , mostrado na Figura 29b, determina-se o momento de inércia: $J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2mL^2$.

Os produtos de inércia são: $J_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i + m \cdot a \cdot b = 0 + m \cdot L/2 \cdot L + m \cdot -L/2 \cdot 0 = mL^2/2$ conforme ilustrado no plano de rotação Oxy da Figura 29a, e

$J_{zx} = \sum m_i \cdot z_i \cdot x_i + m \cdot a \cdot c = 0 + m \cdot L/2 \cdot 0 + m \cdot L \cdot (-L/2) = -mL^2/2$ conforme ilustrado no plano de rotação Oxy da Figura 29c.

Portanto os valores da matriz de inércia são:

$$J_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}_O = mL^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 5/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 5/3 \end{bmatrix}_O$$

O momento angular tomando o pólo O fixo, será: $\{\vec{H}_O\} = [J]_O \{\vec{\omega}\}$ que para $\vec{\omega} = \{\omega_x \ 0 \ 0\}^T$

resulta em: $\vec{H}_O = 2mL^2 \omega_x \vec{i} - \frac{1}{2}mL^2 \omega_x \vec{j} + \frac{1}{2}mL^2 \omega_x \vec{k}$.

Derivando com respeito ao tempo, considerando que $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$; $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \vec{0}$; $\dot{\vec{j}} = \omega \vec{i} \wedge \vec{j} = \omega \vec{k}$

; $\dot{\vec{k}} = \omega \vec{i} \wedge \vec{k} = -\omega \vec{j}$, tem-se apenas: $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = 2mL^2 \omega_x \dot{\vec{i}} + \frac{1}{2}mL^2 \omega_x \dot{\vec{j}} - \frac{1}{2}mL^2 \omega_x \dot{\vec{k}} \Rightarrow$

$$\dot{\vec{H}}_O = -\frac{1}{2}mL^2 \omega_x^2 (\vec{k} + \vec{j}).$$

Desconsiderando a ação gravitacional, obtêm-se duas equações de força e duas equações de momentos dados por:

$$\begin{cases} -y_G \omega^2 = Y_A + Y_B \\ -z_G \omega^2 = Z_A + Z_B \\ -J_{xy} \omega^2 = M_{Oy} \\ -J_{zx} \omega^2 = M_{Oz} \end{cases}$$

O momento das forças externas ao eixo em relação ao pólo O , conforme ilustrado na Figura 28b é: $\vec{M}_O = M_x \vec{i} + L \cdot (Z_A - Z_B) \vec{j} + L \cdot (-Y_A + Y_B) \vec{k}$. Finalmente igualando ao momento externo:

$$\begin{cases} -mL^2 \omega^2 / 2 = L \cdot (-Y_A + Y_B) \\ -mL^2 \omega^2 / 2 = L \cdot (Z_A - Z_B) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, desprezando a ação gravitacional, obtêm-se as reações em cada mancal como: $Y_A = Z_B = -mL\omega_x^2 / 4$; $Z_A = Y_B = -3mL\omega_x^2 / 4$ conforme ilustrado no diagrama de forças do modelo físico da Figura 30.

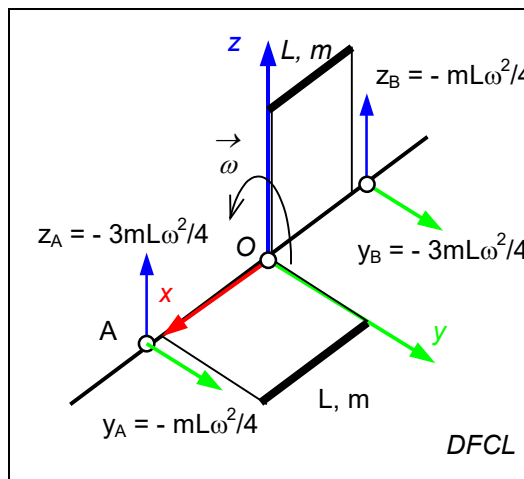


Figura 30 – Diagrama de Forças do Modelo Físico

Note que as forças devem ter unidade em *Newton* ($kg \cdot m \cdot (rad/s)^2$).

Se as forças nos mancais forem medidas em duas seções, caso típico de uma máquina de balanceamento, pode-se determinar a posição do centro de massa (y_G, z_G) e não simetria do corpo (J_{xy}, J_{zx}):

$$\begin{cases} -y_G \omega^2 = Y_A + Y_B \\ -z_G \omega^2 = Z_A + Z_B \\ -J_{xy} \omega^2 = M_{Oy} \\ -J_{zx} \omega^2 = M_{Oz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_G = -(Y_A + Y_B) / \omega^2 \\ z_G = -(Z_A + Z_B) / \omega^2 \\ J_{xy} = -M_{Oy} / \omega^2 \\ J_{zx} = -M_{Oz} / \omega^2 \end{cases}$$

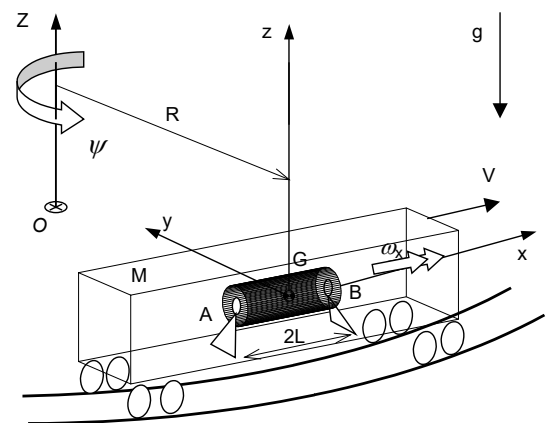
Isto permite realizar o balanceamento do corpo, conforme será apresentado no item 10.1.

9.2. Rotação em Torno de Dois Eixos

O dispositivo mecânico pode ter um conjunto de mancais que force a rotação em torno de um eixo, sendo este arrastado pelo movimento de outro corpo girante. A seguir são apresentados exemplos deste tipo de movimento.

Exemplo 1: rotação em torno de dois eixos

Uma locomotiva diesel/elétrica tem o eixo de rotação do conjunto motor/gerador alinhado com o eixo longitudinal da locomotiva e apoiado na articulação em *A* e no anel em *B*. Este sistema girante tem massa *M*, momentos de inércia J_{Gx}, J_{Gy}, J_{Gz} e tem vetor de rotação constante $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i}$ em relação à locomotiva. O trem percorre um trecho circular da via de raio *R* com velocidade constante $\vec{V} = V \vec{i}$. Determine as reações nos mancais *A* e *B*, devido ao movimento da locomotiva



Método de Resolução: a) Sistema: rotor do motor; b) Referencial e Pólo: Neste caso o referencial pode ser solidário ao rotor mas não necessita girar junto com ele; c) Diagramas: *DVCL* e *DFCL*; d) Teoremas: *TR* e *TQMA*.

a) determinar a velocidade angular $\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi} \vec{k}$ de arrastamento da locomotiva e o vetor $\vec{\Omega}$ de rotação absoluta do rotor (rotação própria $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i}$);

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} \quad \text{e} \quad \vec{\Omega} = \omega_x \vec{i} + \dot{\psi} \vec{k}$$

b) o momento da quantidade de movimento do rotor, tomando como pólo o seu baricentro G e expressando na base auxiliar móvel \mathbf{Gxyz} solidária ao rotor (mas não gira com o rotor) deixando a matriz de inércia do rotor constante;

$$\{\vec{H}_G\} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = J_x \omega_x \vec{i} + J_z \dot{\psi} \vec{k}$$

c) determinar as reações nos mancais A e B , devido ao movimento da locomotiva. Aplicando o **TQMA** no rotor para o pólo em G , obtêm-se:

$$\vec{M}_G^{ext} = \dot{\vec{H}}_G = \left(\frac{d\vec{H}_G}{dt} \right)_{OXYZ} = \left(\frac{d\vec{H}_G}{dt} \right)_{Oxyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G$$

$$\left(\frac{d\vec{H}_G}{dt} \right)_{Oxyz} = \frac{d}{dt} (J_x \omega_x \vec{i} + J_z \dot{\psi} \vec{k}) \rightarrow J_x \omega_x \dot{\psi} \vec{j} = (A-G) \wedge \vec{R}_A + (B-G) \wedge \vec{R}_B$$

pois: $\dot{\vec{i}} = \dot{\psi} \vec{k} \wedge \vec{i} = \dot{\psi} \vec{j}$ e $\dot{\vec{k}} = \dot{\psi} \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ e $\dot{\psi} = cte$ e $\vec{\omega} = cte$

$$J_x \omega_x \dot{\psi} \vec{j} = (-L\vec{i}) \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}) + L\vec{i} \wedge (Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k})$$

$$J_x \omega_x \dot{\psi} \vec{j} = L(Z_A - Z_B) \vec{j} + L(Y_B - Y_A) \vec{k}$$

$$\boxed{\frac{J_x \omega_x V}{R} = L(Z_A - Z_B)} \quad \text{e} \quad \boxed{Y_A = Y_B}$$

Aplicando o **TR** no rotor obtêm-se as forças externas aplicadas no eixo do rotor:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \Rightarrow \vec{a}_G = (V^2 / R) \vec{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ma_{Gx} = X_A \\ Ma_{Gy} = Y_A + Y_B \\ Ma_{Gz} = Z_A + Z_B - Mg \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} X_A = 0 \\ MV^2 / R = Y_A + Y_B \\ Z_A + Z_B - Mg = 0 \end{array}$$

$$X_A = 0 \quad ; \quad Y_A = Y_B = \frac{MV^2}{2R} \quad ; \quad Z_B = -\frac{J_x \omega_x V + LRMg}{2LR} \quad \text{e} \quad Z_A = \frac{J_x \omega_x V - LRMg}{2LR}$$

Portanto as reações nos mancais são iguais e contrárias:

$$\boxed{X'_A = 0} \quad \boxed{Y'_A = Y'_B = -\frac{MV^2}{2R}} \quad \boxed{Z'_B = \frac{J_x \omega_x V + LRMg}{2LR}} \quad \boxed{Z'_A = -\frac{J_x \omega_x V - LRMg}{2LR}}$$

Exemplo 2: rotação em torno de dois eixos

Considere o dispositivo mecânico composto por um disco de raio R e massa m articulado no garfo GO da estrutura $ABOG$ de massa desprezível, conforme apresentado na Figura 31a. O disco gira com velocidade angular relativa $\vec{\omega}_{rel} = \omega_{rel} \vec{j}$ em torno do eixo y e a estrutura $ABOG$ é arrastada com velocidade angular $\vec{\omega}_{arr} = \omega_{arr} \vec{K}$ constante, em torno do eixo vertical Z . Pede-se determinar a variação do momento da quantidade de movimento do disco $\dot{\vec{H}}_G$.

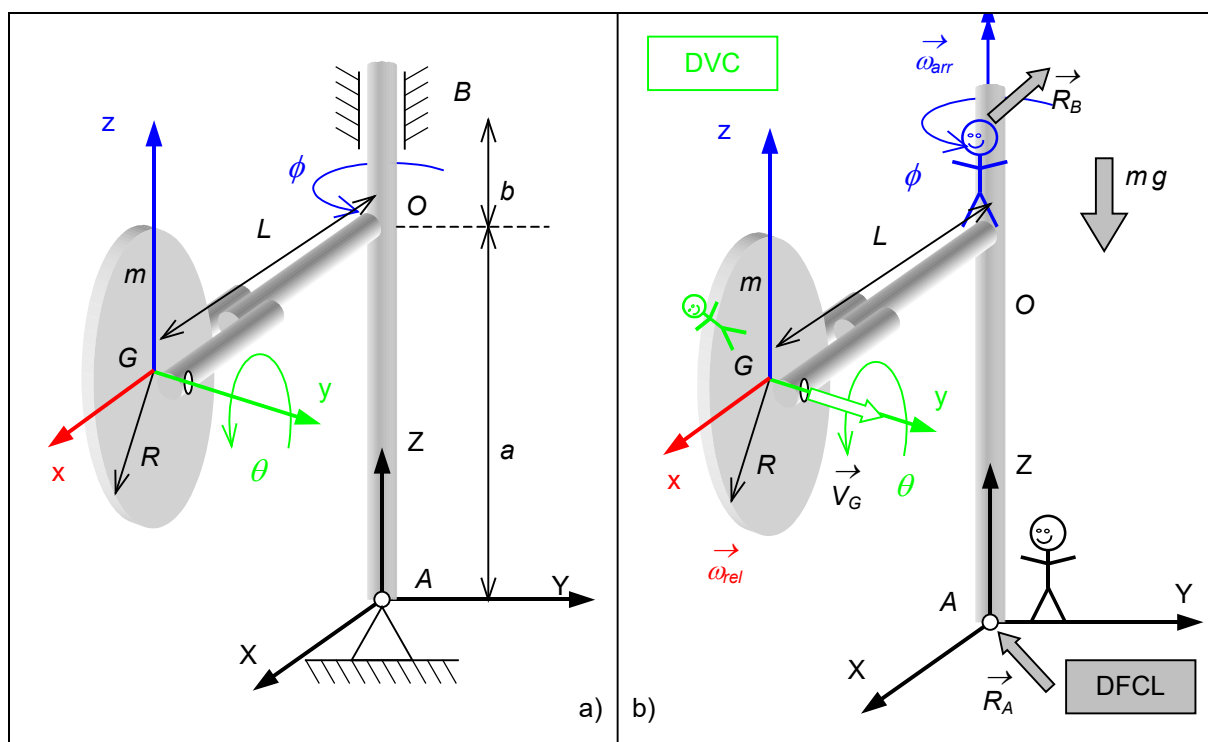


Figura 31 – Movimento Composto em Dois Eixos

Método de Resolução: a) Sistema: disco de raio R e massa m , anel em G e estrutura $ABOG$ articulada em A e contida em B ; b) Referencial e Pólo: base $Gxyz$ solidário à estrutura $ABOG$ e girando junto com ela; c) Diagramas: $DVCL$ e $DFCL$; d) Teoremas: $TQMA$.

a) O vetor de rotação absoluta $\vec{\Omega}$ do disco é obtido pela composição de movimento relativo do disco de centro em G e de arrastamento devido a rotação da estrutura $ABOG$:

$$\vec{\omega}_{rel} = \omega_{rel} \vec{i} = \dot{\theta} \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{arr} = \omega_{arr} \vec{K} = \dot{\phi} \vec{K} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K}$$

Note que a projeção do versor vertical fixo \vec{K} quando expresso na base móvel \mathbf{Gxyz} coincide com: $\vec{K} \equiv \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{k}$

b) O momento da quantidade de movimento do disco axi-simétrico, tomando como pólo o seu centro de massa \mathbf{G} expresso na base auxiliar móvel \mathbf{Gxyz} (eixo principal e central) solidária à estrutura \mathbf{ABOG} (matriz de inércia constante) é dado por:

$$\left\{ \vec{H}_G \right\} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = J_y \dot{\theta} \vec{j} + J_z \dot{\phi} \vec{k}$$

c) Derivando com respeito ao tempo o momento da quantidade de movimento do disco, expresso no referencial móvel \mathbf{Gxyz} , que gira em torno do eixo y (ângulo θ) sendo arrastado pela variação do ângulo ϕ , conforme item 7.6 deve-se calcular:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}_G \right)_{abs} = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}_G \right)_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G$$

Note que, na base móvel \mathbf{Gxyz} , os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ são invariantes. Portanto para $\vec{\omega}_{arr} = \dot{\phi} \vec{k} = cte$ obtêm-se então a variação do **momento angular próprio**:

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{H}_G \right)_{rel} = \frac{d}{dt} (J_y \dot{\theta} \vec{j} + J_z \dot{\phi} \vec{k}) = J_y \ddot{\theta} \vec{j} + J_z \ddot{\phi} \vec{k}$$

Para o segundo termo da expressão, tem-se o **momento giroscópico** decorrente da variação temporal da base devido ao arrastamento:

$$\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = \dot{\phi} \vec{k} \wedge (J_y \dot{\theta} \vec{j} + J_z \dot{\phi} \vec{k}) = -J_y \dot{\theta} \dot{\phi} \vec{i}$$

Finalmente, somando os dois termos, obtêm-se no referencial móvel \mathbf{Gxyz} :

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = -J_y \dot{\theta} \dot{\phi} \vec{i} + J_y \ddot{\theta} \vec{j}}$$

Note que a escolha conveniente do sistema de coordenadas móvel deve permitir a identificação do movimento **relativo** (aquele que acontece quando o movimento de arrastamento é ignorado) e a identificação do movimento de **arrastamento** (quando o corpo em análise está numa determinada posição relativa). Tipicamente seleciona-se o corpo intermediário como base para as coordenadas móveis.

Exemplo do Efeito Giroscópico

Considere o dispositivo mecânico composto por duas massas m_1 e m_2 presas entre si e articulado na extremidade Q da estrutura $ABOQ$ de massa desprezível, conforme apresentado na Figura 32a. As massas giram com velocidade angular relativa $\vec{\omega}_{rel} = \omega_{rel} \vec{i}$ em torno do eixo x e a estrutura $ABOQ$ é arrastada com velocidade angular $\vec{\omega}_{arr} = \omega_{arr} \vec{k}$ em torno do eixo Z . Identifique o efeito giroscópico.

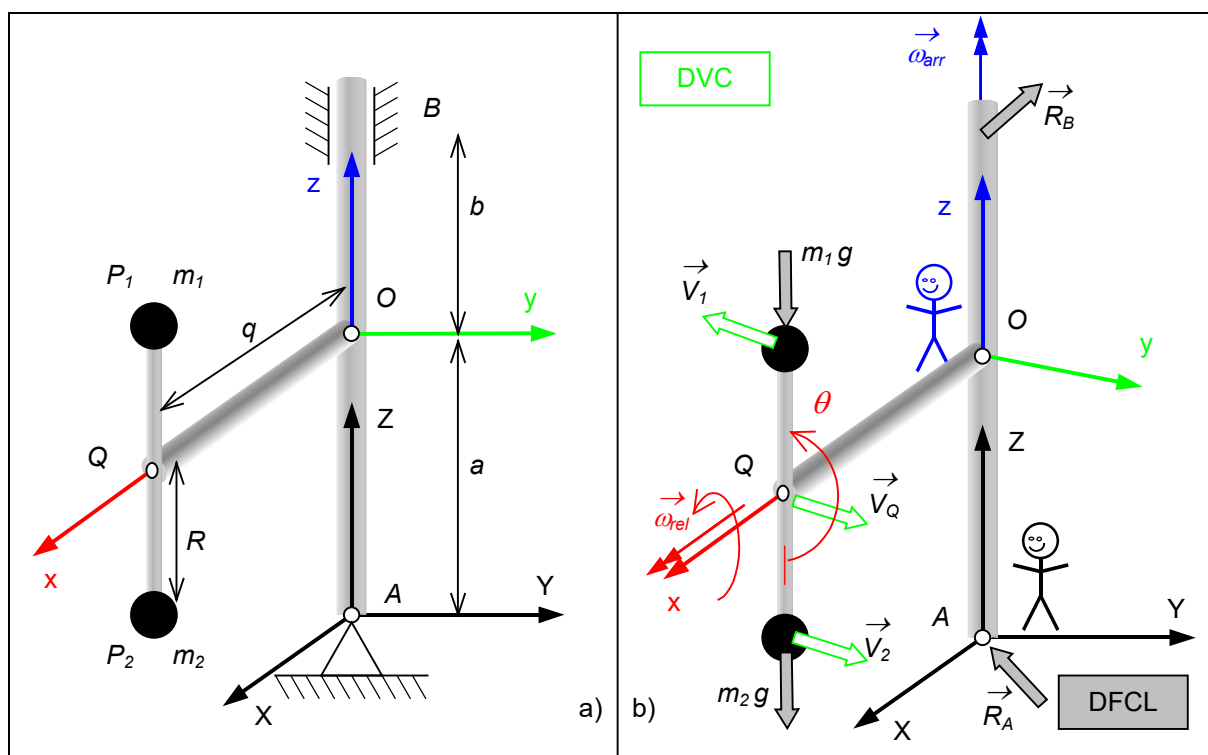


Figura 32 – Movimento Composto e Reação Giroscópica

Método de Resolução: a) Sistema; b) Referencial e Pólo; c) Diagramas; d) Teoremas.

Considerando o movimento das massas no referencial móvel $Oxyz$ e observando o diagrama de velocidades da Figura 32b (em verde), utiliza-se a fórmula de campo de velocidade para obter a velocidade relativa de cada massa na posição P_i e de arrastamento do ponto Q :

$$\vec{V}_{P_{1,2}} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) \Rightarrow \vec{V}_{rel} = \vec{V}_Q + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P-Q) \Rightarrow \vec{V}_{rel} = 0 + \omega_{rel} \vec{i} \wedge R \vec{k} = \mp R \omega_{rel} \vec{j}$$

Se as velocidades angulares forem constantes tem-se: $\vec{\omega}_{rel} = cte$ e $\vec{\omega}_{arr} = cte$. Por se tratar de movimento combinado, utiliza-se da composição de movimentos ($\vec{a}_P = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor}$). Para a posição vertical das massas (ângulo $\theta = \pi$), obtém-se a aceleração relativa de cada massa, nessa posição como:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \\ \vec{a}_{rel} &= \vec{a}_{Qrel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P-Q) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P-Q)] \\ \vec{a}_{rel} &= 0 + 0 + \omega_{rel} \vec{i} \wedge (\omega_{rel} \vec{i} \wedge R \vec{k}) = \mp R \omega_{rel}^2 \vec{k} \end{aligned}$$

A aceleração de arrastamento de cada massa é:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{arr} &= \vec{a}_{Oarr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O)] \\ \vec{a}_{arr} &= 0 + 0 + \omega_{arr} \vec{k} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \vec{k} \wedge (q \vec{i} + R \vec{k})] = -q \omega_{arr}^2 \vec{i} \end{aligned}$$

e a aceleração de *Coriolis* de cada massa, nessa posição, resulta em:

$$\vec{a}_{cor} = 2 \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{V}_{rel} = 2 \omega_{arr} \vec{k} \wedge R \omega_{rel} \vec{j} = \pm 2R \omega_{arr} \omega_{rel} \vec{i}$$

A aceleração relativa é centrípeta (direção z), portanto produz reações centrífugas na barra $P_1 - P_2$ que as une e que se anulam. As acelerações de arrastamento são idênticas e de mesma direção (direção x), apenas solicitando os mancais. Entretanto, as acelerações complementares formam um binário (sinais opostos). Utilizando o **TR** em cada massa, e calculando o binário de forças (\vec{F}_i em P_i), obtêm-se:

$$\begin{cases} m_1 \cdot (-2R \omega_{arr} \omega_{rel}) \vec{i} = \vec{F}_1 \\ m_2 \cdot (2R \omega_{arr} \omega_{rel}) \vec{i} = \vec{F}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} (P_1 - Q) = R \vec{k} \\ (P_2 - Q) = -R \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{M}_Q = \sum (P_i - Q) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M} = (4mR^2) \cdot \omega_{arr} \cdot \omega_{rel} \vec{j}$$

Este binário corresponde ao efeito giroscópico que tem direção y (inclinado de 90 graus em relação ao plano de rotação das massas). Note que o termo $J_Q = 4mR^2$ corresponde à parcela de momento de inércia em relação ao pólo Q associada a esse movimento.

10. BALANCEAMENTO

Durante a fabricação de um rotor, as imperfeições de usinagem podem dar origem a uma **excentricidade** do centro de massa G em relação ao eixo de rotação. Desta forma, o rotor ao girar em torno do eixo produzirá reações oscilatórias (em fase) indesejáveis nos mancais. Pode ocorrer também, que no processo de fabricação do rotor, alguma **não simetria** da distribuição de massa no plano do eixo de rotação. Isto acarreta termos de produto de inércia não nulos na matriz de inércia. Neste caso o rotor ao girar também produzirá reações oscilatórias (em oposição de fase) indesejáveis nos mancais.

Para corrigir tal problema pode-se adicionar pelo menos duas massas ao rotor, em dois planos transversais distintos, com objetivo de eliminar a **excentricidade** (efeito estático) e recompor a **simetria** do rotor (efeito dinâmico). Diz-se então, que um sólido é **BALANCEADO**, quando as reações nos mancais (A_x, A_y, B_x e B_y) independem de ω^2 e $\dot{\omega}$ para qualquer força externa. Por decorrência as forças dinâmicas nos mancais (desprezando a ação gravitacional) se tornam nula e o eixo de rotação se torna um eixo central de inércia.

Relembrando as equações para determinação das reações nos mancais A e B de um sistema com rotação em torno do eixo z , conforme apresentado no item 9.1, obtidas pelo **TR**:

$$\begin{cases} -m \cdot (\dot{\omega} y_G + \omega^2 x_G) = A_x + B_x + F_x^{ext} \\ +m \cdot (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) = A_y + B_y + F_y^{ext} \\ 0 = A_z + F_z^{ext} \end{cases} \quad (175)$$

e pelo **TQMA**:

$$\begin{cases} -J_{zx} \dot{\omega} + J_{zy} \omega^2 = a \cdot A_y - b \cdot B_y + M_x^{ext} \\ -J_{yz} \dot{\omega} + J_{zx} \omega^2 = b \cdot A_x - a \cdot B_x + M_y^{ext} \\ J_z \dot{\omega} = M_z^{ext} \end{cases} \quad (176)$$

sendo as ações externas devido a gravidade, para o balanceamento será necessário que os termos que multiplicam ω^2 e $\dot{\omega}$ sejam nulos (coordenadas do centro de massa e produtos de inércia).

Haverá portanto duas massas m_1 e m_2 acrescidas nas posições $(x_1, x_2, y_1$ e $y_2)$ à massa m do rotor, compondo uma massa total M_T , de forma que a nova posição do centro de massa $(x_G^*$ e $y_G^*)$ seja nula (coincidente com o eixo de rotação eliminando a excentricidade) e os produtos de inércia $(J_{xz}^*$ e $J_{yz}^*)$ também sejam nulos (rotor simétrico). Desta feita obtêm-se as seguintes equações, utilizando a propriedade do centro de massa e produto de inércia :

$$\begin{cases} M_T x_G^* = m x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ M_T y_G^* = m y_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \\ J_{xz}^* = \bar{J}_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 \\ J_{yz}^* = \bar{J}_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \end{cases} \quad (177)$$

Escrevendo o sistema linear na forma matricial, obtêm-se:

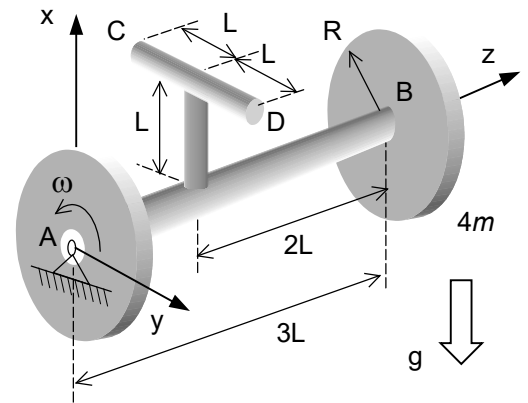
$$\begin{Bmatrix} m x_G \\ m y_G \\ \bar{J}_{xz} \\ \bar{J}_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_1 x_1 \\ m_2 x_2 \\ m_1 y_1 \\ m_2 y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (178)$$

Para que o sistema linear de 4 incógnitas $(m_1 x_1, m_2 x_2, m_1 y_1$ e $m_2 y_2)$ seja compatível e determinado, a matriz do sistema deve ser positiva e definida (determinante diferente de zero). Portanto requer $z_1 \neq z_2$. Note ainda que as 4 incógnitas são produtos de 6 variáveis mais z_1 e z_2 . (8 variáveis). Haverá, portanto uma solução para cada conjunto de 4 vínculos restritivos para a realização do balanceamento. Desta forma, para um rotor de massa m , produtos de inércia \bar{J}_{xz} e \bar{J}_{yz} e que gira em torno do eixo z , resulta nas quatro equações de balanceamento:

$$\begin{cases} m x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ m y_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \\ \bar{J}_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 \\ \bar{J}_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \end{cases} \quad (179)$$

Exemplo de Balanceamento 1

O eixo de massa $3m$ de comprimento $3L$ é apoiado na articulação A e no anel B , conforme mostrado na figura ao lado. O eixo possui dois discos de raio R e massa $4m$ em cada extremidade. O eixo possui ainda uma haste no formato T formada por um segmento reto vertical de comprimento L e massa m e outro segmento CD alinhado com o eixo y de comprimento $2L$ e massa $2m$. O sistema gira em torno do eixo z com velocidade angular constante ω . Considerando o referencial $Axyz$ solidário ao corpo, pede-se para balancear o conjunto e determinar as reações dinâmicas nos mancais.



Resolução: Para o balanceamento é necessário atender as equações de balanceamento:

$$M x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 ; M y_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

$$\bar{J}_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 ; \bar{J}_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0$$

portanto é necessário o calculo da posição do centro de massa $(G - A) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$ e dos produtos de inércia. A posição do centro de massa do conjunto com massa total $M = 14m$ é:

$$x_G = (m(L/2) + 2m(L))/14m = \frac{5}{28}L ; \quad y_G = 0$$

$$z_G = (4m(0) + 3m(3L/2) + m(L) + 2m(L) + 4m(3L))/14m = \frac{39}{28}L \quad \boxed{G = (5L/28, 0, 39L/28)}$$

Os produtos de inércia considerando os eixos esbeltos com o pólo em A são:

Tabela 2 – Localização dos Centros de Massas das Barras

ITEM / COTA	x_G (a)	y_G (b)	z_G (c)	Obs.:
Disco A	0	0	0	G_A
Disco B	0	0	$3L$	G_B
Eixo	0	0	$3L/2$	G_E
Barra Vertical	$L/2$	0	L	G_V
Barra CD	L	0	L	G_{CD}

$$J_{xz} = m(L/2) \cdot (L) + 2m(L) \cdot (L) = \frac{5}{2} mL^2; \quad \boxed{J_{xy} = 0} \quad \boxed{J_{yz} = 0} \quad \boxed{J_{xz} = \frac{5}{2} mL^2}$$

Para o balanceamento é necessário eliminar a excentricidade (x_G^*) e assimetria ($J_{xz}^* = 0$) utilizando duas massas compensadoras m_1 e m_2 fixadas na parte externa dos discos (distância R do eixo), suficientes para balancear o sistema. Como o centro de massa está na parte superior, uma **possível solução** é instalar as massas na parte inferior dos discos ($x_1 = x_2 = 0$). Para não causar assimetria no plano \mathbf{Axy} ($y_1 = y_2 = 0$ para manter $J_{xy} = 0$) a localização de cada massa será: $m_1 (-R, 0, 0)$; $m_2 (-R, 0, 3L)$. Os valores das massas resultam em:

$$M x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0; \quad M y_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

$$\bar{J}_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0; \quad \bar{J}_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0$$

$$J_{xz} + m_1 (-R)(0) + m_2 (-R)(3L) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{m_2 = \frac{5 mL}{6 R}} \quad \text{em } (-R, 0, 3L);$$

$$14m x_G + m_1 (-R) + m_2 (-R) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{m_1 = \frac{5 mL}{3 R}} \quad \text{em } (-R, 0, 0).$$

Reações nos mancais: Método de Resolução: Para determinar as reações nos mancais antes do balanceamento: a) Sistema; b) Referencial e Pólo; c) Diagramas; d) Teoremas.

A aceleração do centro de massa é obtida da fórmula de campo de acelerações para A fixo ($\vec{a}_A = 0$) e velocidade angular constante:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

$$\vec{a}_G = 0 + 0 - \omega^2 (G - A) = -\omega^2 \frac{5L}{28} \vec{i}$$

Utilizando o **TR** pode-se obter as reações dinâmicas nos mancais ($M \vec{a}_G = \vec{R}$), desprezando a ação da gravidade, obtêm-se:

$$\begin{cases} -14m\omega^2 \frac{5L}{28} = A_x + B_x \\ 14m \cdot 0 = A_y + B_y \end{cases} \Rightarrow A_y = -B_y$$

Utilizando o **TQMA** com pólo em A fixo, obtêm-se o momento angular e sua derivada como:

$$\vec{H}_A = [J]_A \{\omega\} = \begin{bmatrix} -J_{xz} \\ 0 \\ J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = -J_{xz} \omega \vec{i} + J_z \omega \vec{k}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{H}_A) + (G - A) \wedge M \vec{a}_A = \vec{M}_A^{ext}$$

$$\vec{M}_A^{ext} = (B - A) \wedge \vec{R}_B = 3L \vec{k} \wedge B_x \vec{i} + 3L \vec{k} \wedge B_y \vec{j}$$

$$J_z = 4mR^2 / 2 + mL^2 / 3 + (2m(2L)^2 / 12 + 2mL^2) + 4mR^2 / 2$$

$$J_z = m(4R^2 + 3L^2)$$

$$-J_{xz} \dot{\omega} \vec{i} + J_z \dot{\omega} \vec{k} + -J_{xz} \omega \dot{\vec{i}} + J_z \omega \dot{\vec{k}} + 0 = 3LB_x \vec{j} - 3LB_y \vec{i}$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \omega \vec{k} \wedge \vec{i} = \omega \vec{j} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{k}} = 0$$

$$-J_{xz} \omega \dot{\vec{i}} = J_{xz} \omega^2 \vec{j} = 3LB_x \vec{j} - 3LB_y \vec{i}$$

$$B_x = -\frac{J_{xz} \omega^2}{3L} \quad ; \quad B_y = 0$$

$$\begin{cases} -14m\omega^2 \frac{5L}{28} = A_x + \frac{J_{xz} \omega^2}{3L} & \Rightarrow A_x = -\frac{5}{3} mL\omega^2 \\ 14m \cdot 0 = A_y + B_y & \Rightarrow A_y = -B_y = 0 \end{cases}$$

10.1. Balanceadora

A máquina que realiza o balanceamento é composta por um eixo rotativo que gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ controlada e possui um sensor de posição angular, conforme ilustrado na Figura 33. Possui ainda quatro sensores de força fixos nas seções **A** e **B**, que são ortogonais aos pares e transversais ao eixo. O componente a ser balanceado é fixado na mesa giratória em posição angular definida θ e posto a girar de forma solidária em velocidade angular constante. Neste caso a roda veicular possui excentricidade $(G-O) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j}$ e não simetria J_{zy} e J_{zx} .

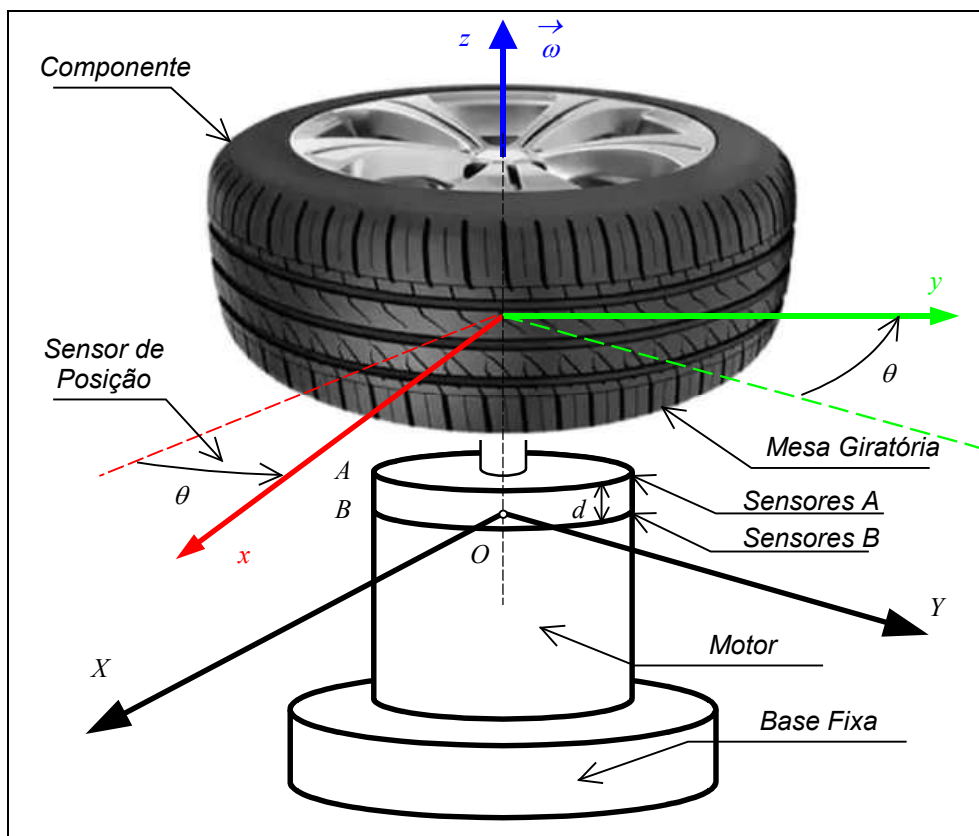


Figura 33 - Máquina Balanceadora Vertical

O módulo $|R|$ e fase θ de cada par de sensor, em uma seção, é a força máxima e respectivo ângulo de direção. As medidas dos sensores são combinadas para identificação de força reativa e o momento de binário.

$$\begin{aligned} A_x / m\omega^2 &= x_G \cos \theta - y_G \sin \theta & e & \quad A_y / m\omega^2 = x_G \sin \theta + y_G \cos \theta \\ X &= (A_x + B_x) / 2 & e & \quad Y = (A_y + B_y) / 2 \\ |R| &= \sqrt{X^2 + Y^2} & e & \quad \theta = a \tan \frac{Y}{X} \end{aligned} \quad (180)$$

A média dos valores de força é o valor máximo da reação devido à excentricidade do desbalanceamento. A diferença dos valores de força medidas vezes a distância d entre seções A e B é o momento \bar{M}^{ext} devido a uma eventual não simetria. Relembrando das equações de força do rotor (TR) com velocidade angular constante $\bar{\omega} = \omega \vec{k} = cte \therefore \dot{\bar{\omega}} = 0$ e desprezando a ação gravitacional, determina-se o valor da massa compensadora e sua posição angular:

$$\begin{aligned} -m \cdot \omega^2 x_G &= R \cos \theta & \Rightarrow & \quad m = R \cos \theta / (\omega^2 x_G) \\ +m \cdot \omega^2 y_G &= R \sin \theta & \Rightarrow & \quad m = R \sin \theta / (\omega^2 y_G) \end{aligned} \quad (181)$$

Finalmente pode-se determinar a proporção entre as massas compensadoras, utilizando o **TQMA** que permite quantificar os valores dos produtos de inércia, a partir do momento medido pelos sensores da máquina balanceadora (ver exercício em *Pesce, 2001*):

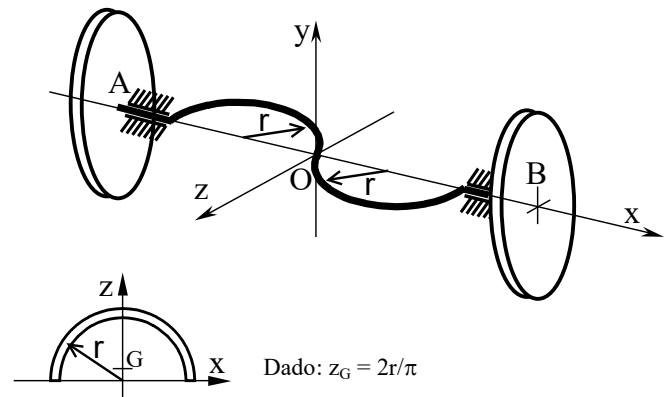
$$\begin{aligned} J_{zy} \omega^2 &= M_x^{ext} & \Rightarrow & \quad J_{zy} = M_x^{ext} / \omega^2 \\ J_{zx} \omega^2 &= M_y^{ext} & \Rightarrow & \quad J_{zx} = M_y^{ext} / \omega^2 \end{aligned} \quad (182)$$

10.2. Interpretação Gráfica da Anti-simetria

Com intuito de ilustrar o efeito dinâmico da anti-simetria na distribuição de massa de um corpo vamos verificar o comportamento dinâmico de um rotor não simétrico e avaliar vetorialmente qual o movimento do vetor momento angular \vec{H}_O .

Exercício de Balanceamento 2

Uma barra homogênea delgada, com densidade linear de ρ por unidade de comprimento, está contida no plano xz e tem a forma indicada na figura. Balanceie o sistema pela adição de duas massas nas periferias dos volantes A e B , de raio R e massa M .



Método de Resolução: a) Sistema; b) Diagramas; c) Referencial e Pólo; d) Teoremas.

Como o sistema não possui excentricidade (o centro de massa coincide com o eixo de giro), basta portanto adicionar duas massas iguais de forma a compensar a não simetria ($J_{xz} = 0$) sem alterar o balanceamento estático. Os produtos de inércia, J_{xy} e J_{zy} são nulos pois (x, z) é plano de simetria do sistema. A massa de cada arco é $m_{arco} = \rho \pi r$. Sejam m_{bal} as massas adicionadas extremidade de cada volante para anular o produto de inércia original:

$$J_{xz} = m_{arco} \cdot x_{G_{AO}} z_{G_{AO}} + m_{arco} \cdot x_{G_{BO}} z_{G_{BO}} = \rho r \pi \cdot (-r) \cdot (-2r) / \pi + \rho r \pi \cdot r \cdot 2r / \pi = 4\rho r^3$$

$$J_{xz}^* = J_{xz} + m_b(-2r)R + m_b 2r(-R) = 0$$

Resolvendo: $4\rho r^3 - 4m_{bal} \cdot r R = 0 \Rightarrow m_{bal} = \frac{\rho r^2}{R}$ localizadas em: $(-2r, 0, r)$ e $(2r, 0, -r)$

O dispositivo não é simétrico e portanto o produto de inércia J_{xz} é diferente de zero. O momento angular do dispositivo pode ser calculado por:

$$\vec{H}_O = [J]_O \{\vec{\omega}\} \quad ; \quad J_x = MR^2 + \rho \pi r^3 \quad ; \quad J_{xz} = 4\rho r^3$$

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \omega \\ 0 \\ -J_{xz} \omega \end{bmatrix} = (MR^2 + \rho \pi r^3) \omega \vec{i} - 4\rho r^3 \omega \vec{k}$$

Portanto o momento angular \vec{H}_O não estará alinhado com o eixo de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$, imposto pelos mancais (forma o ângulo β com o eixo x) e seu movimento será induzido pelo binário de forças dos mancais \vec{M}_O , conforme mostrado na Figura 34.

$$\vec{H}_O = \omega \left[(MR^2 + \pi \rho r^3) \vec{i} + 4\rho r^3 \vec{k} \right]$$

$$\beta = -a \tan \left(\frac{4\rho r^3}{(MR^2 + \pi \rho r^3)} \right)$$

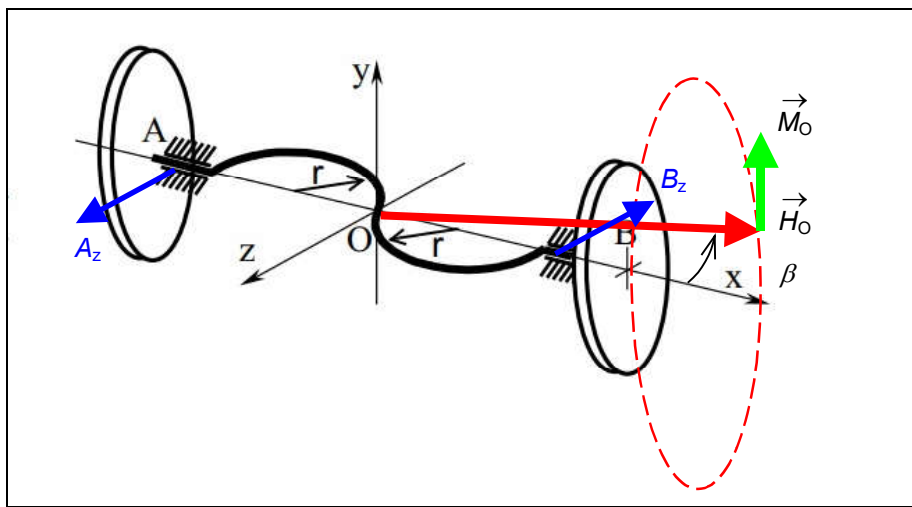


Figura 34 – Trajetória do Vetor Momento Angular - H_O

As reações nos mancais devido a não simetria do dispositivo, vão produzir as forças A_z e B_z (binário de forças opostas com direção y) no dispositivo (com distância $AB = 4r$) obrigando-o a girar fora do seu eixo principal:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = \vec{M}_O^{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{H}_O = \omega \frac{d}{dt} \left((MR^2 + \rho \pi r^3) \vec{i} - 4\rho r^3 \vec{k} \right) = 4\rho r^3 \omega^2 \vec{j}$$

$$A_z = -B_z = \rho r^2 \omega^2 \vec{j}$$

11. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO FIXO

A rotação de um corpo em torno de um ponto fixo é um caso importante no estudo da dinâmica. Isto requer a utilização de ângulos de atitude para descrição da sua posição e movimentação.

11.1. Ângulos de Euler

No estudo da dinâmica rotacional os ângulos de *Euler* são muito utilizados para descrever a atitude do corpo (sequência 3-2-3). Nesta sequência, identificam-se os ângulo de *Precessão* (ϕ), *Nutação* (θ) e *Rotação própria* (ψ), conforme orientação mostrada na Figura 35a, onde três sistemas de coordenadas são utilizados: base *OXYZ* fixos em um referencial *Newtoniano*. A posição dos eixos principais *Ox''y''z''* solidários ao corpo é definida em qualquer instante em relação à base fixa *OXYZ*, pelos ângulos de *Euler* (ϕ, θ, ψ).

Expressando o movimento de um disco no referencial móvel *Ox'y'z'* em relação ao qual o corpo exibe axi-simetria e apresenta apenas o “**movimento relativo**” de rotação própria (referencial solidário ao corpo mas não gira com ele) obtêm-se os movimentos angulares relativo (rotação própria em torno do eixo de simetria *Oz''*) e o “**movimento de arrastamento**” que é composto de duas parcelas (*precissão* em torno do eixo fixo vertical *OZ* e *nutação* em torno do eixo *Oy'*):

$$\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{arr} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K} \quad (183)$$

como $\vec{K} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}$ conforme Figura 35b, obtêm-se $\vec{\omega}_{arr} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \cos \theta \vec{k}$ e a soma das parcelas resulta na velocidade angular absoluta $\vec{\Omega}$:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}} \quad (184)$$

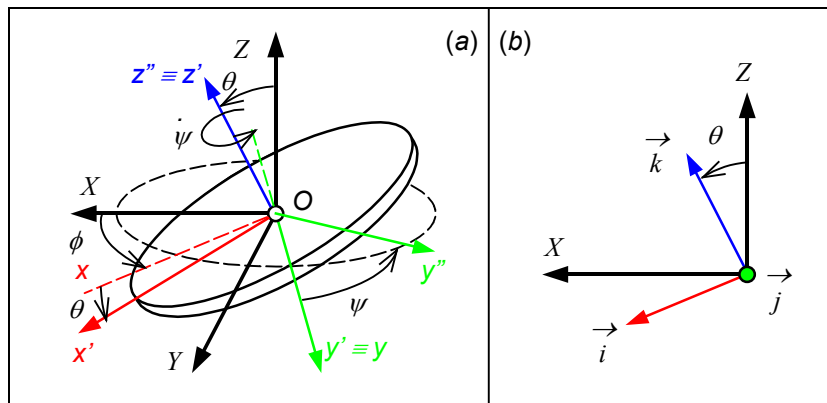


Figura 35 – Ângulos de atitude de um corpo (Euler)

11.2. Aplicação do TQMA

Considere um rotor axi-simétrico suportado por um conjunto duplo de anéis articulados (*gimbals*) de tal forma que o movimento angular seja totalmente livre e o apoio coincida com o centro de massa do rotor, conforme ilustrado na Figura 36a. Essa configuração é chamada de **giroscópio** e permite o giro do rotor de forma estável em torno de um eixo. Esse dispositivo é muito utilizado como instrumento de navegação ou dispositivo de estabilização, sendo de fundamental importância na engenharia.

Utilizando o **TR** expresso na forma vetorial e o **DFCL**, conforme ilustrado na Figura 36b, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_G &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] \\
 m \cdot \vec{a}_G &= \vec{R} \quad \Rightarrow \quad m \cdot \left\{ \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] \right\} = m \vec{g} + \vec{R}_O \\
 m \cdot \vec{a}_G &= m \cdot (\vec{a}_{GTang} - \vec{a}_{GRadial}) = m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} - \vec{\omega}^2 \wedge \vec{r}) = m \vec{g} + \vec{R}_O
 \end{aligned}
 \tag{185}$$

O momento angular do disco \vec{H}_G , expresso no sistema de coordenadas móvel **Gxyz** em relação ao centro de massa, considerando corpo axi-simétrico e eixos principais de inércia, é dado por:

$$\vec{H}_G = [J]_G \vec{\omega} + (G-O) \wedge m \vec{V}_O$$

$$\begin{cases} H_{Gx} \\ H_{Gy} \\ H_{Gz} \end{cases} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{cases} -\dot{\phi} \text{sen } \theta \\ \dot{\theta} \\ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{cases} + 0 \quad (186)$$

$$\vec{H}_G = -J_x \dot{\phi} \text{sen } \theta \vec{i} + J_y \dot{\theta} \vec{j} + J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}$$

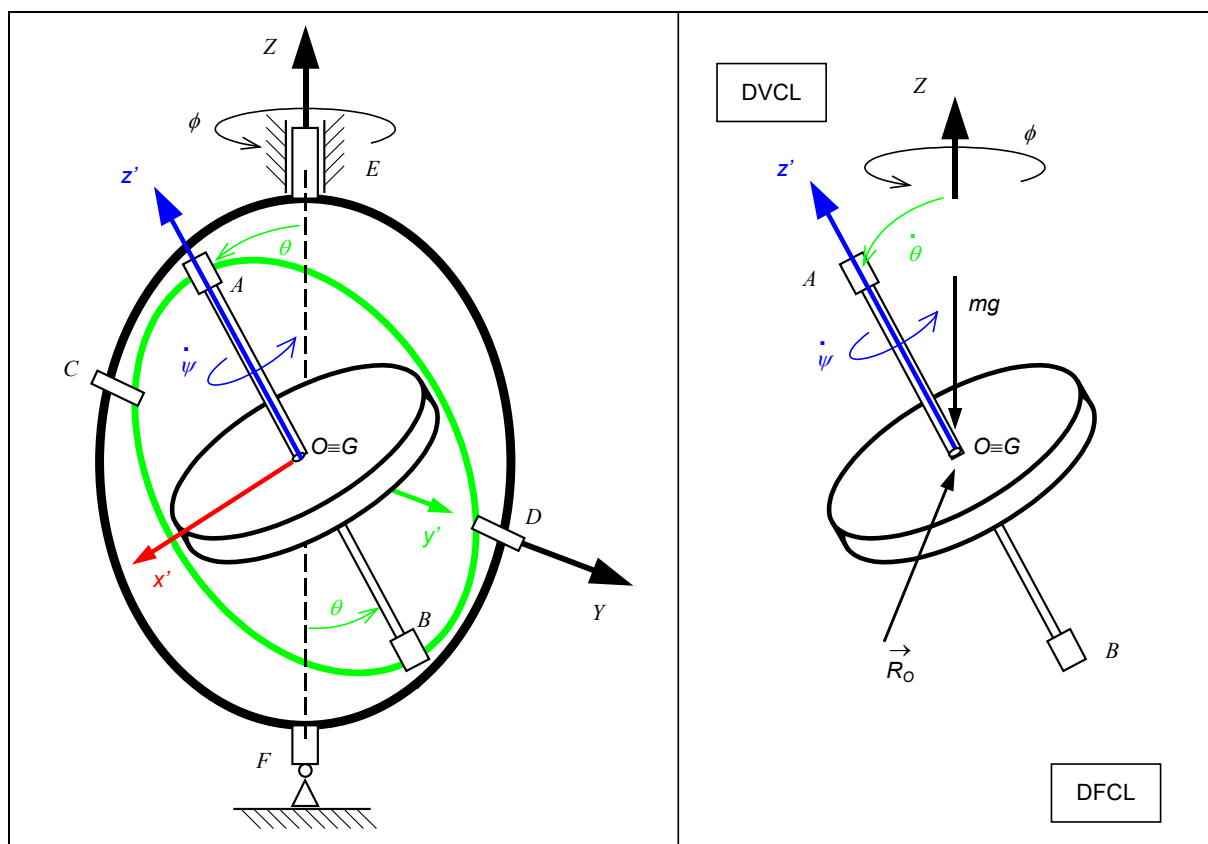


Figura 36 – Rotor Axi-simétrico

Derivando o \vec{H}_G em relação ao tempo (derivada absoluta), mas expresso numa base móvel (deve adicionar a derivada da base), tem-se:

$$\frac{d}{dt} [\vec{H}_G]_{OXYZ} = \frac{d}{dt} [\vec{H}_G]_{Oxyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = [J]_G \{\dot{\omega}_{abs}\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}] [J]_G \{\omega_{abs}\} \quad (187)$$

portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{H}_G)_{OXYZ} = & -J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) \vec{i} + J_y \frac{d}{dt} \dot{\theta} \vec{j} + J_z \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} - \\ & J_x (\dot{\phi} \sin \theta) \dot{\vec{i}} + J_y \dot{\theta} \dot{\vec{j}} + J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\vec{k}} \end{aligned} \quad (188)$$

Alternativamente pode-se utilizar o **TQMA** expresso na forma matricial em relação à base móvel para o pólo fixo $\mathbf{O} \equiv \mathbf{G}$, onde $\vec{a}_O = 0$ (o termo cruzado se anula) e utiliza-se a matriz anti-simétrica $[\tilde{\omega}_{arr}]$ (*skew simetric*) obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\vec{H}_O] + (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge m \vec{a}_O = & \{\vec{M}_G^{ext}\} \\ [J]_O \{\dot{\omega}_{abs}\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}][J]_O \{\omega_{abs}\} + 0 = & \{M_O^{ext}\} \end{aligned} \quad (189)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\vec{H}_O]_{OXYZ} = \frac{d}{dt}[\vec{H}_O]_{Oxyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_O = & \{\vec{M}_G^{ext}\} \\ [J]_O \{\dot{\omega}_{abs}\}_{rel} + [\tilde{\omega}_{arr}][J]_O \{\omega_{abs}\} = & \{M_O^{ext}\} \end{aligned} \quad (190)$$

A segunda parcela é conhecida como termo *giroscópico*. Utilizando o sistema de coordenadas móvel \mathbf{Oxyz} de simetria do disco, a matriz de inércia se torna diagonal, a velocidade angular de arrastamento é $\vec{\omega}_{arr} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \cos \theta \vec{k}$, obtêm-se as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_O \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} \cos \theta & -\dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \cos \theta & 0 & -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} & \dot{\phi} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_O \begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \left\{ \begin{aligned} -J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) - J_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + J_z \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= M_{Ox} \\ J_y \frac{d\dot{\theta}}{dt} - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= M_{Oy} \\ J_z \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= M_{Oz} \end{aligned} \right. \\ \vec{j} \left\{ \right. \\ \vec{k} \left\{ \right. \end{aligned} \quad (192)$$

11.3. Precessão Livre (Giroscópio)

O movimento de *precessão livre* é o caso em que o local do apoio O do rotor coincide com o centro de massa G do corpo. O corpo axi-simétrico apoiado nos mancais AB , girando com velocidade angular relativa $\dot{\psi} = \dot{\psi} \vec{k}$, é suspenso por uma junta do tipo *cardan* $CD-EF$, que permite apenas as três rotações em torno de O , fixo (coincidente com o eixo vertical dos mancais EF) onde o movimento angular de *precessão* ocorre ($\dot{\phi} = \dot{\phi} \vec{K}$), conforme mostrado na Figura 37. Os mancais CD formam a linha dos nós, eixo em torno do qual ocorre o ângulo de *nutação* θ , segundo a direção y onde a velocidade angular de *nutação* ocorre ($\dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{j}$).

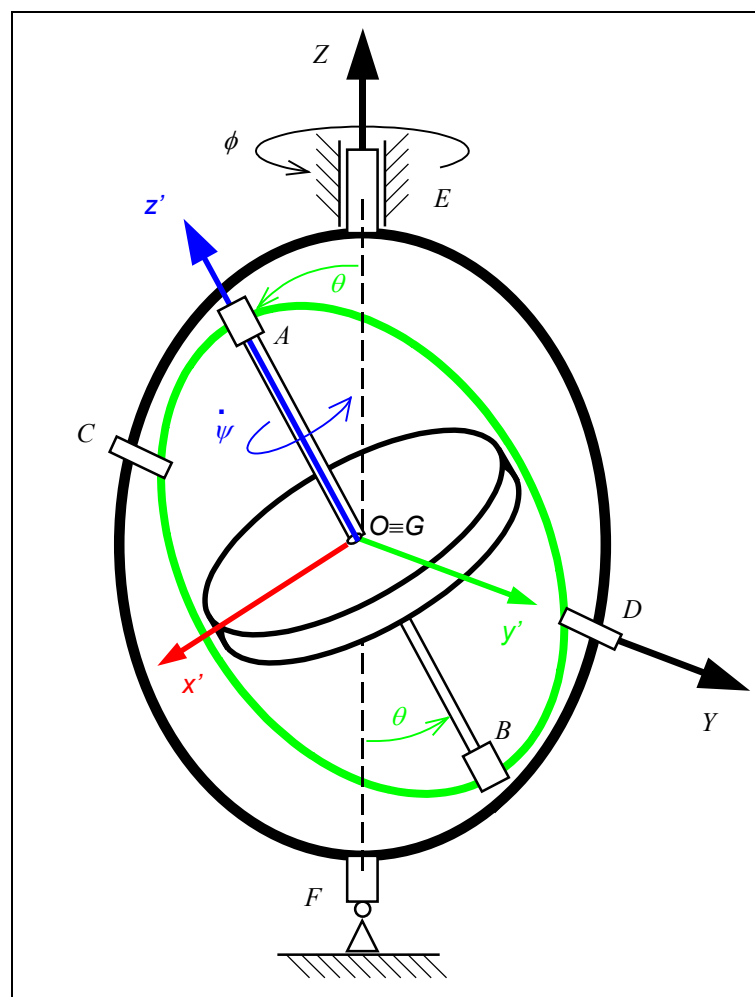


Figura 37 – Giroscópio

Para o caso particular de $\theta = cte$; $\dot{\phi} \neq 0$ e $M_{Oy} = 0 \therefore \dot{\phi} \sin \theta \neq 0$, a equação de movimento (eq. 190) se reduz à;

$$\left[(J_z - J_x) \dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi} \right] \dot{\phi} \sin \theta = 0 \tag{193}$$

Portanto $(J_z - J_x) \dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{J_z}{(J_z - J_x) \cos \theta} \dot{\psi}$ (194)

Verifica-se que nesse caso o movimento de precessão $\dot{\phi}$ é proporcional à $\dot{\psi}$. Se o pião for achatado ($J_z > J_x$), para $\theta \leq \pi/2$, a precessão será **retrograda**. Caso a forma do pião for alongada ($J_z < J_x$) a precessão será **direta** ou **progressiva**, ou seja, se fará no mesmo sentido da rotação própria. O efeito giroscópico confere ao rotor atitude estacionária, sendo largamente utilizado como instrumento de navegação.

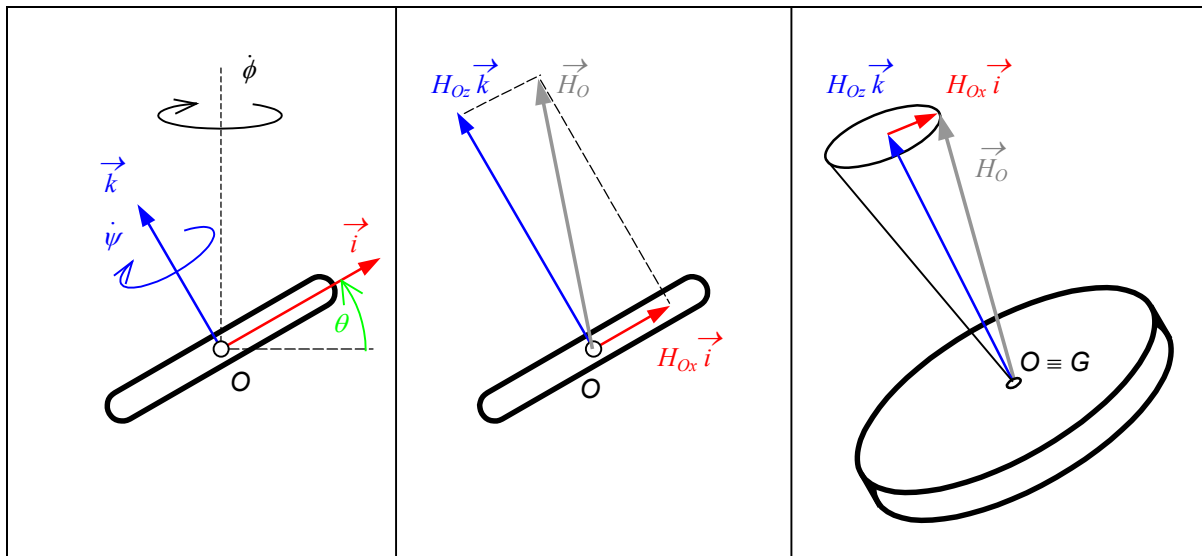


Figura 38 – Precessão Livre

Para um disco axi-simétrico (matriz de inércia diagonal) girante em movimento de precessão estacionária ($\theta = cte \therefore \dot{\theta} = 0$) sem momento externo, conforme apresentado na Figura 38, tem-se para a velocidade angular as seguintes componentes do momento angular:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= -\dot{\phi} \text{sen } \theta \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} \\ \vec{H}_O &= [J_O] \vec{\Omega} = -J_x \dot{\phi} \text{sen } \theta \vec{i} + J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} \\ \vec{H}_O &= H_{Ox} \vec{i} + H_{Oz} \vec{k} \end{aligned} \tag{195}$$

O movimento é conservativo pois $\vec{H}_O = cte$ (não há momento externo). Caso a componente H_{Ox} seja nula o momento angular coincide com o eixo de rotação e permanece alinhado com ele. Os movimentos ($\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr}$) definem o eixo instantâneo de rotação, sobre o qual ocorre o rolamento do cone rolante sobre o cone de base, conforme mostrado na Figura 39.

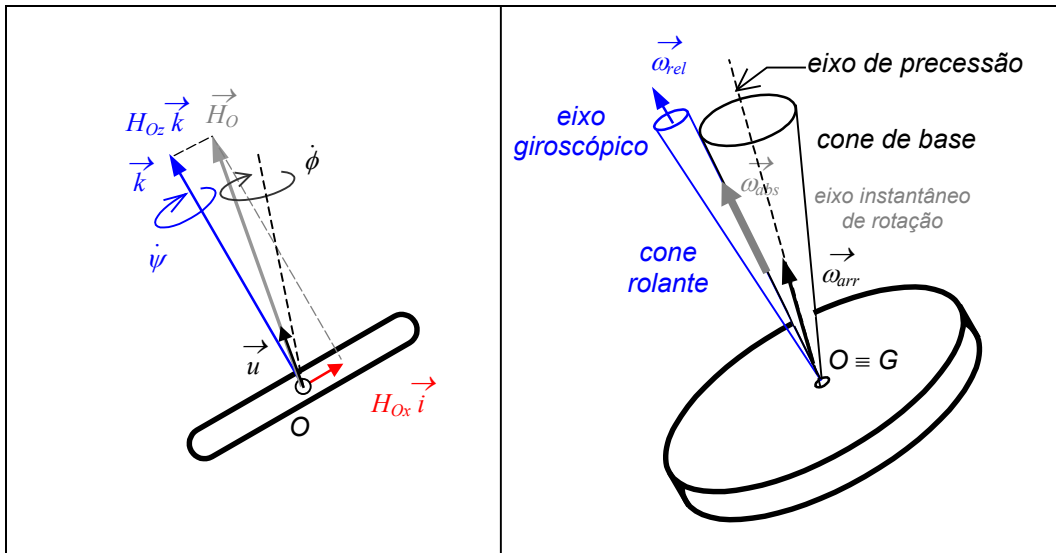


Figura 39 – Interpretação Gráfica (cone de base e rolante)

O eixo móvel \vec{k} em torno do qual se define o cone rolante, está alinhado com a velocidade angular relativa $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k}$ chamada de eixo **Giroscópico**. A linha chamada de eixo de **Precessão** está alinhada com a velocidade angular de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$. O eixo instantâneo de rotação descrito pelo versor unitário \vec{u} tem a direção do momento angular \vec{H}_G e pode ser obtido por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{H}_G}{|\vec{H}_G|} \tag{196}$$

Note que um corpo livre no espaço, livre de forças externas, vai girar em torno do seu centro de massa G , conforme preconizado pelo Teorema da Resultante (TR).

11.4. Precessão Estacionária (Pião)

Um caso particular de movimento de corpo rígido em torno de um ponto é a **Precessão Estacionária** ou regular. Neste caso considera-se que o rotor tenha rotação própria $\dot{\psi}$ constante e que seu eixo próprio Oz , apresente um ângulo de nutação θ constante em relação a vertical, descrevendo um movimento de precessão com velocidade angular de precessão $\dot{\phi}$ também constante em torno do eixo Z vertical. Este é o caso do **PIÃO** (corpo axi-simétrico em rotação em torno de um ponto, não coincidente com o centro de massa, conforme mostrado na Figura 40) considerando apenas um pequeno intervalo de tempo. Este movimento com: $\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$ é possível apenas sob determinadas condições.

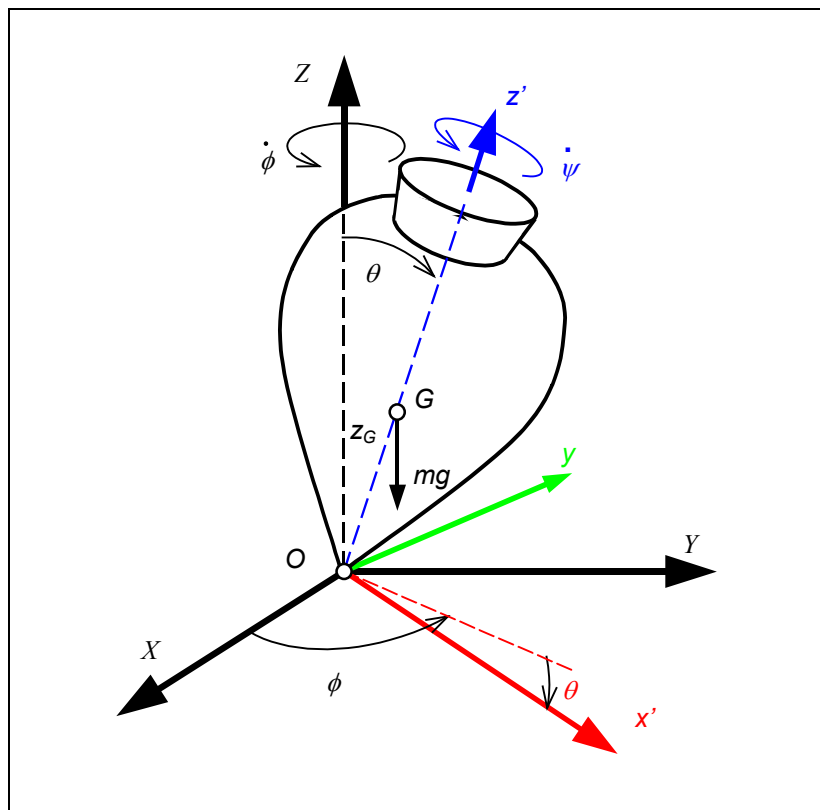


Figura 40 – Movimentos do Pião

Retomando a equação de rotação em torno de um ponto, expressa na base móvel, e anulando os termos descritos para esse caso ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$), obtêm-se uma única equação:

$$\begin{cases} -J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \sin \theta) - J_y \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + J_z \dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Ox} \\ J_y \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ J_z \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (197)$$

$\dot{\phi} = cte$ $\theta = cte$ $\dot{\theta} = 0$ $\dot{\theta} = 0$
 $\dot{\psi} = cte$ $\dot{\phi} = cte$

$$\begin{cases} 0 = M_{Ox} \\ [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta = M_{Oy} \\ 0 = M_{Oz} \end{cases} \quad (198)$$

Para a segunda equação ser possível é necessário a aplicação de um momento externo na direção \vec{j} que, neste caso, é produzido pela ação gravitacional devido a altura z_G do centro de massa do pião, conforme ilustrado na Figura 40:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (O-O) \wedge \vec{R}_O + (G-O) \wedge m\vec{g} \\ \vec{M}_O &= 0 + z_G \vec{k} \wedge -mg \vec{K} \\ \vec{M}_O &= z_G \vec{k} \wedge -mg (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \\ \vec{M}_O &= mg z_G \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (199)$$

portanto, o momento é ao longo da linha dos nós. Substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned} [(J_z - J_x)\dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta &= mg z_G \sin \theta \\ (J_z - J_x)\dot{\phi}^2 \cos \theta + J_z \dot{\psi} \dot{\phi} &= mg z_G \end{aligned} \quad (200)$$

Portanto no movimento de precessão estacionária ocorre com ângulo de nutação $\bar{\theta}_{eq}$ de equilíbrio determinado por:

$$\bar{\theta}_{eq} = a \cos \left[\frac{mg z_G - J_z \dot{\psi} \dot{\phi}}{(J_z - J_x) \dot{\phi}^2} \right] \quad (201)$$

Considerando ainda um movimento com velocidade angular própria muito maior que a velocidade angular de precessão $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$ (anulando o primeiro termo da equação), obtêm-se:

$$J_z \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cong mg z_G \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} \cong \frac{mg z_G}{J_z} \cdot \frac{1}{\dot{\psi}} \quad (202)$$

que corresponde a uma situação possível para este movimento. Portanto, velocidade angular do movimento de PRECESSÃO ($\dot{\phi}$ - arrastamento) é inversamente proporcional a velocidade angular própria ($\dot{\psi}$ - relativa). Note também que $J_z \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \vec{j} = J_z (\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel})$

Finalmente pode-se obter as reações \vec{R}_O no apoio O , expressas na base móvel $Oxyz$, determinando-se a aceleração do centro de massa, através das suas componentes considerando a **precessão estacionária** ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$) com: $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k}$, $\vec{\omega}_{arr} = \dot{\phi} \vec{K}$, $\dot{\theta} \vec{j} = \vec{0}$ e $(G - O) = z_G \vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K} + \dot{\psi} \vec{k} = \vec{0} + \dot{\phi} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) + \dot{\psi} \vec{k} \\ \vec{\omega} &= -\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k} \end{aligned} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{comp} = \ddot{\psi} \vec{k} + \ddot{\phi} \vec{K} + (\dot{\phi} \vec{K} \wedge \dot{\psi} \vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}} &= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\phi} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \wedge \dot{\psi} \vec{k} = \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \\ \vec{a}_G &= \vec{0} + (\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} \wedge z_G \vec{k}) + (-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}) \wedge [(-\dot{\phi} \sin \theta \vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}) \wedge z_G \vec{k}] \\ \vec{a}_G &= z_G \cdot \dot{\phi}^2 (-\sin \theta \cos \theta \vec{i} - \sin^2 \theta \vec{k}) = -z_G \sin \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k}) \end{aligned} \quad (205)$$

Utilizando o **TR** e o **DFCL**, considerando o caso estacionário, resulta na base móvel $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
m \cdot \vec{a}_G &= \sum \vec{F}_{ext} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= \vec{R}_O - mg \vec{K} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= (Ox \vec{i} + Oy \vec{j} + Oz \vec{k}) - mg (-\text{sen } \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k})
\end{aligned} \tag{206}$$

As reações também podem ser expressas na base fixa **OXYZ**, considerando que $\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k} = \vec{I}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 (\cos \theta \vec{i} + \text{sen } \theta \vec{k}) &= \vec{R}_O - mg \vec{K} \\
-m \cdot z_G \text{sen } \theta \cdot \dot{\phi}^2 \vec{I} &= \vec{R}_O - mg \vec{K}
\end{aligned} \tag{207}$$

e suas componentes em cada direção:

$$\begin{cases} O_X = -m \cdot z_G \text{sen } \theta \dot{\phi}^2 \\ O_Y = 0 \\ O_Z = -m g \end{cases} \tag{208}$$

Note que o centro de massa **G** descreve uma trajetória circular centrípeta de raio $r = z_G \text{sen } \theta$ em torno do eixo vertical **Z**, com velocidade translacional $\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{V}_G = 0 + \dot{\phi} \vec{K} \wedge z_G \vec{k} = z_G \text{sen } \theta \dot{\phi} \vec{J}$ compatível com a componente de aceleração centrípeta $a_c = V^2 / R$. O peso próprio é sustentado apenas pela componente O_Z .

OBSERVAÇÃO: Mantendo a forma completa, a equação diferencial 113, torna-se quadrática de segunda ordem em $\dot{\phi}$, com duas soluções (ver *Pesce*, 2019):

$$\begin{aligned}
[(J_z - J_x) \dot{\phi} \cos \theta + J_z \dot{\psi}] \dot{\phi} \text{sen } \theta &= m z_G \text{sen } \theta \\
\dot{\phi}^2 + \frac{J_z \dot{\psi}}{(J_z - J_x) \cos \theta} \dot{\phi} - \frac{m g z_G}{(J_z - J_x) \cos \theta} &= 0
\end{aligned} \tag{209}$$

Quando $\cos\theta > 0$ e $J_z > J_x$ (pião achatado) a solução será um movimento **progressivo** (a direção da precessão será a mesma da rotação própria). Dependendo do aspecto do pião (esbelto ou bojudo) o movimento pode ser **retrógrado** (ver *Pesce*, 2019).

INTERPRETAÇÃO GRÁFICA:

As componentes do momento angular do pião nas direções \vec{i} e \vec{k} , para o movimento de precessão estacionária ($\theta = \dot{\phi} = \dot{\psi} = cte$ e $\dot{\theta} = 0$), conforme apresentado na Figura 41a, são:

$$H_{Ox} = -J_x \dot{\phi} \sin\theta \quad \text{e} \quad H_{Oz} = J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \quad (210)$$

Relembrando também que a velocidade angular relativa e absoluta, que estão contidas no plano OZz , conforme apresentado na Figura 41b, são:

$$\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{arr} = \dot{\theta} \vec{j} + \dot{\phi} \vec{K} = 0 + \dot{\phi} \vec{K} \quad (211)$$

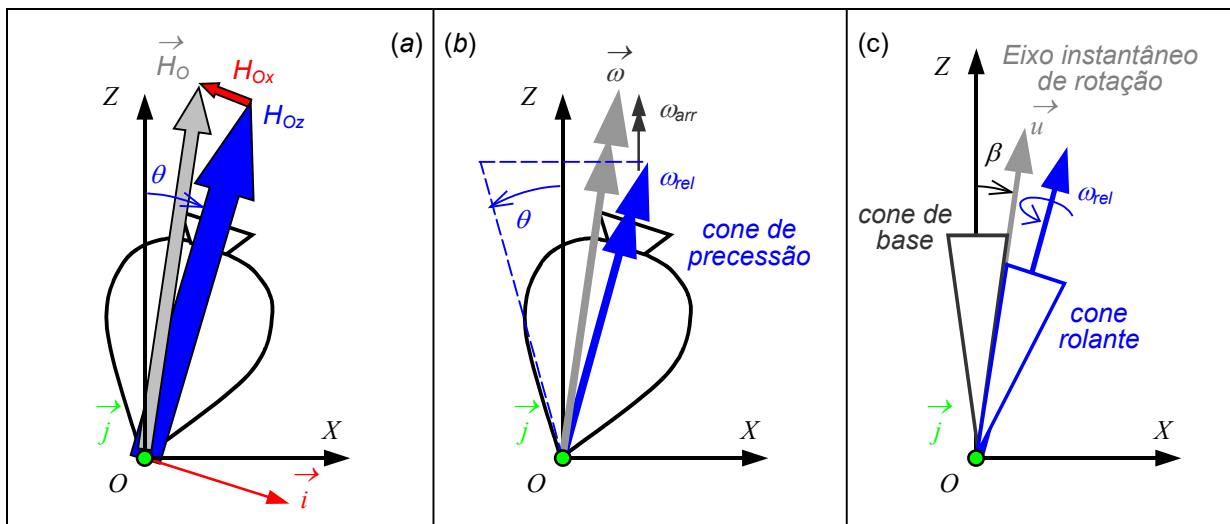


Figura 41 – Cones e Eixo Instantâneo de Rotação

Identifica-se o eixo instantâneo de rotação \vec{u} (linha do pião com velocidade nula naquele instante) alinhado com o momento angular no plano \mathbf{OZz} , em torno do qual o cone rolante (movimento do corpo em torno do eixo móvel z) rola sem escorregar sobre o cone de base (fixo), conforme apresentado na Figura 41c:

$$\vec{H}_O = H_{Ox} \vec{i} + H_{Oz} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{u} = \frac{\vec{H}_O}{|\vec{H}_O|} \quad (212)$$

Note ainda que o cone de precessão (*spin cone*), conforme mostrado na Figura 41b, é caracterizado pelo movimento do vetor velocidade angular própria $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{k}$ do corpo em torno do eixo fixo \mathbf{Z} , que tem inclinação θ de nutação.

Finalmente, pode ser de interesse expressar a quantidade de movimento angular na direção vertical \vec{K} ($\vec{K} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}$) da base fixa. Para tanto basta multiplicar a primeira equação da solução apresentada no item 11.2, por $(-\sin \theta)$ e a terceira por $(\cos \theta)$, obtendo após algumas manipulações numéricas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] - J_z \cos \theta \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= -M_{Oz} \sin \theta \\ J_z \cos \theta \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= M_{Oz} \cos \theta \end{aligned} \quad (213)$$

Finalmente acrescentando as duas direções já obtidas no item 11.2, resulta nas direções $\vec{K}, \vec{j}, \vec{k}$ em:

$$\begin{cases} \vec{K} & \frac{d}{dt} [J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] = -M_{Ox} \sin \theta + M_{Oz} \cos \theta = M_{Oz} \\ \vec{j} & \dot{H}_{Oy} = J_y \frac{d\dot{\theta}}{dt} - J_x \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ \vec{k} & \dot{H}_{Oz} = J_z \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (214)$$

portanto a quantidade de movimento angular expressa no eixo vertical Z da base fixa, é dado por:

$$\vec{H}_{OZ} = J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta),$$

conforme mostrado na Figura 42b. Esta forma de apresentação da equação de movimento é particularmente útil nos seguintes casos: a) quando o pólo for coincidente com o centro de massa G , ou quando as únicas forças externas agentes sobre o corpo forem o peso e a reação do apoio, no ponto fixo O . Em ambas as situações as componentes do momento externo são $M_{OZ} = M_{Oz} = 0$ e, portanto, a quantidade de movimento angular \vec{H}_{OZ} nesta direção é um “**INVARIANTE**”; ou seja, uma constante do movimento de **precessão** (conservação da quantidade de movimento de precessão na direção Z). O mesmo vale para a quantidade de movimento angular \vec{H}_{Oz} para o movimento de **rotação própria** (na direção z).

No primeiro caso em que $O \equiv G$ têm-se adicionalmente que $M_{Oy} = 0$ (caso do giroscópio), o que significa que a quantidade de movimento angular será invariante. O segundo caso é típico de um pião simétrico, sob ações do próprio peso e da reação no apoio O . Neste caso o momento é ortogonal ao plano OZz , não afetando a quantidade de movimento angular (movimento conservativo).

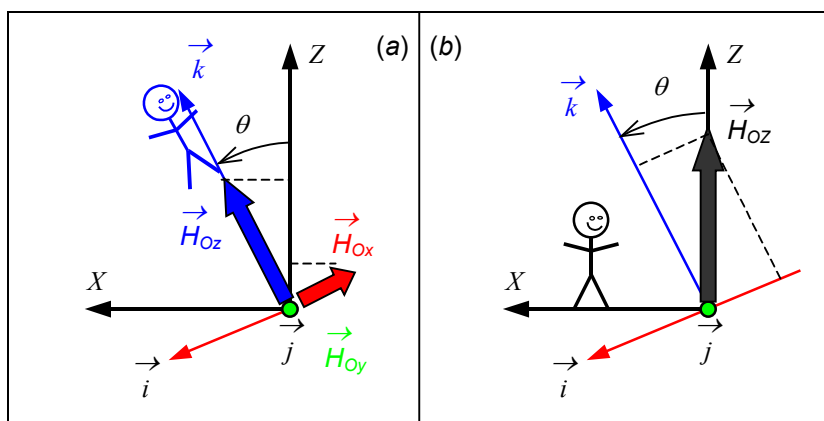
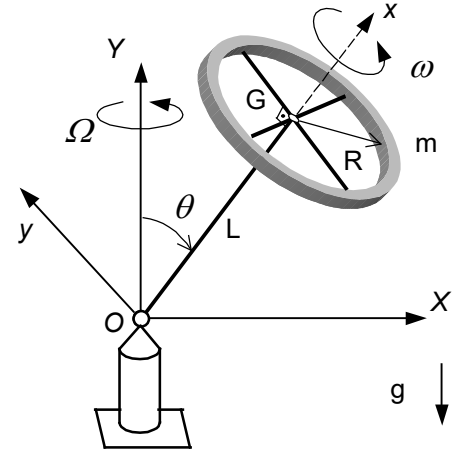


Figura 42 – Quantidade de Movimento Expressa: a) na Base Móvel e b) no Eixo Fixo Z

Exemplo de rotação em torno de um ponto

O anel homogêneo de massa m e raio R (espessura desprezível), gira ao redor da barra GO de massa desprezível e comprimento L , apoiada na articulação O , com velocidade angular relativa $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$ constante. Este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e velocidade angular de precessão $\vec{\Omega} = \Omega \vec{j}$, constantes. Determine:



- a) a velocidade de rotação absoluta do rotor;
- b) a aceleração do centro de massa G ;
- c) as reações na articulação O

Método de Resolução: a) Sistema; b) Diagramas; c) Referencial e Pólo; d) Teoremas.

a) O sistema é o rotor que tem velocidade angular de rotação decorrente da rotação própria e do movimento de arrastamento do seu eixo:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = \omega \vec{i} + \Omega \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \Rightarrow \vec{\omega}_{abs} = (\omega + \Omega \cos \theta) \vec{i} + \Omega \sin \theta \vec{j}$$

b) O diagrama de forças sobre o corpo livre revela no apoio a reação \vec{R}_O e a ação gravitacional. Para aplicar o **TQMA**, calcula-se inicialmente o Momento Angular do corpo considerando o pólo em O e sistema de coordenadas solidário ao eixo do anel $Oxyz$:

$$\vec{H}_O = [J]_O [\vec{\omega}] + m(G-O) \wedge \vec{V}_O \quad \text{onde} \quad \vec{V}_O = 0$$

$$[\vec{H}_O] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_O \begin{bmatrix} \omega + \Omega \cos \theta \\ \Omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = J_x (\omega + \Omega \cos \theta) \vec{i} + J_y (\Omega \sin \theta) \vec{j}$$

onde $J_{Gx} = mR^2$; $J_{Gy} = mR^2 / 2$; $J_{Ox} = J_{Gx}$ e $J_{Oy} = J_{Gy} + mL^2$

Fazendo a derivada temporal, obtém-se a quantidade de movimento angular:

$$\dot{\vec{H}}_O = J_x (\omega + \Omega \cos \theta) \dot{\vec{i}} + J_y \Omega \sin \theta \dot{\vec{j}} \quad \text{onde as derivadas dos versores são:}$$

$$\dot{\vec{i}} = \Omega \vec{j} \wedge \vec{i} = \Omega (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \wedge \vec{i} = -\Omega \sin \theta \vec{k} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{j}} = \Omega \vec{j} \wedge \vec{j} = \Omega \cos \theta \vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = -J_x (\omega + \Omega \cos \theta) \Omega \sin \theta \vec{k} + J_y \Omega \sin \theta \Omega \cos \theta \vec{k} = \vec{M}_O^{ext}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = (G-O) \wedge m\vec{g} = -mgL \operatorname{sen} \theta \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \left(\frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \Omega \cos \theta + \frac{gL}{R^2 \Omega}}$$

c) a aceleração do centro de massa \mathbf{G} ; $(G-O) = L\vec{i}$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\Omega} \wedge (G-O) \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G = 0 + \Omega(\cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen} \theta \vec{j}) \wedge L\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G = -L \operatorname{sen} \theta \Omega \vec{k}$$

Fazendo a composição do movimento, expresso na base móvel \mathbf{Oxyz} , obtêm-se:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{rel} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{cor} = 2 \cdot \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{V}_{rel} = 2 \cdot \Omega \vec{j} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{Garr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (G-O) + \vec{\Omega}_{arr} \wedge (\vec{V}_G - \vec{V}_O) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G = \vec{0} + \vec{0} + \Omega(\cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen} \theta \vec{j}) \wedge (-L\Omega \operatorname{sen} \theta \vec{k} - \vec{0})$$

$$\boxed{\vec{a}_G = -L\Omega^2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})}$$

d) as reações na articulação \mathbf{O} . Utilizando o **TR** - $m\vec{a}_G = \vec{R} \Rightarrow m\vec{a}_G = -mg\vec{j} + R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$

$$-mL\Omega^2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}) = -mg(\cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen} \theta \vec{j}) + R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\boxed{R_z = 0} \quad ; \quad \boxed{R_y = m \operatorname{sen} \theta (L\Omega^2 \cos \theta + g)} \quad \text{e} \quad \boxed{R_x = -m (L\Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta + g \cos \theta)}$$

Se projetado na base \mathbf{OXYZ} fixa, resta apenas a componente centrípeta e gravitacional

$$\boxed{R_z = 0} \quad ; \quad \boxed{R_y = -mg} \quad \text{e} \quad \boxed{R_x = -mL\Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

EXERCÍCIO: Pêndulo Cônico

Um pêndulo cônico composto por uma partícula P de massa m está pendendo da articulação em Q através de um fio ideal de comprimento L , formando um ângulo θ constante com a vertical, descrevendo um movimento circular com velocidade tangencial $\vec{V} = V_y \vec{j}$, com forme mostrado na Figura 43. Fazer a interpretação vetorial do movimento estacionário onde $\theta = \dot{\phi} = cte$. Utilizando sistema de coordenadas móvel $Oxyz$, solidário à massa, determine: a) o momento angular \vec{H}_Q do sistema em relação ao polo Q ; b) A taxa de variação temporal do momento angular e o momento momento das forças externas em relação ao polo Q ; c) O ângulo θ constante compatível com a configuração cinemática descrita; d) As componentes da reação na articulação Q .

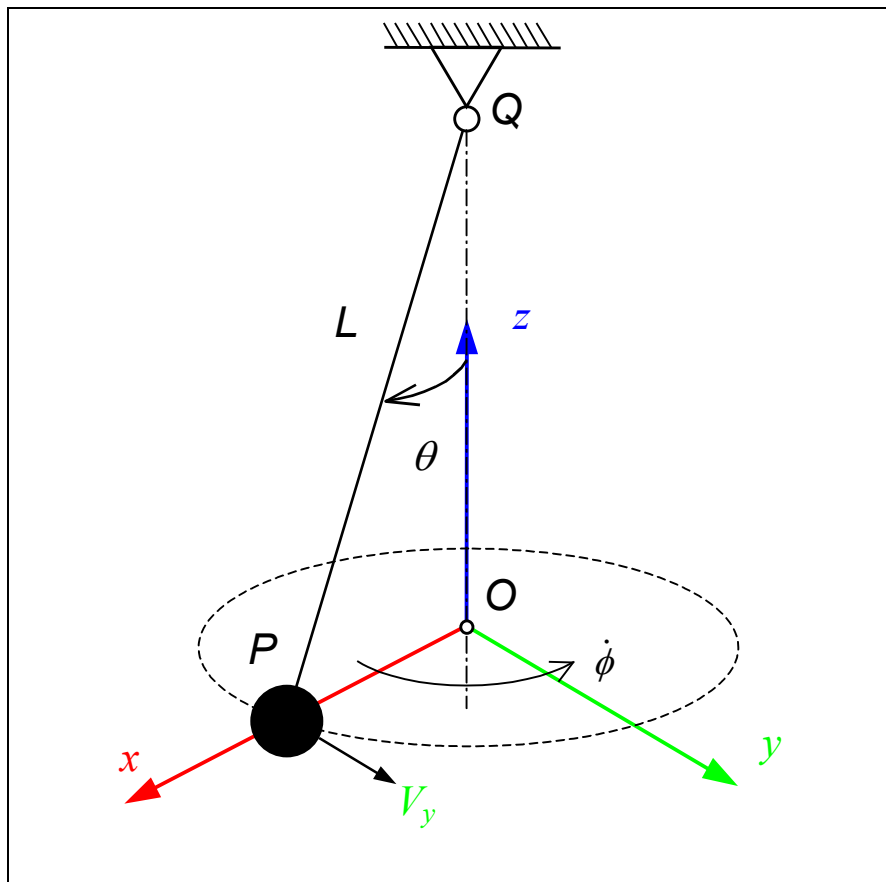


Figura 43 – Pêndulo Cônico

12. MOVIMENTO GERAL

O movimento geral de um corpo simétrico em rotação, livre de forças dissipativas, submetido a ação de momento externo ($m g z_G \sin \theta$) na linha dos nós (eixo y), pode ser descrito por uma única equação diferencial, em função de $\theta(t)$:

$$J_y \ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta \cos \theta) \cdot (\beta - \alpha \cos \theta)}{J_y \sin^3 \theta} - m g z_G \sin \theta = 0 \quad (215)$$

onde as projeções do momento angular α (\vec{H}_{OZ} na direção vertical Z) conforme apresentado na Figura 42, e β (na direção do eixo de rotação própria z), são:

$$\begin{aligned} \alpha &= J_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_z \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = H_{OZ} \\ \beta &= J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = H_{Oz} \end{aligned} \quad (216)$$

que são **INVARIANTES** dos movimentos de **precessão** (em torno do eixo \vec{K}) e movimento de **rotação própria** (em torno do eixo \vec{k}), respectivamente, para qualquer ângulo de nutação $\theta(t)$, resultando em (Pesce, 2019):

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{J_z} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (217)$$

Para a solução da equação diferencial de segunda ordem, não linear, em função de $\theta(t)$, pode-se utilizar um esquema de integração numérica. O estudo do movimento geral de corpos em rotação é bastante complexo e extrapola o propósito destas notas de aula. Recomenda-se leitura adicional de Pesce (2019) ou Whittaker (1937).

13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- a) França, L. N. F., Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, São Paulo, p. 235.
- b) Baruh, H. (1999) Analytical Dynamics. MacGraw-Hill. p. 718.
- c) Pesce, C. P. (2019) Dinâmica dos Corpos Rígidos. Monografia. Escola Politécnica da USP. p. 174.
- d) Giacaglia, G. E. O. (1982) Mecânica Geral. Editora Campus, p.347.
- e) Whittaker, E. T. (1937) A Treatise of the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge University Press; 4th edition, p. 470.
- f) Carmo, M. P. (1976) Differential Geometry of Curves and Surfaces. Editora Prentice-Hall, p. 503.
- g) Meirovitch, L. (2010) Methods of Analytical Dynamics. Editora: Dover Publications, p. 524.
- h) Lanczous, C. (1986) The Variational Principles of Mechanics. Editora: Dover Publications; p. 418.

14. ANEXO A - Momento da Quantidade de Movimento

Para sistemas **contínuos** define-se o **MOMENTO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO** elementar da partícula P de massa elementar dm e velocidade \vec{V}_P em relação a um pólo O o vetor elementar:

$$d\vec{H}_O = (P-O) \wedge dm \cdot \vec{V}_P \quad (218)$$

Integrando sobre o domínio do corpo rígido (CR), tem-se:

$$\vec{H}_O = \int_{CR} d\vec{H}_O = \int_{CR} (P-O) \wedge dm \cdot \vec{V}_P \quad (219)$$

Derivando em relação ao tempo, a expressão \vec{H}_O e o produto vetorial à direita, para massa da partícula invariante ($\dot{m}_i = 0$), obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \int_{CR} (\vec{V}_P - \vec{V}_O) \wedge dm \cdot \vec{V}_P + \int_{CR} (P-O) \wedge dm \cdot \vec{a} \quad (220)$$

e lembrando que $\vec{V}_P \wedge \vec{V}_P = 0$, obtêm-se, utilizando a propriedade do centro de massa e sua derivada temporal e a força elementar :

$$\dot{\vec{H}}_O = -\vec{V}_O \wedge \int_{CR} dm \cdot \vec{V}_P + \int_{CR} (P-O) \wedge dm \cdot \vec{a} = -\vec{V}_O \wedge m\vec{V}_G + \int_{CR} (P-O) \wedge d\vec{F} \quad (221)$$

e lembrando que a expressão do momento de força elementar em relação ao pólo O é:

$$\vec{M}_O = \int_{CR} (P-O) \wedge d\vec{F} \quad (\text{note que as forças internas não aparecem na expressão do momento})$$

resulta finalmente em:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} + m\vec{V}_G \wedge \vec{V}_O} \quad (222)$$

15. ANEXO B – Mudança de Pólo para Momento Angular

A quantidade de movimento angular \vec{H}_O , com pólo O pertencente ao corpo rígido, pode ser determinada em outro pólo arbitrário qualquer (por exemplo pólo Q) utilizando a fórmula de mudança de pólo para momento angular descrita por:

$$\boxed{\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O-Q) \wedge m \vec{V}_G} \quad (223)$$

Demonstração: (Pesce, 2023) considere o sistema rígido contínuo formado por elementos P de massa elementar dm e velocidade \vec{V}_P . O momento da quantidade de movimento elementar em relação ao pólo O é dado por: $d\vec{H}_O = (P-O) \wedge dm \cdot \vec{V}_P$ que pode ser integrado ao longo de todo o domínio do corpo rígido (CR): $\vec{H}_O = \int_{CR} d\vec{H}_O = \int_{CR} (P-O) \wedge dm \vec{V}_P$.

Em relação ao outro pólo qualquer, por exemplo Q , tem-se: $\vec{H}_Q = \int_{CR} d\vec{H}_Q = \int_{CR} (P-Q) \wedge dm \vec{V}_P$

e fazendo a diferença: $\vec{H}_Q - \vec{H}_O = \int_{CR} [(P-Q) - (P-O)] \wedge dm \vec{V}_P \Rightarrow$

$\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O-Q) \wedge \int_{CR} dm \vec{V}_P$. Utilizando a propriedade do centro de massa obtêm-se:

$$\boxed{\vec{H}_Q = \vec{H}_O + (O-Q) \wedge m \vec{V}_G} \quad c.q.d.$$

16. ANEXO C – Pêndulo Cônico (Resolução I)

Resolução: utilizando sistema de coordenadas móvel solidário à massa e alinhamento vertical.

Um pêndulo cônico composto por uma partícula P de massa m está pendendo da articulação em Q através de um fio ideal de comprimento L , formando um ângulo θ constante com a vertical, descrevendo um movimento circular com velocidade tangencial $\vec{V} = V_y \vec{j}$, com forme mostrado na Figura 43.

Utilizando sistema de coordenadas móvel $Oxyz$, solidário à massa, determine:

- o momento angular \vec{H}_Q do sistema;
- A taxa de variação temporal do momento angular e o momento momento das forças externas em relação ao polo Q ;
- O ângulo θ constante da configuração do estado cinemático descrito;
- As componentes da reação na articulação Q .

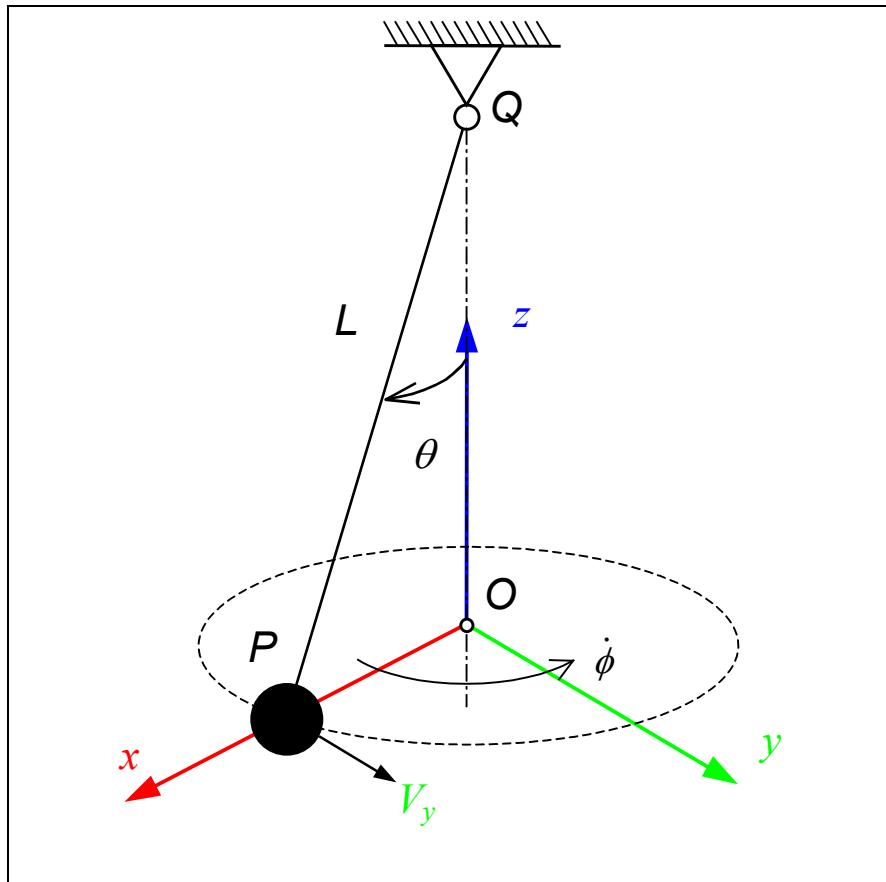


Figura 44 – Pendulo Esférico

Fazer a interpretação vetorial do movimento estacionário onde $\theta = \dot{\phi} = cte$. Determinar as reações na articulação Q , utilizando o sistema de coordenadas móvel $Oxyz$.

Sistema: partícula P de massa m ; Referencial e Pólo: $Oxyz$; DVC e $DFCL$

Teoremas: TR e $TQMA$

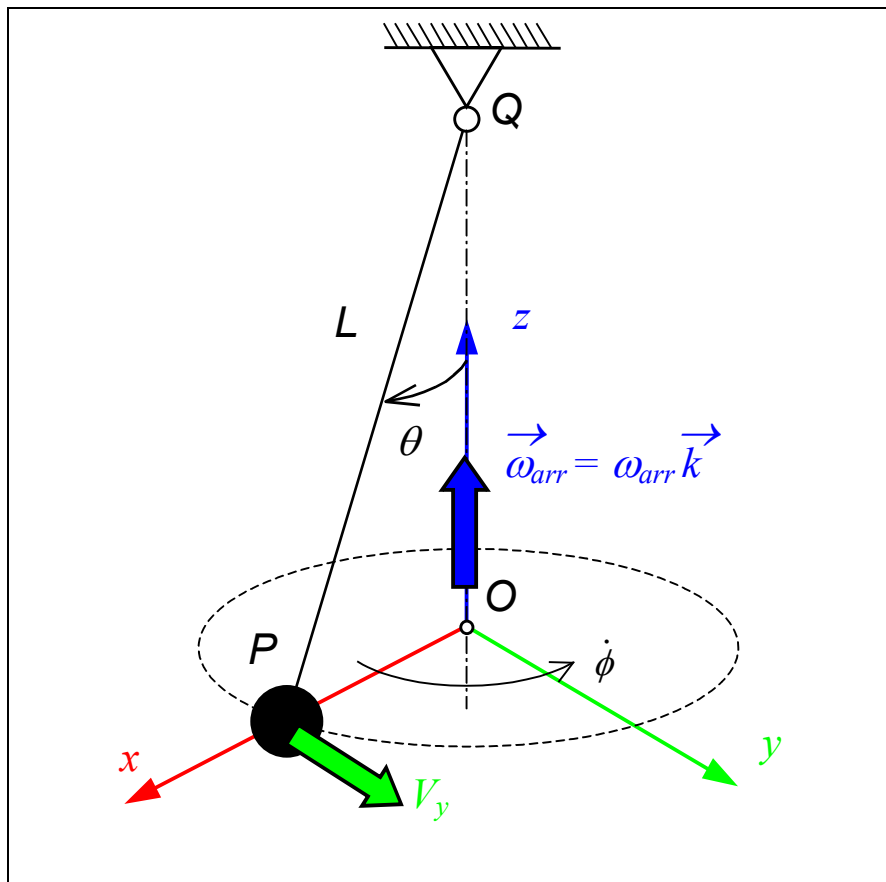


Figura 45 – Diagrama de Velocidades

Do diagrama de velocidades obtêm-se para $\vec{K} \equiv \vec{k}$:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q) \Rightarrow \vec{V}_P = 0 + \dot{\phi} \vec{k} \wedge L(-\cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{i})$$

$$V_{Py} = 0 + L \sin \theta \dot{\phi} \vec{j} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{V_{Py}}{L \sin \theta} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{V_{Py}}{R}$$

Quantidade de movimento angular \vec{H}_Q da partícula P , considerando o pólo conveniente em Q :

$$\vec{H}_Q = (P - Q) \wedge m \vec{V}_P = L(-\cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{i}) \wedge m V_{Py} \vec{j}$$

$$\vec{H}_Q = mL \cdot V_{Py} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k})$$

Derivando a quantidade de movimento angular \vec{H}_Q com respeito ao tempo:

$$\dot{\vec{H}}_Q = \frac{d}{dt}(\vec{H}_Q)_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_Q$$

$$\frac{d}{dt}(V_{Py})_{rel} = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{H}}_Q = \vec{0} + \dot{\phi} \vec{k} \wedge mL \cdot V_{Py} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k})$$

$$\dot{\vec{H}}_Q = mL \cdot V_{Py} \cos \theta \dot{\phi} \vec{j}$$

O momento das forças externas sobre o sistema partícula P e fio, conforme ilustrado na Figura 47 considerando o pólo em Q :

$$\vec{M}_Q = (Q-Q) \wedge \vec{R}_Q + (P-Q) \wedge m\vec{g} = 0 + L \cdot (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{k}) \wedge -mg \vec{k} = mgL \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{M}_Q = mgL \sin \theta \vec{j} = mg R \vec{j}$$

ou seja, a variação do vetor quantidade de movimento \vec{H}_Q é na direção y , conforme mostrado na Figura 46

TQMA para o pólo em Q :

$$\dot{\vec{H}}_Q = \vec{M}_Q^{ext}$$

$$mL \cdot V_{Py} \cos \theta \dot{\phi} \vec{j} = mg R \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \theta = a \cos \left(\frac{g R^2}{L V_{Py}^2} \right)$$

$$\cos \theta = \frac{g R^2}{L V_{Py}^2}$$

alternativamente pode-se obter:

$$\theta = a \cos \left(\frac{g}{L \dot{\phi}^2} \right) \quad \text{ou} \quad \theta = a \tan \left(\frac{R \dot{\phi}^2}{g} \right)$$

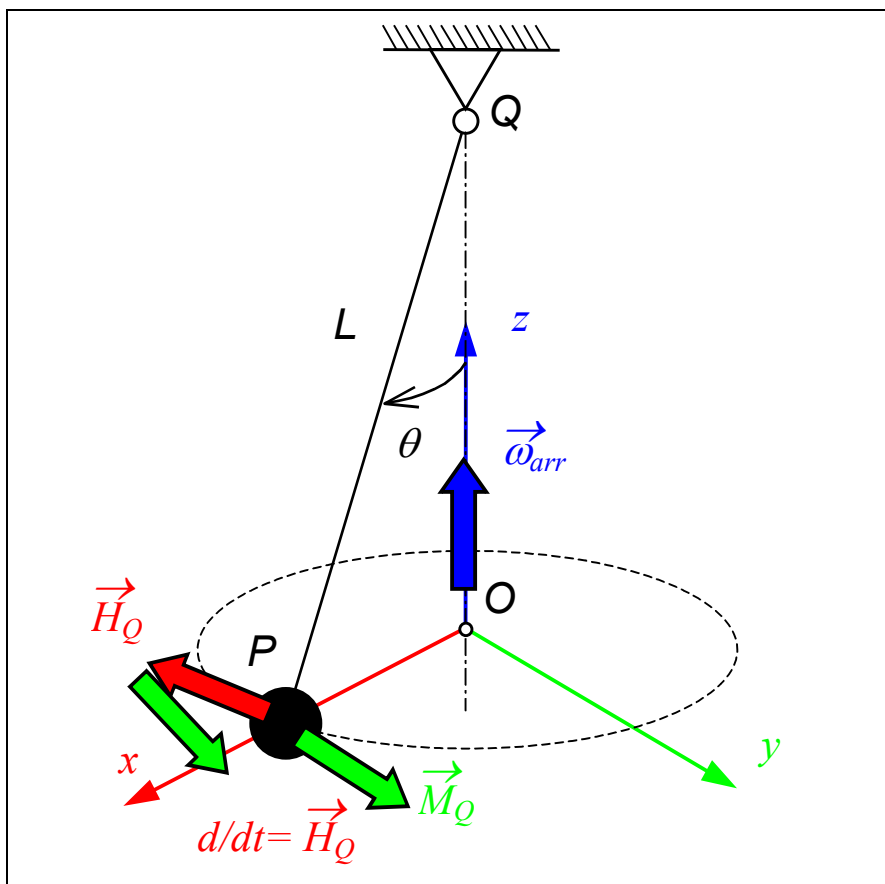


Figura 46 – Interpretação Gráfica da Variação da Quantidade de Movimento e Momento

Determinar as reações em Q . Utilizando o **TR** determina-se a aceleração de P :

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-Q) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-Q)] \\ (P-Q) &= L \cdot (-\cos \theta \vec{k} + \text{sen } \theta \vec{i}) ; \vec{\omega}_{arr} = \dot{\phi} \vec{k} \\ \vec{a}_p &= 0 + 0 + \omega_{arr} \vec{k} \wedge [\omega_{arr} \vec{k} \wedge L \cdot (-\cos \theta \vec{k} + \text{sen } \theta \vec{i})] \\ \vec{a}_p &= -L \text{sen } \theta \dot{\phi}^2 \vec{i} \end{aligned}$$

Aplicando no **TR** considerando o **DFCL** da Figura 47

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a}_p &= \sum F_i^{ext} = \vec{R}_Q + m\vec{g} \\ -m \cdot L \text{sen } \theta \dot{\phi}^2 \vec{i} &= \vec{R}_Q - mg \vec{k} \end{aligned}$$

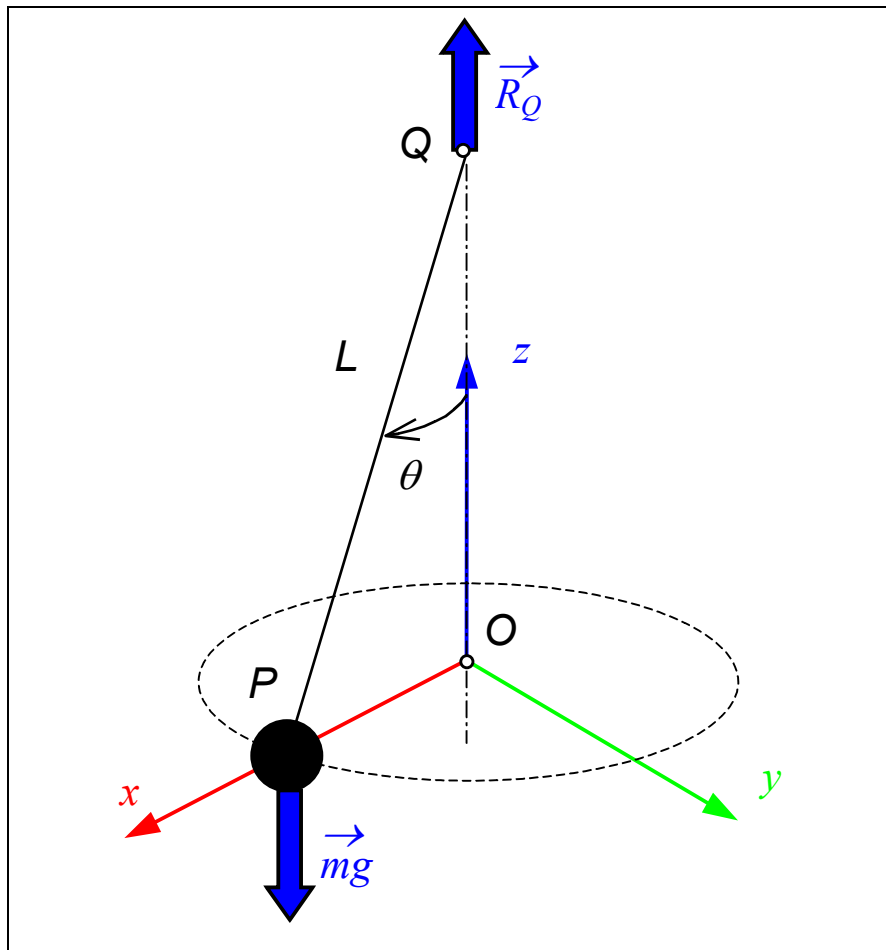


Figura 47 – Diagrama de Forças do Corpo Livre

As reações na articulação Q em cada direção são:

$$R_{Qx} = -mL \text{sen } \theta \dot{\phi}^2 i ; R_{Qy} = 0 \vec{j} ; R_{Qz} = mg \vec{k}$$

17. ANEXO E - Quaternions

Números complexos são uma extensão bidimensional dos números reais. Considere um círculo de raio R no plano, conforme mostrado na Figura 48a. O ponto P do círculo, quando descrito no plano complexo (eixo real e imaginário onde $i^2 = -1$) em função do parâmetro θ , tem a seguinte forma:

$$a + i \cdot b = R \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) \Rightarrow a = R \cdot \cos \theta \text{ e } b = R \cdot \sin \theta \quad \therefore \quad a^2 + b^2 = R^2 \quad (224)$$

Então uma orientação descrita por uma versor unitário \vec{u} segundo o ângulo θ é obtida por:

$$(P - O) = R \cdot \vec{u} = R \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \Rightarrow \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (225)$$

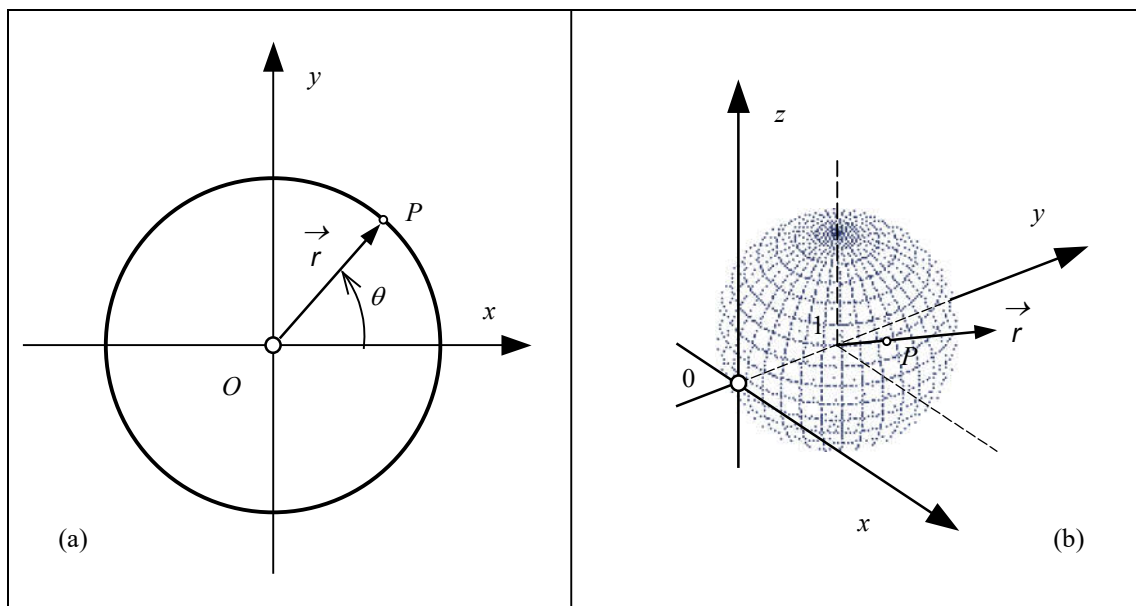


Figura 48 – Círculo no Plano e Esfera no Espaço

Os *quaternions* (Hamilton, 1843) são uma extensão quadri-dimensional dos números complexos. Os quaternions é composto de uma parte real (w) e uma tríade imaginária ($i j k$).

$$q = w + xi + yj + zk \quad (226)$$

Os *quaternions* são muito utilizados em algoritmos para descrição de movimentos espaciais devido a inexistência de singularidade e eficiência nas operações matemáticas. Considere então uma esfera de raio unitário no espaço tridimensional, conforme apresentado na Figura 48b, com centro na posição:

$$q = 0 + 0i + 1j + 0k \quad \therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (227)$$

Para descrever uma orientação associada com a posição do ponto \mathbf{P} , contida na superfície da esfera de raio unitário, as três coordenadas são suficientes para indicar univocamente um vetor orientação. Por exemplo na direção 45° no plano $(x \ 1 \ z)$, conforme apresentado na Figura 48b:

$$P = 0 + \sqrt{2}/2i + 1j + \sqrt{2}/2k \quad (228)$$

As propriedades dos quaternions são:

$$\begin{aligned} ij &= k; \quad jk = i; \quad ki = j \\ ji &= -k; \quad kj = -i; \quad ik = -j \\ i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ P' &= q \cdot P \cdot q^{-1} \end{aligned} \quad (229)$$

Ou seja a posição rotacionada \mathbf{P}' de um vetor \mathbf{P} na base (ijk) pode ser obtida pela pré-multiplicação dos quaternions q e pós multiplicação de sua inversa q^{-1} :

$$\begin{aligned} P' &= q \cdot P \cdot q^{-1} \\ P' &= (w + xi + yj + zk) \cdot (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot (w - xi - yj - zk) \end{aligned} \quad (230)$$

Para mais detalhes assista o vídeo da *3Blue1Brown* no seguinte endereço na internet:

(<https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=d4EgbgTm0Bg>).