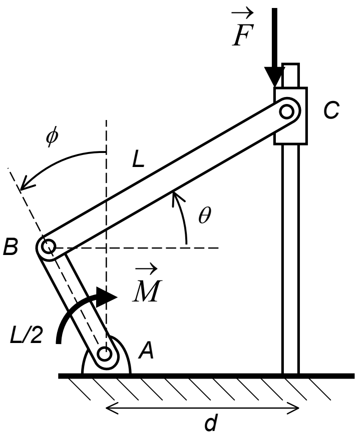
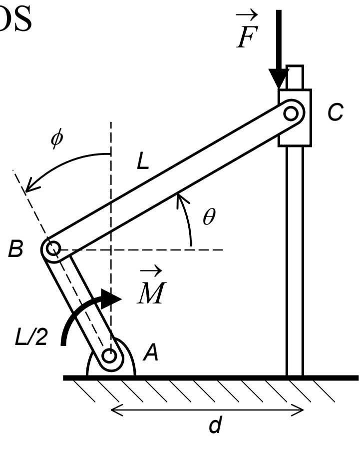
PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – PTV

- NOTAS DE AULA
- Prof. Spinola

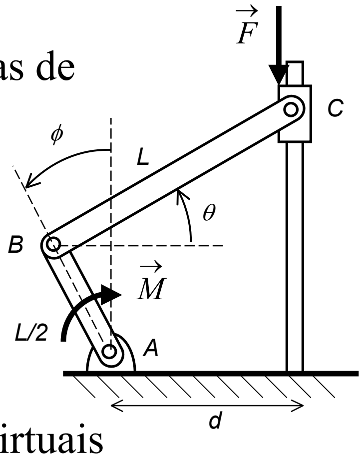


- PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS - PTV

O PTV permite identificar uma equação escalar para a posição de equilíbrio de um sistema de corpos, submetidos a forçamentos externos, sem a necessidade de resolver as equações estáticas individuais de cada corpo.



- Tópicos abordados nas notas de aula:
  - Deslocamento Virtual
  - Trabalho Elementar
  - Trabalho de uma Força
  - Trabalho do Momento
  - Princípio dos Trabalhos Virtuais



- DESLOCAMENTO VIRTUAL - DEFINIÇÃO

Um **deslocamento virtual** de um sistema é uma mudança infinitesimal na sua **configuração** (posições e atitudes) que resulta numa variação arbitrária de todas as suas coordenadas mas, **consistente** com as restrições vinculares.

Um deslocamento virtual transcorre **independente** do tempo, mantendo a configuração, as forças aplicadas e as condições dos vínculos **inalteradas**.

Mecânica II - PME 3200

- POSIÇÃO E ATITUDE DE PARTES DE UM SISTEMA e VARIAÇÕES

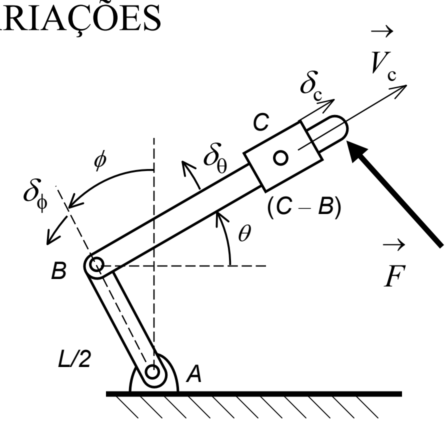
Braço robótico:

Configuração

ϕ; θ; (C – B)

Variações:

$\delta\phi$; $\delta\theta$; δC



Mecânica II - PME 3200

- DESLOCAMENTO VIRTUAL - CONCEITO

Note que a idealização do deslocamento **virtual** δ exige alguma abstração.

Imagine um mecanismo complexo de um braço de um robô quando se movimenta devido a aplicação de forças, respeitando as relações cinemáticas (equações) dos seus vínculos e realiza um certo trabalho.

Imagine agora que este deslocamento seja muito pequeno (**virtual**), e portanto também leva um tempo infinitesimal para ocorrer.

Portanto o trabalho realizado, se o deslocamento for **virtual** (infinitesimal e independente do tempo), será nulo.

Mecânica II - PME 3200

- DESLOCAMENTO VIRTUAL - CONCEITO

Nesta idealização as RELAÇÕES (equações) entre os deslocamento e forças, externas ou internas que permitem calcular o trabalho, se **preservam** naquela configuração (em outra posição haverá outras relações), ou seja apenas para deslocamentos muito pequenos (virtuais ou infinitesimais independente do tempo).

Assim para forças internas de vínculos ideais em movimento, o trabalho se anula devido ao principio ação e reação (o vinculo se movimenta mas as forças são iguais e opostas) e para os vínculos fixos, obviamente não há realização de trabalho.

Mecânica II - PME 3200

- DESLOCAMENTO VIRTUAL

Um sistema de N partículas cuja configuração na espaço R^3 é expressa por $3N$ coordenadas cartesianas: $(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2);.......; (x_N, y_N, z_N)$ tem seu deslocamento virtual expresso por um conjunto delta (δ) infinitesimal:

$(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2,........., \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N)$

ou alterando a nomenclatura $(x_i, y_i, z_i \Rightarrow x_{3N})$:

$(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4, \delta x_5, \delta x_6,........., \delta x_{3N-2}, \delta x_{3N-1}, \delta x_{3N})$

- TRABALHO ELEMENTAR DE UMA FORÇA

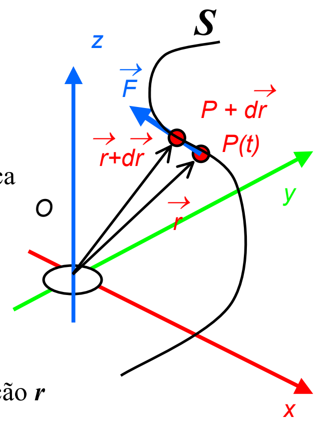
Considere uma partícula ***P*** se movendo sobre a trajetória ***S*** ao longo do tempo, devido a uma força (*F*, *P*) aplicada na partícula.

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$d\,\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Por definição o trabalho elementar dW realizado pela força ***F*** associado ao deslocamento de posição ***r*** para (***r*** + ***dr***), é dado pelo produto escalar:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



- TRABALHO ELEMENTAR DE UMA SISTEMA DE FORÇAS

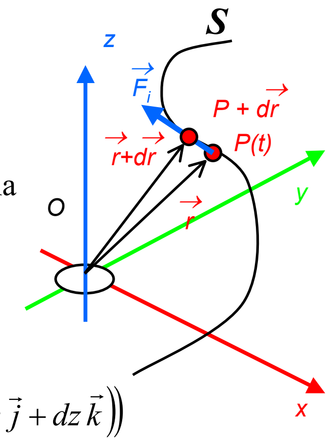
Seja a partícula ***P*** que se move de d***r*** sobre a trajetória ***S***, submetida ao sistema de forças (*Fi*, *P*). Tem-se que:

$$\vec{F}_i = F_{xi}\,\vec{i} + F_{yi}\,\vec{j} + F_{zi}\,\vec{k}$$

$$d\,\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$dW = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(F_{xi}\,\vec{i} + F_{yi}\,\vec{j} + F_{zi}\,\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)\right)$$

$$\boxed{dW = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} = \vec{R}\cdot d\vec{r}}$$



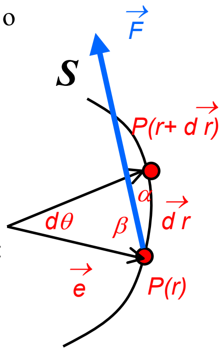
Mecânica II - PME 3200

- TRABALHO ELEMENTAR DE UM MOMENTO

Considerando o deslocamento elementar ***dS***, produzido pelo vetor força ***F*** aplicado em ***P***, formando um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ com a trajetória. As perpendiculares em $P(\boldsymbol{r})$ e $P(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{dr})$ formam o triangulo com ângulo central $\boldsymbol{d\theta}$.

O módulo do trabalho elementos ***dW*** é dado por:

$$|dW| = |\vec{F}| \cdot |d\,\vec{r}| \cos\alpha$$



Para o plano definido pela força ***F*** e o deslocamento infinitesimal ***dS*** que se aproxima de ***dr***, produzindo $\boldsymbol{d\theta}$:

$$\lim_{d\theta \to 0} dS = dr \qquad \lim_{dS \to 0} dr = e \cdot d\theta$$

Mecânica II - PME 3200

- TRABALHO ELEMENTAR DE UM MOMENTO

O trabalho elementar resulta portanto em:

$$|dW| = |\vec{F}| \cdot |\vec{e}| \cos\alpha \cdot d\theta$$

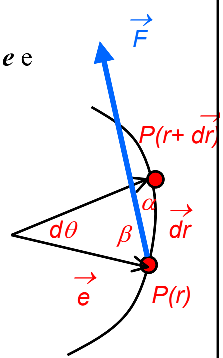
Para um deslocamento infinitesimal ***dS***, ***dr*** é ortogonal a ***e*** e os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são complementares. Substituindo:

$$|dW| = |\vec{F}| \cdot |\vec{e}| \operatorname{sen}\beta \cdot d\theta$$

Considerando que $(P - O) = \boldsymbol{e}$, identifica-se o produto vetorial que é a expressão do momento da força:

$$|dW| = \left|\left(\vec{e} \wedge \vec{F}\right)\right| \cdot d\theta = \left|(P - O) \wedge \vec{F}\right| \cdot d\theta$$

$$\boxed{dW = M \cdot d\theta}$$



Mecânica II - PME 3200

- POTÊNCIA DAS FORÇAS EXTERNAS

Forma alternativa de dedução é calcular a *POTÊNCIA* ***P*** das forças (F_i, P_i) aplicadas no **CORPO RÍGIDO** de cinemática conhecida (V_O, ω).

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i \qquad P = \sum \vec{F}_i \cdot \left[\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)\right]$$

Devido ao campo de velocidades do **corpo rígido**, obtém-se:

$$P = \vec{V}_O \cdot \sum \vec{F}_i + \left[\sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i\right] \cdot \vec{\omega} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$$

$$P = \frac{d}{dt} W \quad \Rightarrow \quad dW = P \cdot dt$$

$$dW = \sum \vec{F}_i \cdot \left(\vec{V}_O \cdot dt\right) + \vec{M}_O \cdot \left(\vec{\omega} \cdot dt\right) = \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} + M \cdot d\theta$$

Mecânica II - PME 3200

- TRABALHO E ENERGIA

Utilizando as segunda lei de *Newton* (F = m a) na expressão do trabalho elementar d***W***, obtêm-se:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r}$$

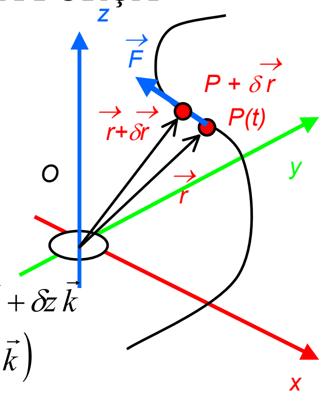
$$dW = m \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \cdot d\dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} = m \cdot d\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$d\left(\dot{r}^2\right) = d\left(\dot{r} \cdot \dot{r}\right) = 2 \cdot d\dot{r} \cdot \dot{r}$$

$$dW = \frac{1}{2} m \cdot d\,\dot{r}^2 = d\left(\frac{1}{2} m \cdot V^2\right) = dT \qquad \boxed{dW = dT}$$

- TRABALHO VIRTUAL DE UMA FORÇA

Para um deslocamento infinitesimal (notação variacional δ) da partícula P ($\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$) o trabalho virtual realizado pela força $\boldsymbol{F}$ associada ao deslocamento virtual de posição $\boldsymbol{r}$ para ($\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$) é dado pelo produto escalar:



$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k} \qquad \delta\,\vec{r} = \delta x\,\vec{i} + \delta y\,\vec{j} + \delta z\,\vec{k}$$

$$\delta W = \left(F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}\right)\cdot\left(\delta x\,\vec{i} + \delta y\,\vec{j} + \delta z\,\vec{k}\right)$$

$$\delta W = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z$$

- TRABALHO VIRTUAL DE UM SISTEMA DE FORÇAS

Para um conjunto ***Fi*** de forças aplicadas no pontos ***P***i (i = 1,.., N),, que produzem deslocamentos elementares infinitesimais $\boldsymbol{\delta r}$:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z$$

ou utilizando uma notação sequencial generalizada (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ... x_{3N}) e (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, ... F_{3N}) obtêm-se:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \cdot \delta\,x_j$$

Mecânica II - PME 3200

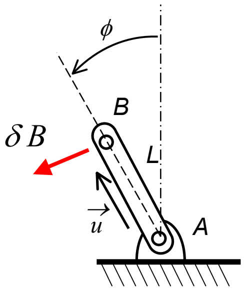
- DESLOCAMENTO VIRTUAL

O deslocamento virtual de um ponto do corpo rígido é obtido pelo diferencial de sua posição:

$$(B-A)=L\vec{u}$$
$$dB-dA=dL\cdot\vec{u}+L\cdot d\,\vec{u}$$

$$dA=0\ ;\ dL=0 \quad \text{e} \quad d\,\vec{u}=d\phi\,\vec{\tau}$$

$$d\vec{B}-0=0+L\cdot d\phi\,\vec{\tau}$$
$$\delta\vec{B}=L\cdot\delta\phi\;\vec{\tau}$$



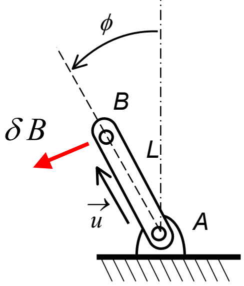
Mecânica II - PME 3200

- DESLOCAMENTO VIRTUAL (Alternativa)

O deslocamento virtual também pode ser determinado utilizando a fórmula de campo de velocidades de um corpo rígido:

$$\vec{V}_B=\vec{V}_A+\vec{\omega}\wedge(B-A)$$
$$\vec{V}_B=0+\dot{\phi}\,\vec{k}\wedge L\vec{u}=L\dot{\phi}\,\vec{\tau}$$

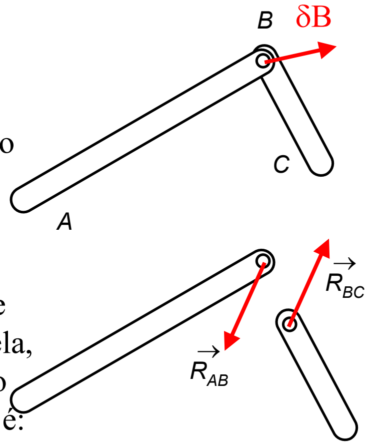
$$\frac{dB}{dt}=L\frac{d\phi}{dt}\vec{\tau}$$
$$\delta\vec{B}=L\delta\phi\,\vec{\tau}$$



Mecânica II - PME 3200

- RESTRIÇÃO VINCULAR

O deslocamento virtual de um ponto qualquer do sistema pode estar restrito devido a condições vinculares.



$$\delta\vec{B} = \delta B_x\,\vec{i} + \delta B_y\,\vec{j} + \delta B_z\,\vec{k}$$

Para um **vínculo ideal**, o diagrama de forças sobre os corpos livres nos revela, pelo **principio de ação-reação**, que o trabalho virtual das forças vinculares é:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{R}_{AB} \cdot \delta\vec{B} + \vec{R}_{BC} \cdot \delta\vec{B} = \left(\vec{R}_{AB} + \vec{R}_{BC}\right) \cdot \delta\vec{B} = 0$$

Mecânica II - PME 3200

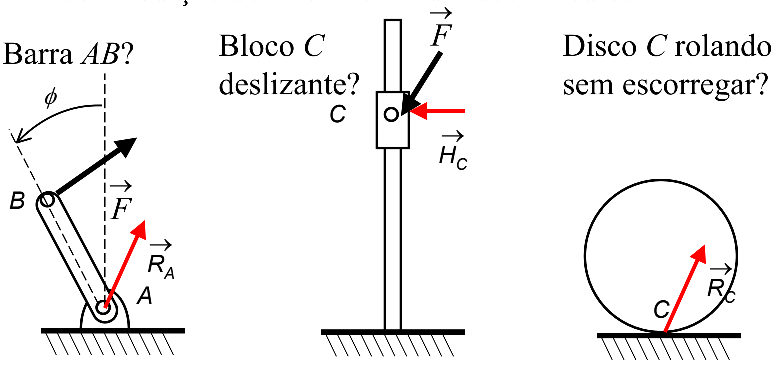
- OUTROS TIPOS DE VÍNCULOS

Qual a contribuição do trabalho virtual dos vínculos?

Barra *AB*?

Bloco *C* deslizante?

Disco *C* rolando sem escorregar?



$$\delta W_{AB} = \vec{R}_A \cdot \delta\vec{A} + \vec{F} \cdot \delta\vec{B}$$

$$\delta W_{AB} = \vec{F} \cdot L\delta\vec{B}$$

$$\delta W_C = \vec{H}_C \cdot \delta\vec{C} + \vec{F} \cdot \delta\vec{C}$$

$$\delta W_C = \vec{F} \cdot \delta C_y$$

$$\delta W_C = \vec{R}_C \cdot \delta\vec{C}$$

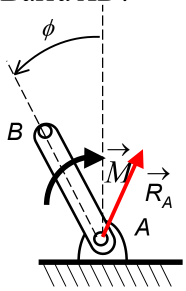
$$\delta W_C = 0$$

Mecânica II - PME 3200

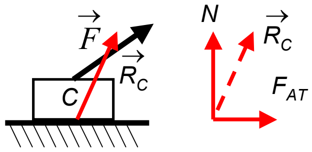
- OUTROS TIPOS DE VÍNCULOS

Qual a contribuição do trabalho virtual dos vínculos?

Barra *AB*?



Bloco *C* escorregando com atrito?



$$\delta W_{AB} = \vec{R}_A \cdot \delta\vec{A} + M \cdot \delta\phi \qquad \delta W_C = \vec{F} \cdot \delta\vec{C} + \vec{F}_{AT} \cdot \delta\vec{C}$$

RSB 21

Mecânica II - PME 3200

- FORÇAS INTERNAS E EXTERNAS DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Um agregado de ***P***i partículas (i = 1,.., N) (corpo rígido) pode estar submetido a forças internas e externas.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{int}}$$

Pelo princípio da ação e reação, as forças internas ocorrem aos pares iguais e contrários. Portanto:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{int}} = 0$$

RSB 22

- CONTRIBUIÇÃO DAS FORÇAS VINCULARES

O trabalho virtual das forças externas e vinculares aplicadas ao sistema ***S*** considerando os deslocamentos virtuais $\boldsymbol{\delta r}$ de cada ***P***i partícula: $\vec{F}_i = F_{xi}\,\vec{i} + F_{yi}\,\vec{j} + F_{zi}\,\vec{k}$

$$\vec{R}_i = R_{xi}\,\vec{i} + R_{yi}\,\vec{j} + R_{zi}\,\vec{k}$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{R}_i\right) \cdot \delta\,\vec{r}_i = 0$$

As forças de vínculos ideais não realizam trabalho:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\,\vec{r}_i = 0$$

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\,\vec{r}_i = 0}$$

- CONTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS

Para o caso de também haver momentos externos aplicados aos **CORPOS RÍGIDOS** do sistema ***S,*** considerando deslocamento angular infinitesimal admissíveis $\boldsymbol{\delta\theta}$ a fórmula final do **PTV** resulta em:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} M \cdot \delta\,\theta = 0$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\,\vec{r}_i + M \cdot \delta\theta = 0$$

- PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O TRABALHO VIRTUAL de um sistema de forças e momentos aplicados ao sistema ***S,*** de corpos rígidos em equilíbrio, considerando deslocamentos virtuais, é nulo.

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + M \cdot \delta\theta = 0}$$

- RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tipicamente o princípio dos TRABALHOS VIRTUAIS é aplicado a sistema mecânico ***S,*** de corpos rígidos em equilíbrio acionado por um conjunto de forças e momentos externos para obter relações de equilíbrio.

Desta forma, considerando **deslocamentos virtuais**, e vínculos ideais conservativos, o trabalho virtual será nulo.

Mecânica II - PME 3200

- ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Identificar o Sistema – corpos rígidos e vínculos;

Identificar os Graus de Liberdade do sistema - ***GL***;

Elaborar o ***DVCL*** de cada ponto de interesse e determinar os deslocamentos virtuais para uma posição genérica;

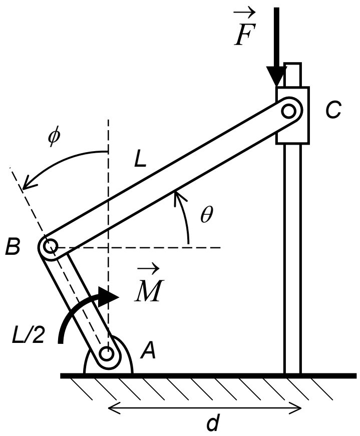
Elaborar o ***DFCL*** de cada corpo, separando os forçamentos externos (que realizam trabalho);

Determinar as relações geométricas dos deslocamentos relevantes de cada ponto de cada corpo em relação ao grau de liberdade identificado;

Aplicar os Teoremas - ***PTV***

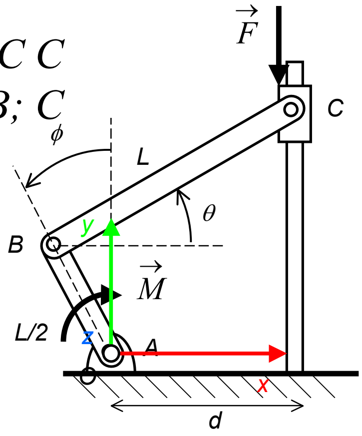
Mecânica II - PME 3200

- Exercício:
  - Considere o mecanismo com dimensões mostradas na figura, submetido a força ***F*** aplicada no bucha *C* e momento ***M*** aplicado na barra *AB*. Os vínculos do tipo anel em *A*, *B* e *C* são ideais. A bucha *C* desliza na vertical sem atrito. Determinar a razão entre ***F*** e ***M*** para a posição de equilíbrio do sistema.



Mecânica II - PME 3200

- Resolução do Problema
  - Sistema ? 3 Sólidos *AB BC C*
    3 Vínculos *A; B; C*
  - Graus de Liberdade: ϕ; θ
  - DVC?
  - DFCL ?
  - Referencial ? *A*xyz
  - Teoremas ?



Mecânica II - PME 3200

- Deslocamentos Virtuais
  - DVC? Corpo *C* $\boxed{\delta\vec{C} = -\delta C_y \vec{j}}$

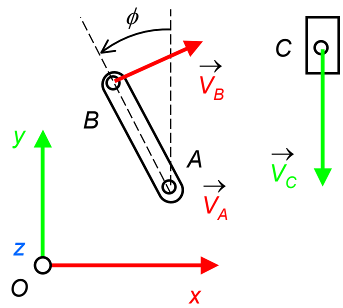
  Barra *AB* – G.L.: ϕ

  $(B - A) = L/2 \cdot \vec{u}$

  $\delta B - \delta A = \delta L/2 \cdot \vec{u} + L/2 \cdot \delta\vec{u}$

  $\delta B - 0 = 0\vec{u} + L/2\, \delta\phi\, \vec{\tau}$

  $\boxed{\delta\vec{B} = L/2\, \delta\phi\, \vec{\tau}}$



- Deslocamentos Virtuais (alternativa)
  - DVC? Barra AB – 1GL: ϕ

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$

$$\vec{V}_B = 0 + \dot{\phi}\vec{k} \wedge L/2\vec{u} = L\dot{\phi}/2\vec{\tau}$$

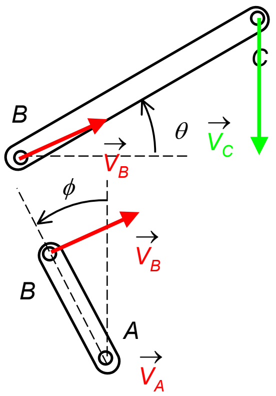
$\phi;\ \theta$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d\phi}{dt} L/2\vec{\tau} \Rightarrow \delta\vec{B} = L/2\delta\phi\vec{\tau}$$

Barra BC – 3GL: θ, $(B\text{-}A)$

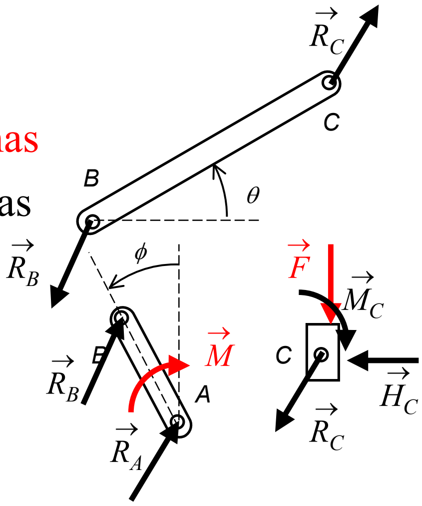
$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega} \wedge (C - B)$$

$$\vec{V}_C = L\dot{\phi}/2\vec{\tau} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (C - B)$$



- Diagrama de Forças
- DFCL ? Forças externas
  Forças internas
- Teoremas ?

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{M}_i \cdot \delta\theta_i = 0$$



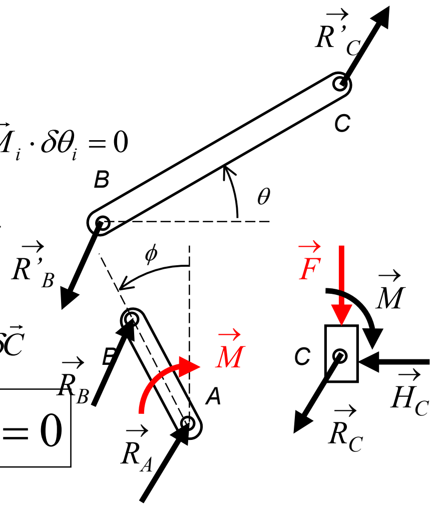
Mecânica II - PME 3200

- Resolução
- PTV ? $\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{M}_i \cdot \delta\theta_i = 0$

$$\delta W = \vec{R}_A \cdot \delta\vec{A} + \vec{R}_B \cdot \delta\vec{B} + \vec{M} \cdot \delta\phi +$$
$$\vec{R}'_B \cdot \delta\vec{B} + \vec{R}'_C \cdot \delta\vec{C} +$$
$$\vec{R}_C \cdot \delta\vec{C} + \vec{M} \cdot \delta\beta + \vec{F} \cdot \delta\vec{C} + \vec{H}_C \cdot \delta\vec{C}$$

$$\boxed{\delta W = \vec{M} \cdot \delta\phi + \vec{F} \cdot \delta\vec{C} = 0}$$

$$\delta\phi \quad \Rightarrow \quad f\left(\delta\vec{C}\right)?$$



Mecânica II - PME 3200

- Relação Geométrica entre $\delta\phi$ e $\delta C\theta$

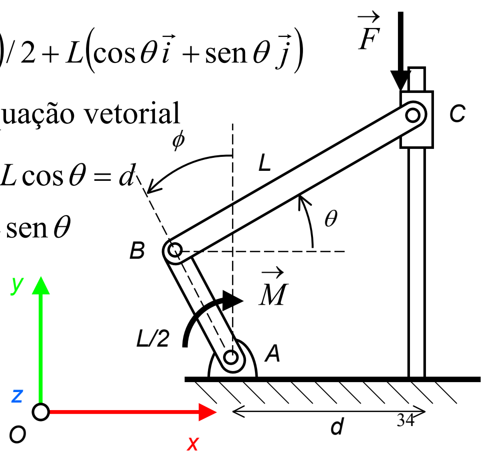
$$(C - A) = (B - A) + (C - B)$$
$$(C - A) = L\left(\cos\phi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\phi\,\vec{i}\,\right)/2 + L\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right)$$

Separando os termos da equação vetorial

$$(C - A)\cdot\vec{i} = -(L \operatorname{sen}\phi)/2 + L\cos\theta = d$$
$$(C - A)\cdot\vec{j} = (L\cos\phi)/2 + L\operatorname{sen}\theta$$

Equação Vincular

$$\Phi \;\Rightarrow\; \theta = f(\phi)$$



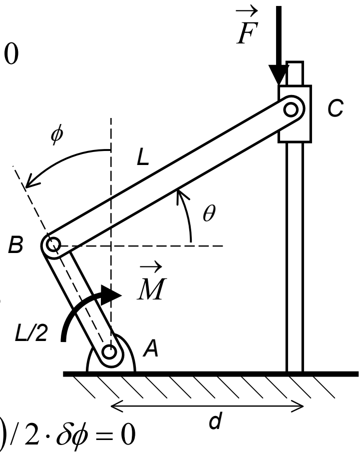
- Diferenciando:

$$\delta C_x = -(L\cos\phi \cdot \delta\phi)/2 - L\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \delta\theta = 0$$
$$\delta C_y = -(L\,\mathrm{sen}\,\phi \cdot \delta\phi)/2 + L\cos\theta \cdot \delta\theta$$

Resolvendo δC_x: $\delta\theta = -\dfrac{\cos\phi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \cdot \delta\phi$

substituindo:

$$\delta C_y = -\left(\frac{L\,\mathrm{sen}\,\phi}{2} + \frac{L\cos\theta\cos\phi}{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right) \cdot \delta\phi$$
$$\delta W = \vec{M} \cdot \delta\phi + \vec{F} \cdot \delta\vec{C} = 0$$
$$\delta W = M \cdot \delta\phi - FL(\mathrm{sen}\,\phi + \cot\theta\cos\phi)/2 \cdot \delta\phi = 0$$



Mecânica II - PME 3200

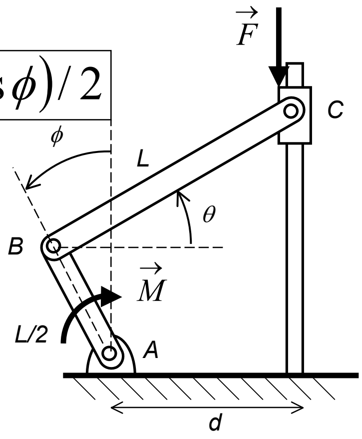
- Resultado Final

$$\boxed{M = FL(\mathrm{sen}\,\phi + \cot\theta\cos\phi)/2}$$

Para a posição de equilíbrio em $\phi = 0$ e portanto $\cos\phi = 1$

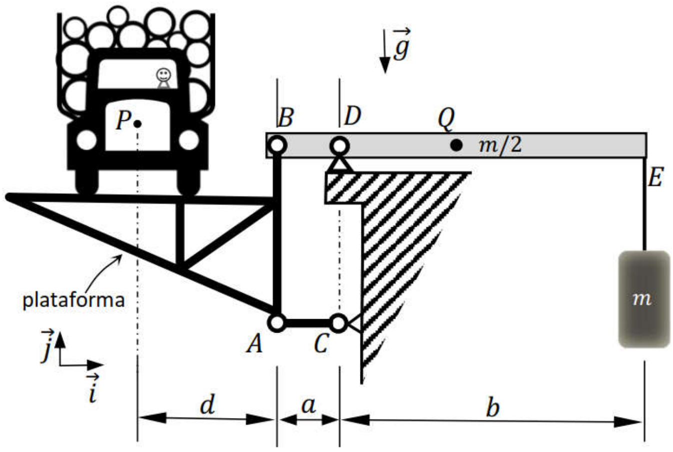
$$\boxed{M = FL\cot\theta/2}$$

Para outros ângulos utilize a fórmula dos co-senos.



Mecânica II - PME 3200

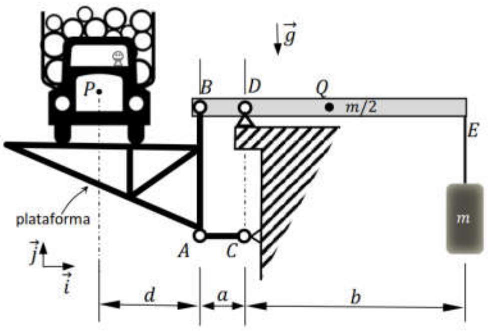
- Balança de Roberval



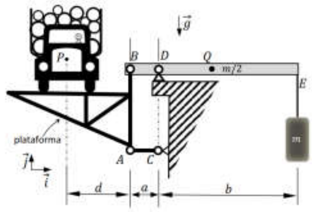
Mecânica II - PME 3200

- EX. Balança Roberval

Considere o dispositivo abaixo em equilíbrio na posição mostrada. Pede-se para determinar a massa ***M*** do caminhão em função da massa ***m*** do contra peso?



- Resolução:



• **Sistema**: Barra BDE; plataforma BAP; barra AC

• **Articulações**: *E; D; B; A*

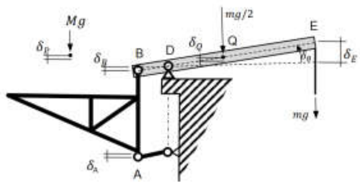
• **Grau de liberdade**: 1GL θ da barra BDE

• **Note que**: $\delta D = \delta C = 0$

• **Note ainda que**: $\delta A = \delta B = \delta P$

Mecânica II - PME 3200

- Diagrama de Forças:



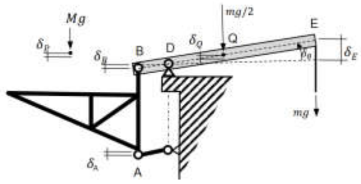
• **Posição genérica**: inclinada de θ

• ***DFCL***: (Mg, *P*); (mg, *E*); (mg/2, *Q*)

• **Deslocamentos Virtuais de interesse**:
$\delta \boldsymbol{P}_y$; $\delta \boldsymbol{E}_y$; $\delta \boldsymbol{Q}_y$

Mecânica II - PME 3200

• Deslocamentos Virtuais:



• **Deslocamentos Virtuais de interesse**

$\delta \boldsymbol{P}_y$; $\delta \boldsymbol{E}_y$; $\delta \boldsymbol{Q}_y$. Para deslocamentos virtuais:

$\delta\theta \approx 0 \Rightarrow$ sen $\theta = 0$ e cos $\theta = 1$

$$(E-D) = b\left(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right)$$

$$(E-D)_x = b\cos\theta \quad e \quad (E-D)_y = b\operatorname{sen}\theta$$

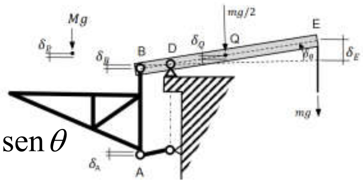
$$(E-D)_y = b\operatorname{sen}\theta$$

$$dE_y - dD_y = b\cdot d(\operatorname{sen}\theta) - 0 = b\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

$$\delta E_y = b\cdot\delta\theta$$

Mecânica II - PME 3200

• Deslocamentos Virtuais:



$$(B-D) = a\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right)$$

$$(B-D)_x = -a\cos\theta \quad e \quad (B-D)_y = -a\operatorname{sen}\theta$$

$$(B-D)_y = -a\operatorname{sen}\theta$$

$$dB_y - dD_y = -a\cdot d(\operatorname{sen}\theta) - 0 = -a\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

$$\delta B_y = -a\cdot\delta\theta = \delta P_y$$

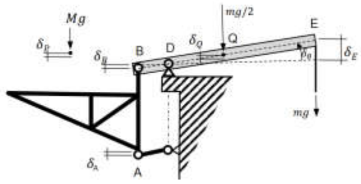
$$dQ_y = \frac{(b+a)}{2} - a\cdot d(\operatorname{sen}\theta) = \frac{(b-a)}{2}\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

$$\delta Q_y = \frac{(b-a)}{2}\cdot\delta\theta$$

Mecânica II - PME 3200

- Trabalhos Virtuais:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum M_i \cdot \delta \theta_i = 0$$



- ***DFCL***: (Mg, *P*); (mg, *E*); (mg/2, *Q*)

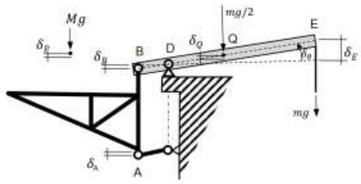
$$\delta E_y = b \cdot \delta\theta \ ; \ \delta P_y = -a \cdot \delta\theta \ \ e \ \ \delta Q_y = \frac{(b-a)}{2} \cdot \delta\theta$$

$$-mgb \cdot \delta\theta + Mga \cdot \delta\theta - \frac{mg}{2}\frac{(b-a)}{2} \cdot \delta\theta = 0$$

$$M = \frac{mb}{a} + \frac{m(b-a)}{4} = m\frac{(5b-a)}{4a}$$

Mecânica II - PME 3200

- Deslocamentos (alternativa)



- ***DVC***: $\vec{V}_E = \vec{V}_D + \vec{\omega} \wedge (E - D)$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}D + \frac{d}{dt}\theta \vec{k} \wedge b\vec{i}$$

$$d\,E = 0 + b \cdot d\theta \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \delta E_y = b \cdot \delta\theta$$

$$\frac{d}{dt}B = \frac{d}{dt}D + \frac{d}{dt}\theta \vec{k} \wedge -a\vec{i}$$

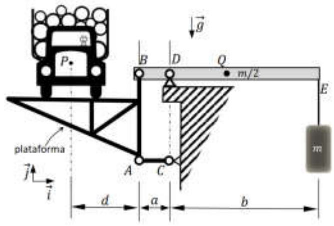
$$d\,B = 0 - a \cdot d\theta \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \delta B_y = -a \cdot \delta\theta$$

$$\delta B_y = \delta A_y = \delta P_y$$

Mecânica II - PME 3200

- RESULTADO FINAL

$$\boxed{M = m\frac{(5b-a)}{4a}}$$



Note que o resultado independe da posição ***d*** do caminhão sobre a plataforma.

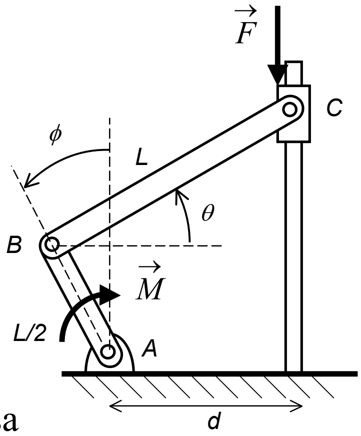
O momento ativo $M = d\,Mg$ é compensado pelo binário reativo $-F_{Cx}$ e F_{Dx} dos vínculos.

Mecânica II - PME 3200

- **RESUMO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**
- SISTEMA: ? Identifique os corpos envolvidos, vínculos e graus de liberdade.
- DVCL: ? Descreva a velocidade de cada ponto de interesse no corpo e determine sua variação.
- DFCL: ? Faça o diagrama de forças sobre o corpo livre explicitando as forças vinculares, internas e externas e momentos.
- REFERENCIAL: ? $Oxyz$
- RELAÇÕES:? Obter relações geométricas entre pontos dos corpos
- TEOREMA: ? $\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \delta \theta_j = 0$

Mecânica II - PME 3200

OBRIGADO A TODOS PELA PARTICIPAÇÃO NA AULA DE PTV!



Prof. Roberto Spinola Barbosa