

Engenharia Automotiva I – PME-3540

Notas de Aula – Parte 2

# **DINÂMICA VEICULAR DOIS GRAUS DE LIBERDADE**

Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa

São Paulo

# DINÂMICA VEÍCULAR

## Conteúdo

1.	INTRODUÇÃO .....	4
2.	MODOS DE MOVIMENTO .....	4
3.	MODELOS PLANOS .....	7
4.	OBJETIVO .....	8
5.	MODELO COM 2 GL .....	9
5.1.	Modelo Vertical.....	9
5.2.	Sistema com Amortecedor Coxinizado.....	11
6.	MODELO VERTICAL 2GL COM EXCITAÇÃO NA BASE .....	12
6.1.	Resolução do Sistema com 2GL .....	13
6.2.	Resolução do Sistema Amortecido com Excitação pela Base .....	15
6.3.	Determinação da Força de Contato .....	18
6.4.	Resolução em Espaço de Estados com Excitação pela Base .....	22
7.	MODELO SAGITAL.....	26
7.1.	Equacionamento .....	27
7.2.	Resolução do Sistema de Equações Diferenciais .....	29
7.3.	Comportamento Modal .....	32
8.	MODELO FRONTAL .....	36
8.1.	Exemplo Numérico .....	38
8.2.	Resposta Lateral/Rolagem Inferior/Superior .....	40
9.	DEMAIS MODOS DE MOVIMENTO .....	42
9.1.	Resposta do Modelo Horizontal.....	42
10.	AJUSTE DA SUSPENSÃO.....	44
10.1.	Movimento Vertical .....	45
10.2.	Ajuste Vertical.....	49
10.3.	Ajuste Fator de Amortecimento .....	51
10.4.	Minimização de Distúrbio Vertical .....	53
10.5.	Amortecedor Não Linear.....	54
10.6.	Modelo Sagital (Vertical/Arfagem) .....	58

# DINÂMICA VEÍCULAR

10.7.	Efeito Comprimento de Onda da Irregularidade .....	61
11.	CONTROLE.....	65
12.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA .....	66
13.	ANEXO A – Formula de <i>Bhaskara</i> e Inversão de Matriz .....	68
14.	ANEXO B – Função de Transferência do Modelo Lateral com 2GL.....	69
14.1.	REFERÊNCIAS .....	76

Utilize sempre a última versão deste documento.

## 1. INTRODUÇÃO

O número de graus de liberdade de um sistema mecânico multicorpos é obtido pelo produto do número de corpos rígidos envolvidos e o número de coordenadas independentes suficientes para descrever integralmente seu movimento no espaço, menos o número de vínculos. Um modelo mais detalhado de um veículo permite descrever com melhor fidelidade sistemas mecânicos reais, que em geral possuem vários graus de liberdade. Desta forma a descrição de um sistema mecânico físico real resultará em vários graus de liberdade que requer o conhecimento da técnica de resolução de sistemas com dois ou mais graus de liberdade.

## 2. MODOS DE MOVIMENTO

Um veículo considerado como um corpo rígido, possui seis graus de liberdade para se movimentar (três translações e três rotações). Cada movimento é caracterizado por um modo de movimento. Os modos de movimento de um corpo rígido são assim descritos:

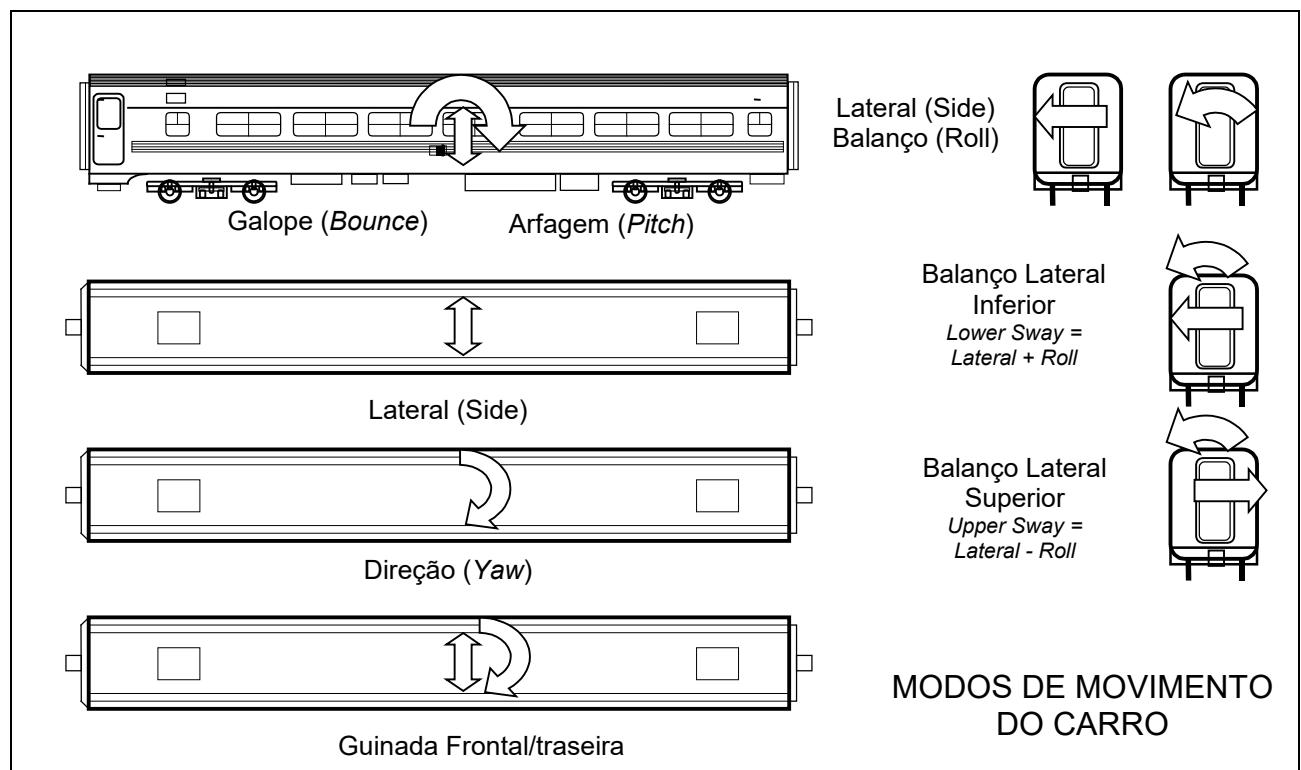
- Avanço – Movimento de translação na direção longitudinal do veículo (*surge X*);
- Deriva – Movimento de translação na direção lateral do veículo (*sway Y*);
- Galope – Movimento de translação na direção vertical do veículo (*bounce Z*);
- Inclinação - Ângulo de rotação na direção longitudinal do veículo (*roll -  $\phi$* );
- Elevação - Ângulo de rotação na direção lateral do veículo (*pitch -  $\theta$* );
- Direção - Ângulo de rotação na direção vertical do veículo (*yaw -  $\psi$* ).

A variação de cada grau de liberdade identificado na Figura 1 é identificada como:

- Velocidade de Avanço – Velocidade de translação na direção longitudinal do veículo ( $\dot{x}$ );
- Velocidade de Deriva – Velocidade de translação na direção lateral do veículo ( $\dot{y}$ );

## DINÂMICA VEÍCULAR

- Velocidade de Galope – Velocidade de translação na direção vertical do veículo ( $\dot{z}$ );
- Velocidade de Rolagem - Velocidade de rotação na direção longitudinal do veículo ( $roll - \dot{\phi}$ );
- Velocidade de Arfagem - Velocidade de rotação na direção lateral do veículo ( $pitch - \dot{\theta}$ );
- Velocidade de Guinada - Velocidade de rotação da direção do veículo ( $yaw - \dot{\psi}$ ).



**Figura 1 – Modos de Movimento do Veículo (Barbosa, 2011)**

Devido à forma de distribuição de massa e os tipos de vínculos formados pelos componentes da suspensão do veículo, podem ocorrer movimentos dependentes. Disto resulta em modos acoplados com movimentos sincronizados (ex. movimento lateral e angular longitudinal: *sway* ou movimento vertical e angular lateral acoplado) (movimento vertical e angular de arfagem acoplada: *front-end-bounce*). Para veículos simétricos há possibilidade dos modos serem desacoplados.

## DINÂMICA VEÍCULAR

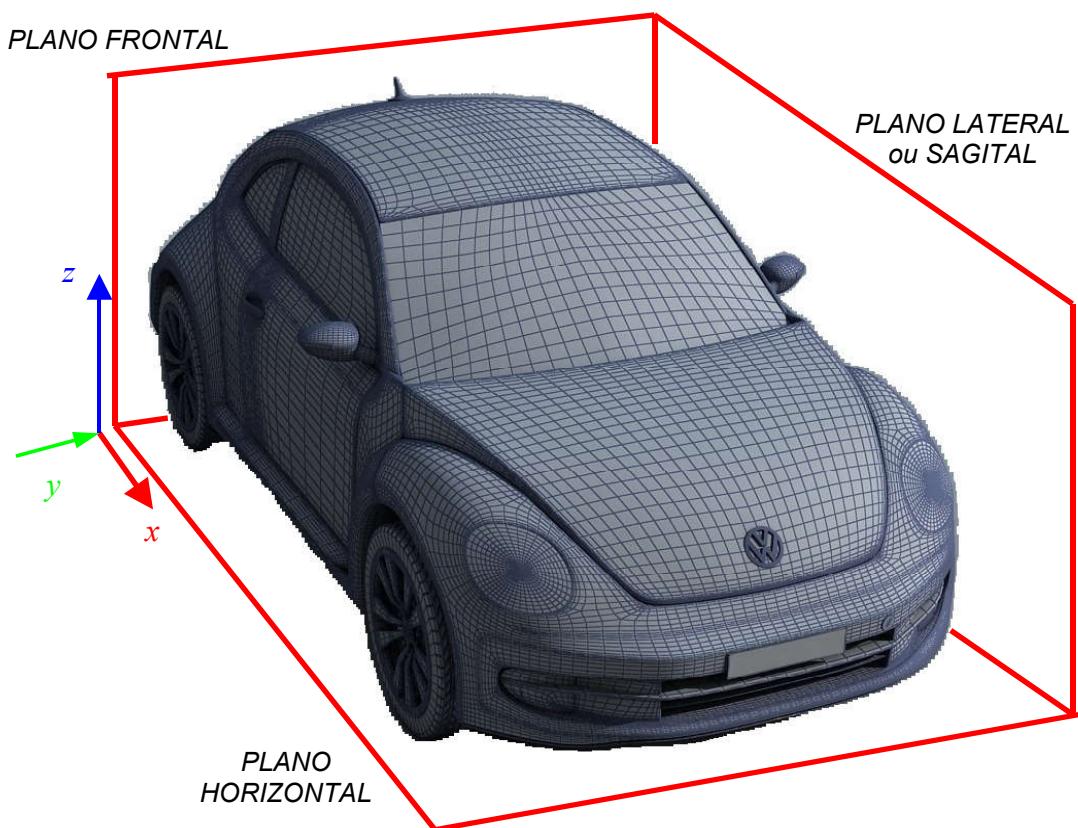
As oscilações que os passageiros de um veículo estão submetidos dependem da resposta dinâmica do veículo (características da suspensão e massa do corpo) e do conteúdo em comprimento de onda (frequência de excitação) da irregularidade da via, por onde o veículo trafega. Esta frequência de excitação depende do comprimento das irregularidades do pavimento e da velocidade de tráfego do veículo. A expressão que correlaciona estes efeitos é dada por:

$$V = \lambda f \quad (1)$$

onde  $V$  a velocidade longitudinal de tráfego do veículo,  $\lambda$  é o comprimento de onda da irregularidade do pavimento (excitação) e  $f$  é a freqüência natural do veículo. Pode-se iniciar os estudos de dinâmica veicular com um modelo simples de um grau de liberdade vertical com excitação pela base. Desta forma no domínio da freqüência é possível identificar as acelerações do veículo devido ao comprimento de onda das irregularidades e quantificar o conforto (ex. norma ISO-2631). Pode-se ainda estender a descrição do sistema físico utilizando modelos com mais de um grau de liberdade que é o foco deste texto.

## 3. MODELOS PLANOS

Os modelos físicos do sistema veicular real podem ser obtidos de projeções planares ortogonais. Assim o plano frontal, plano sagital (ou lateral) e plano horizontal, conforme mostrado na Figura 2, revelam as possibilidades dos planos de representação dos graus de liberdade típicos do corpo rígido. No caso de projeção num plano, duas translações e uma rotação compõem os movimentos possíveis. Para o modelo frontal os movimento lateral, vertical e de rolagem ( $y$ ,  $z$  e  $\theta$ ) são os graus de liberdade contemplados.



**Figura 2 – Planos de Representação dos Modelos**

Para o modelo sagital (ou lateral) os movimento vertical, longitudinal e de arfagem ( $x$ ,  $z$  e  $\phi$ ) são os graus de liberdade devidos. Finalmente para o modelo horizontal os movimentos lateral, longitudinal e de direção ( $x$ ,  $y$ , e  $\psi$ ) são os graus de liberdade correspondentes.

## 4. OBJETIVO

O objetivo deste texto é apresentar uma das técnicas utilizadas para a descrição e interpretação do comportamento dinâmico de um sistema mecânico, composto por dois ou mais graus de liberdade, representado por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem a termos constantes, acopladas com comportamento modal próprio e excitação pela base.

Os modelos de dois graus de liberdade do veículo podem ser descritos em planos específicos com objetivos de estudar o comportamento dinâmico correspondente:

- Modelo Longitudinal (*running*)
- Modelo Vertical (*ride*);
- Modelo Lateral ou Sagital (*bounce & pitch*);
- Modelo Frontal (*upper & lower sway*);
- Modelo Horizontal (*handling*).

Como exemplo de aplicação da utilização da técnica de solução de sistemas com dois ou mais graus de liberdade, apresentaremos a modelagem no plano lateral (ou sagital) de um veículo automotor com excitação pela base, conforme mostrada na Figura 3.

## 5. MODELO COM 2 GL

Na primeira parte do curso foram apresentadas a modelagem e solução do sistema com 1GL. Considere agora modelos mais detalhados incluindo graus de liberdade adicionais. O modelo ficará mais complexo entretanto, representará melhor aspectos que podem ser relevante para descrever determinados fenômenos.

### 5.1. *Modelo Vertical*

Uma descrição mais detalhada do sistema veicular, conforme descrito no modelo de 1GL, requer a inclusão de mais um corpo (massa  $m_2$ ), correspondente à suspensão intermediária (pneu ou truque) com o correspondente grau de liberdade adicional  $z_2$ , conforme mostrado na Figura 3.

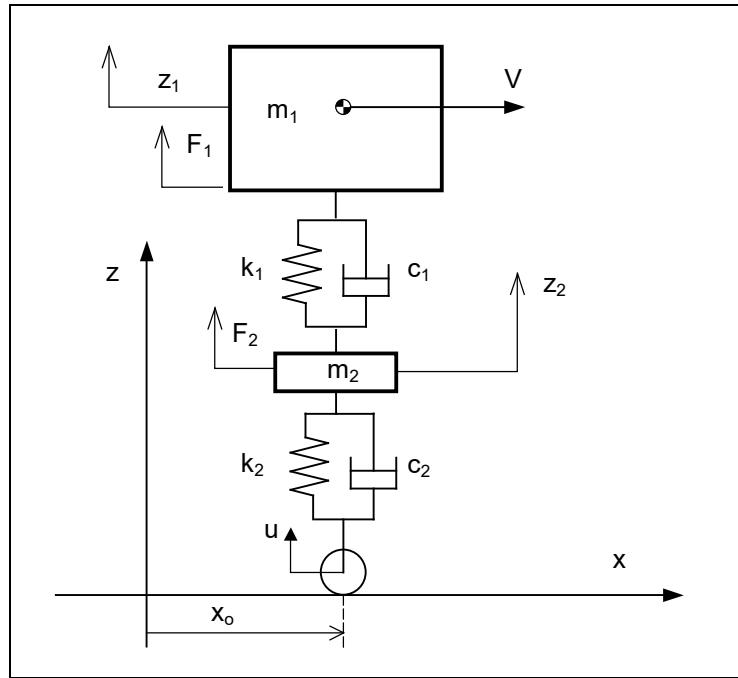
Para cada corpo pode-se obter uma equação diferencial utilizando o **TR**:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= F_1 \\ m \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}) + k_2 (z_2 - u) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= F_2 \end{aligned} \quad (2)$$

onde as forças externas  $F_1$  e  $F_2$  podem ser ações produzidas pelas vibrações do motor à combustão suportado na carroceria por coxins e um desbalanceamento da roda de raio  $R$  trafegando em velocidade constante  $V$  (portanto frequência de excitação  $f = V/(2\pi R)$ ) respectivamente. Pode-se também representar na forma matricial para o sistema homogêneo ( $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ ) sem excitação pela base ( $u_0 = 0$ ) como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

O modelo vertical elementar com dois graus de liberdade  $z_1$  e  $z_2$ , está esquematizado na Figura 3.



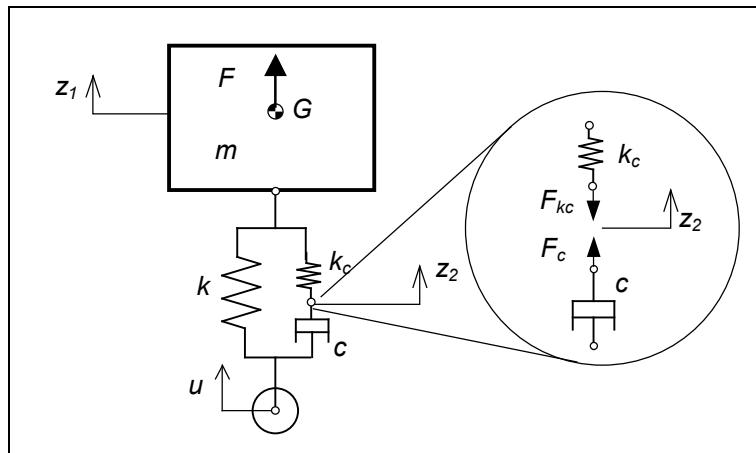
**Figura 3 – Modelo Vertical com dois grau de liberdade**

Note que as equações são dependentes o que caracteriza o acoplamento de movimentos. Expressando as equações na forma matricial compacta, para  $\{x\}^T = \{z_1 \ z_2\}^T$  obtém-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4)$$

## 5.2. Sistema com Amortecedor Coxinizado

Tipicamente o amortecedor do veículo é fixado com buchas elásticas que permitem a articulação do amortecedor durante a excursão da suspensão. Para contemplar essa característica no modelo faz-se a inclusão de um componente com um amortecedor associado em série com uma mola (conhecido como modelo visco-elástico de *Maxwell*). Para tanto um grau de liberdade auxiliar de primeira ordem ( $z_2$ ) é utilizado para incluir o efeito da bucha elastomérica no modelo (rigidez  $k_c$ ), conforme ilustrado na Figura 4.



**Figura 4 – Modelo com Amortecedor Coxinizado**

Considerando que as forças do amortecedor e do coxim na ligação são idênticas ( $-F_c = F_{kc}$ ), o modelo vertical simplificado passa a ter também dois graus de liberdade descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_1 + k(z_1 - u) + k_c(z_1 - z_2) &= F \\ c(\dot{z}_2 - \dot{u}) - k_c(z_1 - z_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ou representando na forma matricial para dois graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k+k_c) & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Note que o sistema é acoplado com a segunda equação diferencial de primeira ordem.

## 6. MODELO VERTICAL 2GL COM EXCITAÇÃO NA BASE

O modelo do sistema veicular com 2 GL é feita com um corpo suspenso de massa  $m_1$  e outro corpo intermediário (pneu ou truque) com massa  $m_2$ , formando dois grau de liberdade  $z_1$  e  $z_2$ , conforme ilustrado na Figura 5. Foi considerada adicionalmente a amplitude das irregularidades do pavimento como uma função periódica de posição  $u(x) = u_0 \operatorname{sen}(\omega x)$ . Neste caso os movimentos verticais dos corpos do sistema ( $z_1$  e  $z_2$ ) ficam mutuamente dependentes devido à ligação da suspensão secundária ( $k_1$  e  $c_1$ ) e ocorrem os modos de movimento acoplados.

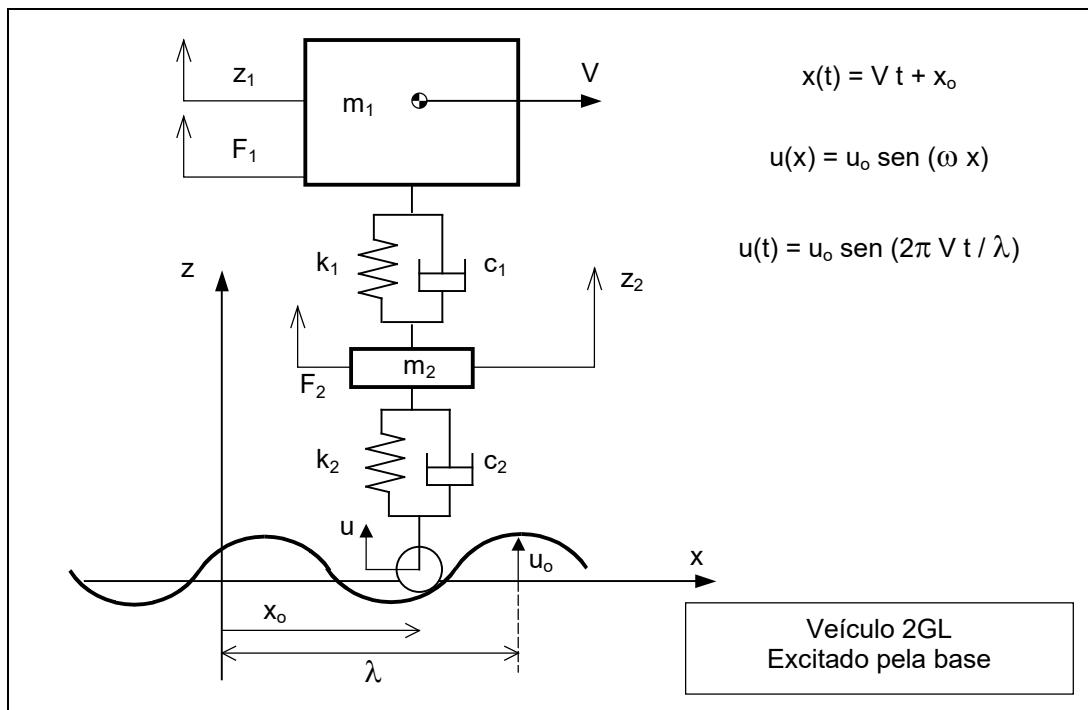


Figura 5 – Modelo com dois graus de liberdade

## DINÂMICA VEÍCULAR

Neste caso o pneu foi considerado como corpo rígido rolante (disco) de massa desprezível que acompanha as irregularidades da pista ( $\mathbf{u}_{(x)}$ ) e sua elasticidade representada por  $k_2$  com dissipação linear  $c_2$ . O sistema de equações diferenciais do sistema com dois corpos (com massas  $m_1$  e  $m_2$ ) e dois graus de liberdade ( $z_1$  e  $z_2$ ) com excitação pela base com amplitude ( $\mathbf{u}_0$ ) é descrito por:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2 (z_2 - u(t)) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= F_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

### 6.1. Resolução do Sistema com 2GL

Considere o veículo modelado conforme ilustrado na Figura 5, sem amortecimento e sem excitação externa, com as características descritas na Tabela 1. Um dos possíveis movimentos oscilatórios naturais não amortecido do sistema homogêneo com frequência modal  $\omega$  livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= Z_1 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad z_2(t) = Z_2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{z}_1(t) &= -\omega^2 Z_1 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2(t) = -\omega^2 Z_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicando este valores na matriz dinâmica do sistema homogêneo não amortecido, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (k_1 - m_1 \omega^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

## DINÂMICA VEÍCULAR

A solução do sistema de equações é obtido pelo determinante da matriz do sistema. Utilizando os valores numéricos da Tabela 1, obtém-se:

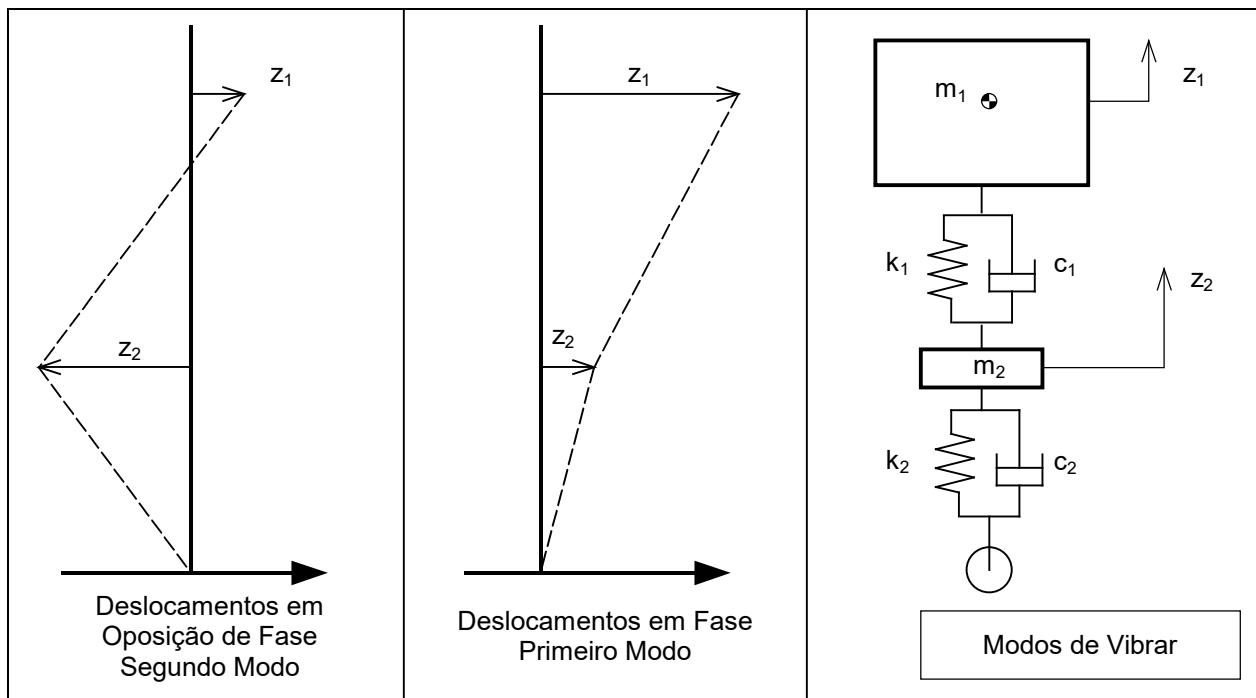
$$\begin{bmatrix} (676 - 1415\omega^2) & -68 \\ -68 & (744 - 185\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

com polinômio característico em  $\omega^4$  obtido do determinante da matriz do sistema:  $261775(\omega^2)^2 - 1177820\omega^2 + 498320 = 0$ , de onde se obtêm-se as raízes que correspondem as frequências naturais:  $\omega_1 = 6.6042$  rad/s ( $f_1 = 1.05$  Hz) e  $\omega_2 = 63.451$  rad/s ( $f_2 = 10.1$  Hz).

**Tabela 1 – Características do Veículo**

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa total do veículo ( $m_1$ )	1415 kg	total
Massa total da suspensão ( $m_2$ )	185 kg	total
Rigidez da mola da suspensão ( $k_1$ )	68.0 kN/m	conjunto
Rigidez do pneu ( $k_2$ )	676.0 kN/m	conjunto

Utilizando cada frequência natural obtida:  $\omega_1 = 6.6042$  rad/s e  $\omega_2 = 63.451$  rad/s, em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo:  $(676 - 1415\omega_1^2) \cdot Z_1^1 - 68 \cdot Z_2^1 = 0$ ), determina-se cada modo de vibrar (Modo #1:  $[0.99 ; 0.10]^T$  em fase) e (Modo #2:  $[0.01 ; -0.99]^T$  fora de fase), cujas amplitudes normalizadas estão representadas na Figura 6.



**Figura 6 – Modos de Vibrar**

## 6.2. Resolução do Sistema Amortecido com Excitação pela Base

Considere novamente o modelo vertical de um quarto de carro, com dois grau de liberdade  $z_1$  e  $z_2$ , conforme mostrado na Figura 5. Neste caso os movimentos verticais dos corpos do sistema ( $z_1$  e  $z_2$ ) ficam mutuamente dependentes devido à ligação da suspensão secundária ( $k_1$  e  $c_1$ ) e ocorrem os modos de movimento acoplados. Foi considerada a irregularidade vertical do pavimento como uma função periódica  $u(t) = u_0 \cdot \text{sen} \omega t$  com amplitude  $u_0$ . As equações de movimento obtidas são:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) = F_1(t) \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2 (z_2 - u(t)) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) = F_2(t) \end{cases} \quad (12)$$

isolando as ações externas do pavimento e considerando o sistema homogêneo, obtêm-se

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_1 z_1 - c_1 \dot{z}_2 - k_1 z_2 = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + (c_2 + c_1) \dot{z}_2 + (k_2 + k_1) z_2 - c_1 \dot{z}_1 - k_1 z_1 = c_2 \dot{u}(t) + k_2 u(t) \end{cases} \quad (13)$$

Fazendo a transformada de *Laplace* das equações no domínio  $s$  e assumindo condições iniciais nulas (*Ogata*, 1992) obtém-se:

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] Z_1(s) - [c_1 s + k_1] Z_2(s) &= 0 \\ [m_2 s^2 + (c_2 + c_1) s + (k_2 + k_1)] Z_2(s) - [c_1 s + k_1] Z_1(s) &= [c_2 s + k_2] U(s) \end{aligned} \quad (14)$$

Pode-se obter as seguintes equações algébricas polinomiais, com algumas manipulações algébricas isolando  $Z_2(s)$  da primeira expressão e aplicando na segunda expressão, obtendo o polinômio correspondente ao deslocamento do chassis  $Z_1(s)$  em função da amplitude da excitação da base  $U(s)$ :

$$Z_2(s) = \frac{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]}{[c_1 s + k_1]} Z_1(s) \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{[m_2 s^2 + (c_2 + c_1) s + (k_2 + k_1)] \cdot [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] - [c_1 s + k_1]^2}{[c_1 s + k_1]} \right\} Z_1(s) = [c_2 s + k_2] U(s) \quad (16)$$

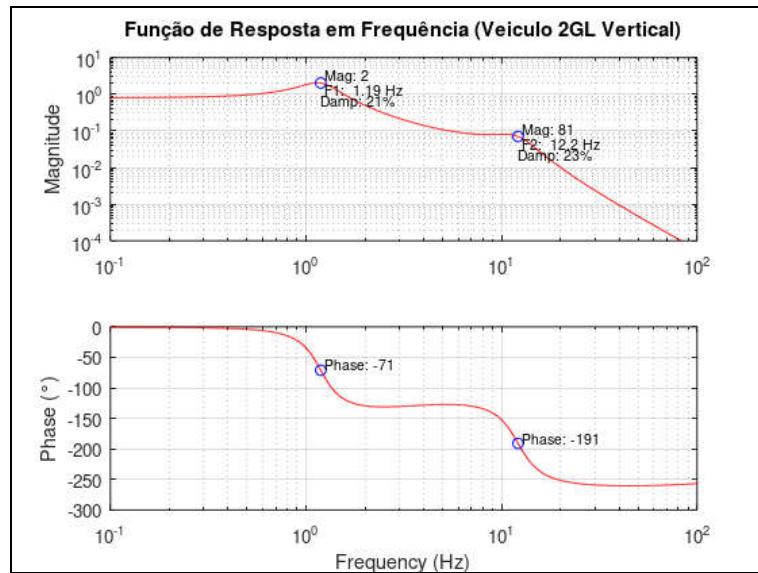
Finalmente identificando a função de transferência que correlaciona o comportamento do deslocamento do chassis  $Z_1(s)$  em função da amplitude da excitação da base  $U(s)$ :

$$\boxed{\frac{Z_1(s)}{U(s)} = \frac{[c_2 s + k_2] \cdot [c_1 s + k_1]}{\{[m_2 s^2 + (c_2 + c_1) s + (k_2 + k_1)] \cdot [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] + [c_1 s + k_1]^2\}}} \quad (17)$$

que é a função de resposta em frequência ( $s$ ) da magnitude oscilação do deslocamento vertical do chassis ( $Z_1$ ) em função da magnitude da entrada  $U(s)$  correspondendo à amplitude das irregularidades.

Exemplo típico de Resposta em Frequência da magnitude de oscilação do chassi desse modelo é apresentado na Figura 7.

## DINÂMICA VEÍCULAR



**Figura 7 – Função de Resposta em Frequência (2GL Vertical)**

De maneira similar pode-se obter a função de resposta em frequência para a suspensão ( $Z_2$ ).

Os códigos típicos na plataforma *Octave* ou *MatLab* são apresentados a seguir:

```
% Modelo Vertical 2GL com excitação pela base – Função de Transferência de Deslocamento Vertical

% Polinômios
A=[m1 c1 k1];
B=[m2 (c1+c2) (k1+k2)];
C=[0 c1 k1];
D=[0 c2 k2];

% Função e Transferência
num = conv(C,D);
den = (conv(A,B) - conv(C,C));
G = tf(num,den);
[MAG,PHASE,W] = bode(G);
F = W/(2*pi); % Hz

% Figuras
figure(2), subplot(211),
loglog(F,MAG,'r'),
title('Função de Resposta em Frequência (2GL Vertical)'),
ylabel('Magnitude'), grid,
subplot(212),
semilogx(F,PHASE,'r'),
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Phase (°)'), grid,
```

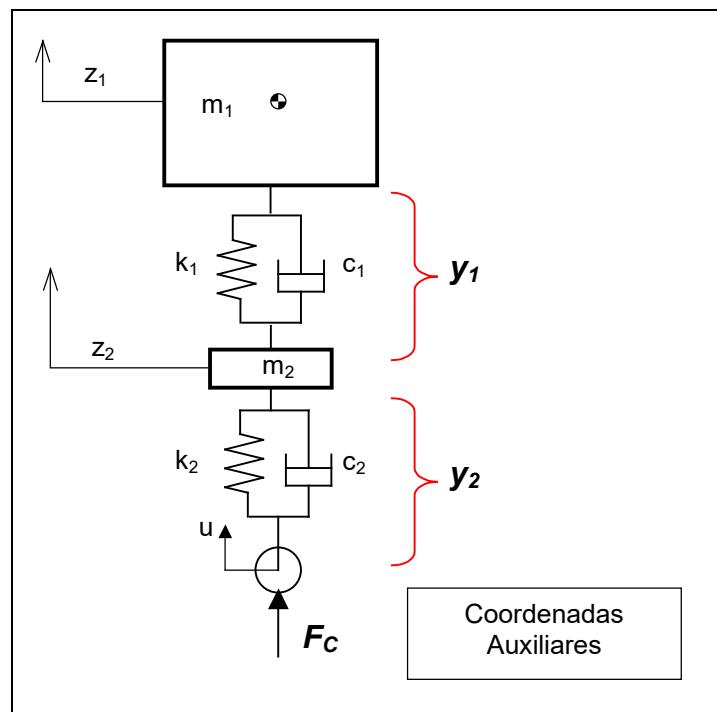
### 6.3. Determinação da Força de Contato

Se for necessário obter a resposta da força de contato  $F_C$  entre o pneu e a pista, ou o curso da suspensão, é possível criar as coordenadas auxiliares ( $y_1$  e  $y_2$ ) correspondente ao curso da suspensão do veículo e a deformação do pneu respectivamente:

$$y_1 = z_1 - z_2 \quad \text{e} \quad y_2 = z_2 - u(t) \quad (18)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{z}_1 - \dot{z}_2 \quad ; \quad \ddot{z}_1 = \ddot{y}_1 + \ddot{z}_2 \quad \text{e} \quad \ddot{z}_1 = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}(t) \quad (19)$$

$$z_2 = y_2 + u(t) \quad ; \quad \dot{z}_2 = \dot{y}_2 + \dot{u}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{z}_2 = \ddot{y}_2 + \ddot{u}(t) \quad (20)$$



**Figura 8 – Coordenadas Auxiliares**

Desta forma, reescrevendo o sistema de equações expresso em  $z_1$  e  $z_2$ , utilizando as coordenadas auxiliares ( $y_1$  e  $y_2$ ) obtidas acima, obtém-se substituindo:

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1 (z_1 - z_2) &= 0 \\ m_1 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{z}_2 + c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) + k_2 (z_2 - u(t)) - c_1 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 (z_1 - z_2) &= 0 \\ m_2 (\ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - c_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente incluindo a equação da forças de contato  $\mathbf{F}_C$  entre o pneu e a pista obtém-se:

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= 0 \\ m_2 (\ddot{y}_2 + \ddot{u}) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - c_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 &= 0 \\ c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= F_C \end{aligned} \quad (23)$$

Tomando as transformadas de *Laplace* das três equações obtidas resulta em:

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] Y_1(s) + [m_1 s^2] Y_2(s) &= (-m_1 s^2) U(s) \\ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] Y_2(s) - [c_1 s + k_1] Y_1(s) &= (-m_2 s^2) U(s) \\ [c_2 s + k_2] Y_2(s) &= F_C(s) \end{aligned} \quad (24)$$

Fazendo as devidas substituições nas expressões anteriores (isolando  $Y_1(s)$  na primeira expressão e utilizando na segunda expressão), obtém-se  $Y_2(s)$  em função da amplitude da irregularidade  $U(s)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{(-m_1 s^2) U(s) - [m_1 s^2] Y_2(s)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \\ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] Y_2(s) - [c_1 s + k_1] \frac{(-m_1 s^2) U(s) - [m_1 s^2] Y_2(s)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} &= (-m_2 s^2) U(s) \\ \left\{ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + \frac{[c_1 s + k_1][m_1 s^2]}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\} Y_2(s) &= \left\{ (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] \frac{(-m_1 s^2)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\} U(s) \end{aligned} \quad (25)$$

Rearranjando a expressão obtida e invertendo, obtém-se  $Y_2$  em função de  $U(s)$ :

$$U(s) = \frac{\left\{ [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + \frac{[c_1 s + k_1][m_1 s^2]}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\} Y_2(s)}{\left\{ (-m_2 s^2) + \frac{[c_1 s + k_1](-m_1 s^2)}{[m_1 s^2 + c_1 s + k_1]} \right\}} \quad (26)$$

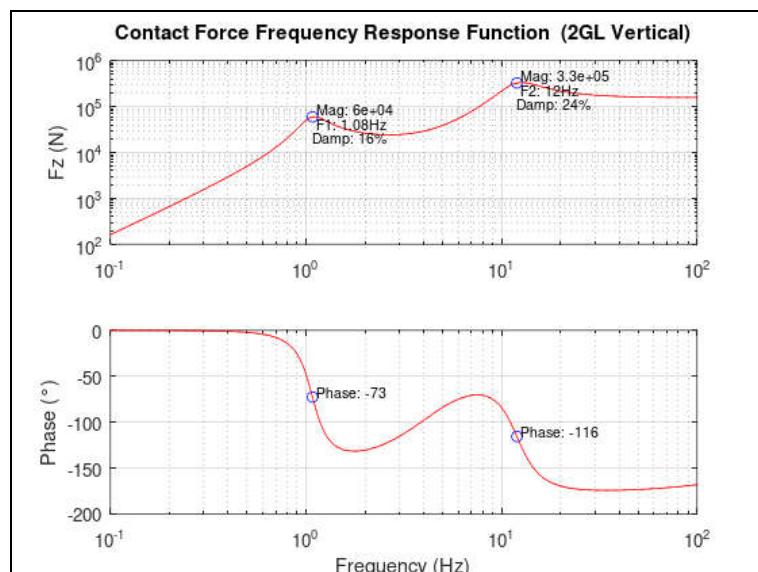
$$U(s) = \frac{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1][m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1][m_1 s^2] \right\} Y_2(s)}{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1](-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1](-m_1 s^2) \right\}} \quad (26)$$

$$Y_2(s) = \frac{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1](-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1](-m_1 s^2) \right\}}{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1][m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1][m_1 s^2] \right\}} U(s) \quad (27)$$

Utilizando o resultado de  $Y_2$  na terceira expressão, obtém-se a função de transferência da forças de contato  $F_C$  entre o pneu e a pista em função da amplitude da irregularidade da pista  $U(s)$ :

$$\frac{F_C(s)}{U(s)} = \frac{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] \cdot (-m_2 s^2) + [c_1 s + k_1] \cdot (-m_1 s^2) \right\} \cdot [c_2 s + k_2]}{\left\{ [m_1 s^2 + c_1 s + k_1] \cdot [m_2 s^2 + c_2 s + k_2] + [c_1 s + k_1] \cdot [m_1 s^2] \right\}} \quad (28)$$

Exemplo típico de Resposta em Frequência da magnitude da força de contato da roda com o solo  $F_C$  é apresentado na Figura 9.



**Figura 9 – Magnitude da Força Vertical na Roda**

## DINÂMICA VEÍCULAR

Os códigos típicos na plataforma *Octave* ou *MatLab* são apresentados a seguir:

```
% Modelo Vertical 2GL com excitação pela base – Função de Transferência de Forças de Contato

% Gera Polinômios
A=[m1 c1 k1];
B=[m2 c2 k2];
C=[-m1 0 0];
D=[0 c1 k1];
E=[-m2 0 0];
F=[0 c2 k2];
G=[m1 0 0];

AB = conv(A,B);
EA = conv(E,A);
CD = conv(C,D);
GD = conv(G,D);

% Monta Função de Transferência
num = conv(F,(EA+CD));
den = (AB+GD);

G = tf(num,den);          % Octave
[MAG,PHASE,W] = bode(G); %octave
F = W/(2*pi);            % Hz

% Figuras
figure(2),subplot(211),
loglog(F,MAG,'r'),
title(' Vehicle Frequency Response Function (2GL Vertical Base Excitation)'),
ylabel('Magnitude'),grid,

subplot(212),
semilogx(F,PHASE,'r'),
xlabel('Frequency (Hz)'),ylabel('Phase (°)'),grid,
```

## 6.4. Resolução em Espaço de Estados com Excitação pela Base

A solução analítica do sistema vertical com 1 grau de liberdade amortecido e excitado pela base foi apresentada nas Notas de Aula 1. Considerando agora a descrição do sistema vertical amortecido com 2 graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 5, descrito pelo vetor de espaço de estados  $\{x\} = [z_1 \ z_2 \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2]^T$  e com excitação pela base:  $\{u\} = [u \ \dot{u}]^T$ , a representação matricial do sistema de equações para o sistema vertical com dois graus de liberdade, é dada por:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [\mathbf{A}] \{x\} + [\mathbf{B}] \{u\} \\ \{y\} &= [\mathbf{C}] \{x\} + [\mathbf{D}] \{u\}\end{aligned}\quad (29)$$

onde a primeira equação é chamada de equação de estado (*state equation*), que consiste em uma combinação linear (matriz  $[\mathbf{A}]$ ) dos estados ( $\{x\}$ ) somada com uma combinação linear (matriz  $[\mathbf{B}]$ ) das entradas ( $\{u\}$ ). A segunda equação é chamada de equação de saída (*output equation*), que consiste em uma combinação linear (matriz  $[\mathbf{C}]$ ) dos estados ( $\{x\}$ ) somada com uma combinação linear (matriz  $[\mathbf{D}]$ ) das entradas ( $\{u\}$ ). A matriz  $[\mathbf{A}]$  representa o sistema mecânico e a matriz  $[\mathbf{B}]$  descreve a proporção da excitação externa da irregularidade do pavimento  $\{u\}$ . Para o sistema homogêneo (sem força externo), as matrizes são descritas como:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & k_1/m_1 & -c_1/m_1 & c_1/m_1 \\ k_1/m_2 & (k_1+k_2)/m_2 & c_1/m_2 & -(c_1+c_2)/m_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_2/m_2 & c_2/m_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Da resolução do auto problema da matriz  $[\mathbf{A}]$  é possível obter os auto-valores, que são as frequências naturais dos modos de vibrar e os auto-vetores que descrevem a forma de movimentos dos modos. Utilizando-se a transformada de *Laplace* no domínio  $s$ , as duas equações acima podem ser rescritas da forma:

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned} s\{X\}_{(s)} &= [A]\{X\}_{(s)} + [B]\{U\}_{(s)} \\ \{Y\}_{(s)} &= [C]\{X\}_{(s)} + [D]\{U\}_{(s)} \end{aligned} \quad (31)$$

realizando algumas manipulações obtém-se a relação entre a saída  $y$  e a entrada  $u$ .

$$\begin{aligned} (s[I] - [A])\{X\}_{(s)} &= [B]\{U\}_{(s)} \\ \{X\}_{(s)} &= (s[I] - [A])^{-1}[B]\{U\}_{(s)} \\ \{Y\}_{(s)} &= [C](s[I] - [A])^{-1}[B]\{U\}_{(s)} + [D]\{U\}_{(s)} \end{aligned} \quad (32)$$

Deseja-se conhecer a resposta do sistema para uma determinada entrada. Então, é conveniente expressar a função  $\{G_{(s)}\}$  que é a relação entre a saída e a entrada, obtém-se:

$$\boxed{\{G\}_{(s)} = \frac{\{Y\}_{(s)}}{\{U\}_{(s)}} = [C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D]} \quad (33)$$

Observa-se na Figura 10 os valores de receptância em função da frequência onde estão quantificadas as freqüências naturais ( $\omega_{n1} = 1.05$  e  $\omega_{n2} = 10.3$  Hz), e os fatores de amortecimento de cada modo ( $\zeta_1 = 15\%$  e  $\zeta_2 = 21\%$ ) além do gráfico da fase em graus.

Para obter a Resposta em Frequência das amplitudes das **acelerações** do chassis e da suspensão, que são descritos por:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_1 z_1 - c_1 \dot{z}_2 - k_1 z_2 = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + (c_2 + c_1) \dot{z}_2 + (k_2 + k_1) z_2 - c_1 \dot{z}_1 - k_1 z_1 = c_2 \dot{u}(t) + k_2 u(t) \end{cases} \quad (34)$$

é possível criar o vetor de saída na forma  $\{y\} = [\ddot{z}_1 \quad \ddot{z}_2]^T$  e as as matrizes  $[C]$  e  $[D]$  da equação  $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$  descrita pelo vetor de espaço de estados  $\{x\} = [z_1 \quad z_2 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2]^T$  e com excitação pela base:  $\{u\} = [u \quad \dot{u}]^T$ , que resultam em:

## DINÂMICA VEÍCULAR

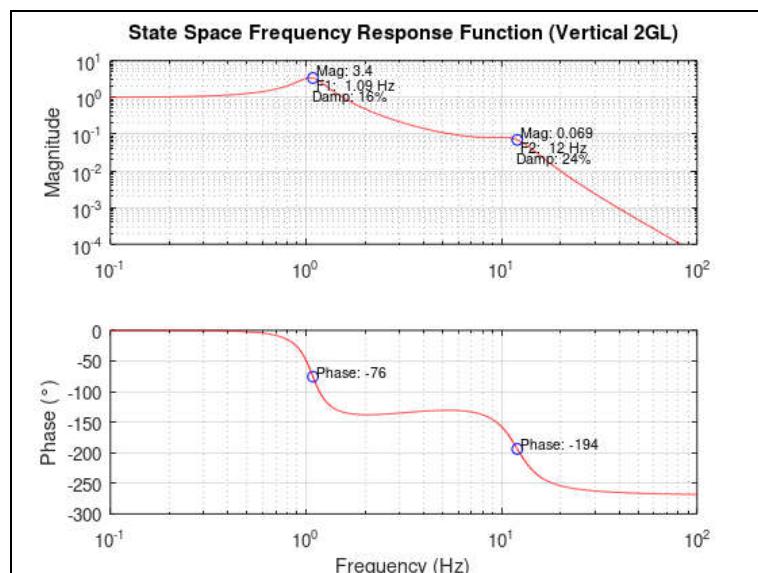
$$[C] = \begin{bmatrix} k_1/m_1 & -k_1/m_1 & c_1/m_1 & -c_1/m_1 \\ -k_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & -c_1/m_2 & -(c_1+c_2)/m_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2/m_2 & c_2/m_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Para obter a Resposta em Frequência da amplitude da **força da suspensão e força de contato** entre o pneu e a pista, que são descritos por:

$$F_{susp} = k_1(z_1 - z_2) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \quad \text{e} \quad F_{pneu} = k_2(z_2 - u(t)) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}(t)) \quad (36)$$

é possível criar o vetor de saída na forma  $\{y\} = [F_{susp} \quad F_{pneu}]^T$  e as matrizes  $[C]$  e  $[D]$  da equação  $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$  descrita pelo vetor de espaço de estados  $\{x\} = [z_1 \quad z_2 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2]^T$  e com excitação pela base:  $\{u\} = [u \quad \dot{u}]^T$ , que resultam em:

$$[C] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & c_1 & -c_1 \\ 0 & k_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_2 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$



**Figura 10 – Modelo Espaço Estados (Receptância e Fase)**

## DINÂMICA VEÍCULAR

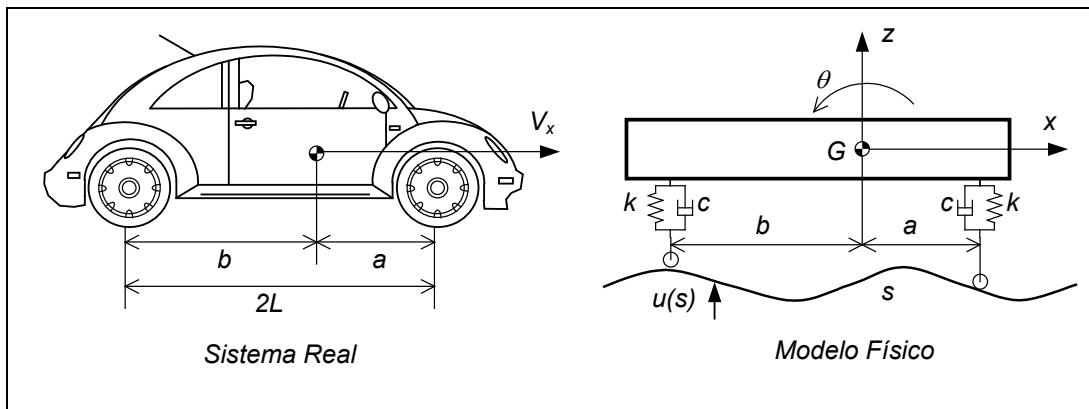
Os códigos típicos na plataforma *Octave* ou *MatLab* são apresentados a seguir:

```
% Sistema 2GL na forma de espaço de estados x = [x1 x2 xd1 xd2]' entrada u = [u ud]'  
% Equação  xd = [A]x + [B]u  
%           y = [C]x + [D]u  
  
A=[ 0         0         1         0  
     0         0         0         1  
 -k1/m1    k1/m1   -c1/m1    c1/m1  
 k1/m2   -(k1+k2)/m2  c1/m2  -(c1+c2)/m2];  
C=[1 0 0 0]; % Para X1/U1  
D=[0 0];  
  
SYS = ss(A,B,C,D); % Matrizes em Espaço de Estados  
TF = tf(SYS); % Função de Transferência  
  
[MAG, PHASE, W] = bode(TF(1,1)); % Usar TF(1,1) para o primeiro grau de liberdade  
F = W/(2*pi); % Hz  
  
% Figura  
figure(3), subplot(211),  
loglog(F,MAG,'r'),  
title('State Space Frequency Response Function (Vertical 2GL)'),  
ylabel('Magnitude'), grid,  
  
subplot(212),  
semilogx(F,PHASE,'r'),  
xlabel('Frequency (Hz)'), ylabel('Phase (°)'), grid,
```

## 7. MODELO SAGITAL

O modelo físico de representação simplificada de um veículo no plano lateral (sagital), pode ser elaborado considerando um corpo rígido de massa  $\mathbf{m}$  e momento de inércia  $\mathbf{J}_{Gy}$ , interligado a elementos elásticos (suspensão) de conexão com o solo irregular ( $\mathbf{u}(s)$ ), conforme apresentado na Figura 11. Para problemas no plano ( $Oxz$ ) três coordenadas independentes são suficientes para descrever os movimentos no plano sagital:

- Movimento de translação horizontal ( $x$ );
- Movimento de translação vertical ( $z$ );
- Movimento angular de arfagem ( $\theta$ );



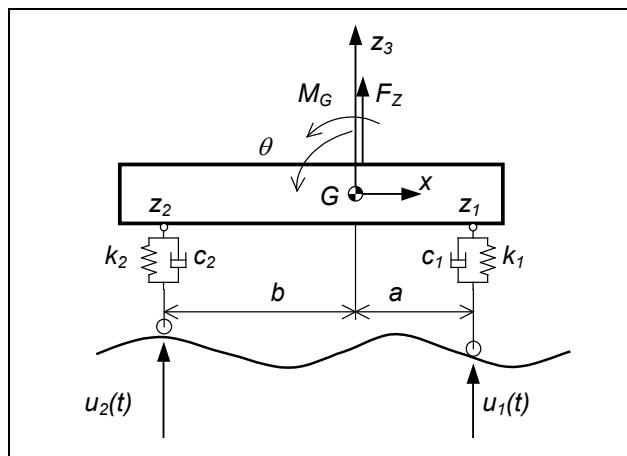
**Figura 11 – Modelo Físico do Sistema Real**

Considerando que o veículo tenha movimento retilíneo e uniforme com velocidade translacional constante  $\vec{V} = V_x \vec{i} = \text{cte}$ , pode-se adotar o referencial móvel  $Gxz$  como inercial, a partir do qual, o movimento vertical  $z$  o ângulo  $\theta$  são descrito. Neste caso resultam apenas dois graus de liberdade necessários e suficientes para descrição dos movimentos ( $z$  e  $\theta$ ). A irregularidade do pavimento descrita pela função  $\mathbf{u}(s)$  é considerada como uma entrada ao sistema em função da posição  $s$  do veículo ao longo do percurso. Para corpo com velocidade constante, obtém-se da cinemática a expressão  $s = s_0 + V t$ , que permite correlacionar a irregularidade  $\mathbf{u}(s)$  e o tempo  $t$ .

## 7.1. Equacionamento

Tomando a representação física do veículo, conforme mostrado na Figura 12, descrito por um modelo matemático com dois graus de liberdade (translacional e rotacional) pode-se descrever as seguintes equações diferenciais de movimento obtidas pelo método *Newton-Euler* a partir do teorema da resultante (**TR**) e teorema da quantidade de movimento angular (**TQMA**) aplicado em relação ao pólo no centro de massa **G** e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (**DFCL**), obtém-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_3 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_1(z_1 - u_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_2(z_2 - u_2) &= F_z \\ J_{Gy}\ddot{\theta} + c_1(\dot{z}_1 - \dot{u}_1)a + k_1(z_1 - u_1)a - c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}_2)b - k_2(z_2 - u_2)b &= M_G \end{aligned} \quad (38)$$



**Figura 12 – Modelo Físico com 2 GL**

Utilizando as relações cinemáticas:  $z_1 = z_3 + a\theta$  e  $z_2 = z_3 - b\theta$  para ângulos pequenos, obtém-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_3 &= -c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) - c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) - k_1(z_3 + a\theta - u_1) - k_2(z_3 - b\theta - u_2) + F_z \\ J_{Gy}\ddot{\theta} &= -c_1(\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1)a + c_2(\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2)b - k_1(z_3 + a\theta - u_1)a + k_2(z_3 - b\theta - u_2)b + M_G \end{aligned} \quad (39)$$

## DINÂMICA VEÍCULAR

ou rearranjando as expressões colocando à esquerda os termos função dos graus de liberdade e a direita as ações externas devido à pista:

$$m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = c_1 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 + k_1 u_1 + k_2 u_2 + F \quad (40)$$

$$\begin{aligned} J_{Gy} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 = \dots \\ c_1 a \dot{u}_1 + c_2 b \dot{u}_2 + k_1 a u_1 + k_2 b u_2 + M_G \end{aligned} \quad (41)$$

Tomando o sistema homogêneo ( $F_z = 0$  e  $M_G = 0$ ) e sem excitação pela base (pista reta  $u_1 = u_2 = \text{cte}$ ), resulta em:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = 0 \\ J_{Gy} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Expressando as equações na forma matricial utilizando o vetor de coordenadas  $\{z_3 \ \theta\}^T$ :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_3 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & (c_1 a - c_2 b) \\ (c_1 a - c_2 b) & (c_1 a^2 + c_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Note que as equações são dependentes o que caracteriza o acoplamento de movimentos. Caso o sistema seja simétrico ( $k_1 a = k_2 b$  e  $c_1 a = c_2 b$ ) as equações tornam-se independentes definindo movimento distintos com frequências próprias. Expressando as equações na forma matricial compacta, para  $\{x\}^T = \{z_3 \ \theta\}^T$  obtém-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (44)$$

## 7.2. Resolução do Sistema de Equações Diferenciais

Verifica-se de imediato que as equações de movimento não são independentes, o que acarreta movimento acoplado, portanto o sistema deve ser tratado como um todo. Tomando o sistema homogêneo não amortecido e assumindo que um dos movimentos acoplados do sistema tenha a frequência de vibração acoplada ( $\omega$ ) para os dois graus de liberdade, obtém-se movimento periódico com as seguintes proporções:

$$z(t) = Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (45)$$

Tomando a segunda derivada do movimento periódico obtém-se:

$$\ddot{z}(t) = \omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}(t) = \omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (46)$$

e substituindo as duas expressões na equação diferencial do sistema homogêneo e não amortecido, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \left[ \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \right] + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \left[ \cos(\omega t + \phi) \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

colocando em evidencia o vetor de magnitudes  $\{Z \ \Theta\}^T$  e simplificando, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m\omega^2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2 - J_{Gy}\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Observe novamente que a matriz do sistema é cheia revelando o acoplamento entre os movimentos do sistema. Note ainda que se  $k_1a = k_2b$  (veículo simétrico) a matriz se torna diagonal resultando em sistema desacoplado e, portanto tendo movimentos vertical e angular distintos.

## DINÂMICA VEÍCULAR

A resolução do sistema acoplado descrito de forma matricial pode ser obtida pelas raízes do polinômio característico do determinante da matriz do sistema (auto-problema). Calculando o determinante de ordem ( $\omega^2$ ) resulta em:

$$(k_1 + k_2 - m\omega^2)(k_1 a^2 + k_2 b^2 - J_{Gy}\omega^2) - (k_1 a - k_2 b)(k_1 a - k_2 b) = 0 \quad (49)$$

$$(m J_{Gy})(\omega^2)^2 - \{m(k_1 a^2 + k_2 b^2) + J_{Gy}(k_1 + k_2)\} \omega^2 + (k_1^2 a^2 - 2k_1 k_2 ab + k_2^2 b^2) = 0 \quad (50)$$

O polinômio característico obtido é de segunda ordem em ( $\omega^2$ ) possuindo duas raízes. As raízes ou auto-valores correspondem às duas freqüências naturais do sistema com dois graus de liberdade e são obtidas pela fórmula de *Bhaskara*:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m(k_1 a^2 + k_2 b^2) + J_G(k_1 + k_2)}{m J_G} \right\} \\ &\quad \mp \frac{1}{2} \left[ \left\{ \frac{m(k_1 a^2 + k_2 b^2) + J_{Gy}(k_1 + k_2)}{m J_{Gy}} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1^2 a^2 - 2k_1 k_2 ab + k_2^2 b^2)}{m J_{Gy}} \right\} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (51)$$

Para cada raiz do polinômio característico (auto-valores:  $\omega_{1,2}$ ), um conjunto solução  $\{Z^1 \Theta^1\}^t$  será obtido (auto-vetores) correspondente a cada modo acoplado de movimento ou forma de vibrar.

Alternativamente, para um sistema homogêneo acoplado do tipo  $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$  descrito por:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

e utilizando novamente a solução periódica para um modo de vibração e aplicando no conjunto de equações do sistema:

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\ddot{z}(t) = \omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad \text{obtém-se:} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \phi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Eliminando o termo periódico ( $\cos(\omega t + \phi)$ ) e normalizando a primeira linha por  $m$  e a segunda linha por  $J_G$  resulta em:

$$-\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m & (k_1 a - k_2 b)/m \\ (k_1 a - k_2 b)/J_{Gy} & (k_1 a^2 + k_2 b^2)/J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

ou rearranjando:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m & (k_1 a - k_2 b)/m \\ (k_1 a - k_2 b)/J_{Gy} & (k_1 a^2 + k_2 b^2)/J_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} \quad (56)$$

que corresponde ao auto-problema típico descrito como  $[A]\{X\} = \{\lambda\}[I]\{X\}$  onde  $\{X\} = \{Z \quad \Theta\}^T$  e  $\lambda = \omega^2$ .

A matriz  $[A]$  do auto-problema pode ser resolvida com auxílio de programa numéricico (*Octave*, *Scilab* ou *Matlab*) utilizando o comando (*eig*) que determina os auto-valores ( $\lambda = \omega^2$ ) e os auto-vetores  $\{X\}$  que corresponde à proporção dos movimento de cada modo com frequência própria.

### 7.3. Comportamento Modal

O comportamento modal decorrente dos modos de vibrar não amortecidos identificados pelos auto-vetores  $[Z^1 \Theta^1; Z^2 \Theta^2]^T$ , tem a posição geométrica do centro instantâneo de rotação (CIR) do movimento acoplado (ver Figura 13), chamado de pólos  $A$  e  $B$ , definidos para cada auto-vetor determinados por:

$$\tan \Theta^1 = Z^1 / L_1 \quad \text{ou para ângulos pequenos} \quad L_1 \cong Z^1 / \Theta^1 \quad \text{e} \quad L_2 \cong Z^2 / \Theta^2 \quad (57)$$

Os movimentos modais para o sistema acoplado (veículo não simétrico com motor na dianteira) ocorrem com um pólo  $A$  à trás do veículo chamado de **Galope Traseiro** (cota  $L_1$  - *rear end bounce*) (em geral com frequência mais baixa  $\omega_1$ ) e outro  $B$  à frente chamado de **Arfagem Frontal** (cota  $L_2$  - *front end pitch*) (em geral com frequência mais alta  $\omega_2$ ), conforme estão ilustrados na Figura 13b.

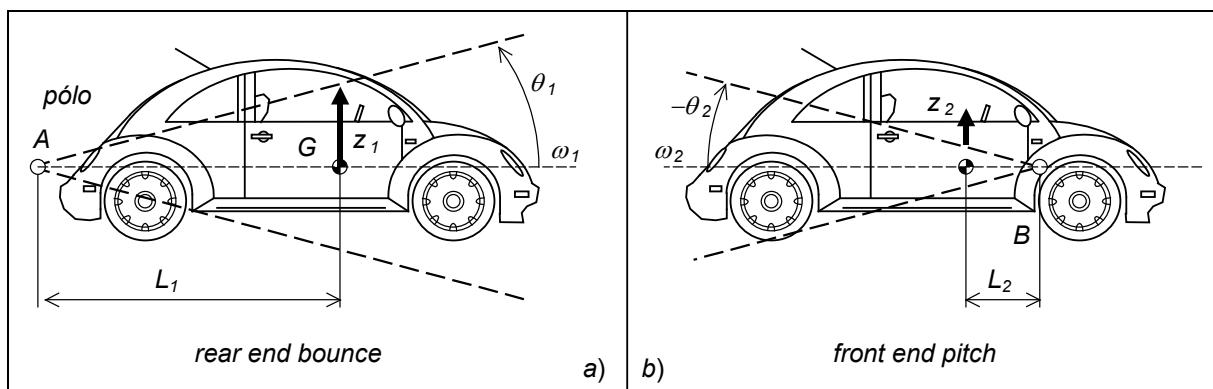
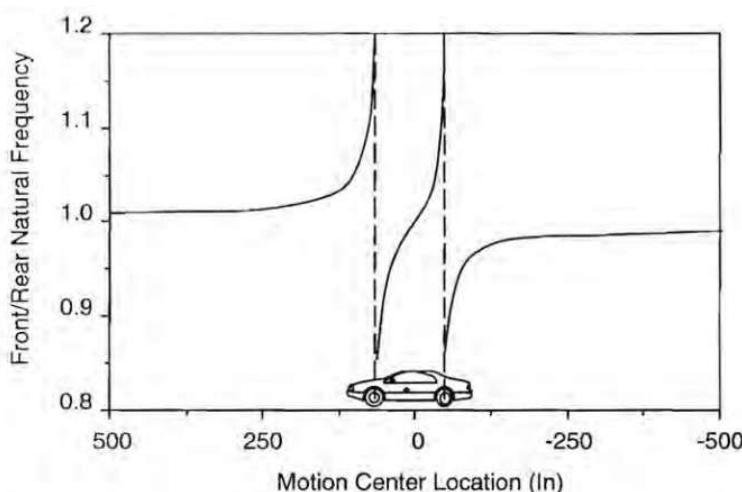


Figura 13 - Identificação dos Modos de Movimento Acoplados

Alguns analistas costumam observar que o movimento do primeiro modo em torno do pólo mais afastado do centro de massa (pólo  $A$  da Figura 13a com distância  $L_1$ ) a excursão vertical  $z_1$  do centro de massa  $G$  é relevante, sendo o movimento mais perceptível o de **translação vertical** (Galope Traseiro - *rear end bounce*).

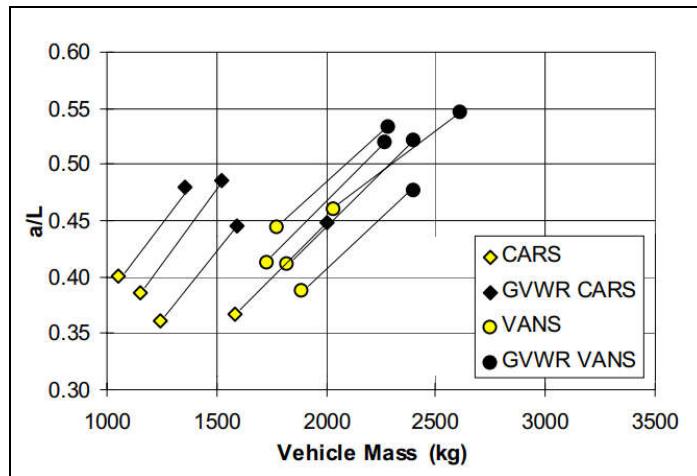
## DINÂMICA VEÍCULAR

Quando o movimento ocorre em torno do pólo mais próximo ao centro de massa (pólo  $B$  da Figura 13b com distância  $L_2$ ) tem o movimento vertical  $z_2$  pequeno sendo o movimento mais perceptível de **rotação angular** (Arfagem Frontal - *front end pitch*). Na verdade os movimentos ocorrem sempre acoplados (translação e rotação) enquanto  $k_1a \neq k_2b$ , mas com diferentes percepções em cada posição de observação. Adicionalmente, o incremento da carga no veículo (passageiros e cargas) e a consequente mudança da posição do centro de massa (cotas  $a$  e  $b$  da Figura 12) produz variação da posição dos pólos. Além disso a relação normalizada entre as frequências de movimento (vertical/angular) se alteram tanto quanto a posição do centro de massa e os pólos se movimentam, conforme mostrado na Figura 14.



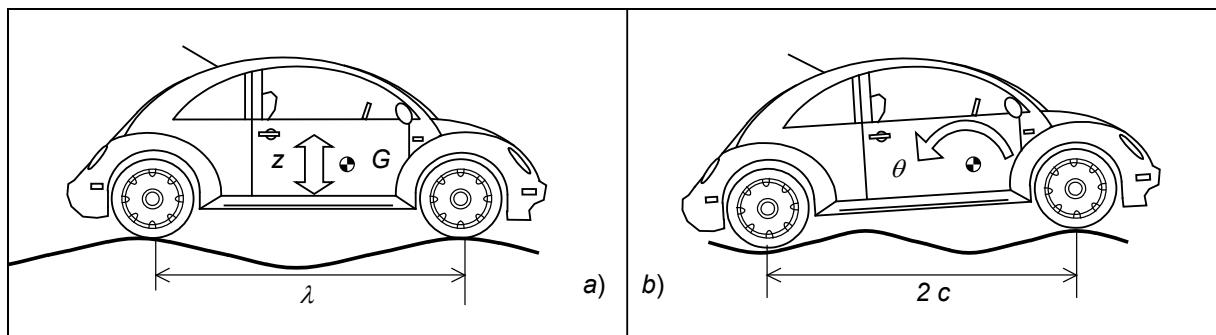
**Figura 14 - Passeio dos Pólos em relação a Razão de Frequências (fonte: Miliken)**

Note ainda que a posição do centro de massa varia em função do carregamento do veículo. Conforme pesquisa feita por Heydinger (1999) a relação entre a distância do CG ao eixo dianteiro ( $a$ , conforme mostrado na Figura 13) em função da distância entre eixo  $2L$  vai de 0,35 até 0,40 para o carro com o motorista até 0,45 ~ 0,48 para o veículo totalmente carregado (*GVWR*) conforme apresentado na Figura 15.



**Figura 15 – Posição do Centro de Massa do Veículo (Fonte: Heydinger 1999)**

Note ainda que o comprimento de onda das irregularidades da pista tem efeito relevante quanto ao movimento excitado. Para uma excitação harmônica com comprimento de onda  $\lambda = 2 c / 2^n$  (para  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$  etc.) conforme ilustrado na Figura 16a, o movimento excitado será predominantemente a translação vertical (*bounce*). Caso o comprimento de onda seja  $\lambda = 3 c / 2^n$  o movimento dominante será angular de arfagem (*pitch*) conforme ilustrado na Figura 16b.



**Figura 16 – Excitação pela Base (comprimento de onda)**

**Exemplo Numérico [2]:** Considere um veículo modelado conforme mostrado na Figura 12, com as características descritas na Tabela 2. Um dos movimentos oscilatórios possíveis, com frequência  $\omega$  livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas aplicando à matriz dinâmica do sistema resulta em:

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned}
 z(t) &= Z \cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \\
 \ddot{z}(t) &= -\omega^2 Z \cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta \cos(\omega t + \phi) \\
 \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m\omega^2) & (k_1 a - k_2 b) \\ (k_1 a - k_2 b) & (k_1 a^2 + k_2 b^2 - J_{Gy}\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{58}$$

e utilizando os respectivos valores numéricos da Tabela 2, resulta em:

$$\begin{bmatrix} (40000 - 1000\omega^2) & 15000 \\ 15000 & (67500 - 810\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{59}$$

com o polinômio característico obtido do determinante da matriz  $[A]$  do sistema:  $8.1(\omega^2)^2 - 999\omega^2 + 24750 = 0$ , obtêm-se as raízes que correspondem as frequências naturais:  $\omega_1 = 5.8593 \text{ rad/s}$  ( $f_1 = 0.9325 \text{ Hz}$ ) e  $\omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s}$  ( $f_2 = 1.5 \text{ Hz}$ ).

**Tabela 2 – Características do Veículo**

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo ( $m$ )	1000 kg	--
Momento de Inércia ( $J_{Gy}$ )	$810 \text{ kg m}^2$	Pólo G
Distância do eixo dianteiro ao CM ( $a$ )	1.0 metros	--
Distância do eixo traseiro ao CM ( $b$ )	1.5 metros	--
Rigidez da mola dianteira ( $k_1$ )	22.0 kN/m	conjunto
Rigidez da mola traseira ( $k_2$ )	22.0 kN/m	conjunto

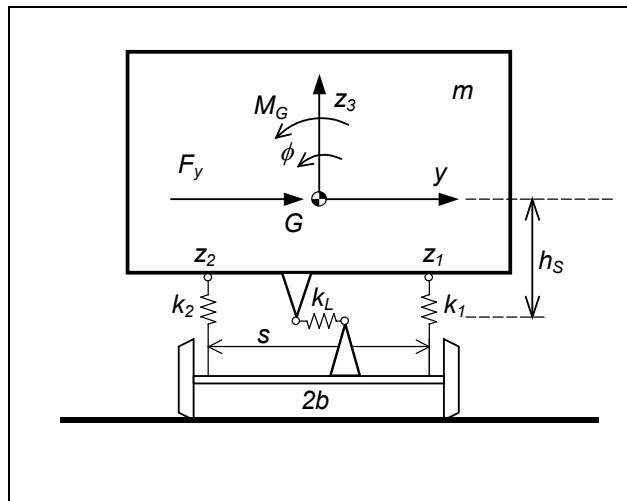
Utilizando as frequência naturais obtidas:  $\omega_1 = 5.8593$  e  $\omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s}$ , em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo:  $(40000 - 1000\omega_1^2) \cdot Z^1 + 15000 \cdot \Theta^1 = 0$  da eq. 24) determina-se as relações:  $L_1 = z^1 / \tan \theta^1 \cong Z^1 / \Theta^1$  e  $L_2 = z^2 / \tan \theta^2 \cong Z^2 / \Theta^2$ , que são as distâncias dos pólos  $B$  e  $A$  ao centro de massa, de cada modo de vibrar:  $L_1 = 0.3061$  e  $L_2 = -2.6461$  metros, conforme

identificado na Figura 13. Note que a utilização da outra linha da matriz do sistema resulta nos mesmas proporções.

Para conforto (*ride*) recomenda-se a menor frequência possível (movimento vertical suave atenuando as irregularidades –  $f_n \leq 1.3$  Hz e curso de suspensão de 152 mm) e a frequência vertical deve ser menor que 1.2 Hz vezes a frequência de arfagem (*Olley, 1930*).

## 8. MODELO FRONTAL

O modelo frontal do veículo com massa  $m$ , não amortecido com 2  $GL$ , conforme apresentado na Figura 17, permite avaliar o comportamento modal do movimento de rolagem/lateral inferior e superior, conforme a combinação dos movimentos  $y(t)$  e  $\phi(t)$ , apresentados na Figura 18.



**Figura 17 – Modelo Frontal**

Utilizando as relações cinemáticas:  $z_1 = b \cdot \phi$ ;  $z_2 = -b \cdot \phi$  e  $s = y + h_s \phi$ , o teorema da resultante (**TR**), o teorema da quantidade de movimento angular (**TQMA**) e o diagrama de forças sobre o corpo livre (**DFCL**), obtém-se as equações diferenciais para os movimentos dos graus de liberdade  $y(t)$  e  $\phi(t)$ :

$$m \ddot{y} = \sum F_y = F_{Mola} + F_y^{ext} = (-s \cdot k_L) + F_y = -(y + h_s \phi) \cdot k_L + F_y^{ext} \quad (60)$$

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$J_G \ddot{\phi} = \sum \bar{M}_G = -b \cdot (k_1 \cdot b\phi) - b \cdot (k_2 \cdot b\phi) - h_s \cdot [k_L \cdot (y + h_s\phi)] + M_G^{ext} \quad (61)$$

As equações de movimento para o sistema acoplado do tipo  $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$  com ( $k_1 = k_2 = k_V$ ) e  $x = \{y \ \phi\}^T$ , são descritas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_L & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_V b^2 + k_L h_s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y^{ext} \\ M_G^{ext} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Utilizando novamente a solução periódica para um modo de vibração e aplicando as derivadas no conjunto de equações do sistema homogêneo:

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \beta) \quad \text{e} \quad \phi(t) = \Phi \cos(\omega t + \beta) \quad \text{derivando 2 vezes:} \quad (63)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \cos(\omega t + \beta) \quad \text{e} \quad \ddot{\phi}(t) = -\omega^2 \Phi \cos(\omega t + \beta) \quad \text{obtém-se:} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \left[ -\omega^2 \cos(\omega t + \beta) \right] + \begin{bmatrix} k_L & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_V b^2 + k_L h_s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \left[ \cos(\omega t + \beta) \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Eliminando o termo periódico e normalizando a primeira linha por  $m$  e a segunda linha por  $J_G$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} k_L/m & (k_L h_s)/m \\ (k_L h_s)/J_G & (2k_V b^2 + k_L h_s^2)/J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} \quad (66)$$

que corresponde ao auto-problema típico descrito por  $[A]\{X\} = \lambda[I]\{X\}$  onde  $\{X\} = \{Y \ \Phi\}^T$  e  $\lambda = \omega^2$ . O determinante da matriz  $[A]$  do auto-problema, produz o polinômio característico que pode ser resolvida com auxílio de programa numérico (*Octave*, *Scilab* ou *Matlab*) utilizando o comando (*eig*) que calcula as raízes, correspondente aos auto-valores ( $\lambda = \omega^2$ ) e os auto-vetores  $\{X\}$  do sistema, que fornecem a proporção dos movimentos de cada modo com frequência própria.

### 8.1. Exemplo Numérico

Considere o modelo frontal de um veículo, conforme mostrado na Figura 17 e com as características descritas na Tabela 3. Um dos movimentos oscilatórios possíveis, com frequência  $\omega$  livre, pode ser obtido considerando as seguintes variações dos graus de liberdade e duas derivadas sucessivas aplicando à matriz dinâmica do sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} (k_L - m\omega^2) & (k_L h_s) \\ (k_L h_s) & (2k_V b^2 + k_L h_s^2 - J_G \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

e utilizando os respectivos valores numéricos da Tabela 3, resulta em:

$$\begin{bmatrix} (320000 - 1415\omega^2) & 128000 \\ 128000 & (89450 - 250\omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (68)$$

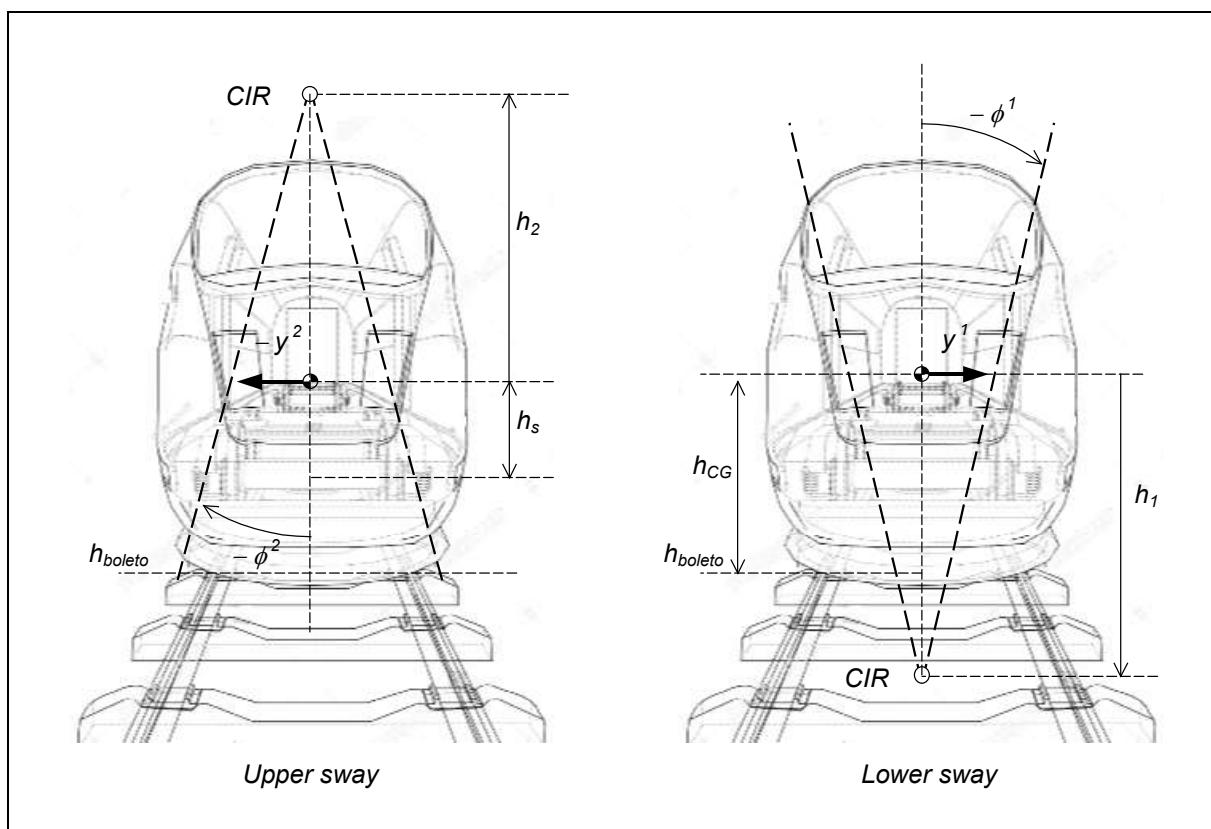
com o polinômio característico obtido do determinante da matriz  $[A]$  do sistema:  $0.353750(\omega^2)^2 - 206.571\omega^2 + 12240 = 0$ , obtém-se as raízes que correspondem as frequências naturais:  $\omega_1 = 8.168 \text{ rad/s}$  ( $f_1 = 1.3 \text{ Hz}$ ) e  $\omega_2 = 22.745 \text{ rad/s}$  ( $f_2 = 3.62 \text{ Hz}$ ).

**Tabela 3 – Características do Veículo**

CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo ( $m$ )	1415 kg	--
Momento de Inércia de Rolagem ( $J_{Gx}$ )	$250 \text{ kg m}^2$	Pólo G
Distância entre molas verticais ( $2b$ )	1.5 metros	--
Distância da mola lateral ao CM ( $h_s$ )	0.4 metros	--
Rigidez da mola vertical ( $k_V$ )	34.0 kN/m	2 molas
Rigidez da mola lateral ( $k_L$ )	320.0 kN/m	total

Utilizando as frequências naturais obtidas:  $\omega_1 = 8.168$  e  $\omega_2 = 22.745$  rad/s, em uma das linhas da matriz do sistema (por exemplo  $(320000 - 1415\omega_1^2) \cdot Y^1 + 118000 \cdot \Phi^1 = 0$  da eq. 45) determina-se as relações:  $h_1 = z^1 / \tan\theta^1 \cong Z^1 / \Phi^1$  e  $h_2 = z^2 / \tan\theta^2 \cong Z^2 / \Phi^2$ , que são as distâncias dos pólos **B** e **A** ao centro de massa, de cada modo de vibrar:  $L_1 = -0.568$  e  $L_2 = 0.331$  metros, conforme identificado na Figura 18. Note que utilizando a segunda expressão resulta nos mesmos valores.

Os modos de movimento rolagem frontal com centro inferior (*lower sway*) e superior (*upper sway*) estão apresentados na Figura 18.



**Figura 18 – Modos de Movimento de Rolagem/Lateral**

Na forma de espaço de estados, considerando  $x = \{y \quad \phi\}^T$  e o sistema homogêneo, considerando  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_y$ , e amortecedores  $\mathbf{c}_{y1} = \mathbf{c}_{y2} = \mathbf{c}_y$ , e amortecedor lateral  $\mathbf{c}_L$ , obtém-se a partir das equações do sistema:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + c_L \dot{y} + k_L y + c_L h_s \dot{\phi} + k_L h_s \phi &= 0 \\ J_G \ddot{\phi} + [2b^2 c_y + h_s^2 c_L] \dot{\phi} + [2b^2 k_y + h_s^2 k_L] \phi + (h_s c_L) \dot{y} + (h_s k_L) y &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

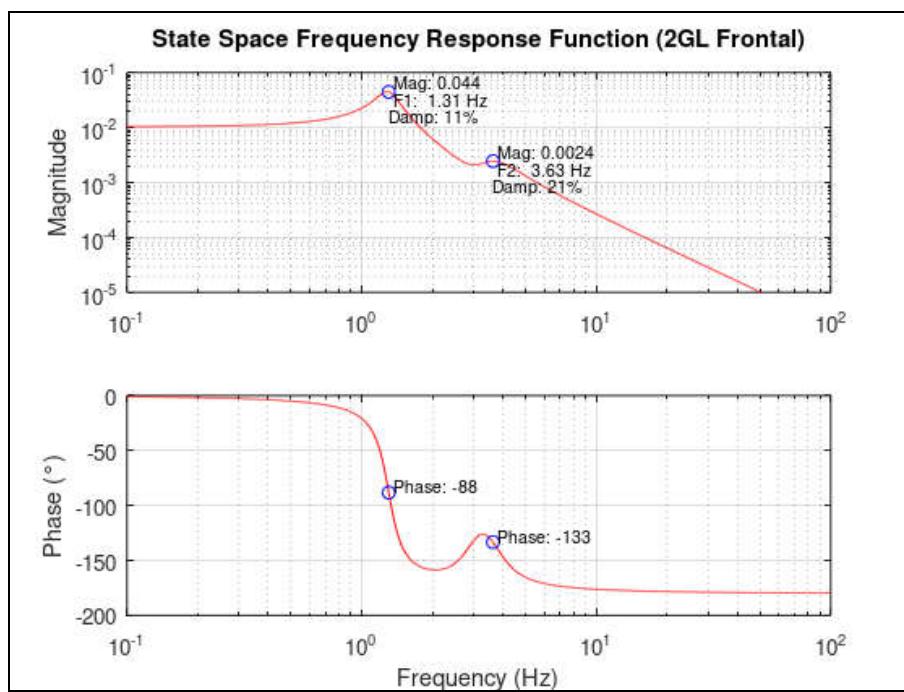
$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_L/m & -h_s k_L/m & -c_L/m & -h_s c_L/m \\ -h_s k_L/J_G & -(2b^2 k_y + h_s^2 k_L)/J_G & -h_s c_L/J_G & -(2b^2 c_y + h_s^2 c_L)/J_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

### 8.2. Resposta Lateral/Rolagem Inferior/Superior

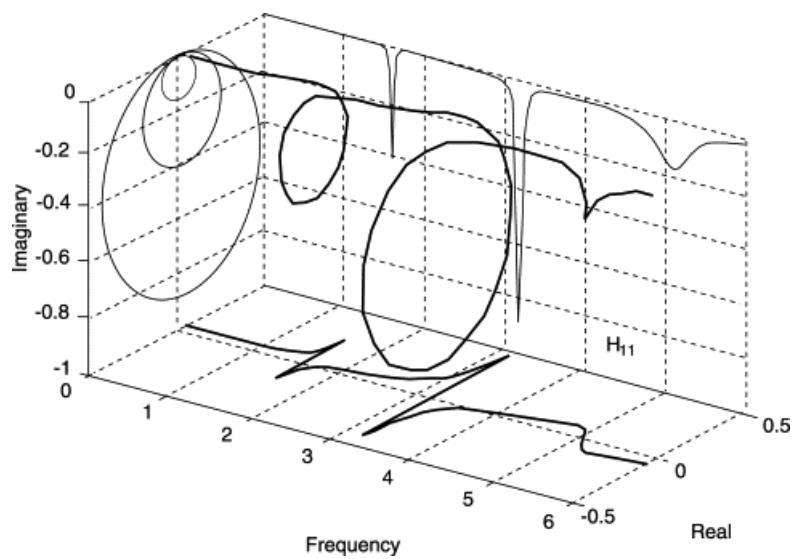
Para o modelo frontal do sistema amortecido com excitação pela base, obtém-se para o primeiro modo de vibrar as respostas apresentadas na Figura 19.

Alternativamente um modelo com 3 graus de liberdade, incluindo a variação do movimento vertical, pode ser considerado.

A função de resposta em frequência também pode ser apresentada no formato 3D cujas projeções nos planos real×imaginário, amplitude×frequência e fase×frequência, podem ser apreciadas na Figura 20.



**Figura 19 - Movimento de Balanço Lateral Inferior (Receptância e Fase)**



**Figura 20 – Projeções da Função de Resposta em Frequência Completa 3D**

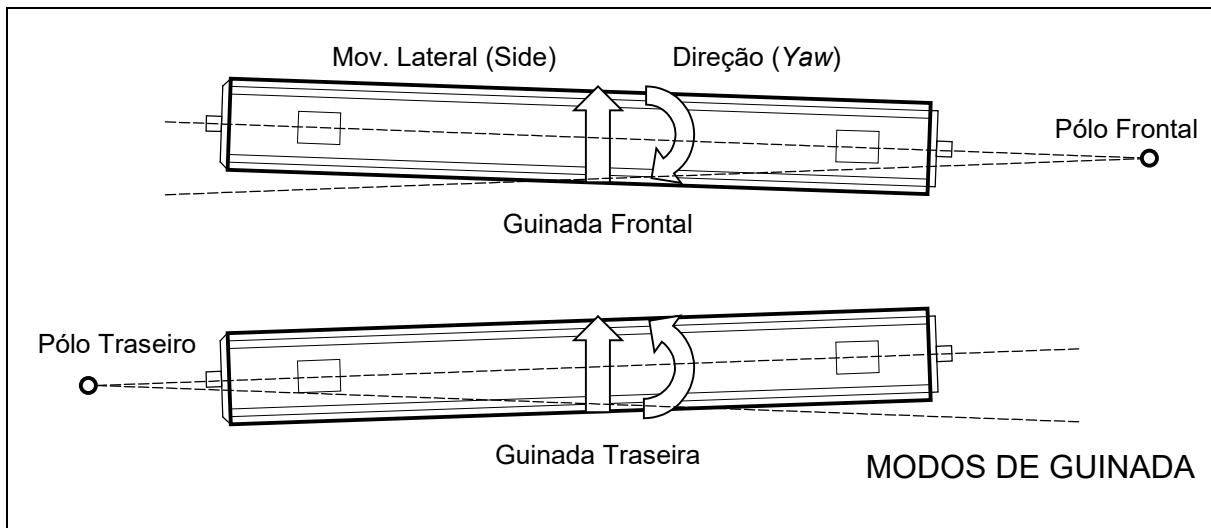
### 9. DEMAIS MODOS DE MOVIMENTO

Uma vez estabelecida a metodologia de análise de sistemas com 2GL, pode-se realizar a identificação da resposta em frequência dos diversos modos de movimento do veículo com auxílio da resposta de cada modelo correspondente.

A seguir serão apresentados os resultados gráficos de **Receptância** para os diversos modelos do veículo: vertical 2G (caixa e truque), modelo sagital correspondente aos movimentos vertical/angular de galope e arfagem (*bounce & pitch*), modelo frontal com movimento lateral e angular de rolagem formando o modo acoplado de balanço lateral inferior e superior (*lower & upper sway*) e modelo horizontal com resposta de direção do veículo (*yaw*) na faixa de excitação de 0,1 Hz a 100 Hz.

#### 9.1. Resposta do Modelo Horizontal

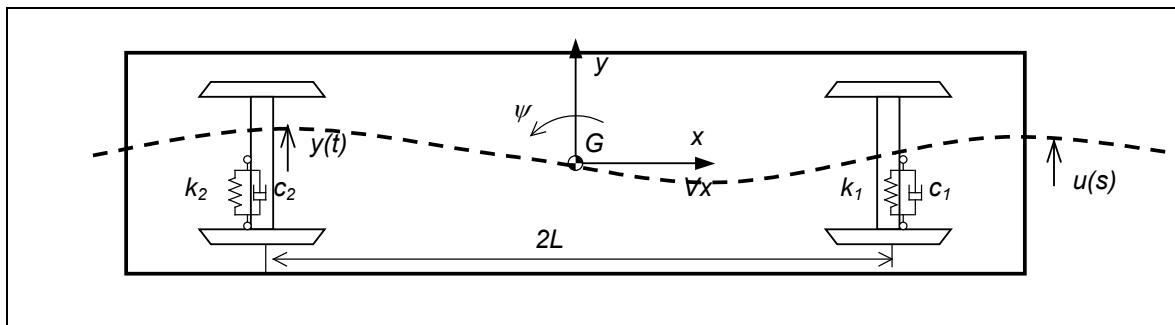
O modelo horizontal do veículo com 2 GL possui o deslocamento lateral e deslocamento angular de guinda. Quando este modo ocorre de forma acoplada de maneira similar com o movimento sagital (item 6) resultando do modo de guinada frontal, conforme mostrado na parte superior na Figura 21, e traseira mostrada na parte inferior da mesma figura.



**Figura 21 – Modo Acoplado de Guinada (Frontal e Traseira)**

No caso particular do veículo metro-ferroviário, as rodas cônicas proporcionam a centralidade na via durante o tráfego. Esta resposta, entretanto está associada a um comprimento de onda fixo que para uma determinada velocidade, produz um movimento de oscilação chamado de direcionamento ou guinada. A frequência de oscilação é portanto diretamente proporcional à velocidade, sendo que o amortecimento devido ao contato de rolamento é fixo. Portanto o fator de amortecimento  $\zeta = c / (2m\omega_n)$  é inversamente proporcional à velocidade, tendendo a se anular ampliando o movimento de oscilação sustentada resultando em uma velocidade limite crítica (movimento de *lacet* ou *hunting*).

No caso específico de veículos automotores a suspensão com pneumáticos também há uma velocidade limite de estabilidade, conforme proposto por Rill (Rill, 2009)



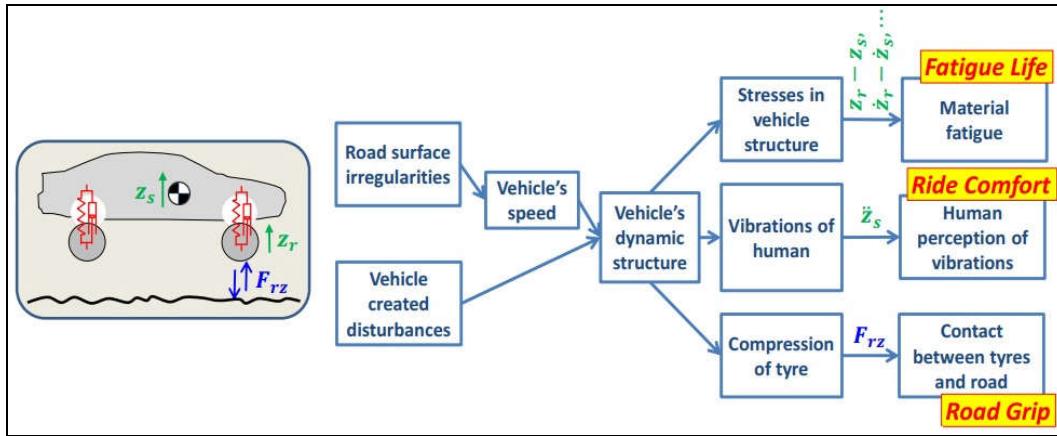
**Figura 22 – Modelo Horizontal**

### 10. AJUSTE DA SUSPENSÃO

Três termos são usualmente empregados para qualificar a percepção do motorista e quantificar o desempenho dinâmico e estrutural do veículo:

- Conforto (*Ride*);
- Dirigibilidade (*Handling*);
- Aderência em Aceleração e Frenagem (*Road Grip*)
- Fadiga (Fatigue).

Entende-se por ***Ride*** a percepção subjetiva do motorista associado com o nível de conforto ao dirigir o veículo (resposta oscilatória de regime na direção vertical e angular de arfagem, vibração, ruídos, acomodação no banco, posição dos comandos, tempo da viagem, etc.). Característica típica esperada de veículos de passeio para viagens longas e tranqüilas. Entende-se por ***Handling*** a percepção subjetiva do motorista associado com a capacidade e resposta transitória do veículo às alterações de direção e velocidade (variação de velocidade de resposta horizontal em aceleração e frenagem, dirigibilidade, capacidade de sustentar aceleração lateral, estabilidade, previsibilidade, governabilidade, segurança). Embora não excludente da anterior é uma característica típica adicional esperada de carros esportivos e de alto desempenho. A suspensão filtra as irregularidades do pavimento e em função da velocidade transmitem solicitações oscilatórias à estrutura do veículo. Neste aspecto, o histórico de solicitações que causam o dano em **fadiga** à estrutura do veículo, pode ser avaliada (ver Figura 23).



**Figura 23 – Características Principais da Suspensão (Fonte: Jacobson 2017)**

Para o ajuste da suspensão, buscando atender a estes requisitos, os seguintes parâmetros devem ser avaliados e podem ser otimizados:

- Altura do Centro de Massa;
- Momento de Inércia;
- Rígidez vertical da suspensão;
- Rígidez lateral da suspensão;
- Fator de amortecimento;
- Barra de torção anti-rolagem.

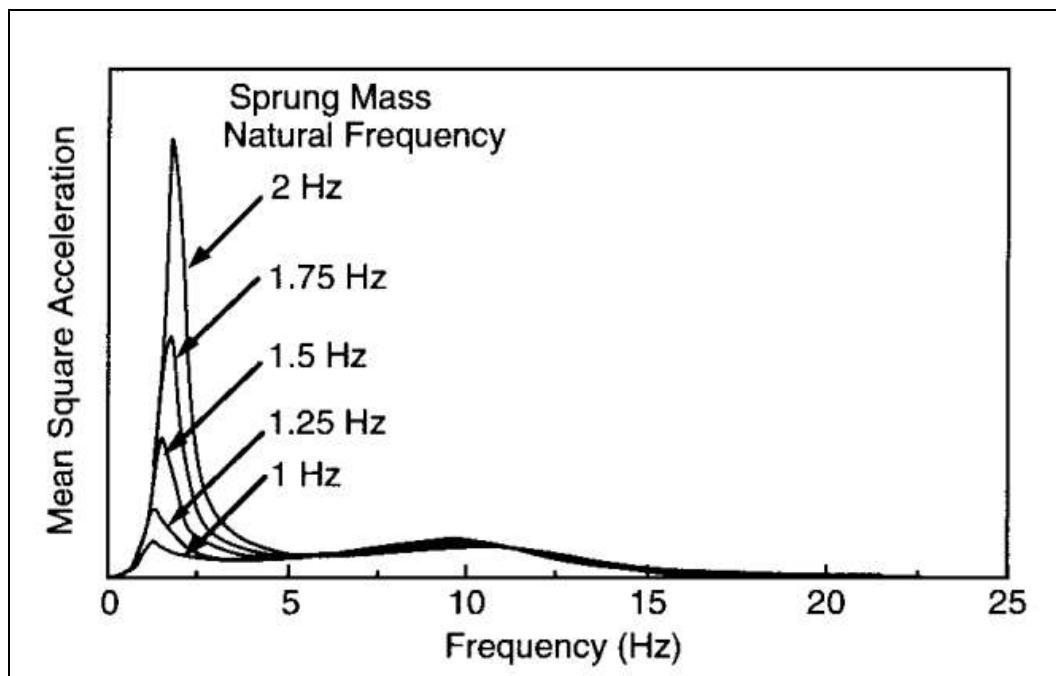
## 10.1. Movimento Vertical

Na direção vertical o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo é suficiente para verificar sua interação com as irregularidades do pavimento. O modo elegante de tratar o problemas consiste em identificar a função de transferência do modelo excitado pela base e multiplicar pelo espectro das irregularidades da via descrito no domínio do espaço. Para compatibilizar as duas funções utilização da relação  $f = \lambda \cdot V$  que permite, para uma determinada velocidade de tráfego  $V$ , transformar o espectro espacial das irregularidades num espectro de frequência possibilitando fazer a multiplicação no domínio da frequência.

Pode-se dividir as oscilações verticais em dois grupos por faixa de frequência:

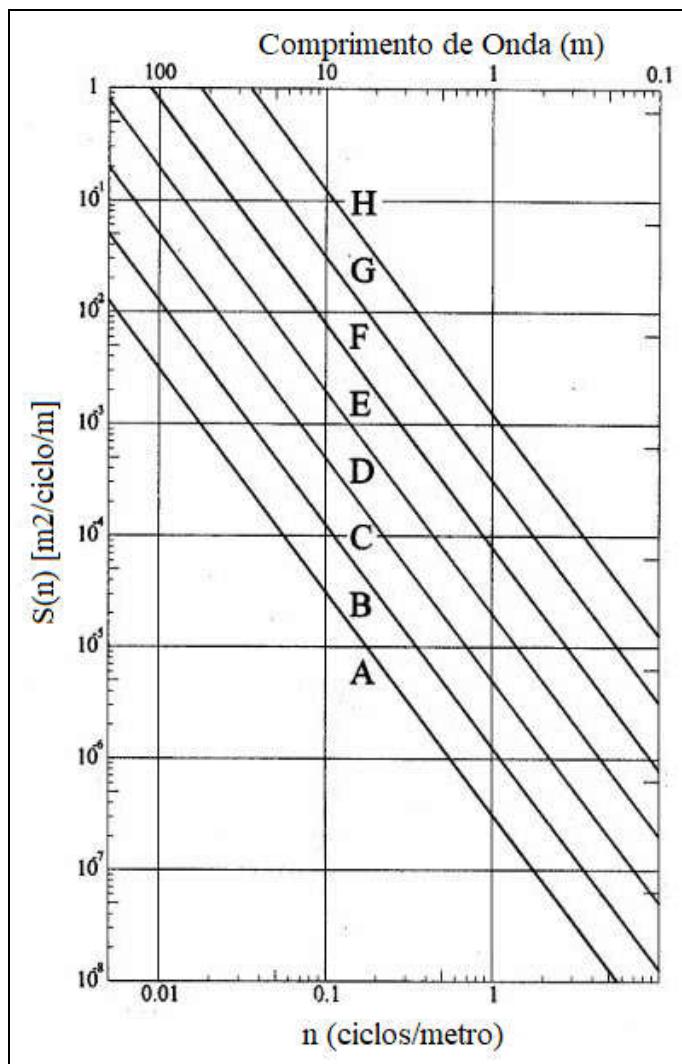
- *Ride Primário* – movimentos do veículo sobre sua suspensão (movimentos: *Bounce*, *Pitch* e *Roll*) na faixa de: 0.5 a 4.0 Hz.
- *Ride Secundário* – movimentos das rodas sobre a suspensão devido as irregularidades da pista, na faixa de 8.0 a 15.0 Hz.

A intensidade das vibrações de baixa frequência dos primeiros modos de movimento (*Ride Primário*) estão associadas a capacidade de filtragem da suspensão ao espectro de solicitações produzidas pelas irregularidades do pavimento. Relembrando que a curva de resposta em frequência (*FRF* receptância) tende a atenuar as oscilações após o pico de ressonância, quanto menor o valor da frequência natural maior a faixa de frequência que será atenuada. Esta avaliação pode ser feita considerando diferentes frequências naturais, conforme comparação apresentada na Figura 24.



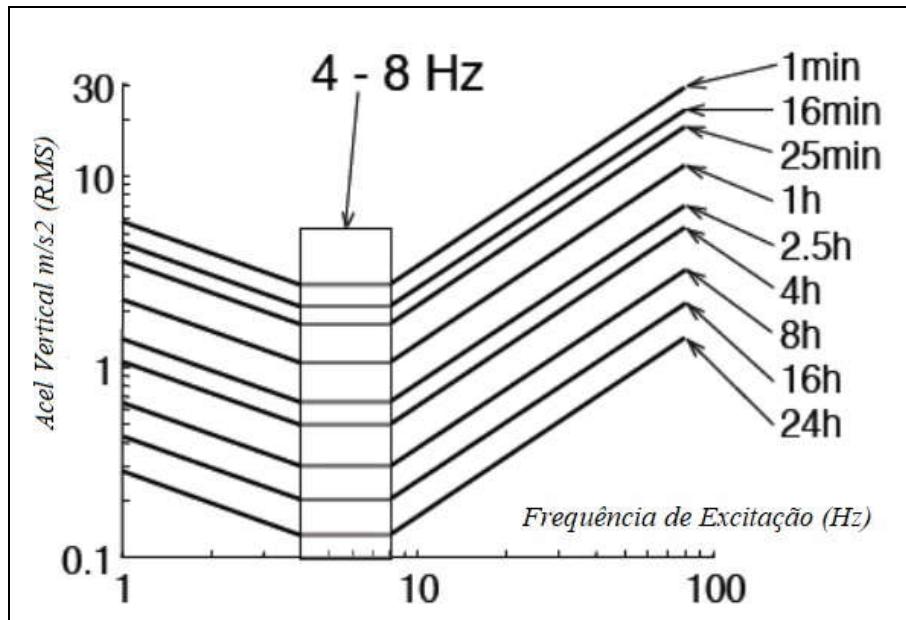
**Figura 24 –Aceleração Vertical Média Quadrática em Tráfego Função da Frequência Natural (Fonte: Guillespie)**

Para quantificar a irregularidade da pista pode-se utilizar a norma internacional ISO 8608 que classifica em vários níveis (*A* até *H*), conforme mostrado na Figura 25, as diferentes qualidades de pista em função da seu conteúdo em comprimento de onda no domínio espectral.



**Figura 25 - Nível de Qualidade da Pista (ISO-8608)**

Para quantificar a sensibilidade do motorista as vibrações não filtradas pela suspensão do veículo, utiliza-se a norma internacional *ISO-2631* de conforto. O espectro de tolerância apresentado na Figura 26, revela a menor tolerância do usuário do veículo às vibrações na faixa de frequência entre 4,0 a 8,0 Hz, com valor médio quadrático aceitável inferior a 0.25 m/s<sup>2</sup> (0.025g - RMS).



**Figura 26 – Tempo Tolerável em Faixa de Aceleração (rms)**

A norma internacional de conforto ISO 2631-1 também sugere a utilização do “*Vibration Dose Value*” que corresponde à aceleração elevada à quarta potencia, como uma alternativa para incluir adequadamente os efeitos fator de crista (*high crest factors*) na análise vibrações não contemplado nas figuras de mérito estatísticos (como por exemplo, valor *RMS*). O índice *VDV* pode ser determinado pela aceleração medida em cada uma das três direções cartesianas (direções *x*, *y* e *z*) como:

$$VDV_i = \left[ \int_{t=0}^{t=T} a_i^4(t) \cdot dt \right]^{1/4} \quad \text{e} \quad RI = \sum_{i=1}^3 VDV_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \quad (71)$$

Um único índice ***RI*** (*Ride Index*) pode ser utilizado para quantificar o conforto do passageiro em um veículo trafegando em determinada velocidade *V* sobre uma pista com irregularidade.

### 10.2. Ajuste Vertical

O ajuste do fator de amortecimento adequado para a suspensão depende da concepção do veículos. Em geral veículos de passeio devem ser mais confortáveis e trafegar de forma suave sobre as irregularidades do pavimento (*ride*). Em contra partida um veículo esportivo deve manter a máximo possível a roda em contato com a pista, garantindo aderência e, portanto dirigibilidade (*handling*) e segurança.

Para realizar este ajuste pode-se utilizar modelo vertical do veículo, conforme mostrado na Figura 27a. Em geral a rigidez de cada pneu identificada como  $k_2$  (200~220 kN/m, que depende da pressão interna), é muito maior que a rigidez total da suspensão, identificada como  $k_1$ .(80 kN/m) na Figura 27a. Como a massa não suspensa (eixo e roda) é da ordem de 7~8% da massa do chassi uma representação de 1 GL . Desta forma uma representação simplificada com 1 GL pode ser utilizada para descrever a movimentação do chassi (massa suspensa  $m_1 \gg m_2$  e rigidez equivalente em série) conforme proposto na Figura 27b, e outra representação para descrever o movimento da suspensão (massa não suspensa e rigidez equivalente em paralelo), conforme proposto na Figura 27c.

Para descrever os modelos simplificados de cada caso com excitação pela base, utiliza-se das equações diferenciais de segunda ordem adotando a hipótese que  $m_1 \gg m_2$ , com a rigidez equivalente da associação em série e paralelo das molas (dissipação do pneu desprezada  $c_2 = 0$ ),  $k_{eq} = (k_1 * k_2) / (k_1 + k_2)$  para o primeiro caso e  $k_{eq} = k_1 + k_2$  para o segundo caso:

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_{eq} z_1 = 0 \quad (72)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + c_1 \dot{z}_2 + (k_2 + k_1) z_2 = 0 \quad (73)$$

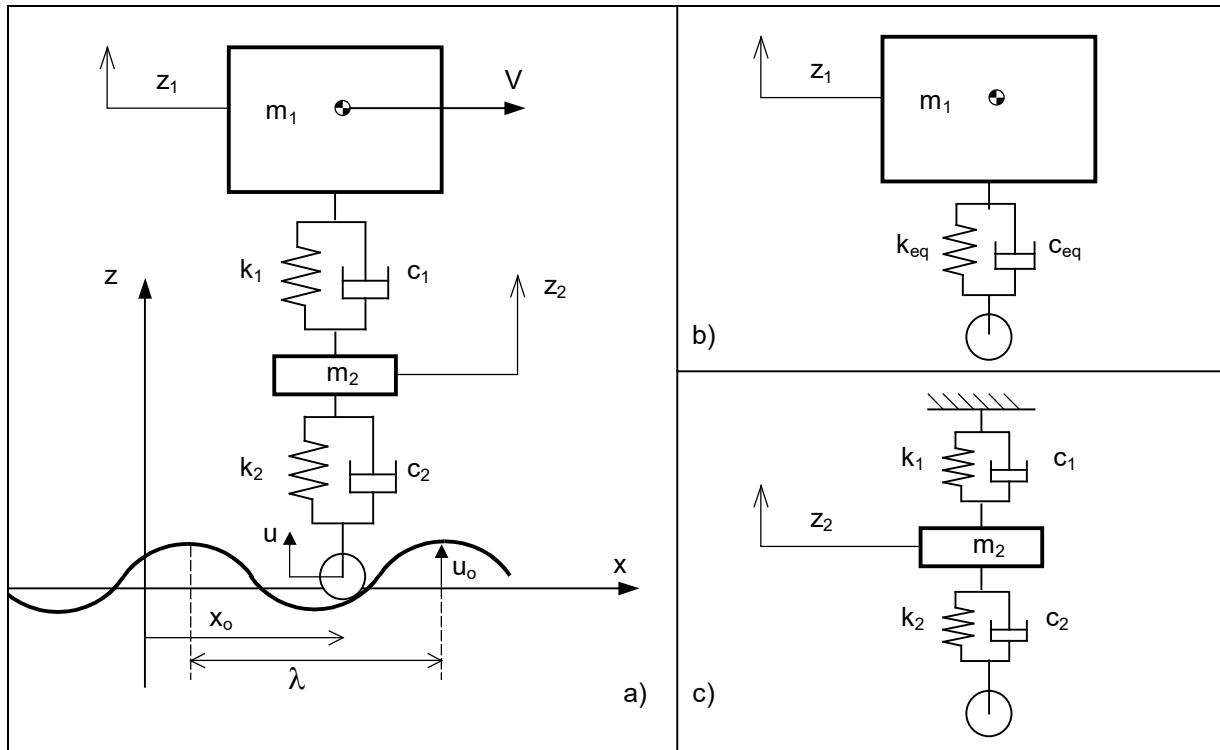


Figura 27 – Modelo (a) Simplificado: Série (b), Paralelo (c)

A solução típica da equação diferencial homogênea é do tipo:

$$\ddot{x} = -2\zeta\omega_n \dot{x} - \omega_n^2 x \quad \text{onde} \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (74)$$

onde  $\zeta$  (zeta) é o fator de amortecimento  $\zeta = c / (2m\omega_h)$ ,  $\omega_n$  é a freqüência natural não amortecida e  $\omega_d$  é a freqüência amortecida obtida de  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Disto resulta para o modelo da massa suspensa (chassi) e para o modelo da massa não suspensa (suspenção):

$$f_{chassi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_1}} \quad \text{para configuração em série} \quad k_{eq} = \frac{(k_1 \cdot k_2)}{(k_1 + k_2)} \quad \text{e} \quad \zeta_{chassi} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_{eq}}} \quad (75)$$

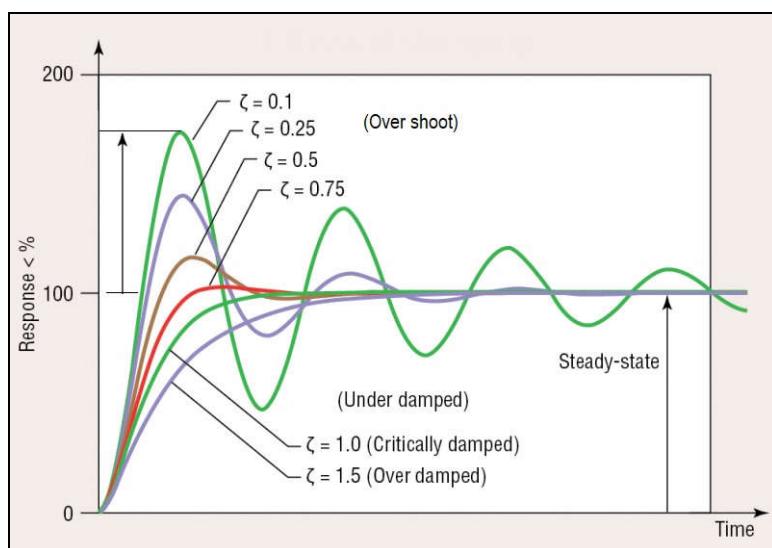
$$f_{susp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m_2}} \quad \text{para configuração paralelo} \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \quad \text{e} \quad \zeta_{susp} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_2(k_1 + k_2)}} \quad (76)$$

**Exemplo:** Determine as frequências naturais de movimento vertical do chassis e do cubo da roda para um veículo com as seguintes características:  $m_1 = 1415 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 185 \text{ kg}$ ;  $k_1 = 68 \text{ kN/m}$ ;  $k_2 = 676 \text{ kN/m}$ ; que resultam em:

$$f_{chassi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_1}} = 1.05 \text{ Hz} \quad \text{e} \quad f_{susp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_2}} = 10.1 \text{ Hz} \quad (77)$$

### 10.3. Ajuste Fator de Amortecimento

Se o objetivo do projeto da suspensão for evitar o sobre-resposta (*over-shoot*), conforme ilustrado na Figura 28, então o fator de amortecimento linear e simétrico recomendado para cada modo de vibrar deve ser unitário ( $\zeta = 1$ ). Desta forma resultam para conforto (modelo da Figura 27b) e segurança (modelo da Figura 27c) dois valores distintos para o amortecedor da suspensão ( $c_1$ ):



**Figura 28 – Sobre-resposta do movimento em função do fator de amortecimento (fonte: internet)**

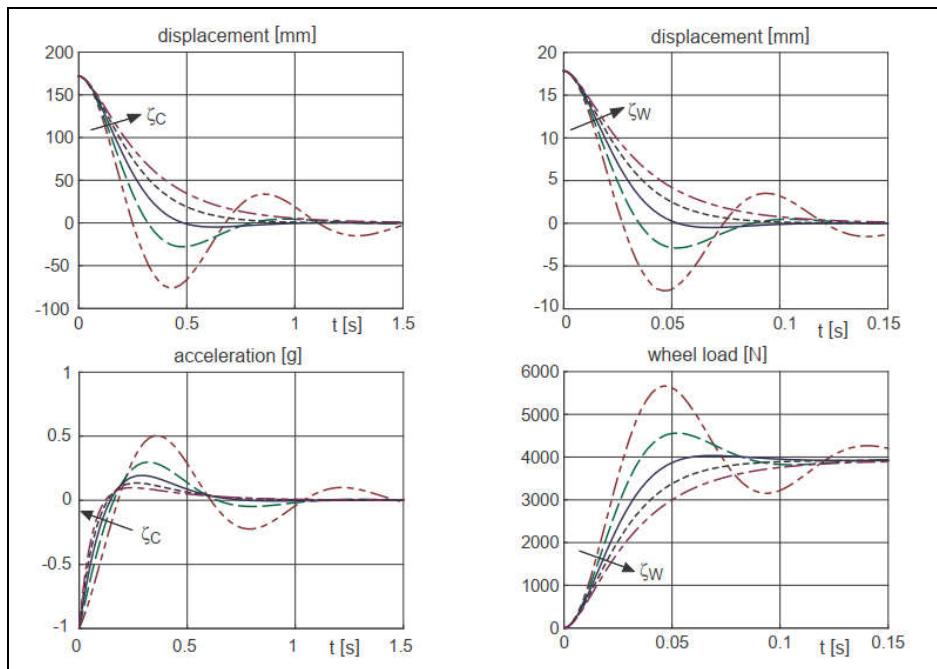
$$c_1^{opt} |_{Conforto}^{\zeta_{chassi}=1} = 2\sqrt{m_1 k_{eq}} = 2 \frac{k_{eq}}{\omega_1} \quad \text{e} \quad c_1^{opt} |_{Seg}^{\zeta=1} = 2\sqrt{m_2(k_1 + k_2)} = 2 \frac{(k_1 + k_2)}{\omega_2} \quad (78)$$

**Exemplo:** para um veículo com massa de  $m_1 = 1400$  kg (modelo 1/4 = 350 kg) rigidez de uma mola de  $k_1 = 20$  kN/m, massa não suspensa de  $m_2 = 50$  kg e rigidez de um pneu  $k_2 = 220$  kN/m obtém-se para o fator de amortecimento  $\zeta = 1$ :

$$c_1^{opt} |_{Conforto}^{\zeta=1} = 5292 \frac{N}{m/s} \quad \text{e} \quad c_1^{opt} |_{Segurança}^{\zeta=1} = 6928 \frac{N}{m/s} \quad (79)$$

Em geral a frequência da massa não suspensa é 15~18 vezes maior que a frequência da massa suspensa. A rigidez de cada pneu é aproximadamente de 220 kN/m e da suspensão como um todo 80 kN/m (aprox. 10~12 vezes maior). Resulta portanto para conforto um fator de amortecimento em torno de 67% do valor para segurança ( $c_1^{opt} |_{Conforto}^{\zeta=1} = 0.67 \cdot c_1^{opt} |_{Segurança}^{\zeta=1}$ )

Este efeito pode ser apreciado na Figura 29 que compara o ganho das vibrações em função do fator de amortecimento para conforto (gráficos à esquerda) e para segurança (gráficos à direita).



**Figura 29 – Efeito do Fator de Amortecimento no Ganho da Resposta (Fonte: Rill)**

#### **10.4. Minimização de Distúrbio Vertical**

Pode-se minimizar a oscilação  $z(t)$  do sistema quando submetido a um distúrbio buscando o estado de equilíbrio o mais rápido possível (minimizar a oscilação). Para tanto toma-se a resposta do sistema amortecido que é uma exponencial complexa (oscilação  $\omega \zeta$  e decaimento  $\alpha$ ) e o desvio  $\varepsilon$  (oscilação em torno do valor médio) é a área da oscilação  $z(t)$  que deve ser minimizada (Rill, 2009):

$$z(t) = e^{(-\alpha+i\omega\zeta t)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \int_{t=0}^{t_F} z(t)^2 dt \quad \rightarrow \quad \text{Min} \quad (80)$$

que resulta em fator de amortecimento de  $\zeta = 0.7$  para conforto e  $\zeta = 0.5$  para segurança. Disto resulta nas seguinte expressões:

$$c_1^{opt}|_{Conforto} = \sqrt{2m_1k_{eq}} \quad \text{e} \quad c_1^{opt}|_{Segurança} = \sqrt{m_2(k_1+k_2)} \quad (81)$$

**Exemplo:** Determinar o valor do amortecimento  $c_1$  do amortecedor da suspensão para um veículo com massa total de 1400 kg (modelo 1/4 veículo = 350 kg) e rigidez do pacote de molas 80 kN/m (cada mola com 20 kN/m) conforme modelo agrupado do chassis (Figura 30a) e da suspensão (Figura 30b):

Utilizando a expressão apresentada na equação 66, obtêm para os valores fornecidos:

$$c_1^{opt}|_{Conforto}^{\zeta=0.7} = 3742 \frac{N}{m/s} \quad \text{e} \quad c_1^{opt}|_{Segurança}^{\zeta=0.5} = 3464 \frac{N}{m/s} \quad (82)$$

que correspondem a 70% e 50% do valor necessário para minimizar o sobre-sinal.

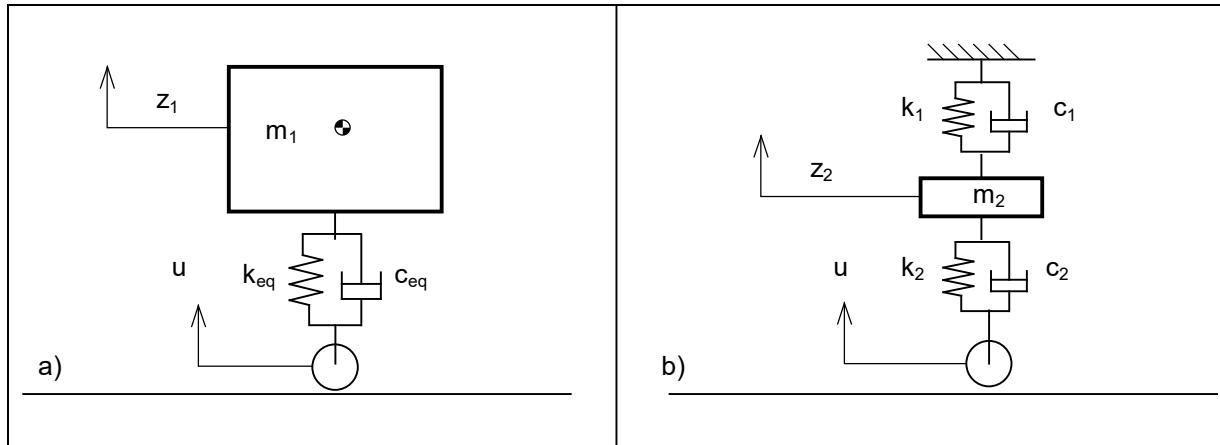


Figura 30 – Modelo Chassis (a) e Modelo da Suspensão (b)

### 10.5. Amortecedor Não Linear

Amortecedores assimétricos são obtidos com orifícios de passagem direcional do fluído entre as câmaras do amortecedor com diferentes diâmetros, conforme ilustrado na Figura 31. Em geral são projetados para fornecer uma força de amortecimento significativamente maior durante o período de extensão ( $c^+$ ) em comparação com a força durante o período de compressão ( $c^-$ ). O uso de um amortecimento assimétrico induz uma mudança na resposta de estado estacionário do sistema.

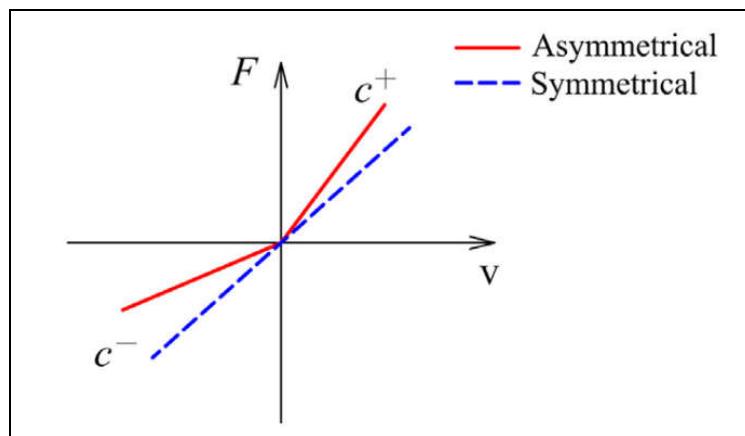
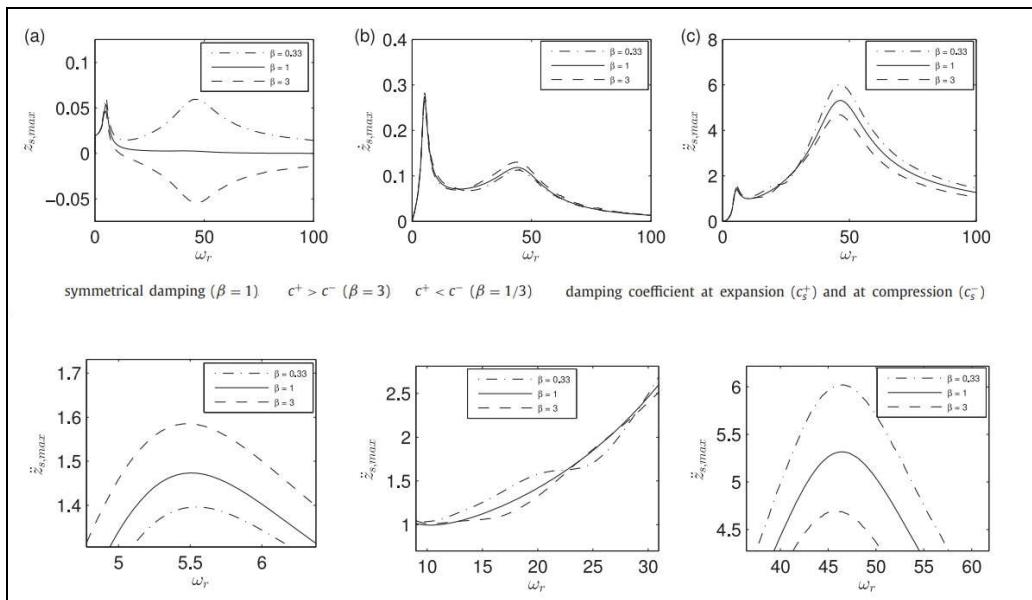


Figura 31 – Amortecimento não linear (Fonte: Silveira, 2017)

## DINÂMICA VEÍCULAR

A magnitude deste deslocamento depende da razão de assimetria ( $\beta$ ) e da frequência de excitação. Esses diferentes coeficientes de amortecimento em extensão e compressão definem uma relação de assimetria ( $\beta = c^+/c^-$ ). No entanto, a variação desta razão pode fornecer comportamentos muito diferentes, e tem sido utilizada em estratégias de controle. O nível de conforto para os passageiros depende de fatores como frequência de vibração, direção, localização e tempo de exposição a que o passageiro está submetido. Já a segurança depende do nível da variação da força entre o pneu e o solo. Portanto cada estratégia produz benefícios distintos entre conforto e segurança.



**Figura 32 – Ganho Vertical em Frequênci a:**

**a) deslocamento; b) velocitânci a, c) acelerânci a; frequênci a do chassi (inferior à esquerda) e frequênci a da suspensi ão (inferior à direita) (fonte: Silveira, 2017)**

Em estudo realizado utilizando o modelo vertical com dois graus de liberdade (Silveira, 2017), revelou-se que a escolha da razão de assimetria diminui os efeitos que a irregularidade da pista causa no deslocamento e na aceleração da massa suspensa. Embora os sistemas atuais adotem amortecimentos maiores durante a fase de expansão, geralmente a força de extensão é definida entre três a quatro vezes a força de compressão ( $\beta = 3\sim 4$ ), conforme pode ser observado no gráfico inferior à direita da Figura 32, mostrou-se neste estudo que, para frequências mais baixas

## DINÂMICA VEÍCULAR

(0.8~1.2 Hz), amortecimentos menores no período de compressão ( $c^-$ ), resultam em melhor características de conforto, conforme pode ser observado no gráfico inferior à esquerda da Figura 32.

A abordagem do problema de reação à perturbação obtido da combinação de dois modelos de osciladores de massa única para o chassi e a roda, fornece apenas uma primeira abordagem para determinar valores ótimos para o parâmetro de amortecimento. A função de mérito definida na equação (65) representa um critério objetivo para julgar a segurança de condução de um veículo. Em geral, as irregularidades da pista são de natureza estocástica. Neste caso, o desvio padrão, que é a raiz quadrada da variância, caracteriza as propriedades estatísticas de um processo aleatório gaussiano estacionário. Então, a segurança de condução ideal pode ser alcançada minimizando a variação da carga dinâmica da roda, onde o histórico de tempo da carga dinâmica da roda é normalizado para a carga estática da roda e avaliado em um intervalo de tempo apropriado (Rill, 2020). O conforto de direção ideal pode ser alcançado minimizando uma combinação apropriada da variação de aceleração e o curso da suspensão, onde, em vez de usar fatores de ponderação, a aceleração é normalizada pela constante da gravidade e o curso da suspensão para um valor de referência. Para sistemas lineares, a análise de covariância pode ser usada para determinar as variâncias correspondentes. A solução algébrica do modelo com um único oscilador com a massa da roda resulta num fator de amortecimento viscoso de  $\zeta = 0.5$  para a minimização da variação da carga da roda e, portanto, fornecerá segurança de condução ideal no caso de excitação estocástica.

Alguns autores propõem vantagens da utilização de amortecedores simétricos (Genta, 2006). Note também, que a força máxima que pode ser exercida pelo amortecedor quando distende é limitada pela força normal na roda. Desta forma o projeto do amortecedor pode ser ajustado com duas intensidades: uma (ou mais) constantes de amortecimento para o movimento de compressão (fechamento) e outra(s) para o movimento de distensão (abertura ou *rebound*) para evitar o descolamento da roda do pavimento, se esse for o objetivo para garantir a máxima dirigibilidade (possibilidade de produzir forças laterais nas rodas).

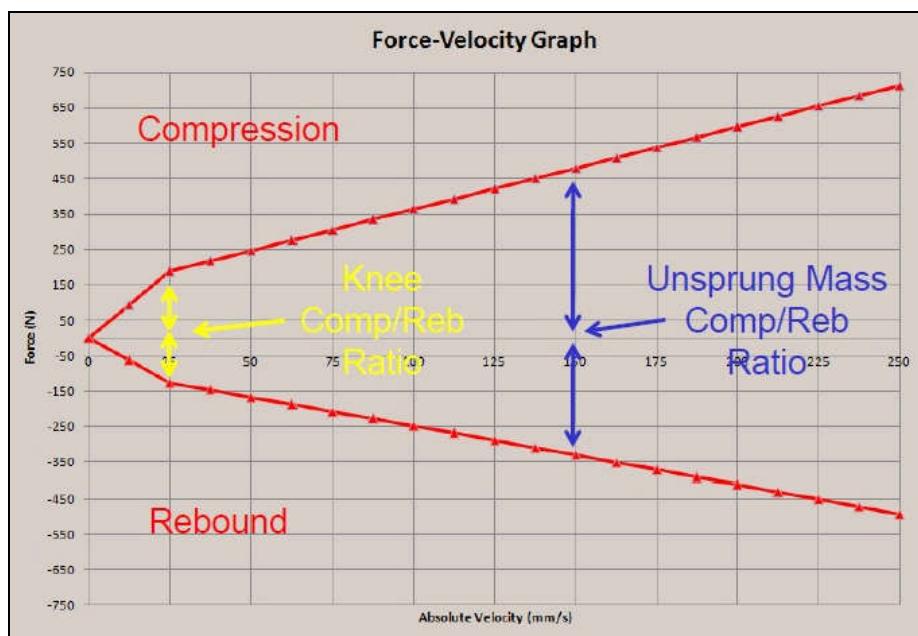


Figura 33 – Curva de Amortecimento (fonte: internet)

## 10.6. Modelo Sagital (Vertical/Arfagem)

Devido ao processo de aceleração e frenagem horizontal, o veículo é excitado angularmente devido ao binário de momento ( $M_{ac}$  ou  $M_{br}$ ) na direção  $y$ , produzido pelas forças tangenciais de contato da roda ( $F_{ac}$  ou  $F_{bf}$  e  $F_{bt}$ ) e a inércia da massa do veículo em função da altura  $h_G$  do centro de massa  $G$ , conforme mostrado na Figura 34. Ou seja, quando se aplica o freio (degrau de desaceleração), a frente do veículo tende a baixar, devido à transferência de carga para o eixo dianteiro produzido pelo binário de momento de frenagem ( $M_{br}$ ). Este movimento é conhecido com na língua inglesa como *dive* (mergulho). Durante a aceleração o movimento é oposto ( $M_{ac}$ ), elevando da dianteira do veículo (denominado de *squad*). O ajuste da suspensão para este efeito é realizado tomando a posição angular estacionária, conforme deduzida a seguir e otimizar o parâmetro multiplicador.

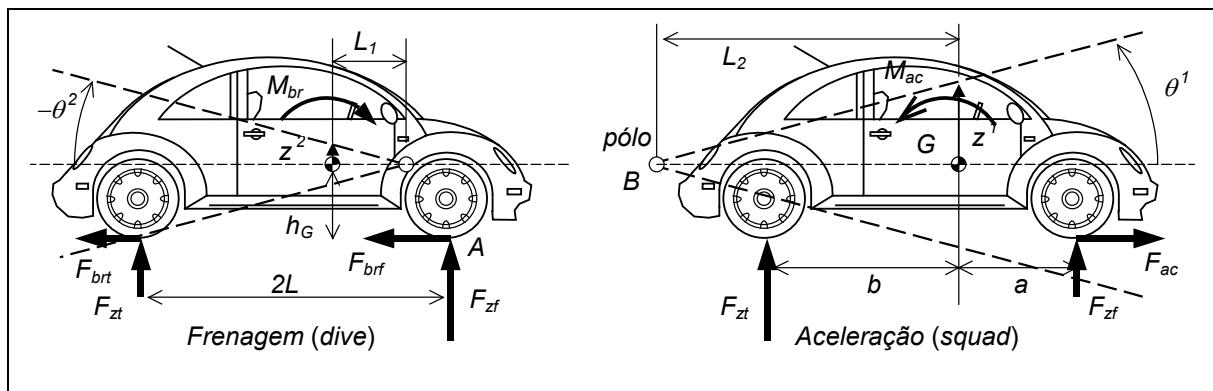


Figura 34 – Arfagem na Aceleração e Frenagem

Este fenômeno também é observado em máquinas agrícolas (ex. tratores) que rebocam implementos com elevada força trativa. Devido à heterogeneidade do solo e reduzida rigidez rotacional e vertical dos pneus, o conjunto de tração (*power train*) tende a oscilar variando a força trativa excitando o modo angular (*pitch*) da suspensão do veículo. Este fenômeno é chamado de *power-hop*.

## DINÂMICA VEÍCULAR

Para tratar este efeito considera-se um aceleração ou frenagem constante e, portanto aceleração angular nula (efeitos dinâmicos transitórios desconsiderados). Utilizando o **TR** no plano sagital (eixo  $x$  e  $z$ ), o **TQMA** com pólo no ponto de contato da roda dianteira ( $A$ ) e o diagrama de forças sobre o corpo livre da Figura 34, obtém-se:

$$\begin{aligned} m \cdot a_{Gx} &= F_{ac} \\ m \cdot a_{Gz} &= F_{zf} + F_{zt} - mg = 0 \\ J_{Ay} \dot{\phi}_y &= -2L \cdot F_{zt} + h_G \cdot F_{ac} = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

resultando em:

$$2L \cdot F_{zt} = h_G \cdot m \cdot a_{Gx} \Rightarrow \frac{F_{zt}}{m} = a_{Gx} \frac{h_G}{2L} \quad (84)$$

Para veículo simétrico ( $a = b = L/2$ ) com molas idênticas ( $k_z$ ) o binário de momento  $M_y$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} ma_{Gx}h_G &= M_y \\ F_{zf} + F_{zt} &= m \cdot g \\ F_{zf} &= -k_z(z_f - \Delta z) \text{ e } F_{zt} = -k_z(z_t + \Delta z) \\ M_y &= k_z \cdot \Delta z \cdot L \end{aligned} \quad (85)$$

Tomando a relação geométrica da deflexão da suspensão  $\Delta z$  em função do ângulo  $\theta$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} ma_{Gx}h_G &= k_z \cdot \Delta z \cdot L \Rightarrow \Delta z = \frac{ma_{Gx}h_G}{k_z L} \\ \theta &= a \tan\left(\frac{\Delta z}{L}\right) \Rightarrow \theta \cong \frac{h_G}{L^2} \frac{m}{k_z} a_{Gx} \end{aligned} \quad (86)$$

$$\theta \cong k_{pitch} \cdot a_{Gx} \Rightarrow \boxed{k_{pitch} = \frac{h_G}{L^2} \cdot \frac{m}{k_z}} \quad (87)$$

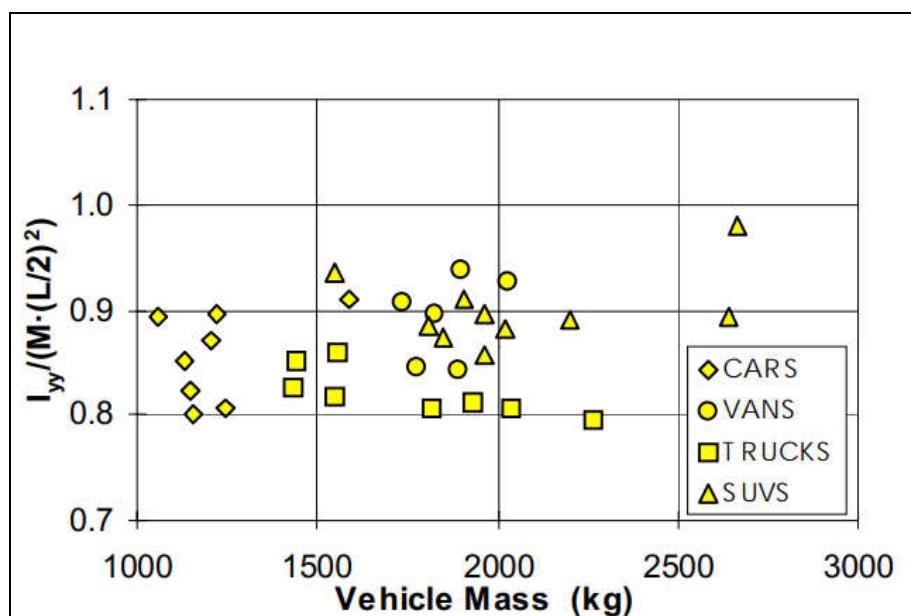
Portanto para uma determinada aceleração longitudinal  $a_{Gx}$ , quanto maior a altura do centro de massa ( $h_G$ ) e menor a distância entre eixos ( $2L$ ) maior será o ângulo  $\theta$  de arfagem (*squad - dive*) devido ao momento de binário da aceleração ou frenagem. Para ajustar a suspensão e minimizar

## DINÂMICA VEÍCULAR

o efeito angular, o único parâmetro, exceto as dimensões ( $h_G$  e  $2L$ ), é a rigidez vertical das molas  $k_z$  que deve ser incrementada para reduzir o ângulo de regime no movimento angular de arfagem.

Alguns projetistas sugerem introduzir mecanismos de variação geométrica do curso da suspensão (curso vertical  $\times$  curso em arco com centro definido) com objetivo de mudar a distribuição das cargas sobre os elementos elásticos, produzindo uma suspensão não linear com intenção de minimizar o efeito *squad/dive*.

Esta mesma análise pode ser aplicada para o movimento de rolagem (*lower/upper sway*) utilizando o modelo frontal tratado no item 8. Neste caso para ajustar a suspensão e minimizar o efeito angular, além das dimensões geométricas, pode-se introduzir a barra anti-rolagem que tem a função específica de incrementar a rigidez angular e reduzir o ângulo de regime no movimento angular de rolagem lateral (*lower sway*).



**Figura 35 – Momento de Inércia normalizado pelo Raio de Giração (Fonte: Heydinger, 1999)**

A distribuição de massa do veículo pode ser apreciada pela relação entre o momento de inércia transversal ( $J_y$ ) e o raio de giração (massa  $\times L^2$ ) para diferentes tipos de veículos. Os resultados

foram consolidados por *Heydinger* (1999) e tem valor na faixa de 0.8~0.9, conforme apresentado na Figura 35.

### 10.7. Efeito Comprimento de Onda da Irregularidade

O efeito das irregularidades da pista no comportamento oscilatório do veículo depende da magnitude e comprimento de onda da elasticidade da suspensão e da distância entre os eixos do veículo.

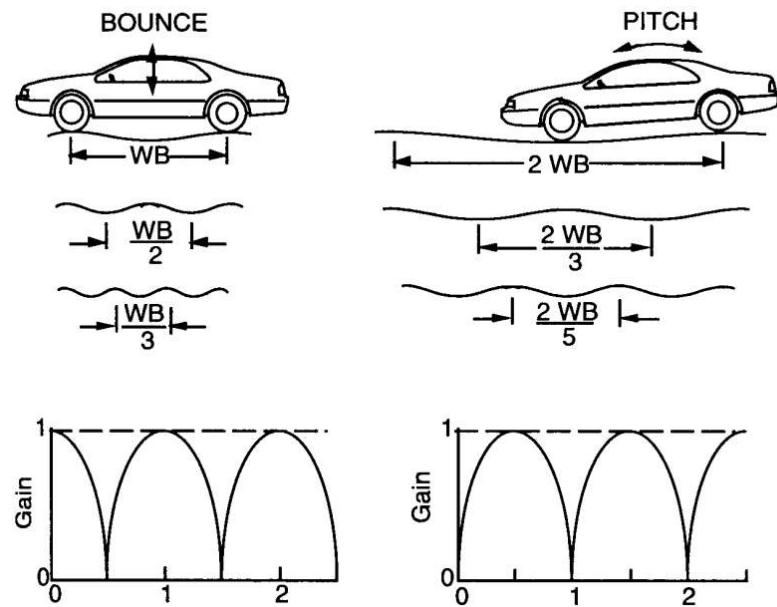
Uma excitação periódica pela base ( $u_1(t)$ ) tem atraso de  $\tau$  segundos para excitar o segundo eixo do veículo ( $u_2(t)$ ) em função da distância  $L$  entre eixos e pode ser descritas pela seguintes funções com atraso  $\tau$  quando expresso em função do tempo:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_0 \sin(\omega t) \\ u_2(t) &= U_0 \sin(\omega(t + \tau)) = U_0 [\sin(\omega t)\cos(\omega\tau) + \cos(\omega t)\sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (88)$$

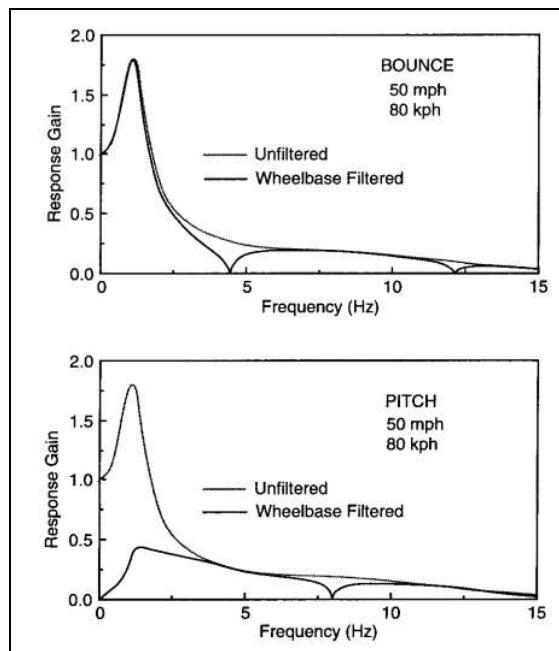
Este efeito causa ganhos variáveis em diferentes modos dominantes de movimento (galope ou arfagem) em função da velocidade e razão entre o comprimento de onda e distância entre os eixos (*wheel base - WB*), conforme mostrado na Figura 36.

Este efeito pode ser observado quando se compara o ganho da resposta em frequência determinada para o modelo  $\frac{1}{4}$  de veículo, sem o efeito da distância entre eixos e o modelo  $\frac{1}{2}$  de veículo que considera este efeito. Para velocidade de 80 km/h e espectro amplo de comprimentos de onda da irregularidade, as frequências naturais dos dois modos distintos de galope e arfagem (*bounce e pitch*) são magnificados, conforme apresentado na Figura 37.

## DINÂMICA VEÍCULAR



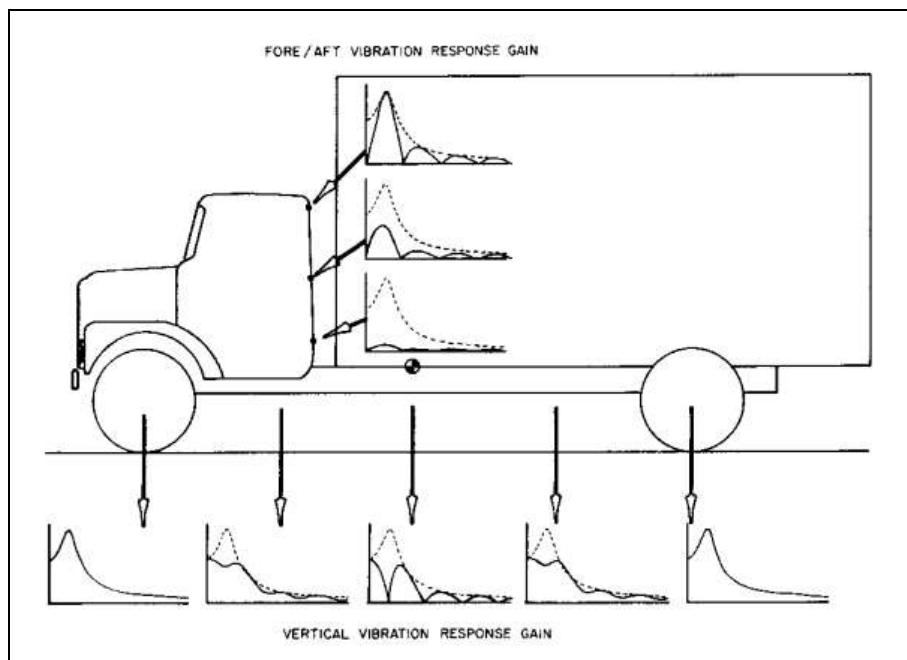
**Figura 36 – Efeito da Distância entre Eixos (Fonte: Guillespie)**



**Figura 37 – Efeitos da Sincronização do Comprimento de Onda e Entre eixos (Fonte: Guillespie)**

## DINÂMICA VEÍCULAR

Atenção especial deve ser tomada em função da oscilação translacional e rotacional. No caso da aceleração ser de translação, todo o corpo rígido adquire a mesma magnitude. Para aceleração angular os diferentes pontos do chassis terão variação de velocidade distinta, conforme pode ser observado no espectro em diferentes pontos da carroceria de um caminhão, apresentados na Figura 38. Note que este efeito é significativo em veículos altos como o caso dos ônibus de dois andares.



**Figura 38 – Efeito das Vibrações Translacional e Rotacional (Fonte: Guillespie)**

Atenção especial deve ser tomada em função da oscilação translacional e rotacional. No caso da aceleração ser de translação, todo o corpo rígido adquire a mesma magnitude. Para aceleração angular os diferentes pontos ao longo do chassis terão variação de velocidade distinta, conforme pode ser observado no espectro em diferentes pontos da carroceria de um caminhão, apresentados na Figura 38. Note que este efeito é significativo em veículos altos como o caso dos ônibus de dois andares.

A oscilação entretanto pode ser utilizada para quantificar de forma indireta a irregularidade do pavimento. O projeto internacional muito grande (*International Roughness Index - IRI*) foi realizado inclusive no Brasil (*Queiroz, Sayers, 1986*) para estabelecer uma correlação entre as

## DINÂMICA VEÍCULAR

oscilações da suspensão e aceleração do veículo com a irregularidade do pavimento. Neste estudo um modelo de um quarto do veículo foi utilizada (ver notas de aula sobre Irregularidade e Conforto).

### CENTRO DE PERCUSSÃO

Alguns autores (*Guilespie, 1992*) utilizam o Índice Dinâmico (*Dynamic Index*) que nada mais é que localização do centro de percussão, como parâmetro de projeto. Ou seja, no caso do veículo, cada eixo é locado no centro conjugado de percussão. Assim, um eventual impulso ( $I = \int \vec{F} dt$ ) vertical praticado na rodas dianteira, não afeta a velocidade vertical instantânea na roda traseira ( $m \Delta V_G = I$ ). Como os ocupantes do veículo estão em geral entre os eixos, sempre haverá impulso sobre os passageiros, causando mesmo assim desconforto e sendo portanto um índice questionável. Soma-se a isto, o fato de que o momento de inércia e o centro de massa tem sua magnitude e posição variável em função da carga do veículo. Quando o  $DI = 1$  a posição das rodas coincidem com o centro de percussão.

$$DI = \frac{k^2}{4bc} = \frac{J_y}{m \cdot 4bc} \quad \Rightarrow \quad DI = 1 \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{J_y}{m \cdot 2b} \quad (89)$$

Como as irregularidades do pavimento são aleatórias em magnitude e comprimento de onda, para o conforto cabe apenas garantir fatores de amortecimento adequados para cada modo de oscilação (*bounce & pitch*).

### 11. CONTROLE

A resposta em frequência do sistema veicular nem sempre atende aos requisitos desejados. Em particular alguns aspectos são antagônicos produzindo linhagens de projetos como o caso do fator de amortecimento que pode produzir veículos confortáveis (otimizado para mínima aceleração) ou veículos esportivos (otimizado para menor variação da força de contato). Desta forma técnicas de controle podem ser utilizadas para melhorar o desempenho global ou seletivo do veículo. Aspectos como:

- Segurança;
- Estabilidade;
- Agilidade;
- Fidelidade;
- Linearidade.

são requisitos desejáveis do comportamento. A atenuação de eventuais distúrbios externos melhora a **estabilidade** do veículo no tráfego. Resposta com mais **sensibilidade** (ex, multiplicados de ângulo de esterçamento da direção hidráulica) aumenta a **agilidade** do veículo. Implementação da precisão (acurácia) dos comandos, melhora a **fidelidade** da resposta (freio ABS). Finalmente a rejeição de distúrbio e efeitos cruzados garante a **linearidade** da resposta do veículo, desejável do ponto de vista do condutor.

Estes aspectos são amplamente estudados e aplicados em veículos modernos sendo objetos de estudos mais aprofundados não atingidos por este texto. Para maiores informações consulte as referencias bibliográficas.

## **12. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA**

1. Barbosa, R. S. (2012) Vehicle Vibration Response Subjected to Longwave Measured Pavement Irregularity. *Journal of Mechanical Engineering and Automation* 2012, 2(2): 17-24, DOI: 10.5923/j.jmea.20120202.04.
2. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering - Associação Brasileira de Ciencias Mecânicas – ABCM*, Vol. 33, n º. 3, pp. 302-307.
3. Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Safety in Measured Rough Pavement. *Journal of Transportation Engineering*, ©ASCE, DOI: 10.1061/(ASCE)TE.1943-5436.0000216, Vol. 137, No. 5, pp. 305-310.
4. França, L. N. F. Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blucher, 3º Ed. pp. 316.
5. Rao, S. S. (2009) Vibrações Mecânicas. Editora Pearson Prentice Hall, 4º Ed. pp. 424.
6. Rill, G. (2009) Vehicle Dynamics. University of Applied Sciences, Lecture Notes, p. 200.
7. Rill, G. Castro A. A. (2020) Road Vehicle Dynamics. Fundamentals and Modeling with MATLAB®, Second Edition, Ed. CRC Press. p. 377
8. Genta, G. (1997) Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation. Publisher: World Scientific Publishing Company. p. 556.
9. Ogata, K. (1992) System Dynamics. Editora Prentice Hall, Segunda Edição, p. 712.
10. Gillespie, T. D. (1992) Fundamentals of vehicle dynamics. Society of Automotive Engineers – SAE, Warrendale, PA, p. 519.
11. Bengt Jacobson et al (2017) Vehicle Dynamics - Compendium. Chalmers University of Technology, p. 296.
12. Silveira M. Wahi, P. Fernandes J. C. M. (2017) Effects of asymmetrical damping on a 2 DOF quarter-car model under harmonic excitation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* Vol.: 43, pp. 14-24. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.029.
13. Li, Z. (2019) Vibration Transmissibility of Two-DOF Vibrating Systems. *Inter-Noise 2019, Noise Control for a Better Environment*, p. 12.

## DINÂMICA VEÍCULAR

14. Heydinger, G. J. et al. (1999) Measured Vehicle Inertial Parameters – NHTSA's Data Through November 1998. Paper SAE nº 1999-01-1336, pp. 33.

### 13. ANEXO A – Formula de *Bhaskara* e Inversão de Matriz

Para um polinômio de 2 ordem em  $x^2$  do tipo  $a(x^2)^2 + b x^2 + c = 0$ , as raízes são obtidas pela conhecida fórmula de *Bhaskara* (professor Indiano do ano de 1.114):

$$x_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (90)$$

Para solucionar o sistema linear de equações  $[A]x = \{b\}$  utiliza-se da matriz inversa  $[A]^{-1}[A] = [I]$  para obter  $\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$ . Para determinar a inversa da matriz utiliza-se o determinante ( $Det [A]$ ) e a matriz adjunta ( $Adj [A]$ ) da seguinte forma:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{Det [A]} Adj [A] \quad (91)$$

Se  $[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  então  $Det [A] = ad - bc$  e  $Adj [A] = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

## 14. ANEXO B – Função de Transferência do Modelo Lateral com 2GL

### DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DO MODELO LATERAL

Considerando a projeção lateral do veículo, conforme mostrado na Figura 39, descrito por um modelo matemático com dois graus de liberdade (translacional e rotacional), pode-se descrever as seguintes equações diferenciais de movimento obtidas pelo método *Newton-Euler* a partir do teorema da resultante (**TR**) e teorema da quantidade de movimento angular (**TQMA**) aplicado em relação ao pólo no centro de massa **G** e utilizando o diagrama de forças sobre o corpo livre (**DFCL**), obtém-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_3 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{u}_1) + k_1(z_1 - u_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}_2) + k_2(z_2 - u_2) &= F_Z \\ J_{Gy}\ddot{\theta} + c_1(\dot{z}_1 - \dot{u}_1)a + k_1(z_1 - u_1)a - c_2(\dot{z}_2 - \dot{u}_2)b - k_2(z_2 - u_2)b &= M_G \end{aligned} \quad (92)$$

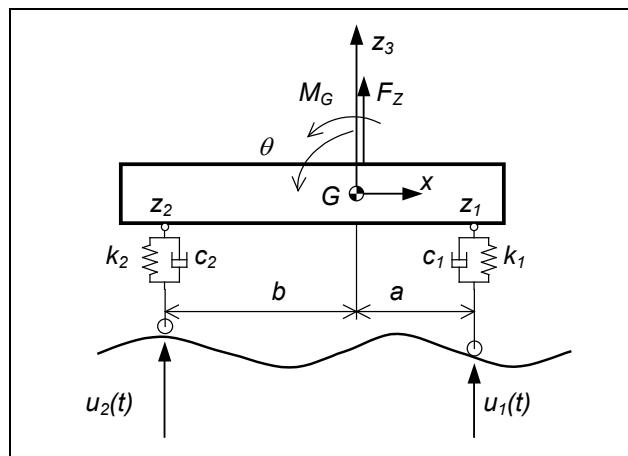


Figura 39 – Modelo Físico com 2 GL

Utilizando as relações cinemáticas:  $z_1 = z_3 + a\theta$  e  $z_2 = z_3 - b\theta$ , para o sistema homogêneo obtém-se:

## DINÂMICA VEÍCULAR

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_3 + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) + c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) + k_2 (z_3 - b\theta - u_2) &= 0 \\ J_{Gy} \ddot{\theta} + c_1 (\dot{z}_3 + a\dot{\theta} - \dot{u}_1) a - c_2 (\dot{z}_3 - b\dot{\theta} - \dot{u}_2) b + k_1 (z_3 + a\theta - u_1) a - k_2 (z_3 - b\theta - u_2) b &= 0 \end{aligned} \quad (93)$$

ou rearranjando as expressões colocando à esquerda os termos função dos graus de liberdade e a direita as ações externas devido à pista:

$$m \ddot{z}_3 + (c_1 + c_2) \dot{z}_3 + (k_1 + k_2) z_3 + (c_1 a - c_2 b) \dot{\theta} + (k_1 a - k_2 b) \theta = c_1 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 + k_1 u_1 + k_2 u_2 \quad (94)$$

$$\begin{aligned} J_{Gy} \ddot{\theta} + (c_1 a^2 + c_2 b^2) \dot{\theta} + (k_1 a^2 + k_2 b^2) \theta + (c_1 a - c_2 b) \dot{z}_3 + (k_1 a - k_2 b) z_3 &= \dots \\ c_1 a \dot{u}_1 + c_2 b \dot{u}_2 + k_1 a u_1 + k_2 b u_2 & \end{aligned} \quad (95)$$

Tomando a transformada de *Laplace* do sistema de equações diferenciais completas com 2 graus de liberdade ( $z_3$  e  $\theta$ ) excitada pela base ( $u_1(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$  e  $u_2(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi + \theta)$ ) e assumindo condições iniciais nulas, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} [m_3 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2)] Z_3(s) + [(a c_1 - b c_2) s + (a k_1 - b k_2)] \Theta(s) &= \dots \\ (c_1 s + k_1) U_1(s) + (c_2 s + k_2) U_2(s) & \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} [J_{Gy} s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2) s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \Theta(s) + [a(c_1 s + k_1) - b(c_2 s + k_2)] Z_3(s) &= \dots \\ a(c_1 s + k_1) U_1(s) + b(c_2 s + k_2) U_2(s) & \end{aligned} \quad (97)$$

Utilizando os seguintes identificadores para cada polinômio em  $s$ , obtêm-se para cada grupo:

$$\begin{aligned} A &= [m_3 s^2 + (c_1 + c_2) s + (k_1 + k_2)] \\ AA &= (c_1 s + k_1) ; AB = (c_2 s + k_2) \\ AC &= [(a c_1 - b c_2) s + (a k_1 - b k_2)] \\ AZ_3(s) + AC \Theta(s) &= AAU_1(s) + ABU_2(s) \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} B &= [J_{Gy} s^2 + (a^2 c_1 + b^2 c_2) s + (a^2 k_1 + b^2 k_2)] \\ BA &= a(c_1 s + k_1) ; BB = b(c_2 s + k_2) \\ BC &= [(a c_1 - b c_2) s + (a k_1 - b k_2)] \\ B \Theta(s) + BC Z_3(s) &= BAU_1(s) + BBU_2(s) \end{aligned} \quad (99)$$

## DINÂMICA VEÍCULAR

Isolando os polinômios dos graus de liberdade  $\Theta(s)$  e fazendo a substituição em  $Z_3(s)$  obém-se:

$$\Theta(s) = \frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s) \quad (100)$$

$$AZ_3(s) + AC\left(\frac{BA}{B}U_1(s) + \frac{BB}{B}U_2(s) - \frac{BC}{B}Z_3(s)\right) = AAU_1(s) + ABU_2(s) \quad (101)$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} AZ_3(s) - \frac{AC \cdot BC}{B}Z_3(s) &= \left( AA - \frac{AC \cdot BA}{B} \right)U_1(s) + \left( AB - \frac{AC \cdot BB}{B} \right)U_2(s) \\ [(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]Z_3(s) &= (B \cdot AA - AC \cdot BA)U_1(s) + (B \cdot AB - AC \cdot BB)U_2(s) \end{aligned} \quad (102)$$

Utilizando os seguintes identificadores adicionais para cada grupo polinomial, obtêm-se

$$G_{Z_{31}} = \frac{(B \cdot AA - AC \cdot BA)}{[(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]} ; \quad G_{Z_{32}} = \frac{(B \cdot AB - AC \cdot BB)}{[(B \cdot A) - (AC \cdot BC)]} \quad (103)$$

$$Z_3(s) = G_{Z_{31}}U_1(s) + G_{Z_{32}}U_2(s) \quad (104)$$

Isolando os polinômios dos graus de liberdade  $Z_3(s)$  e fazendo a substituição em  $\Theta(s)$  obém-se:

$$Z_3(s) = \frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s) \quad (105)$$

$$B\Theta(s) + BC\left(\frac{AA}{A}U_1(s) + \frac{AB}{A}U_2(s) - \frac{AC}{A}\Theta(s)\right) = BAU_1(s) + BBU_2(s) \quad (106)$$

Rearranjando as expressões, obtêm-se:

$$\begin{aligned} B\Theta(s) - \left(\frac{BC \cdot AC}{A}\right)\Theta(s) &= \left(BA - \frac{BC \cdot AA}{A}\right)U_1(s) + \left(BB - \frac{BC \cdot AB}{A}\right)U_2(s) \\ [(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]\Theta(s) &= (A \cdot BA - BC \cdot AA)U_1(s) + (A \cdot BB - BC \cdot AB)U_2(s) \end{aligned} \quad (107)$$

## DINÂMICA VEÍCULAR

Utilizando as seguintes funções de transferência em  $s$ , obtém-se

$$G_{\Theta_{11}} = \frac{(A \cdot BA - BC \cdot AA)}{[(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]} ; \quad G_{\Theta_{12}} = \frac{(A \cdot BB - BC \cdot AB)}{[(A \cdot B) - (BC \cdot AC)]} \quad (108)$$

$$\Theta(s) = G_{\Theta_{11}} U_1(s) + G_{\Theta_{12}} U_2(s) \quad (109)$$

Considerando que as entradas  $U_1(s)$  e  $U_2(s)$  em cada eixo sejam similares ( $U(s)$ ) mas defasadas ( $s = i \omega$  e  $T = L / \text{Vel}$ ):

$$\begin{aligned} Z_3(s) &= (G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{-Ts}) U(s) \\ \Theta(s) &= (G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{-Ts}) U(s) \end{aligned} \quad (110)$$

ou na forma de ganho vertical e angular do chassis ( $Z_3(s)$  e  $\Theta(s)$ ) em relação a entrada ( $U(s)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{Z_3(s)}{U(s)} &= G_{Z_{31}}(s) + G_{Z_{32}}(s) \cdot e^{(-ik)} \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= G_{\Theta_{11}}(s) + G_{\Theta_{12}}(s) \cdot e^{(-ik)} \end{aligned} \quad (111)$$

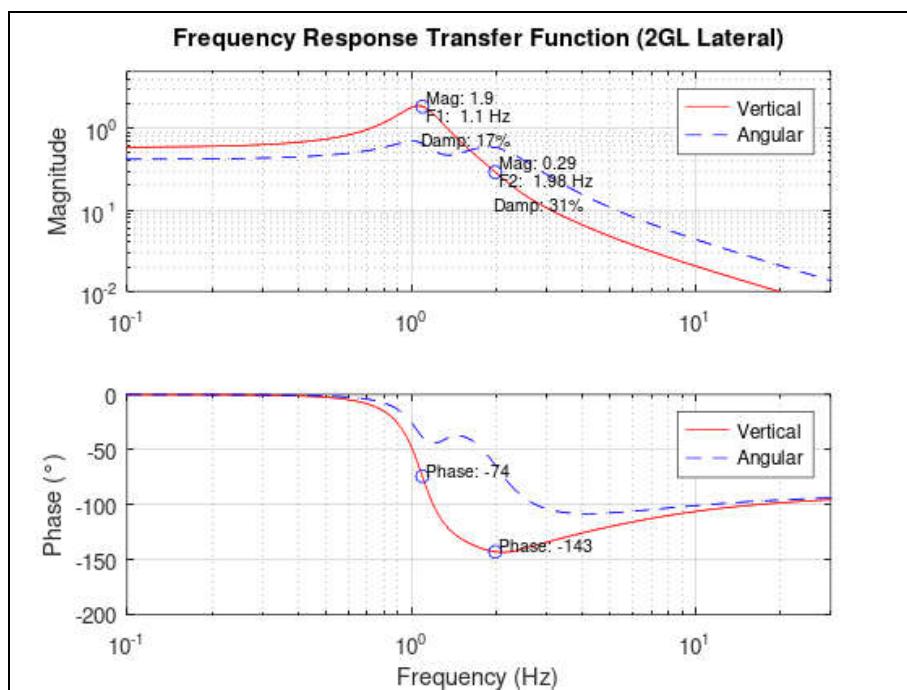
onde:  $k = \omega \cdot L / \text{Vel}$  e  $L = (a + b)$ . Note que as funções estão no domínio  $s$  complexo sendo necessário o tratamento da funções como números complexos. Tipicamente o primeiro modo de vibrar com frequência mais baixa é chamado do **Galope Traseiro** (*rear end bounce*) está associado com o movimento vertical  $Z_3$ . O segundo modo de vibrar chamado de **Arfagem Dianteira** (*front end pitch*) está associado com movimento angular  $\Theta$ .

As funções de transferência em  $s$  podem ser avaliados numericamente numa faixa de frequências, utilizando pacotes numéricos, onde pode-se observar o comportamento da resposta em frequência de galope ( $Z_3(s)$ ) e arfagem ( $\Theta(s)$ ) do veículo em função da entrada  $U(s)$ .

**Tabela 4 – Características do Veículo (meio carro)**

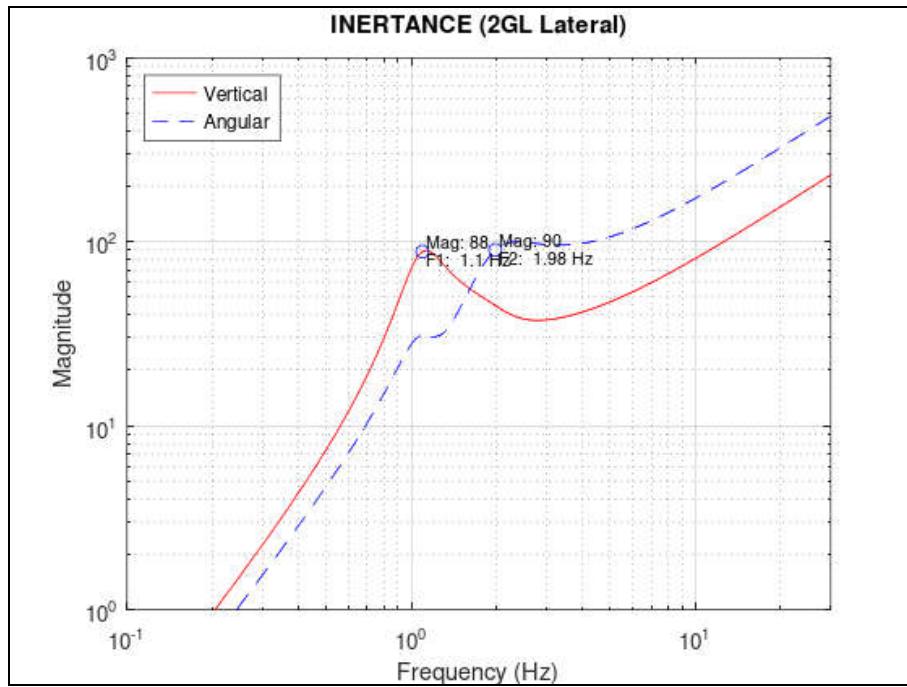
CARACTERÍSTICAS	VALOR	Obs.:
Massa do veículo ( $m_3$ )	750 kg	--
Momento de Inércia ( $J_{Gy}$ )	360 kg m <sup>2</sup>	Pólo G
Distância do eixo dianteiro ao CM ( $a$ )	1.0 metros	--
Distância do eixo traseiro ao CM ( $b$ )	1.4 metros	--
Rigidez da mola dianteira ( $k_1$ )	18.25 kN/m	1 par
Rigidez da mola traseira ( $k_2$ )	18.25 kN/m	1 par
Amortecedor dianteiro ( $c_1$ )	912.5 kN/m/s	1 par
Amortecedor traseiro ( $c_2$ )	912.5 kN/m/s	1 par

As propriedades do veículo são: Primeiro modo de vibrar (**galope traseiro** – *rear end bounce*) frequência  $F_1 = 1,12$  Hz (fator de amortecimento de 17%) e segundo modo de vibrar (**arfagem dianteira** – *front end pitch*) frequência  $F_2 = 1.98$  Hz (fator de amortecimento de 31%). As figuras a seguir mostram o comportamento do sistema no domínio da frequência:

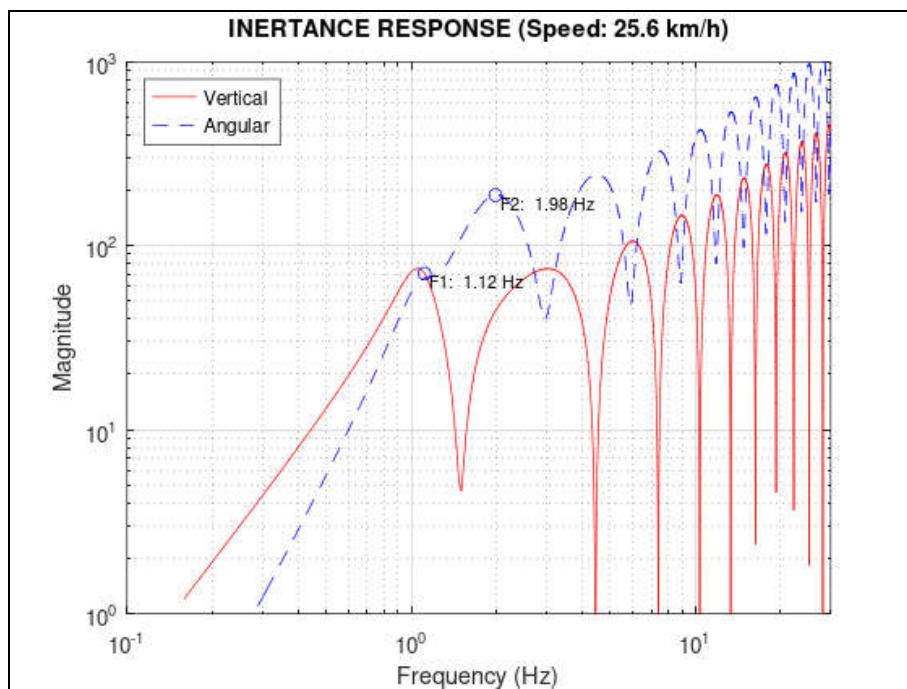


**Figura 40 – Receptância com Excitação no Eixo Dianteiro**

## DINÂMICA VEÍCULAR



**Figura 41 – Inertância com Excitação no Eixo Dianteiro**



**Figura 42 – Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 25,6 km/h)**

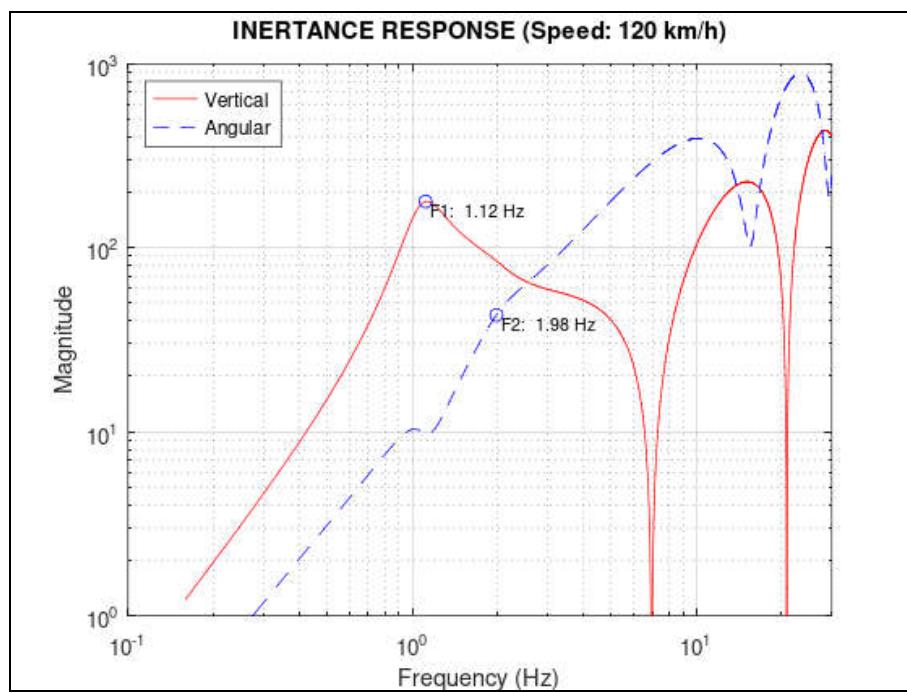


Figura 43 - Inertância com Excitação Defasada (Velocidade de 120 km/h)

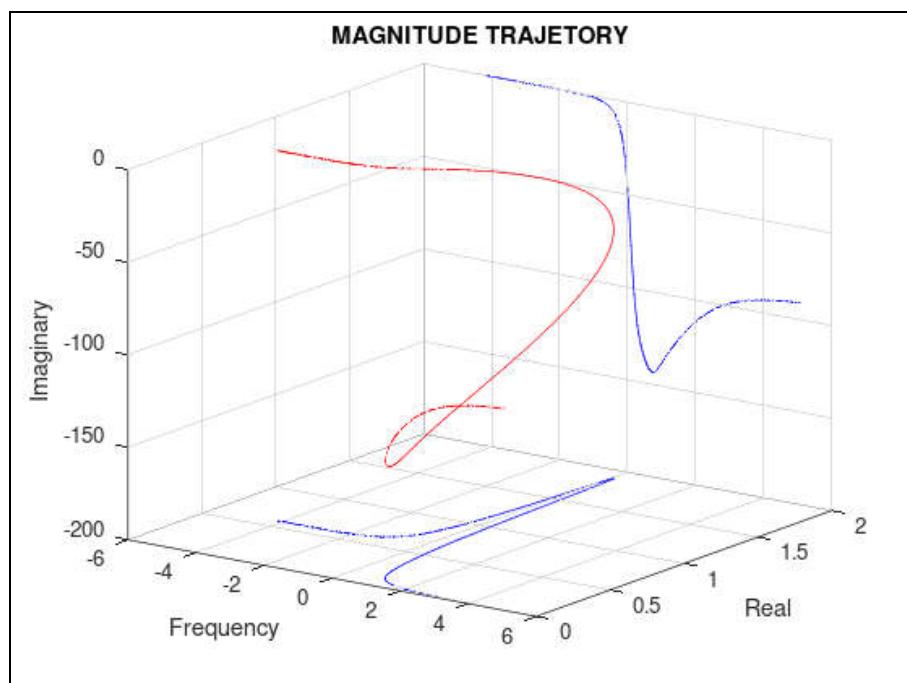


Figura 44 – Trajetória da Função de Resposta no Espaço Complexo × Frequência

### **14.1. REFERÊNCIAS**

*Barbosa, R. S. (2011) Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Scieny & Engeneering - ABCM, Vol. XXXIII, nº 3, pp. 302-307. DOI: 10.1590/S1678-58782011000300005*

*Rao, S. S. (2011) Vibrações Mecânicas. Editora Pearson Prentice Hall, 5º Ed. p. 1105.*

*Jazar, R. N. (2008) Vehicle Dynamics: Theory and Application. Springer, p. 1022.*