

Sebastian Krieger

*Vórtices de meso-escala, ondas de Rossby e
os espectros observados a partir de
altimetria por satélites*

Tese apresentada ao Instituto Oceanográfico
da Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências, Programa de
Oceanografia Física

Orientador: Prof. Dr. Paulo S. Polito

São Paulo

2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO OCEANOGRÁFICO

*Vórtices de meso-escala, ondas de Rossby e
os espectros observados a partir de
altimetria por satélites*

Sebastian Krieger

Tese apresentada ao Instituto Oceanográfico
da Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências, Programa de
Oceanografia Física

Julgada em ____ / ____ / _____ por

Prof(a). Dr(a).

Conceito

Prof(a). Dr(a).

Conceito

Prof(a). Dr(a).

Conceito

Prof(a). Dr(a).

Conceito

Prof(a). Dr(a).

Conceito

*Em memória de minha avó Ursula e de meu pai;
e à minha mãe, com carinho.*

Agradecimentos

O presente documento é resultado de intenso trabalho durante os últimos 52 meses. Neste período cometi muitos erros, alguns acertos, convivi com pessoas inspiradoras, aprendi muito e tive inúmeras ideias para novas empreitadas. Na esfera pessoal passei por muitos altos e baixos, chegando a questionar minhas escolhas e cogitando buscar por outras áreas. Apesar de ser responsável pelo conteúdo, contei com a inestimável ajuda, conselhos, ensinamentos e ricas discussões com amigos.

Sou muito grato pelos conselhos, sugestões, comentários, pela compreensão e apoio de meu orientador Paulo. Também agradeço a Olga pelo incentivo, pelas discussões e por transmitir seu entusiasmo pela ciência. Considero ambos meus padrinhos acadêmicos.

Quero agradecer os professores Edmo, Ilson, Joseph, Marcelo, Miranda, W. Dewar, W. Large pelas aulas inspiradoras e pelas discussões nos corredores.

Aos colegas e amigos Carine, Wandrey, Ana Paula, Bia, Patricia, Gilberto, Marcos, José Roberto, Márcio B., Márcio Y., Fabrício, Fábio, Francisco José, Paulo Henrique, Betina, Michele, Nery, Riguel, Jana, Ricardo, Maria Fernanda pelo companheirismo e por tornarem a vida universitária menos difícil e ao mesmo tempo insuportável.

Agradeço a Mariana pela companhia e apoio nos momentos difíceis, que nos últimos meses não foram poucos, e nos momentos de alegria, que daqui em diante tornar-se-ão mais frequentes.

Obrigado à Ana Paula, Leticia, Silvana, da Secretaria de Pós-Graduação; à Cida e ao Wagner da biblioteca.

Meu obrigado à Myriam e à Julia por me ajudarem a manter a sanidade. Também agradeço à Sylvia, e as irmãs Julia e Catharina por me lembrarem que a ciência e a matemática devem ser compreensíveis para se tornarem relevantes.

À *Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data* (Aviso) por distribuir os dados de altimetria por satélites produzidos por *Data Unification and Altimeter Combination System* (SSALTO/DUACS) com o apoio da *Centre National*

d'Études Spatiales (CNES).

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo nº 142762/2011-3) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

E finalmente aos amigos que, apesar de não contribuírem diretamente na elaboração desta tese, sempre lembraram que a vida não é só feita de equações indecifráveis e gráficos hipnotizantes.

Resumo

A dinâmica em meso-escala nos oceanos globais é dominada por sinais propagantes para oeste. Estudos pioneiros a utilizar medidas de altimetria por satélites associaram este sinal a ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico. Com o recente aumento de resolução nos dados altimétricos, estudos mais recentes sugerem que vórtices de meso-escala não-lineares seriam os principais responsáveis pelo sinal propagante observado, em detrimento às ondas de Rossby. O objetivo do presente trabalho é identificar estruturas coerentes associadas a vórtices de meso-escala e distingui-las das ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico. Mapas de anomalia da altura da superfície do mar (η) foram filtrados através da análise de ondaletas e um algoritmo de identificação e extração de estruturas vorticais. Os vórtices extraídos foram caracterizados através do ajuste de um parabolóide elíptico. O algoritmo demonstrou-se capaz de identificar e extrair as estruturas associadas a vórtices de meso-escala. Os resultados indicam predominância de anéis vorticais anti-ciclônicos. Os espectros de potência zonais-temporais de η indicam que a maior parte da variância distribui-se na região não-dispersiva do espectro teórico de ondas de Rossby lineares. A propagação observada nos componentes resultantes do filtro indicam coexistência de ondas de Rossby lineares e vórtices de meso-escala, comprovando assim a hipótese científica estabelecida para este trabalho.

Palavras-chave: sensoriamento remoto, espectro de potência, ondaletas.

Abstract

The mesoscale dynamics in the global oceans is dominated by westward propagating signals. Pioneering studies using satellite altimetry measurements associated these observations with first-mode baroclinic Rossby waves. With the increase in altimetry data resolution, recent studies suggest that nonlinear mesoscale eddies are responsible for the westward propagating signal rather than Rossby waves. The objective of this study is to identify coherent structures associated with mesoscale eddies and distinguish them from long first-mode baroclinic Rossby waves. Sea surface height anomaly maps (η) were filtered through wavelet analysis and an algorithm for identifying and extracting vortical structures. The extracted vortices were characterized by adjusting an elliptic paraboloid. The algorithm proved to be able to identify and extract the structures associated to mesoscale eddies. The results indicate a predominance of anti-cyclonic rings. Zonal-temporal power spectral density of η indicate that most of the variance is located at the non-dispersive region of the theoretical linear Rossby wave spectra. The observed propagation of the filtered components indicate coexistence of linear Rossby waves and mesoscale eddies, thus proving the scientific hypothesis of this study.

Keywords: remote sensing, spectral power, wavelets.

*“Viver é como andar de bicicleta:
é preciso estar em constante movimento para manter o equilíbrio.”
– Albert Einstein*

Sumário

| | | |
|----------|--|-------------|
| | Sumário | vi |
| | Lista de figuras | viii |
| | Lista de tabelas | xi |
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Vórtices de meso-escala | 3 |
| 1.2 | Ondas de Rossby | 6 |
| 2 | Objetivos | 8 |
| 3 | Dados e metodologia | 9 |
| 3.1 | Altimetria por satélites | 9 |
| 3.2 | Análise espectral | 12 |
| 3.2.1 | Densidade de potência espectral | 13 |
| 3.2.2 | Espectro de ondaletas | 13 |
| 3.3 | Análise de ondaletas ortogonal bidimensional | 15 |
| 3.4 | Estruturas coerentes | 19 |
| 3.5 | Identificação de vórtices | 20 |
| 3.6 | Dados auxiliares | 22 |
| 4 | Variabilidade global da altura da superfície do mar | 25 |
| 4.1 | Altura da superfície do mar e o sinal pré-filtrado | 25 |
| 4.2 | Média, tendências e climatologia | 29 |
| 4.3 | Espectro espacial | 41 |
| 4.4 | Espectro zonal-temporal | 43 |
| 4.5 | Contribuições e tendências espectrais | 48 |
| 5 | Separação de sinais de meso-escala | 54 |
| 5.1 | Filtragem e identificação de estruturas | 54 |
| 5.2 | Espectro | 57 |
| 5.3 | Características dos vórtices | 57 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6 | Conclusões | 73 |
| | A – Análise de Fourier | 76 |
| A.1 | Transformada de Fourier | 77 |
| A.1.1 | Convolução | 79 |
| A.1.2 | Filtro de resposta impulsiva | 80 |
| A.1.3 | Propriedades importantes | 81 |
| A.1.4 | Análise espectral através da transformada de Fourier | 81 |
| | APÊNDICE B – Ondaletas | 83 |
| B.1 | Frequência e escala | 86 |
| B.2 | Função Escala | 89 |
| B.3 | Transformada de ondaletas discreta | 91 |
| B.4 | Escalograma | 91 |
| B.5 | Ondaletas ortogonais | 95 |
| B.5.1 | Análise de multi-resolução | 95 |
| B.5.2 | Filtros conjugados | 97 |
| B.5.3 | Ondaleta de Daubechies | 100 |
| | Referências | 101 |

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Esquema simplificado da estrutura básica de vórtices no hemisfério norte | 4 |
| Figura 2 – Diagrama de dispersão normalizado de ondas de Rossby | 7 |
| Figura 3 – Linha do tempo da série de referência da Aviso | 10 |
| Figura 4 – Trajetória das órbitas distintas dos satélites TOPEX/Poseidon e ERS-2 | 11 |
| Figura 5 – Limites das principais bacias oceânicas | 12 |
| Figura 6 – Exemplo de coeficientes de ondaleta para o mapa de anomalia da altura da superfície do mar | 17 |
| Figura 7 – Detalhe do sinal de anomalia da altura da superfície do mar decomposto através da análise de ondaletas no Oceano Atlântico sul | 18 |
| Figura 8 – Mapa do raio de deformação de Rossby | 23 |
| Figura 9 – Médias zonais do raio de deformação de Rossby e da componente zonal da velocidade geostrófica | 23 |
| Figura 10 – Exemplo de mapa de anomalia da altura da superfície do mar com separação de estruturas coerentes e não-coerentes | 26 |
| Figura 11 – Densidades de potência espectral bidimensional global do sinal de anomalia da altura da superfície do mar decomposto através da análise de ondaletas | 28 |
| Figura 12 – Exemplo de densidades de potência espectral de mapas de anomalia da altura da superfície do mar original e decompostos em componentes coerentes e não-coerentes | 29 |
| Figura 13 – Detalhe do sinal de anomalia da altura da superfície do mar coerente decomposto através da análise de ondaletas no Oceano Atlântico sul | 30 |
| Figura 14 – Densidades de potência espectral bidimensional global do sinal de anomalia da altura da superfície do mar coerente decomposto através da análise de ondaletas | 31 |
| Figura 15 – Limiar da transformada de ondaletas e os erros médio, médio absoluto e quadrático médio entre o sinal original e o sinal coerente | 32 |

| | |
|--|----|
| Figura 16 – Variação temporal da anomalia da altura da superfície do mar média por bacia oceânica e global | 33 |
| Figura 17 – Variação temporal do desvio padrão espacial (σ_η) da anomalia da altura da superfície do mar por bacia oceânica e global | 35 |
| Figura 18 – Mapa de desvio padrão da altura da superfície do mar global | 36 |
| Figura 19 – Mapa de tendências da altura da superfície do mar globais | 37 |
| Figura 20 – Mapas da climatologia mensal da anomalia da altura da superfície do mar | 38 |
| Figura 21 – Densidade de potência espectral bidimensional (zonal e meridional) da anomalia da altura da superfície do mar | 40 |
| Figura 22 – Diagramas zonais–temporais das densidades de potência espectral bidimensionais global | 42 |
| Figura 23 – Diagrama zonal–temporal da anomalia da altura da superfície do mar na latitude 15,375°N | 44 |
| Figura 24 – Diagrama zonal–temporal da anomalia da altura da superfície do mar na latitude 22,375°S | 45 |
| Figura 25 – Densidade de potência espectral bidimensional (zonal e temporal) da anomalia da altura da superfície do mar na latitude 15,375°N | 46 |
| Figura 26 – Densidade de potência espectral bidimensional (zonal e temporal) da anomalia da altura da superfície do mar na latitude 22,375°S | 47 |
| Figura 27 – Análise de ondaletas do sinal da anomalia da altura da superfície do mar média global | 49 |
| Figura 28 – Mapas de contribuição espectral relativa em relação ao espectro de ondaletas global com período de onda inferior a dois anos | 50 |
| Figura 29 – Mapas de tendências espectrais para as faixas de períodos de 3, 6, 12 e 24 meses | 52 |
| Figura 30 – Detalhe de componentes do mapa de anomalia da altura da superfície do mar para o dia 21 de junho de 2006 no Oceano Atlântico Sul | 54 |
| Figura 31 – Exemplos de ajuste de parabolóide elíptico a um vórtice anti-ciclônico e ciclônico | 61 |
| Figura 32 – Sequência de mapas dos componentes do filtro no Oceanos Atlântico Sul | 62 |

| | |
|---|----|
| Figura 33 – Sequência de mapas dos componentes do filtro no Oceano Pacífico Norte | 63 |
| Figura 34 – Diagrama zonal-temporal dos componentes do filtro no Oceano Atlântico a 22,375°S | 64 |
| Figura 35 – Diagrama zonal-temporal dos componentes do filtro no Oceano Pacífico a 15,375°N | 65 |
| Figura 36 – Densidade de potência espectral bidimensional (zonal e temporal) dos componentes filtrados na latitude 15,375°N | 66 |
| Figura 37 – Densidade de potência espectral bidimensional (zonal e temporal) dos componentes filtrados na latitude 22,375°S | 67 |
| Figura 38 – Mapas de desvio padrão para cada componente do filtro | 68 |
| Figura 39 – Raio médio de anéis vorticais anti-ciclônicos e ciclônicos | 69 |
| Figura 41 – Polaridade média dos anéis vorticais detectados | 71 |
| Figura 42 – Número de vórtices detectados através do sistema de identificação para excentricidade | 71 |
| Figura 43 – Mapas da altura média dos anéis vorticais anti-ciclônicos e ciclônicos | 72 |
| Figura 44 – Comparação entre a análise espectral de dois sinais periódicos com mesmas frequências | 78 |
| Figura 45 – As ondaletas de Morlet e chapéu mexicano e suas transformadas de Fourier | 85 |
| Figura 46 – As ondaletas de Morlet e chapéu mexicano em diferentes escalas | 87 |
| Figura 47 – Caixas de Heisenberg e cone de influência | 90 |
| Figura 48 – Escalograma e diagrama de fase dos dois sinais periódicos | 93 |
| Figura 49 – Espectro de ondaletas global e espectro de potência de Fourier normalizados | 94 |
| Figura 50 – Ondaleta de Haar | 97 |
| Figura 51 – Sinal decomposto pela ondaleta de Haar segundo a análise de multi-resolução | 98 |
| Figura 52 – Ondaleta de Daubechies DB10 | 99 |
| Figura 53 – Sinal decomposto pela ondaleta de Daubechies DB10 segundo a análise de multi-resolução | 99 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Tendências de média e desvio padrão da anomalia da altura da superfície do mar entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 | 34 |
| Tabela 2 – Contribuição relativa média de cada faixa de períodos em relação ao espectro de ondaletas global | 51 |
| Tabela 3 – Tendências espectrais médias para cada faixa de períodos | 53 |
| Tabela 5 – Propriedades importantes da transformada de Fourier | 82 |

Lista de símbolos e abreviaturas

L_{Ro} raio de deformação de Rossby interno.

η anomalia da altura da superfície do mar.

ASM altura da superfície do mar.

Aviso *Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data.*

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

chl-*a* clorofila-*a*.

CNES *Centre National d'Études Spatiales.*

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

CWT transformada de ondaletas contínua *continuous wavelet transform.*

DWT transformada de ondaletas discreta *discrete wavelet transform.*

Envisat *Environmental Satellite.*

ERS *European Remote Sensing Satellite.*

FFT transformada rápida de Fourier (*fast Fourier transform*).

J-1 Jason-1.

J-2 Jason-2.

MAE erro médio absoluto (*mean absolute error*).

ME erro médio (*mean error*).

PSD densidade de potência espectral (*power spectral density*).

RMSE erro quadrático médio (*root-mean-square error*).

SSALTO/DUACS *Data Unification and Altimeter Combination System*.

T/P TOPEX/Poseidon.

TSM temperatura da superfície do mar.

1 Introdução

A dinâmica dos oceanos, em meso- e larga-escalas, é caracterizada (i) pelo ciclo anual de expansão e contração da coluna de água causada, em primeira ordem, pela variação de insolação em cada hemisfério durante as estações do ano; (ii) pelas correntes superficiais forçadas pelo vento, que formam os grandes giros e cuja principal característica é a intensificação das correntes de borda oeste; (iii) pela propagação, essencialmente zonal, de ondas planetárias; e (iv) pela formação e advecção de estruturas vorticais que permanecem estáveis por longos períodos de tempo. Para observar a variação espacial e temporal da dinâmica dos oceanos em meso- e larga-escalas, a comunidade oceanográfica conta atualmente com um grande conjunto de dados obtidos através de sensoriamento remoto, como por exemplo as medidas de altura da superfície do mar (ASM) a partir da altimetria por satélites, medidas de temperatura da superfície do mar (TSM), estimativas da velocidade do vento por medidas de escaterômetros, estimativas de concentração de clorofila-*a* (chl-*a*) a partir de imagens satelitais de cor do oceano, e perfis hidrográficos dos perfiladores autônomos do programa Argo.

A altimetria por satélites fornece informação espacial sobre a extensão, a forma e a variabilidade de determinados processos oceânicos, principalmente de meso- e larga-escalas. Os primeiros estudos realizados com os campos de ASM medidos pelos altímetros TOPEX/Poseidon (T/P), e seus sucessores Jason-1 (J-1) e Jason-2 (J-2), mostram feições com propagação predominante para oeste presentes em todos os oceanos. Estas feições são associadas à presença de ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico (CHELTON; SCHLAX, 1996; POLITO; CORNILLON, 1997; CIPOLLINI *et al.*, 1997; KILLWORTH *et al.*, 1997; POLITO; LIU, 2003).

Ondas de Rossby pertencem a uma classe especial de ondas de larga escala com frequências sub-inerciais, tanto nos oceanos quanto na atmosfera. Elas devem sua existência à esfericidade e à rotação da Terra. O mecanismo restaurador destas ondas é dado pela conservação de vorticidade potencial (ROSSBY *et al.*, 1939). A teoria de ondas de Rossby é extensamente discutida em livros de dinâmica de fluidos geofísicos, como por exemplo em Gill (1982), Pedlosky (1987), Vallis (2006). O padrão geral de

variação da densidade da água dos oceanos com a profundidade, leva à criação de um modelo simplificado dos oceanos: um sistema de duas camadas com a camada superficial de água mais quente e menos densa e a camada de fundo mais fria e densa. Ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico são causadas por oscilações verticais da interface entre as duas camadas, e possuem propagação para oeste, escala espacial horizontal da ordem de centenas a milhares de quilômetro e podem levar de meses a anos para atravessar uma bacia oceânica. Esta classe de ondas é de grande importância pois são o principal mecanismo de transferência de energia através das bacias oceânicas, e são responsáveis pelo estabelecimento da principal característica da circulação em larga escala: a intensificação oeste dos grandes giros (ANDERSON; GILL, 1975). Elas afetam as correntes e transportam momentum e energia através das principais bacias oceânicas. Também influem nos efeitos de grandes eventos climáticos na circulação oceânica e governam o tempo de resposta dos oceanos às forçantes atmosféricas.

Por outro lado, Stammer (1997) mostra que a distribuição geográfica dos processos físicos que geram variabilidade de meso-escala da ASM é homogênea e sugere que esta variabilidade está relacionada à presença de vórtices gerados por instabilidade baroclínica. Trabalhos mais recentes que utilizam campos de alta resolução da ASM, construídos através da fusão de medidas de dois altímetros com operação simultânea (TRAON; DIBARBOURE, 1999; DUCET *et al.*, 2000; TRAON *et al.*, 2001; TRAON *et al.*, 2003; PASCUAL *et al.*, 2006), revelam feições em escalas espaciais menores que as observadas apenas com os campos construídos a partir das medidas do T/P e J-1, por exemplo. Chelton *et al.* (2007) sugerem que a variabilidade da ASM é dominada por vórtices de meso-escala não-lineares e com propagação para oeste em todas as bacias oceânicas. Os mesmos autores apontam que, nas regiões oceânicas onde o desvio padrão da ASM é grande, há maior densidade de vórtices e também vórtices com as maiores amplitudes. O diâmetro médio dos vórtices varia de 200 km, em médias e baixas latitudes, a 100 km em latitudes mais altas (CHELTON *et al.*, 2007; CHELTON *et al.*, 2011). Ao estudar as principais regiões de ressurgência, Chaigneau *et al.* (2009) sugerem que vórtices são gerados ao longo das costas e apresentam locais preferenciais para a formação destas estruturas. Além disso, os mesmos autores observam regiões com predominância de vórtices ciclônicos ou anti-ciclônicos e sugerem influência da circulação média.

O campo de velocidades horizontal de vórtices estão quase em balanço geostrófico. Estes movimentos quase-geostróficos são aproximadamente hidrostáticos e ocorrem em um fluido em rotação estratificado quando a escala horizontal do movimento é da ordem do raio de deformação de Rossby interno (L_{Ro}). Entretanto, para compreender a evolução e a dinâmica local de estruturas vorticais, é importante considerar a componente vertical e os pequenos desvios do balanço geostrófico (ROBINSON, 1983). Anéis vorticais tendem a manter um núcleo interno com água aprisionada e troca de água apenas nas bordas. Eles mantêm sua identidade apenas na termoclina, uma vez que a radiação de ondas planetárias pode dispersar a energia do fluxo profundo mais fraco (ROBINSON, 1983). Vórtices são gerados de diferentes formas, como por exemplo: interações de correntes de larga escala com a topografia de fundo, geometria costeira ou presença de ilhas; instabilidade baroclínica local e forçantes de vento próximo à costa; alteração de vorticidade através do rotacional da tensão de cisalhamento do vento e bombeamento de Ekman; conservação de vorticidade e instabilidade de correntes costeiras; e ondas confinadas à costa de origem equatorial.

Do ponto de vista dinâmico, tanto as ondas de Rossby quanto os vórtices de meso-escala, satisfazem a teoria quase-geostrófica de conservação de vorticidade. Isto dificulta a distinção entre um fenômeno e outro. No entanto, distinguir entre ondas de Rossby lineares e vórtices não lineares é importante, pois a última transporta parcelas de água e mantém suas propriedades físicas, químicas e biológicas. Vórtices transportam calor e momentum, interagem com o campo de correntes médio e podem influenciar a dinâmica do ecossistema marinho. Por outro lado, ondas propagam energia através das bacias oceânicas sem afetar o transporte de massa e influenciam a intensificação das correntes de borda oeste.

1.1 Vórtices de meso-escala

Vórtices oceânicos são comumente vistos como corpos d'água em rotação que preservam a sua forma deslocando-se por longas distâncias. O mecanismo básico que controla sua dinâmica é o balanço geostrófico. A figura 1 ilustra o corte vertical através de dois tipos básicos de vórtices: um ciclônico e outro anti-ciclônico no hemisfério norte. No hemisfério sul o sentido de rotação seria oposto, no entanto preservando o restante da

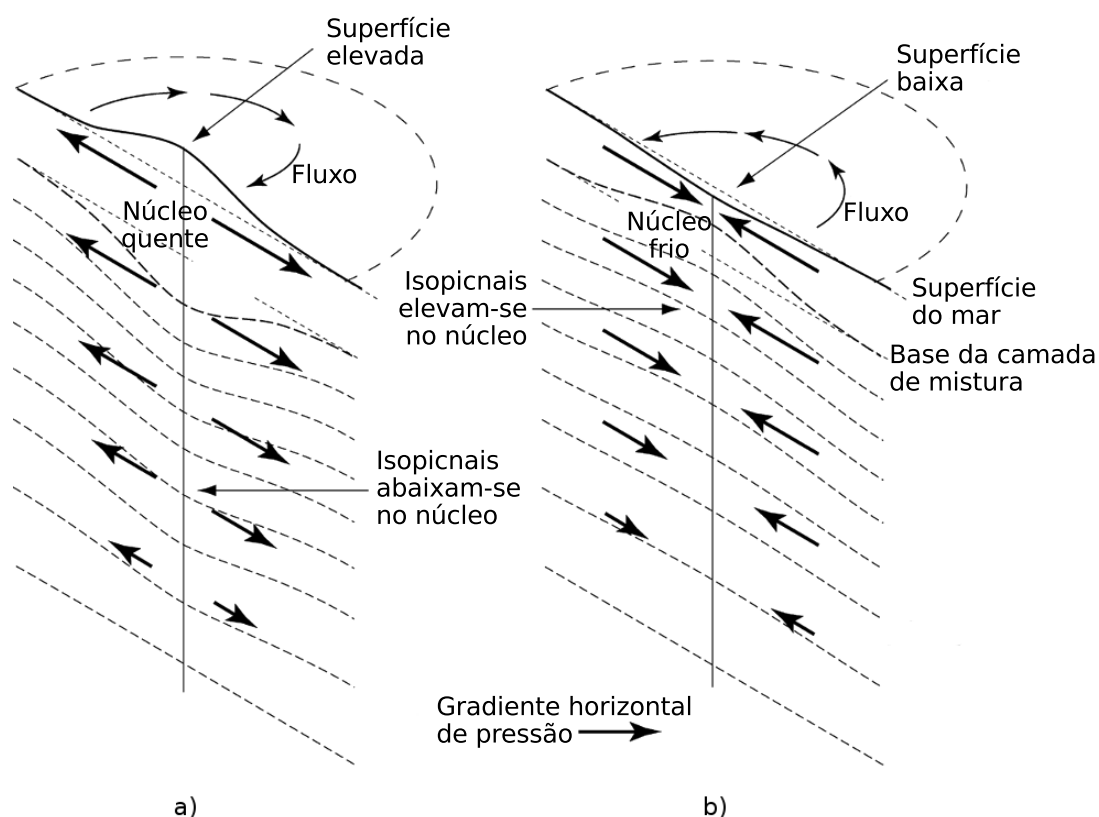


Figura 1 – Esquema simplificado da estrutura básica de vórtices a) anti-ciclônico (núcleo quente) e b) ciclônico (núcleo frio) no hemisfério norte. Adaptado de Robinson (2010)

estrutura. O balanço geostrófico atua em todas as profundidades. O balanço é entre o gradiente horizontal de pressão (indicado pelas setas) e o fluxo circular horizontal, que por sua vez gera uma força radial para fora se o vórtice for anti-ciclônico ou para dentro se for ciclônico. O gradiente horizontal de pressão é mantido pela inclinação da superfície livre que se eleva (diminui) em direção ao centro no vórtice de núcleo quente (frio) (ROBINSON, 2010).

A observação de vórtices através de oceanografia por satélites requer que os vórtices possuam uma assinatura particular na superfície. As principais características de um vórtice são suas linhas de corrente curvas, e muitas vezes fechadas, no campo horizontal da velocidade superficial. Considerando-se que os vórtices estejam em revolução de

corpo sólido, a assinatura superficial de anomalia da altura da superfície do mar (η) em seu núcleo deve, em primeira ordem, ter forma parabólica.

A região de retroflexão da Corrente Norte do Brasil desprende constantemente grandes vórtices anti-ciclônicos. ao e Johns (2011) estudaram vórtices desta região e observaram que anéis vorticais possuem uma estrutura radial com dois regimes: um núcleo interior quase em rotação de corpo sólido e um anel exterior com um regime de decaimento exponencial.

O parâmetro de Okubo-Weiss (OKUBO, 1970; WEISS, 1991) de identificação de vórtices é calculado a partir dos campos de vorticidade e das componentes normal e de cisalhamento da tensão lateral. Em regiões em que a vorticidade domina a tensão, define-se como centro de um vórtice. Chelton *et al.* (2011) chamam a atenção para problemas com métodos baseados no parâmetro de Okubo-Weiss: (i) necessidade de especificar-se um limiar para determinar a ocorrência de um vórtice; (ii) métodos numéricos para derivação são muito suscetíveis ao ruído no campo de ASM; (iii) os contornos obtidos através deste método muitas vezes não coincidem com contornos fechados de ASM.

Chaigneau *et al.* (2008) definem um vórtice como regiões com linhas de corrente fechada. Eles partem do princípio de que, na aproximação geostrófica, linhas de corrente são paralelas às linhas de ASM, de modo que linhas de contorno fechadas de ASM correspondem a linhas de corrente fechadas.

A análise de ondaletas permite descrever vórtices coerentes através de um número pequeno dos coeficientes de ondaleta mais significativos a partir de mapas de vorticidade (DOGLIOLI *et al.*, 2007; SIEGEL; WEISS, 1997).

Beron-Vera *et al.* (2013) sugerem uma metodologia para detecção de vórtices baseada em sistemas dinâmicos não-lineares. Estes autores argumentam que a dinâmica de vórtices é tratada com o formalismo Lagrangiano enquanto que os principais sistemas de detecção de vórtices são Eulerianos. Para eles, o principal problema da abordagem Euleriana é a incapacidade de revelar o transporte de material a longas distâncias e a coerência em fluxos instáveis. Entretanto a metodologia que eles propõem possui um custo computacional elevado.

1.2 Ondas de Rossby

Ondas de Rossby pertencem a uma classe especial de ondas de larga escala com frequências sub-inerciais, tanto nos oceanos quanto na atmosfera. Elas devem sua existência à esfericidade e rotação da Terra e seu mecanismo restaurador é dado pela conservação de vorticidade potencial Rossby et al. 1939. A teoria de ondas de Rossby é extensamente discutida em (GILL, 1982; PEDLOSKY, 1987; VALLIS, 2006).

Por simplificação, assume-se um modelo de duas camadas cuja espessura da camada superficial é H_1 de densidade ρ_1 e cuja camada de fundo possui espessura infinita e densidade ρ_2 . Este modelo também é conhecido como modelo de $1^{1/2}$ camada. A dinâmica de ondas de Rossby pode ser descrita pela equação da conservação da vorticidade linearizada e aproximada pelo plano β , segundo Pedlosky (1987),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - L_{Ro} \Psi_1 \right] + \beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

onde

$$L_{Ro} = \frac{f_0^2}{c^2} = \frac{f_0^2}{g (\Delta\rho/\rho) H_1}, \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0}, \quad (1.2)$$

e g é a aceleração da gravidade, $f_0 = 2\Omega \sin(\theta_0)$ é o parâmetro de Coriolis, $\beta = \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0$ e ρ_0 é a densidade média da água do mar. A latitude central do plano β é θ_0 e a é o raio médio da Terra. Assumindo-se uma função de corrente de forma ondulatória $\Psi_1 = \Re [A_1 e^{i(kx+ly-\omega t)}]$ como solução da equação (1.1), obtém-se a seguinte relação de dispersão para ondas de Rossby em um fluido estacionário,

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + L_{Ro}}. \quad (1.3)$$

A figura 2 ilustra a forma da relação de dispersão. Ondas de Rossby podem ser classificadas em ondas curtas e ondas longas, dependendo da relação entre o número de onda e o raio de deformação de Rossby. Considerando-se a propagação de onda em um fluxo zonal com velocidade \vec{U} , a relação de dispersão para ondas de Rossby com efeito de corrente zonal é,

$$\omega = \vec{U}k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2 + F_1} \quad (1.4)$$

Polito e Cornillon (1997) mostram que propagação meridional de ondas de Rossby é significativamente menos persistente que propagação zonal, por isso é usual considerar-se

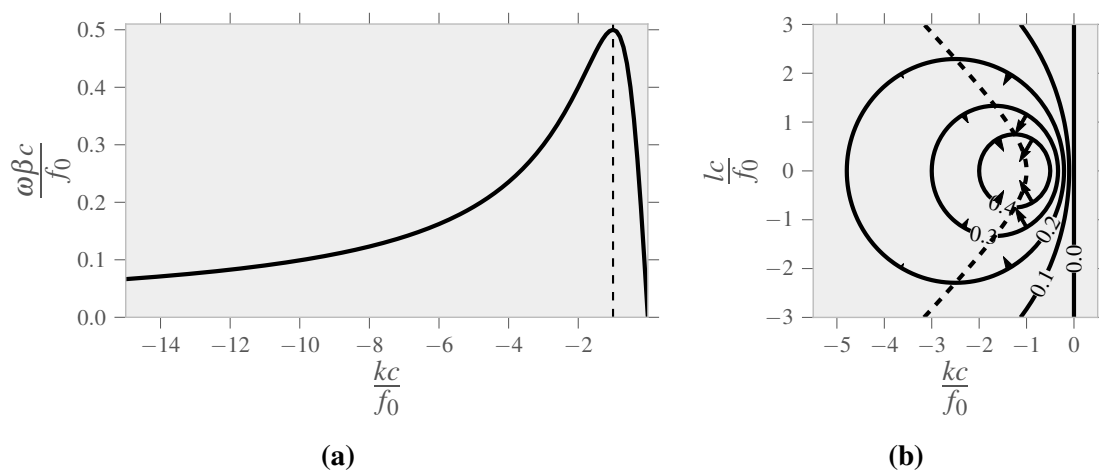


Figura 2 – Diagrama de dispersão normalizado de ondas de Rossby. Adaptado de Gill (1982).

$l = 0$. Neste caso, define-se a velocidade de fase por $c_p = \frac{\omega}{k}$ e a velocidade de grupo por $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. A energia da onda propaga-se com velocidade de grupo e pode tornar-se nula quando $\omega = -\frac{1}{2} \frac{\beta}{L_{Ro}}$. Este limite introduz uma latitude crítica a partir da qual não há propagação de ondas de Rossby.

2 Objetivos

Baseado nas recentes evidências a respeito das estruturas vorticais propagantes com velocidades de translação semelhantes àquelas atribuídas a ondas de Rossby, a hipótese científica do presente trabalho é que ondas de Rossby e vórtices de meso-escala podem ser confundidas entre si ou até mesmo coexistir. Portanto, o objetivo principal é identificar estruturas coerentes associadas a vórtices de meso-escala e distingui-las das ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico a partir de dados de altimetria por satélite.

Objetivos específicos deste trabalho são:

- Caracterizar a variabilidade do sinal de altura da superfície do mar (ASM) para determinar as escalas dos principais fenômenos observados;
- Desenvolver um filtro baseado na transformada de ondaletas discreta bidimensional para remoção do sinal de larga-escala;
- Desenvolver um algoritmo de identificação e extração de estruturas candidatas a vórtices;
- Classificar estruturas vorticais do sinal filtrado;
- Descrever os padrões gerais dos componentes filtrados;

3 Dados e metodologia

O presente trabalho utiliza dados de altimetria por satélites para a separação de estruturas vorticais a partir do sinal de altura da superfície do mar (ASM). A principal fonte de dados é a série temporal de ASM distribuída pela *Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data* (Aviso). Estes dados são interpolados em mapas com grade regular de $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ a cada 7 dias. A série temporal completa da Aviso possui mais de 20 anos ininterruptos de medidas precisas da ASM. Para satisfazer os objetivos do presente estudo, as principais características espectrais de ASM são determinadas através da análise de Fourier e da análise de ondaletas. Em seguida, estruturas vorticais são identificadas aplicando-se à série temporal de ASM um filtro baseado na transformada de ondaletas discreta bidimensional e na estrutura geométrica do sinal.

3.1 Altimetria por satélites

O conjunto de dados da altura da superfície do mar é construído por *Data Unification and Altimeter Combination System* (SSALTO/DUACS) e mescla medidas dos altímetros a bordo dos satélites Jason-1 (J-1), Jason-2 (J-2), TOPEX/Poseidon (T/P), *Environmental Satellite* (Envisat), *European Remote Sensing Satellite* (ERS)-1 e ERS-2, fornecendo assim uma série temporal longa, homogênea, inter-calibrada e altamente precisa de ASM. A série temporal utilizada mescla medidas de no máximo dois satélites em operação simultânea, um com órbita aproximada de 10 dias (T/P, J-1, J-2) e o segundo com órbita de 35 dias (ERS 1/2, Envisat), e é chamada de *série de referência*. A figura 3 ilustra a linha do tempo das medidas da *série de referência* da Aviso e mostra o sensor de origem dos dados mesclados no período analisado. Nota-se períodos em que dados de apenas um satélite estão disponíveis, e que o satélite Envisat não envia mais medidas desde abril de 2012.

Mesclando-se as medidas ao longo de diferentes órbitas proporciona um aumento na resolução amostral. Para ilustrar, a figura 4 apresenta as trajetórias dos satélites T/P e ERS 2 (separadas e mescladas) percorridas entre os dias 6 e 13 de junho de 2001 sobre

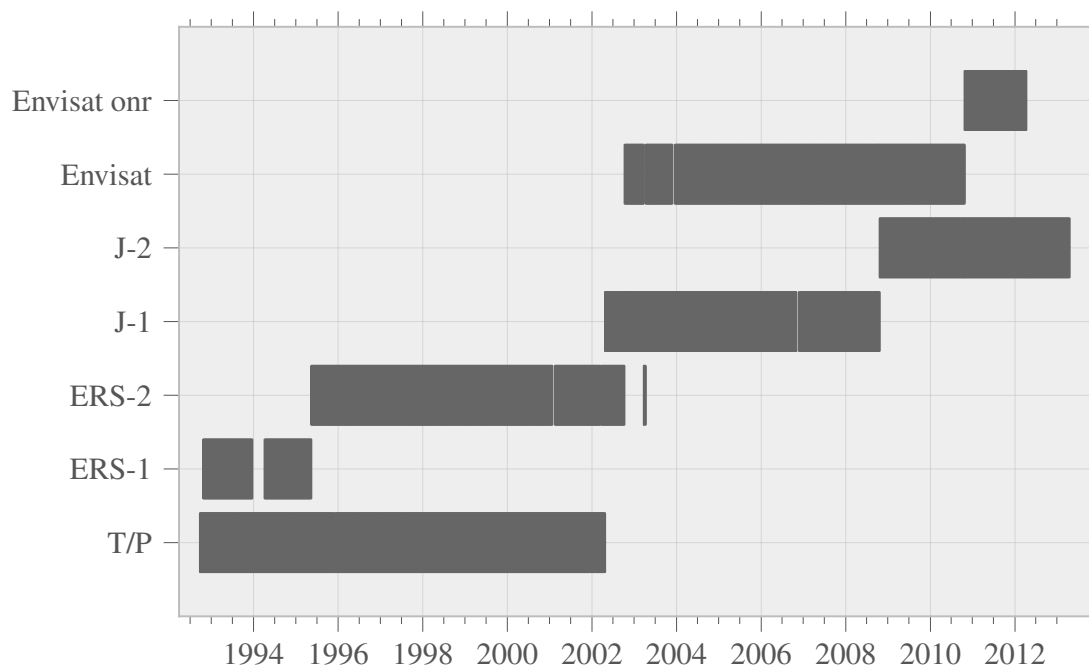


Figura 3 – Linha do tempo das medidas da ‘série de referência’ da Aviso. A ‘série de referência’ mescla medidas de dois satélites com operação simultânea e órbitas distintas: TOPEX/Poseidon (T/P), Jason-1 (J-1), Jason 2 (J-2), ERS-1, ERS-2, Envisat e Envisat órbita não-repetitiva (onr).

a região do Oceano Atlântico Sul. Neste intervalo de 7 dias, o T/P completa um pouco mais da metade de seu ciclo repetitivo, enquanto que o ERS-2 completa um pouco menos de um quarto de seu respectivo ciclo. Como cada satélite possui trajetórias distintas, é possível cobrir uma área de amostragem maior durante o mesmo intervalo de tempo, permitindo um aumento tanto na resolução espacial quanto na resolução temporal.

Para que as medidas dos diferentes sensores sejam equivalentes, é preciso garantir que elas sejam inter-calibradas. Traon e Ogor (1998) apontam que é preciso utilizar as mesmas correções altimétricas (modelos de maré, modelos meteorológicos de barômetro invertido e correções troposféricas, etc.), que as órbitas devem ser calculadas utilizando o mesmo modelo geopotencial e com sistemas de referência consistentes. Além disso, a calibração entre as medidas dos satélites T/P, J-1 e J-2 e as medidas dos satélites ERS 1 e 2 e Envisat deve garantir diferenças mínimas nos pontos em que as órbitas se cruzam. Assim estes autores garantem que o novo conjunto de dados ao longo da trajetória dos

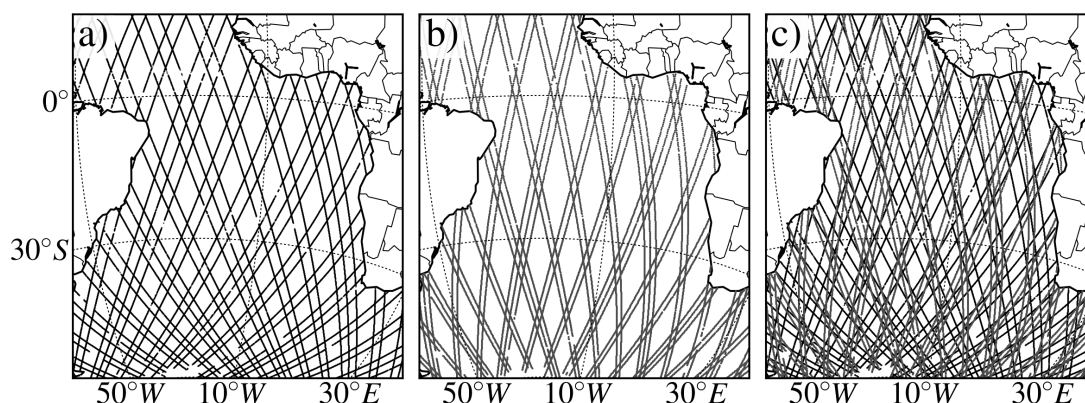


Figura 4 – Trajetória das órbitas distintas dos satélites (a) TOPEX/Poseidon (T/P), (b) ERS-2 e (c) a sobreposição das duas trajetórias. As trajetórias referem-se ao período de 7 dias entre 6 e 13 de junho de 2001. Os ciclos de varredura completos do T/P e do ERS-2 são de aproximadamente 10 dias e 35 dias, respectivamente.

satélites inter-calibrado possui erro quadrático médio (RMS) da ordem de 2 cm.

No presente trabalho utiliza-se a série de referência ao longo da trajetória do satélite distribuída pela Aviso entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012. Apesar do conjunto de dados ter início anterior, optou-se pelo uso de 20 anos completos de dados precisos em alta resolução. Este conjunto de dados é interpolado em uma série de mapas globais com grade regular de $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ a cada 7 dias através do método de curvatura contínua mínima (SMITH; WESSEL, 1990). Este método de interpolação permite também incorporar pesos às medidas de entrada. Como pesos, adotou-se uma função gaussiana no tempo centrada no instante médio do mapa interpolado.

Para reduzir os efeitos de borda dos continentes e problemas inerentes aos dados altimétricos sobre a plataforma continental, ignora-se regiões de águas rasas ($H < 1000$ m) e de pequenas ilhas. A figura 5 mostra a máscara de dados aplicada a todos os mapas interpolados. A figura também apresenta os limites das principais bacias oceânicas (oceanos Atlântico, Pacífico e Índico) e mares abertos (Mar do Caribe, Golfo do México, Mar de Tasman e a Baía de Bengal). No hemisfério sul, as principais bacias são conectadas, mas para fins de análise quantitativa, assume-se como fronteiras entre os oceanos Índico e Pacífico, Pacífico e Atlântico, e Atlântico e Índico as longitudes de 145°E , 70°W e 20°E , respectivamente. Os limites meridionais da máscara são em $67,375^\circ$ norte e sul.

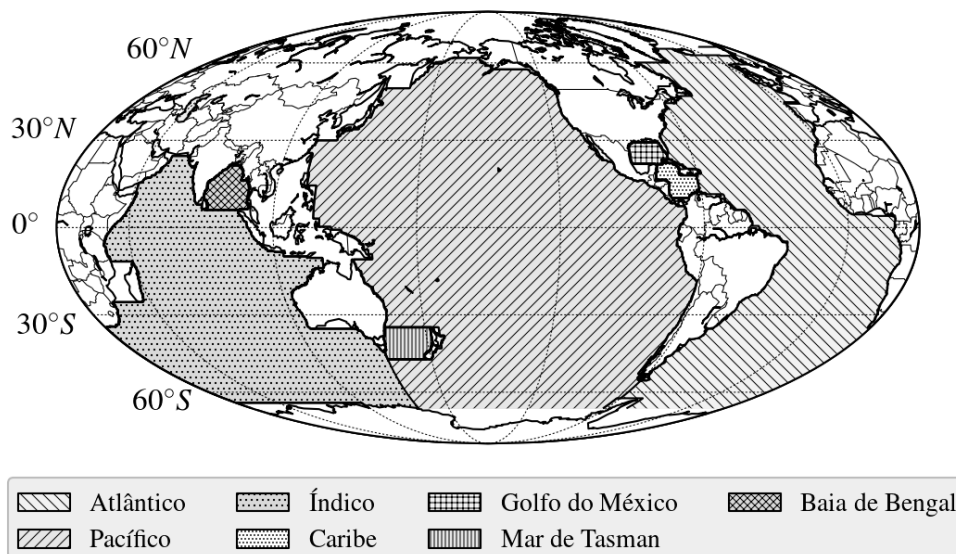


Figura 5 – Limites das principais bacias oceânicas e mares abertos: Oceano Atlântico, Oceano Pacífico, Oceano Índico, Mar do Caribe, Golfo do México, Mar de Tasman e Baía de Bengal.

Após a interpolação dos dados ao longo da trajetória do satélite, o conjunto de dados completo utilizado no presente trabalho é formado por 1440 mapas em uma grade regular de 1440 pontos de longitude por 540 pontos de latitude. Como o trabalho é focado na variabilidade em torno do estado médio do oceano, um mapa de ASM médio foi removido de todos os mapas da série temporal definindo assim a anomalia da altura do nível do mar $\eta_0(x, y, t) = \eta(x, y, t) - \bar{\eta}(x, y)$.

3.2 Análise espectral

A caracterização espectral do sinal de ASM é feita através da análise de Fourier e da análise de ondaletas. Ambos os métodos procuram ajustar um conjunto de dados (série temporal ou mapas) a uma expansão em série de funções analíticas, periódicas e com características distintas. O uso de funções analíticas simplifica a descrição do comportamento da variável a ser analisada através de funções cujo comportamento é bem conhecido. Detalhes sobre o formalismo matemático da análise de Fourier e da análise de ondaletas estão descritos nos apêndices A e B, respectivamente.

3.2.1 Densidade de potência espectral

Em análise de séries temporais é bastante usual caracterizar um sinal através de sua densidade de potência espectral (*power spectral density*) (PSD). Emery e Thomson (2001, capítulo 5) explicam detalhadamente a análise espectral com aplicações para oceanografia. No presente trabalho, os mapas e os diagramas zonais–temporais de ASM são caracterizados com o uso da transformada de Fourier bidimensional. Para o caso discreto, a transformada de Fourier de um sinal g é dada por

$$\hat{g}(f, \nu) = \Delta t \Delta x \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I g(n, i) e^{-2\pi\sqrt{-1}(f\frac{n}{N} + \nu\frac{i}{I})}, \quad (3.1)$$

onde n e i são os índices zonal e temporal na grade de dados; N e I são a quantidade de pontos na grade; f é a frequência dada em ciclos por unidade de tempo; ν é o número de onda dado em ciclos por unidade de distância; Δt e Δx são o intervalo de amostragem e a distância zonal entre pontos de grade. Optou-se denotar o número imaginário por $\sqrt{-1}$ para evitar confusão com o índice da coordenada zonal.

A potência de densidade espectral é definida por

$$PSD(f, \nu) = \frac{1}{\Delta t N \Delta x I} |\hat{g}(f, \nu)|^2. \quad (3.2)$$

A PSD pode ser determinada de maneira computacionalmente eficiente utilizando-se o algoritmo da transformada rápida de Fourier (*fast Fourier transform*) (FFT) para resolver a equação (3.1). O algoritmo da FFT é otimizado para operar em séries de dados cujo comprimento (número de medidas) sejam múltiplos de uma potência de dois. Uma propriedade importante da transformada de Fourier é que, segundo o teorema de Parseval–Plancherel A.2, a energia total do sinal é conservada no domínio da frequência (ou número de onda).

3.2.2 Espectro de ondaletas

A aplicação da transformada de ondaletas para estudos geofísicos teve início no princípio da década de 1980 com a análise de sinais sísmicos (MORLET *et al.*, 1982a; MORLET *et al.*, 1982b) e foi posteriormente formalizada por Grossmann e Morlet (1984) e Goupillaud *et al.* (1984). Avanços importantes foram feitos por Daubechies (1988), Mallat (1989b)

e Mallat (1989a). Detalhes sobre o formalismo matemático da análise de ondaletas podem ser encontrados em Daubechies (1992) e Morettin (1999). Uma extensa descrição sobre as aplicações da análise de ondaletas no processamento de sinais são apresentadas em Mallat (2008), enquanto que Kumar e Foufoula-Georgiou (1997) apresentam uma breve introdução à análise de ondaletas com aplicações geofísicas, e Torrence e Compo (1998) sugerem incluir testes de significância na análise de dados meteorológicos e oceanográficos.

A transformada de ondaletas é a convolução de versões escalonadas e transladadas de uma determinada função, chamada ondaleta, e extrai informação sobre o conteúdo espectral de uma série temporal em função do tempo e do período de oscilação. A principal característica da transformada de ondaletas é a localização de eventos nos espaços do tempo e da frequência simultaneamente. Ela permite o estudo de características locais do sinal com detalhes correspondentes à escala, ou seja, características amplas em grandes escalas e características detalhadas em escalas pequenas. As ondaletas também podem ser utilizadas para decomposição ou expansão em série, semelhante às séries de Fourier. A transformada de ondaletas não limita-se a apenas a uma única classe de funções harmônicas, como a transformada de Fourier, mas existe uma gama de funções que satisfazem certos requisitos, dos quais os dois principais são: possuir energia finita e norma unitária.

A transformada de ondaletas pode ser classificada em dois tipos: transformada de ondaletas contínua *continuous wavelet transform* (CWT) ou transformada de ondaletas discreta *discrete wavelet transform* (DWT). Apesar de numericamente os dados sempre serem tratados de maneira discreta, a CWT pode ser discretizada de forma bastante flexível tornando-se uma ferramenta importante para a identificação e localização de eventos nas diferentes faixas de frequência (ou escala). Por outro lado, a CWT possui apenas escalas múltiplas de potência de dois da ondaleta escolhida e é uma ferramenta poderosa para a decomposição, filtragem e reconstrução de dados.

Neste estudo utiliza-se a transformada de ondaletas para satisfazer dois objetivos distintos: (i) caracterizar a variabilidade temporal do espectro de ASM utilizando a CWT; e (ii) filtrar estruturas espaciais dos mapas individuais de ASM interpolados.

A variabilidade espectral ASM é determinada seguindo estritamente a análise de

ondaletas e a abordagem estatística sugeridas por Torrence e Compo (1998). Para as análises espectrais apresentadas neste estudo utilizamos a ondaleta de Morlet (equação B.14) com número de onda $\omega_0 = 6$. Na análise, as séries temporais são normalizadas por seu desvio padrão, permitindo que os resultados obtidos possam ser comparados com demais estudos. Assumimos nível de significância de 95 % em relação a um espectro teórico de ruído vermelho.

O filtro de estruturas espaciais aqui utilizado é baseado em características da DWT ortogonal. Parte do formalismo matemático sobre esta classe de ondaletas pode ser consultado no apêndice B. Uma forma simplificada para compreender o funcionamento da transformada de ondaletas discreta é através de conceitos da análise de multi-resolução (MALLAT, 1989b). A análise de multi-resolução pode ser resumida como a aplicação sucessiva de filtros conjugados nos quais o sinal, em um primeiro passo, é dividido em aproximação e detalhe. No passo seguinte, a aproximação resultante da transformação anterior é por sua vez separada novamente em aproximação e detalhe, e assim sucessivamente até que reste apenas um sinal médio que não possa mais ser decomposto. O exemplo mais simples deste tipo de ondaleta é a função *Haar*, descrita pela equação (B.5.1). Neste caso, a cada passo do filtro calcula-se a média entre dois pontos adjacentes, determinando-se assim a primeira aproximação; e a metade da diferença entre os mesmos pontos adjacentes, determinando o detalhe. O mesmo procedimento é aplicado no passo seguinte à aproximação obtida anteriormente. Esta sucessão de filtros garante a reconstrução perfeita do sinal original.

3.3 Análise de ondaletas ortogonal bidimensional

O conceito da análise de multi-resolução (MALLAT, 1989b; MALLAT, 1989a) pode ser estendido a duas dimensões e é aplicado aos mapas de ASM. Neste caso, o conceito de detalhe e aproximação ainda é válido, porém aplicado a cada um dos eixos, resultando assim em quatro componentes. Utilizando-se o conceito de espaço vetorial, o sinal original pertence ao espaço V_0 , ou seja, o espaço de maior resolução. Este espaço inicial é formado pelo produto tensorial de dois subespaços zonal V_j^x e meridional V_j^y idênticos, onde j indica o nível de resolução (passo do algoritmo piramidal do filtro conjugado) e a escala de resolução é dada por $s = 2^{-j}$. Utilizando o conceito de aproximação (V) e

detalhe (W), cada espaço V_j é, no caso generalizado,

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}, \quad j \geq 0. \quad (3.3)$$

Portanto, em duas dimensões temos o produto tensorial

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0^x \otimes V_0^y = (V_1^x \oplus W_1^x) \otimes (V_1^y \oplus W_1^y) \\ &= (V_1^x \otimes V_1^y) \oplus (V_1^x \otimes W_1^y) \oplus (W_1^x \otimes V_1^y) \oplus (W_1^x \otimes W_1^y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ou seja, o espaço V_0 pode ser decomposto em quatro subespaços distintos:

$V_1^x \otimes V_1^y$ Filtro de passa-baixa zonal e meridional. Apresenta informação aproximada do espaço inicial;

$V_1^x \otimes W_1^y$ Filtro de passa-baixa zonal e passa-alta meridional;

$W_1^x \otimes V_1^y$ Filtro de passa-alta zonal e passa-baixa meridional;

$W_1^x \otimes W_1^y$ Filtro de passa-alta zonal e meridional.

É comum representar os coeficientes da transformada de ondaleta bidimensional em forma de uma matriz como ilustra a figura 6 (a) para o mapa de η do dia 21 de junho de 2006 decomposto através do algoritmo piramidal da análise de multi-resolução (MALLAT, 1989a) utilizando a ondaleta de Daubechies DB10 (DAUBECHIES, 1992). A imagem é dividida em quatro quadrantes e cada quadrante é preenchido com cada um dos subespaços descritos pela equação (3.4). O quadrante referente à aproximação horizontal (zonal) e vertical (meridional) ($V_j^x \otimes V_j^y$) pode, por sua vez, ser dividido em quatro novamente e preenchido com os respectivos detalhes a cada passo do algoritmo do filtro conjugado.

Como a visualização da representação pelos coeficientes de ondaletas não é intuitiva, pode-se aplicar o operador da transformada de ondaletas inversa \mathcal{W}^{-1} em cada um dos conjuntos V_j e W_j . Detalhe da decomposição do mapa exemplo de 21 de junho de 2006 está ilustrado na figura 7. Nota-se como existe uma decomposição orientada das feições presentes no mapa de acordo com o componente e escala que se visualiza. Neste exemplo, as escalas são divididas em quatro grupos: aproximação (A_j), detalhe

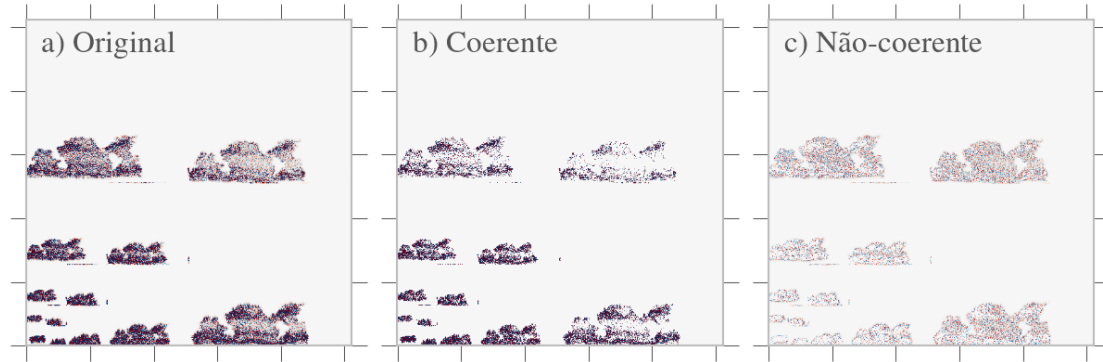


Figura 6 – Exemplo de coeficientes de ondaleta para o mapa de anomalia da altura da superfície do mar (anomalia da altura da superfície do mar (η)) em 21 de junho de 2006 decompostos utilizando a ondaleta de Daubechies DB10. Os coeficientes de ondaleta do sinal original (a) são separados entre coeficientes coerentes (b) e não-coerentes (c). Neste caso, o limiar de separação entre coeficientes coerentes e não-coerentes é $\epsilon_T = 126,25$. Os coeficientes coerentes representam 0,41 % do total de coeficientes de ondaleta. O erro médio, o erro médio absoluto e o erro quadrático médio entre o sinal original e o sinal reconstruído a partir dos coeficientes coerentes são 9,8 mm, 19,6 mm e 25,4 mm, respectivamente.

horizontal (H_j), detalhe vertical (V_j) e detalhe diagonal (D_j), cujos valores dependem dos coeficientes de ondaleta V_j e W_j conforme o seguinte sistema de equações,

$$\begin{aligned}
 A_j &= \mathcal{W}^{-1} (V_j^x \otimes V_j^y) , \\
 H_j &= \mathcal{W}^{-1} (W_j^x \otimes V_j^y) , \\
 V_j &= \mathcal{W}^{-1} (V_j^x \otimes W_j^y) , \\
 D_j &= \mathcal{W}^{-1} (W_j^x \otimes W_j^y) ,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A ortogonalidade das transformada de ondaletas garante a reconstrução completa do sinal original a partir dos componentes A_j , H_j , V_j e D_j . Pode-se criar uma analogia ao uso de uma lente de aumento para ilustrar o conceito da aproximação A_j . Para escalas maiores (j menor), observa-se o sinal mais de perto, ou seja com riqueza de detalhes. Com a diminuição da escala (j maior), o sinal observado perde os detalhes e apenas padrões médios de larga-escala são observados. A escolha da ondaleta de Daubechies DB10 impõe um limite máximo de escalas para a decomposição. Neste caso o limite é $J = 6$. O sinal nas escalas A_j é a soma dos componentes nas escalas inferiores, ou seja,

$$A_j = A_{j+a} + H_{j+1} + V_{j+1} + D_{j+1} . \tag{3.6}$$

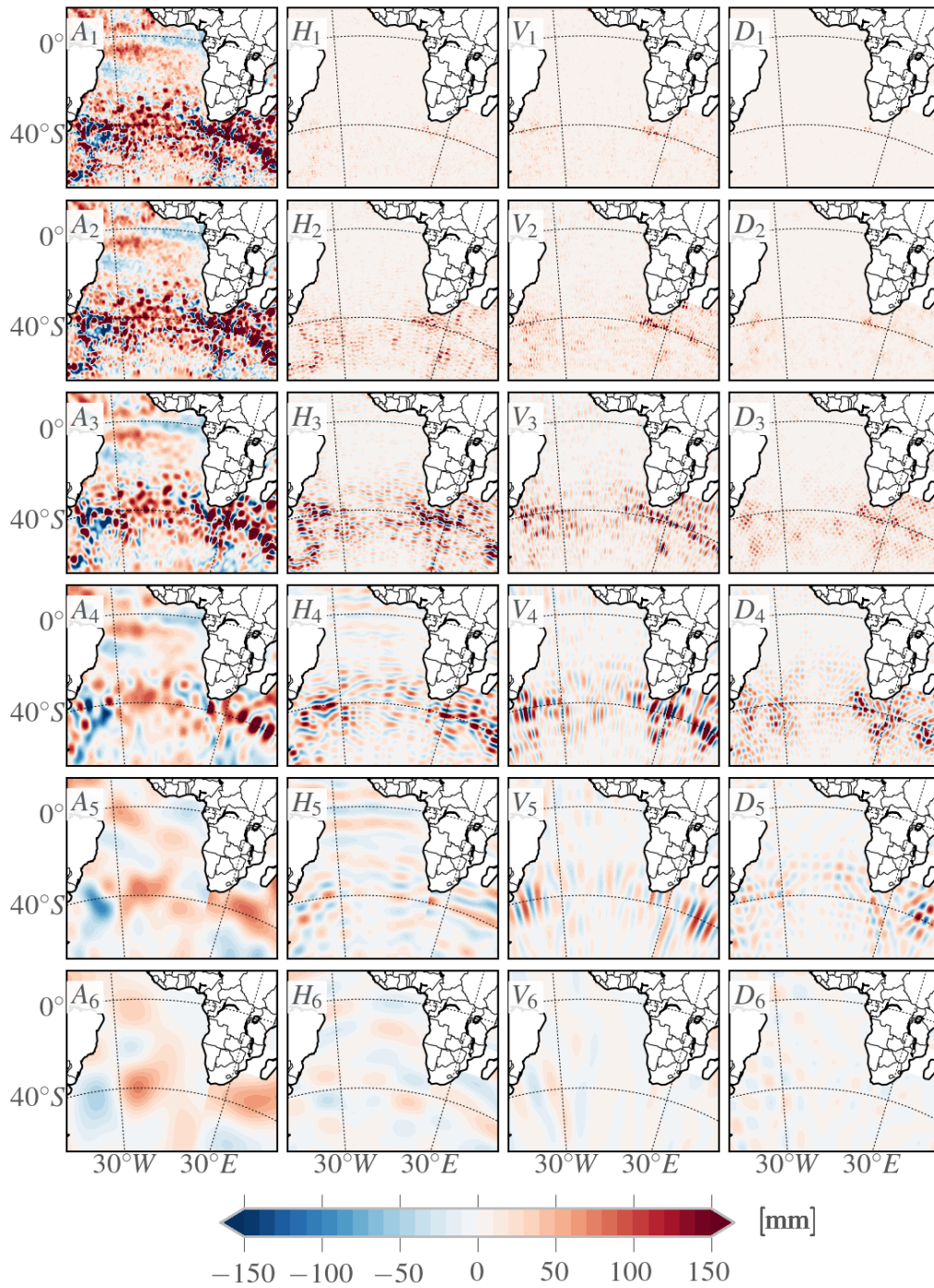


Figura 7 – Detalhe do sinal de anomalia da altura da superfície do mar decomposto através da análise de multi-resolução utilizando-se a ondaleta de Daubechies DB10 para o dia 21 de junho de 2006 no Oceano Atlântico sul. Os painéis A_j , H_j , V_j e D_j apresentam respectivamente as aproximações, os detalhes horizontais, os detalhes verticais e detalhes diagonais nas escalas $s = 2^{-j}$, $j = \{1, \dots, 6\}$. Note que $A_j = A_{j+1} + H_{j+1} + V_{j+1} + D_{j+1}$ e que A_0 é equivalente ao sinal original.

Então, da forma com que os componentes foram dispostos na figura 7, somando-se os componentes de cada linha, equivale à aproximação A_j da linha superior. Portanto para a reconstrução completa do sinal,

$$\begin{aligned}\eta &= A_0 = A_1 + H_1 + V_1 + D_1 \\ &= A_J + \sum_{j=1}^J (H_j + V_j + D_j) .\end{aligned}\quad (3.7)$$

3.4 Estruturas coerentes

A representação de um sinal em coeficientes de bases ortogonais oferecida pela transformada de ondaleta discreta, permite que os dados sejam filtrados manipulando-se os coeficientes da transformada de ondaleta. Farge *et al.* (1999) sugerem um método adaptativo para separar estruturas organizadas e desorganizadas em um fluxo turbulento, utilizando a transformada de ondaletas. Segundo eles, vórtices coerentes são concentrações de vorticidade localizadas. Em duas dimensões, vórtices correspondem a regiões elípticas no fluxo onde rotação domina sobre a tensão. Uma forma de filtrar os dados é definir um limiar mínimo para considerar os coeficientes de ondaleta significativos. Eles utilizam mapas de vorticidade para determinar o limiar ϵ_T .

Souza *et al.* (2011) compara três métodos para identificação automática de vórtices aplicando-os no Oceano Atlântico Sul. Eles comparam um método baseado na transformada de ondaletas, um método baseado no parâmetro de Okubo–Weiss e um critério geométrico. Os autores concluem que o critério geométrico possui a melhor performance, principalmente quanto à quantidade de detecções, à duração dos vórtices e à velocidade de propagação. O presente trabalho utiliza uma combinação de dois métodos: um método baseado na transformada da ondaleta e outro em padrões geométricos.

Devido a ruídos no sinal, o cálculo da vorticidade a partir de mapas de ASM é fonte de grandes erros e incertezas no cálculo da segunda derivada. Ao invés de aplicar as transformadas de ondaleta em campos de vorticidade, optou-se por aplicá-las a campos de ASM. No presente trabalho o limiar dos coeficientes de ondaleta é determinado da seguinte forma,

$$\epsilon_T = \sqrt{2 \sigma_\eta^2 \log(N)}, \quad (3.8)$$

onde σ_η^2 é a variância do sinal de ASM e N é o número de medidas. Coeficientes de ondaleta $\mathcal{W}\eta \geq \epsilon_T$ são considerados coerentes (ou significativos) e coeficientes de ondaleta $\mathcal{W}\eta < \epsilon_T$ são considerados não-coerentes (ou não-significativos). O princípio básico desta separação definindo-se um limiar é baseada na ideia que os coeficientes de ondaleta proporcionam: intuitivamente, coeficientes de ondaleta pequenos são dominados por ruído, enquanto que coeficientes de valor absoluto maior representam mais sinal que ruído.

Para ilustrar, a figura 6 apresenta os coeficientes de ondaleta para o mapa de η do dia 21 de junho de 2006. Neste caso, $\epsilon_T = 126,25$, de modo que o número de coeficientes coerentes equivalha a 0,41 % do total de coeficientes. A separação entre coeficientes coerentes e não coerentes também proporciona compactação dos dados, uma vez que o número de coeficientes coerentes é apenas uma fração do total de coeficientes.

A escolha da função ondaleta não é arbitrária e incorpora um grau de liberdade aos resultados obtidos no presente trabalho. Existe uma série de famílias de ondaletas disponíveis, como por exemplo *Splines*, bi-ortogonais, bi-ortogonais reversas, *Coiflets*, *Daubechies*, *Haar*, *Symlets* e *Meyer* discreta. A escolha pela ondaleta de Daubechies DB10 foi feita através de testes preliminares na análise de mapas de ASM com as diferentes famílias de ondaletas citadas. Após a decomposição de um mapa em sinal coerente η_C e não-coerente η_I , calculou-se a vorticidade a partir do mapa de η_C e a ondaleta que apresentou os melhores resultados foi a ondaleta de Daubechies DB10.

3.5 Identificação de vórtices

Observando-se os mapas decompostos através da análise de ondaletas (figura 7 é natural separar as feições por escala. Após a pré-filtragem, o presente trabalho sugere que o sinal de ASM coerente η_C seja decomposto em duas partes: um sinal de larga-escala, que inclui o ciclo sazonal (η_L); e um sinal de meso-escala (η_M). O sinal de larga-escala é formado pelos componentes de ondaleta de resolução mais baixa ($j = 6$), ou seja, $\eta_L = A_6 + H_6 + V_6 + D_6$. Por sua vez, o sinal de meso-escala é formado pelos demais componentes, $\eta_M = \sum_{j=1}^5 H_j + V_j + D + j$.

Estruturas vorticais são identificadas a partir dos mapas de η_M . O primeiro passo

é a detecção de pontos de mínimo ou máximo locais, que determinariam a localização aproximada dos centros dos vórtices. Em seguida, aplica-se um algoritmo de busca nos pontos vizinhos aos mínimos e máximos para determinar a borda do vórtice. O algoritmo varre pontos vizinhos até que o sinal do gradiente da altura se inverta, indicando que provavelmente uma borda da estrutura foi encontrada. Interrompe-se a busca e determina-se então o contorno da estrutura. À esta região delimitada pelo contorno, ajusta-se uma superfície quadrática com a forma de um parabolóide elíptico expresso por

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a} + \frac{(y - y_0)^2}{b}, \quad (3.9)$$

onde as coordenadas (x_0, y_0) são o centro do parabolóide elíptico, z_0 é a altura do vértice e os parâmetros a e b são constantes que ditam o nível de curvatura nos planos $x-z$ e $y-z$ respectivamente. Se $a = b$, a superfície torna-se um parabolóide de revolução, também chamado de parabolóide circular. Para complementar o ajuste, adiciona-se um parâmetro de rotação em torno do eixo vertical (z) multiplicando-se a as coordenadas x e y com a matriz de rotação M ,

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

O ajuste do parabolóide elíptico aos contornos dos mapas de η_M permite uma caracterização dos principais parâmetros do vórtice, como coordenadas do centro (x_0, y_0) , altura do vértice z_0 , altura do vórtice h , altura basal η_B , comprimento dos semi-eixos a e b e ângulo de rotação θ . Define-se o parâmetro de excentricidade $e = \sqrt{1 - \left(\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right)^2}$, ele varia no intervalo $0 \leq e < 1$. Através da excentricidade e é possível distinguir entre vórtices e anéis, que possuem geometria mais circular. Lembrando que no presente trabalho definimos vórtice como uma região turbulenta de contorno fechado (CHAIGNEAU *et al.*, 2008) e anéis vorticais como uma região turbulenta de contorno circular fechado.

Resumo do procedimento de extração de estruturas vorticais A detecção do sinal associado aos vórtices de meso-escala segue o seguinte algoritmo:

1. Decomposição de mapas de η em coeficientes de ondaleta ortonormais $\mathcal{W}\eta$;
2. Selecionar coeficientes de ondaleta maiores que um limiar $\epsilon_T = \sqrt{2\sigma_\eta^2 \log(N)}$;

3. Reconstruir o sinal η_C para coeficientes de ondaleta $\mathcal{W}\eta \geq \epsilon_T$, separando o sinal nas componentes de ondaleta A_j, H_j, V_j e D_j ;
4. Reconstruir o sinal de η_I para coeficientes de ondaleta $\mathcal{W}\eta < \epsilon_T$;
5. Definir os campos de larga escala η_L e meso-escala η_M a partir dos componentes de ondaleta;
6. Detectar pontos de mínimo e máximo locais;
7. Verificar os pontos vizinhos até que o gradiente de η_M mude de sinal;
8. Ajustar um parabolóide elíptico dentro da região delimitada;
9. Calcular excentricidade $e = \sqrt{1 - \left(\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right)^2}$ e separar entre vórtices e anéis;
10. Calcular a altura basal η_B e determinar a altura do vórtice A ;
11. Comparar a relação entre os coeficientes do parabolóide elíptico ajustado para determinar a circularidade do vórtice e separar anéis vorticais de vórtices.

Portanto, seguindo os passos aqui descritos, o sinal de ASM pode ser decomposto em

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_I + \eta_C \\
 &= \eta_I + \eta_L + \eta_M \\
 &= \eta_I + \eta_L + \eta_B + \eta_E + \eta_R,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde η_C é a componente coerente do sinal de ASM, e η_I é a componente não-coerente. η_L é o sinal de larga-escala e η_M é o sinal de meso-escala, que, por sua vez é decomposto em sinal basal η_B , sinal de vórtices (*eddies*) η_E e sinal de anéis (*rings*) η_R .

3.6 Dados auxiliares

O presente trabalho também utiliza dados auxiliares para as análises e comparações. Utiliza-se o mapa de distribuição do raio de deformação de Rossby do primeiro modo baroclínico $L_{Ro,1}$ determinado por Chelton *et al.* (1998). A figura 8 ilustra o mapa de $L_{Ro,1}$ interpolado para a mesma grade com resolução de $0,25^\circ \times 0,25^\circ$ dos dados

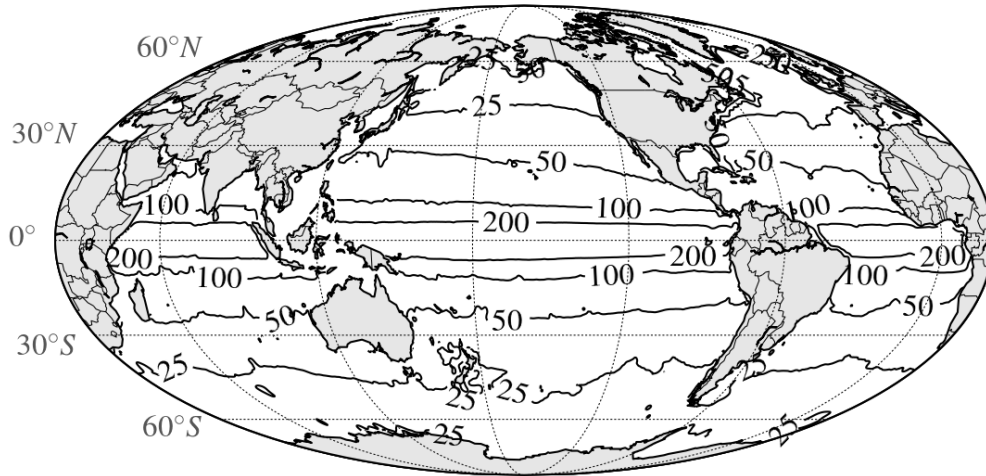


Figura 8 – Mapa do raio de deformação de Rossby (em km), adaptado de Chelton *et al.* (1998).

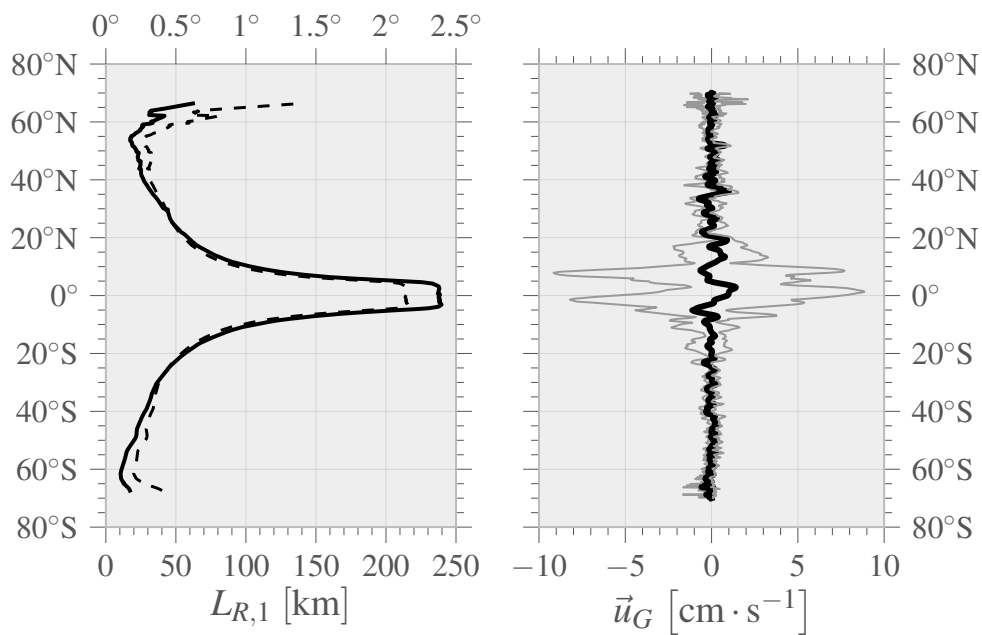


Figura 9 – (Esquerda) Médias zonais do raio de deformação de Rossby $L_{Ro,1}$ em km (linha contínua) e em graus (linha tracejada). (Direita) Média zonal da componente zonal da velocidade geostrófica \vec{U}_G .

de ASM. $L_{Ro,1}$ possui uma distribuição essencialmente zonal, com valores maiores no equador e diminuindo em direção aos polos. A distribuição média de $L_{Ro,1}$ em função da latitude (figura 9 direita) varia entre aproximadamente 250 km (2°) no equador chegando a menos de 25 km ($0,25^\circ$) em altas latitudes a aproximadamente 60° .

A velocidade geostrófica zonal média, obtida através dos mapas de velocidade geostrófica distribuídos pela Aviso (figura 9 esquerda) é da ordem de $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ com inversão de sinal em algumas latitudes e grande variabilidade na faixa entre latitudes tropicais.

4 Variabilidade global da altura da superfície do mar

Este capítulo apresenta estatísticas simples e resultados de análise espectral dos mapas interpolados de altura da superfície do mar (ASM), conforme descrito anteriormente. Inicia-se apresentando os mapas interpolados e pré-filtrados pelo método da ondaleta, então observa-se padrões gerais de variabilidade da ASM para em seguida fazer um tratamento espectral, tanto no espaço quanto no tempo.

4.1 Altura da superfície do mar e o sinal pré-filtrado

A figura 10 (topo) ilustra o mapa global interpolado para o dia 21 de junho de 2006. Além de apresentar os padrões de larga escala, é possível observar feições em escalas menores como vórtices próximo às regiões das principais correntes oceânicas, por exemplo. Apesar da mescla dos dados permitir um aumento considerável de resolução espacial e temporal, nota-se também a presença das trajetórias dos satélites, principalmente na região equatorial onde a distância entre as passagens é maior.

Uma vez calculado o limiar dos coeficientes de ondaleta coerente e não-coerente, pode-se aplicar a transformada de ondaleta inversa para obter o sinal de ASM coerente (η_C) e não coerente (η_I), como ilustra a figura 10 (centro e inferior). O filtro de coerência preserva as principais características do mapa interpolado original. O erro médio (*mean error*) (ME), o erro médio absoluto (*mean absolute error*) (MAE) e o erro quadrático médio (*root-mean-square error*) (RMSE) entre o sinal original e o sinal reconstruído a partir dos coeficientes coerentes são 9,8 mm, 19,6 mm e 25,4 mm,

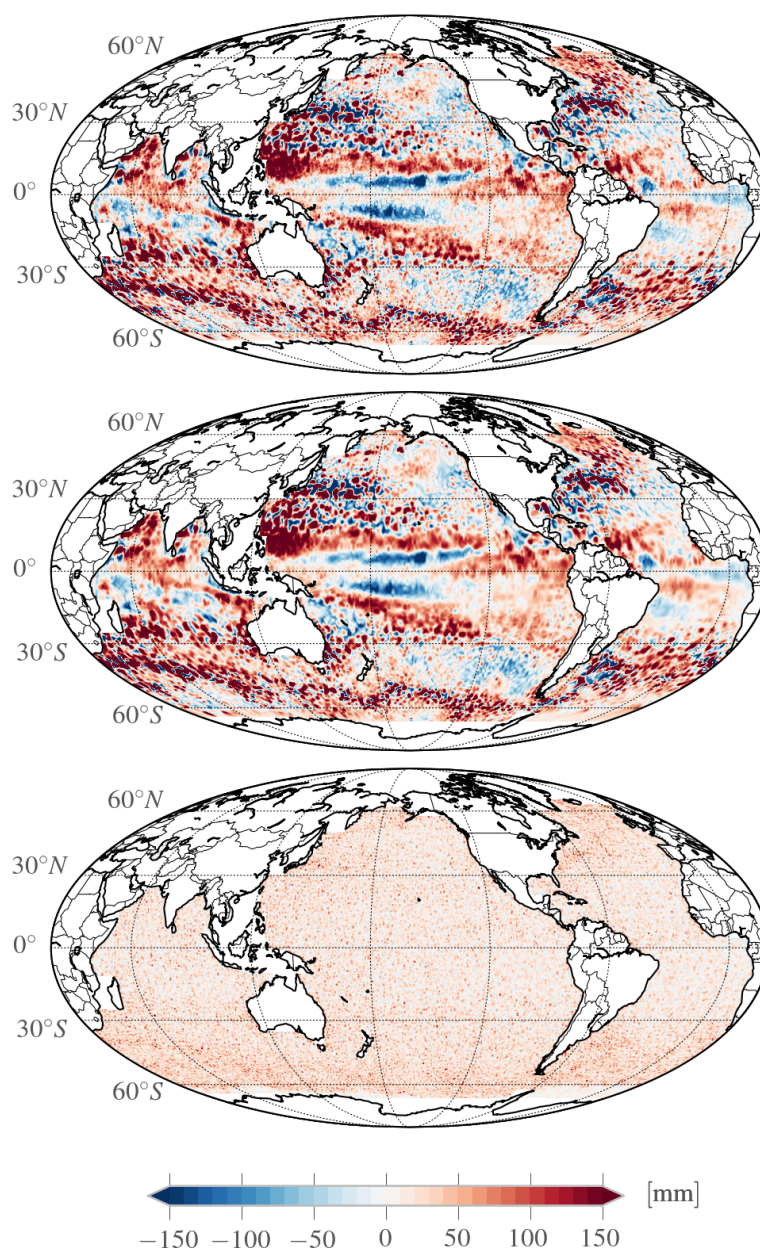


Figura 10 – Exemplo de mapa de anomalia da altura da superfície do mar do dia 21 de junho de 2006 (topo), interpolado pelo método de curvatura contínua mínima (SMITH; WESSEL, 1990). O mapa foi decomposto em estruturas coerentes (meio) e não-coerentes (inferior) a partir da reconstrução dos coeficientes de ondaleta utilizando-se a ondaleta de Daubechies DB10. O erro médio, o erro médio absoluto e o erro quadrático médio entre o sinal original e o sinal reconstruído a partir dos coeficientes coerentes são 9,8 mm, 19,6 mm e 25,4 mm, respectivamente. Dada a ortogonalidade da transformada de ondaletas discreta, o sinal original pode ser recuperado somando-se os componentes coerentes e não-coerentes.

respectivamente. Lembrando que estes erros (ou desvios), são definidos como

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \eta(n) - \eta_C(n),$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\eta(n) - \eta_C(n)|,$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\eta(n) - \eta_C(n)]^2}.$$

Para verificar como a decomposição pela transformada de ondaletas afeta o espectro do mapa de ASM, calculou-se a densidade de potência espectral (*power spectral density*) (PSD) descrita pela equação (3.2). Os espectros de cada uma dos componentes A_j , H_j , V_j e D_j para o mapa de η_0 do dia 21 de junho de 2006 está ilustrado na figura 11. Nota-se que o espectro de cada componente está localizados em bandas de número de onda bem definidas, consequência da ortogonalidade da transformada de ondaletas discreta. Em alguns casos observa-se sobreposição de bandas espectrais que pode ser devido ao fenômeno de Gibbs ao aplicar a transformada rápida de Fourier (*fast Fourier transform*) (FFT) ou pode ser característica da própria ondaleta, já que número de onda e escala não são a mesma propriedade, apesar de possuírem relação de equivalência.

Comparando-se a PSD do sinal original interpolado, do sinal coerente e do sinal não-coerente (figura 12), observa-se que o filtro remove sinal com variabilidade ao longo de todas as bandas de número de onda. Comparando-se os componentes de ondaleta coerentes (figura 14) com os componentes de ondaleta do mapa original interpolado (figura 11), nota-se que o filtro remove parte do sinal nas menores escalas ($j = 1, 2$), preservando as demais escalas praticamente intactas.

A figura 15 apresenta o limiar ϵ_T e os erros médio (ME), médio absoluto (MAE) e quadrático médio (RMSE) entre o sinal original e o sinal reconstruído a partir dos coeficientes coerentes para cada mapa filtrado. Nota-se que nos instantes em que há apenas dados de um satélite, o sistema há descontinuidades na escola do limiar.

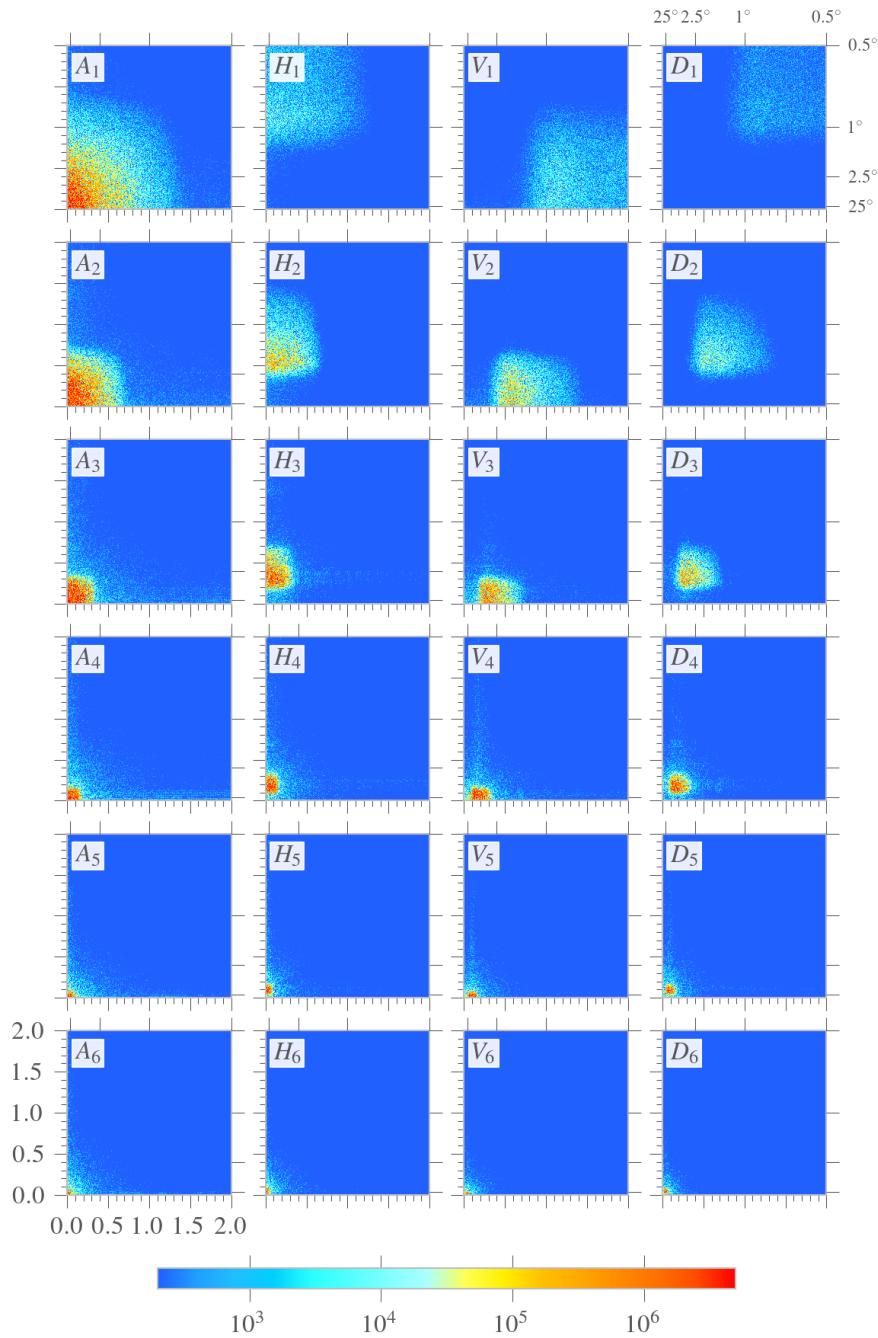


Figura 11 – Densidades de potência espectral bidimensional global do sinal de anomalia da altura da superfície do mar decomposto através da análise de multi-resolução utilizando-se a ondaleta de Daubechies DB10 para o dia 21 de junho de 2006. Os painéis A_j , H_j , V_j e D_j apresentam respectivamente as espectros das aproximações, dos detalhes horizontais, dos detalhes verticais e dos detalhes diagonais nas escalas $s = 2^{-j}$, $j = \{1, \dots, 6\}$. Os eixos das abscissas e das ordenadas são, respectivamente, os números de onda zonal e meridional, cujas unidades são ciclos por grau (cpg). Os respectivos comprimentos de onda zonal e meridional também estão indicados em tamanho menor. A unidade das densidades de potência espectral é mm^2/cpg^2 .

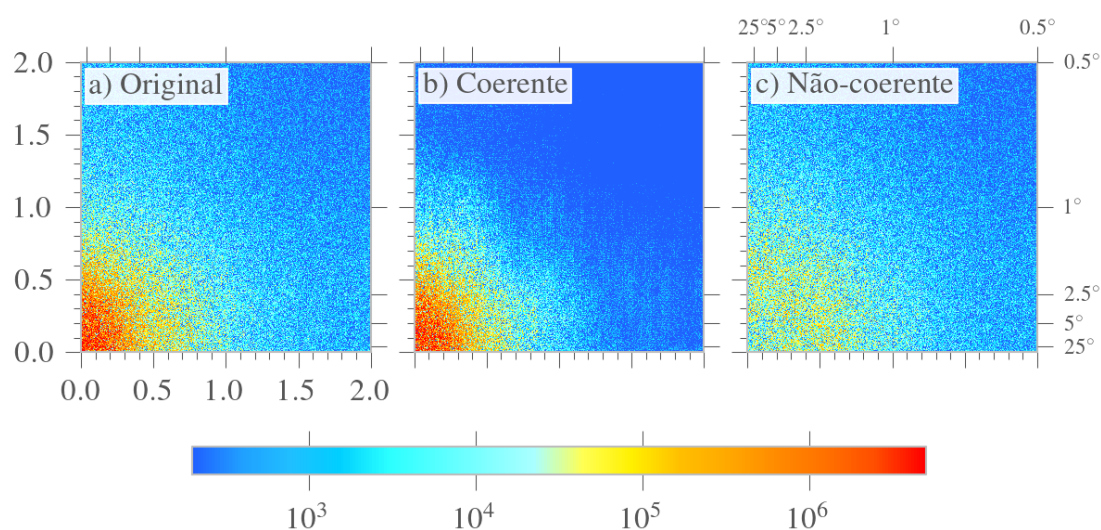


Figura 12 – Exemplo de densidades de potência espectral de mapas de anomalia da altura da superfície do mar original e decompostos em componentes coerentes e não-coerentes do dia 21 de junho de 2006. Os eixos das abscissas e das ordenadas são, respectivamente, os números de onda zonal e meridional, cujas unidades são ciclos por grau (cpg). Os respectivos comprimentos de onda zonal e meridional também estão indicados em tamanho menor. A unidade das densidades de potência espectral é mm^2/cpg^2 .

4.2 Média, tendências e climatologia

A sequência de mapas interpolados pelo método de curvatura contínua mínima (SMITH; WESSEL, 1990), como ilustrado no topo da figura 10, apresentam os principais padrões de variabilidade de meso- e larga-escalas nos oceanos. As principais feições observáveis são: o ciclo sazonal de elevação e abaixamento da água causado, principalmente por expansão e contração térmica durante as estações do ano; propagação de ondas de larga-escala, principalmente na região equatorial; e feições de meso-escala com propagação para oeste associadas a ondas de Rossby longas do primeiro modo baroclínico e vórtices de meso-escala, o principal foco do presente trabalho.

Calculando-se a média global da ASM, ponderada pela área de cada ponto de grade no mapa interpolado, pode-se construir a série temporal de variação média $\bar{\eta}$. A figura 16 ilustra a evolução de $\bar{\eta}$ para todo o globo e os Oceanos Atlântico, Índico e Pacífico. A figura também inclui a média da ASM dos oceanos por hemisfério. O

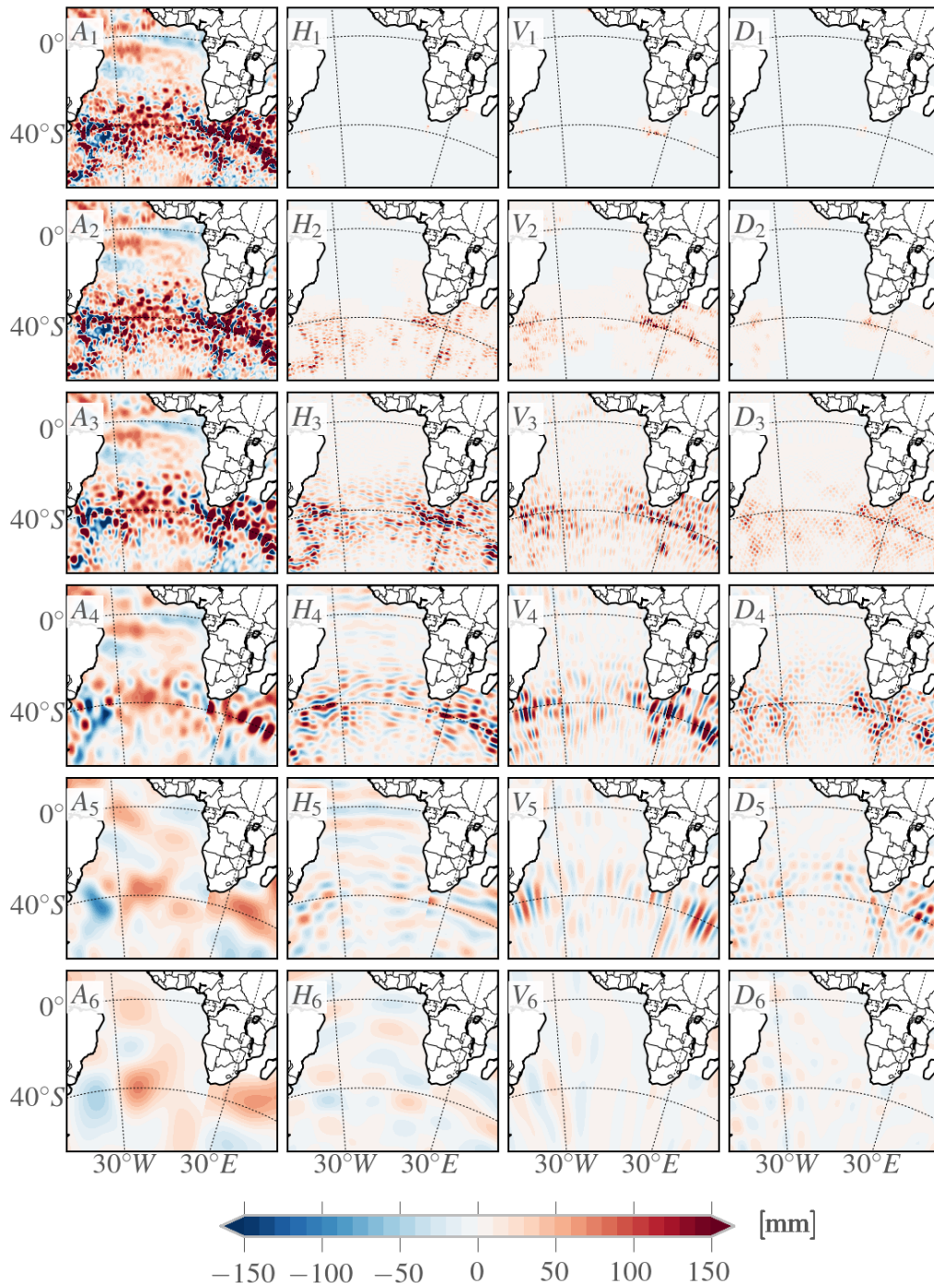


Figura 13 – Detalhe do sinal de anomalia da altura da superfície do mar coerente decomposto através da análise de multi-resolução utilizando-se a ondaleta de Daubechies DB10 para o dia 21 de junho de 2006 no Oceano Atlântico sul. Os painéis A_j , H_j , V_j e D_j apresentam respectivamente as aproximações, os detalhes horizontais, os detalhes verticais e detalhes diagonais nas escalas $s = 2^{-j}$, $j = \{1, \dots, 6\}$. Note que $A_j = A_{j+1} + H_{j+1} + V_{j+1} + D_{j+1}$ e que A_0 é equivalente ao sinal original.

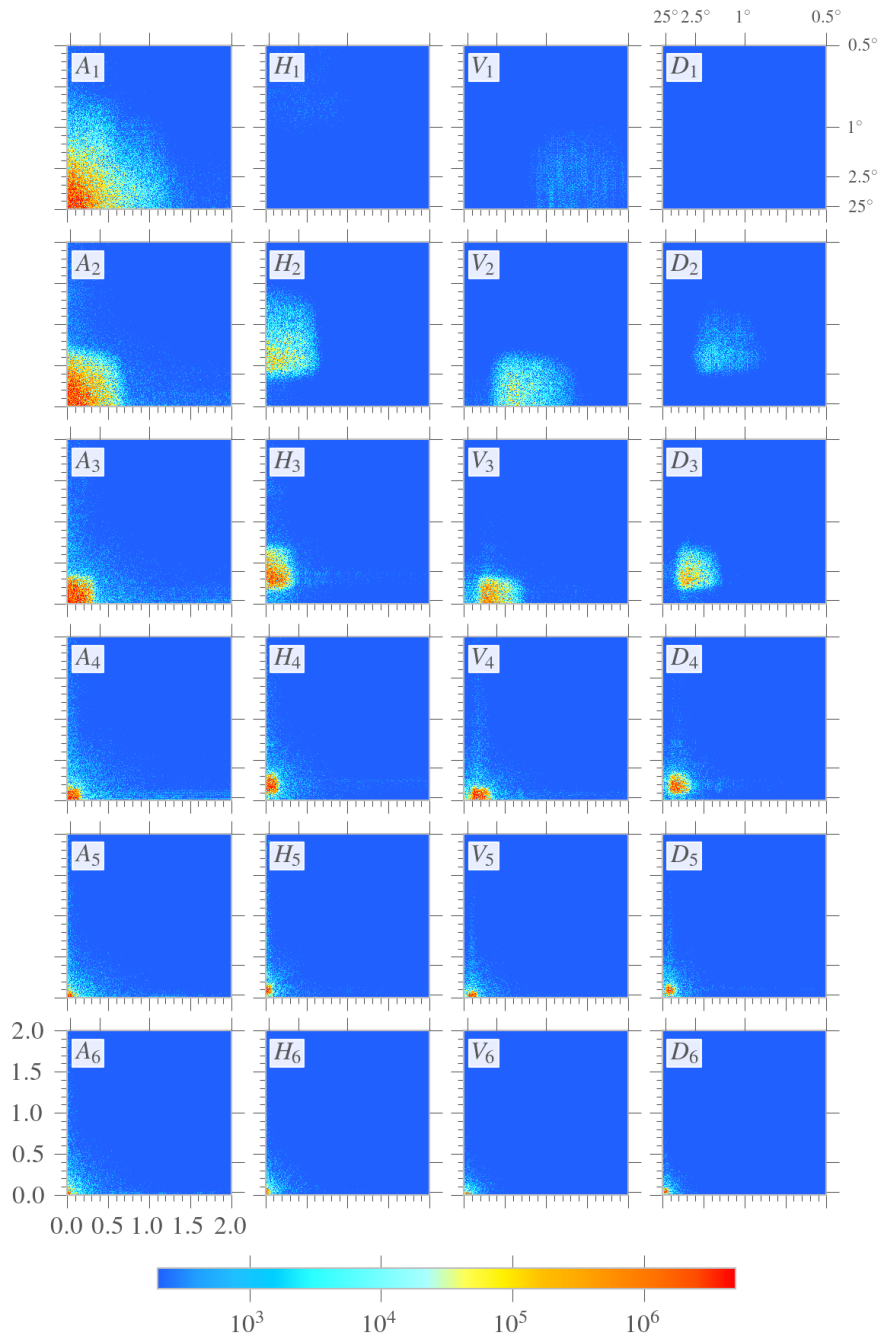


Figura 14 – Densidades de potência espectral bidimensional global do sinal de anomalia da altura da superfície do mar coerente decomposto através da análise de multi-resolução utilizando-se a ondaleta de Daubechies DB10 para o dia 21 de junho de 2006. Os painéis A_j, H_j, V_j e D_j apresentam respectivamente as espectros das aproximações, dos detalhes horizontais, dos detalhes verticais e dos detalhes diagonais nas escalas $s = 2^{-j}, j = \{1, \dots, 6\}$. Os eixos das abscissas e das ordenadas são, respectivamente, os números de onda zonal e meridional, cujas unidades são ciclos por grau (cpg). Os respectivos comprimentos de onda zonal e meridional também estão indicados em tamanho menor. A unidade das densidades de potência espectral é mm^2/cpg^2 .

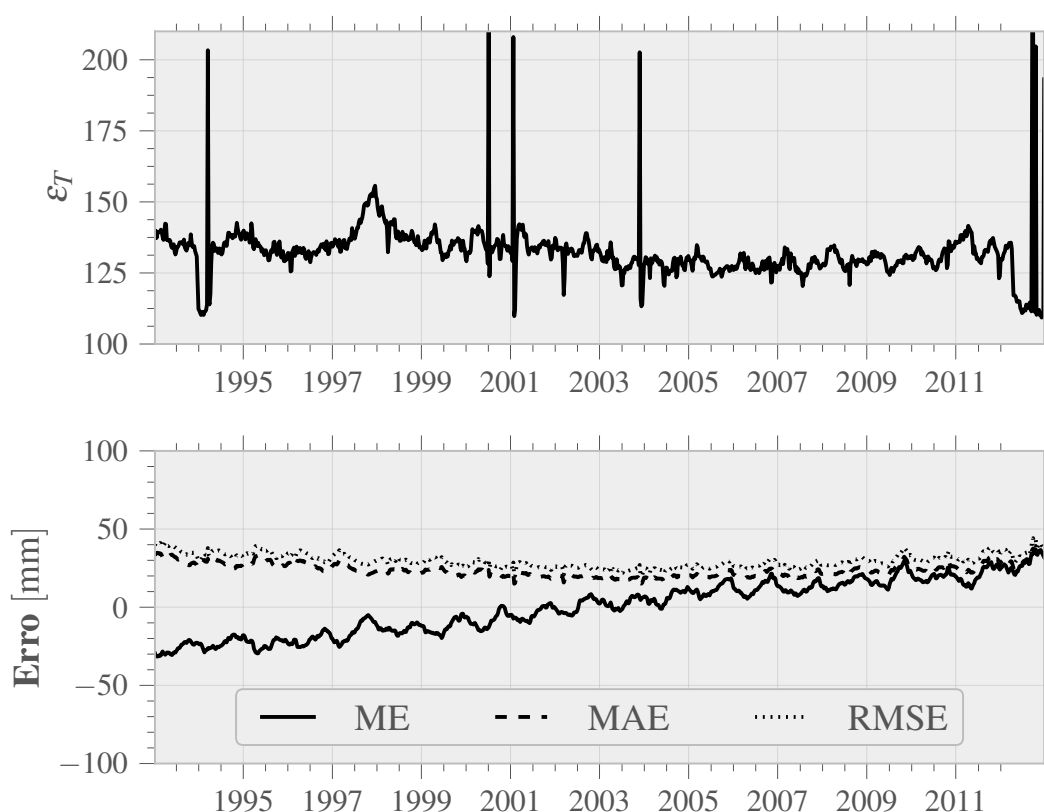


Figura 15 – (Topo) Limiar da transformada de ondaletas e (inferior) os erros médio (ME), médio absoluto (MAE) e quadrático médio (RMSE) entre o sinal original η_0 e o sinal coerente η_C para cada mapa da série temporal.

sinal apresenta um ciclo anual bem pronunciado e fora de fase entre os hemisférios. No hemisfério norte, as alturas mínimas ocorrem no início do ano, em geral nos meses de fevereiro ou março, e as alturas máximas ocorrem entre setembro e outubro. O oposto ocorre no hemisfério sul. Isto indica uma defasagem entre a resposta dos oceanos ao ciclo das estações. Nota-se também que a amplitude do sinal sazonal é menor no hemisfério sul, praticamente metade em comparação com o hemisfério norte. Isto faz com que, em média, a variação global da ASM esteja em fase com a variação do hemisfério norte, salvo no Oceano Pacífico, onde a variação média no hemisfério sul acompanha de perto a variação média de toda a bacia. Observa-se também uma tendência de aumento do sinal durante todo o período da série temporal. Em média, o hemisfério sul apresenta tendência de aumento de 3,2 mm/ano, o hemisfério norte de 2,5 mm/ano

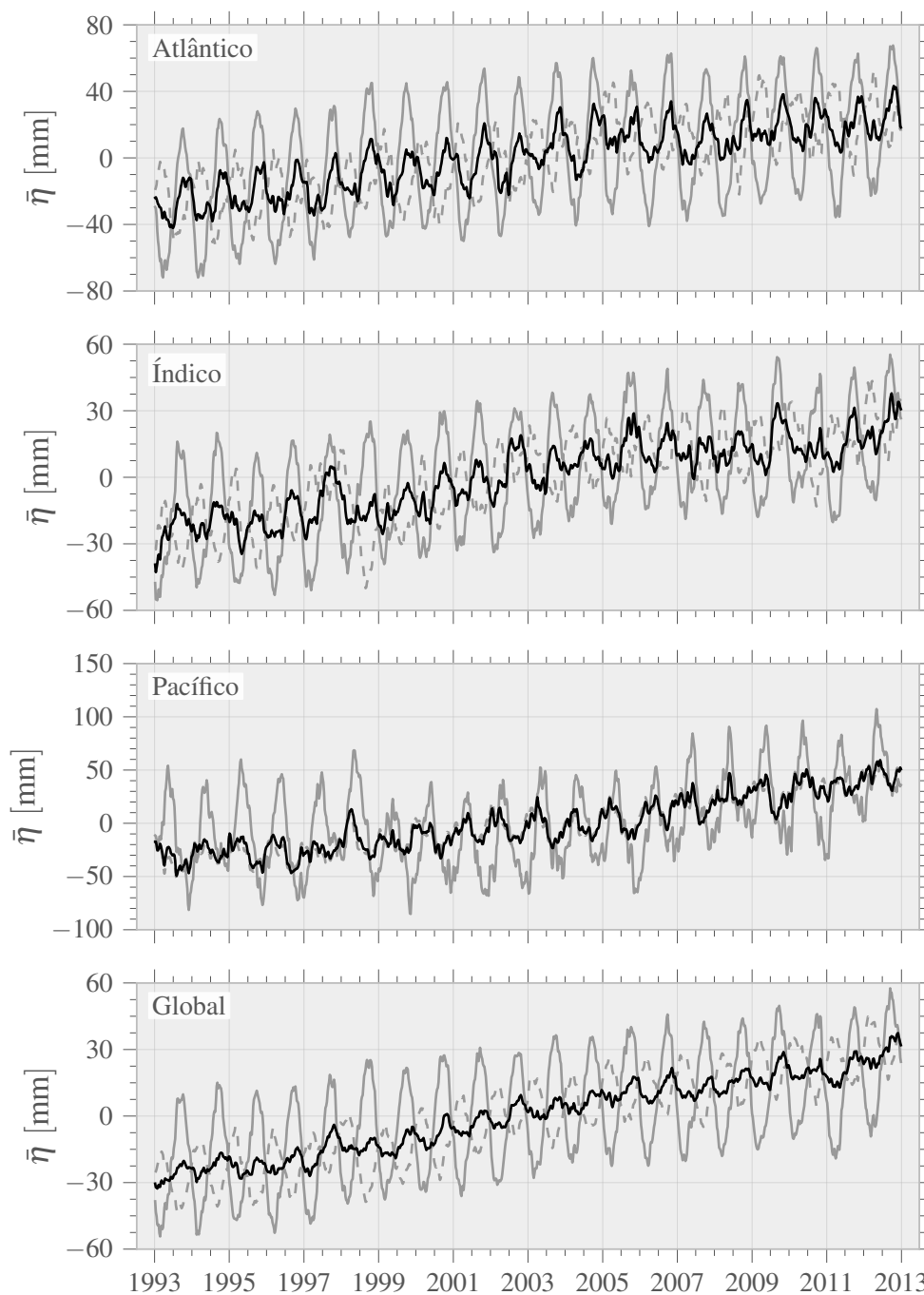


Figura 16 – Variação temporal da anomalia da altura da superfície do mar média ($\bar{\eta}$) entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 a partir de medidas de altimetria por satélites distribuídas pela Aviso por bacia oceânica e global (linha contínua preta), no hemisfério norte (linha contínua cinza) e no hemisfério sul (linha tracejada cinza).

Tabela 1 – Tendências de média ($\bar{\eta}$) e desvio padrão (σ_{η}) da anomalia da altura da superfície do mar (em $\text{mm}\cdot\text{ano}^{-1}$) entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 para cada bacia oceânica e para todo o globo, separados em hemisfério norte (N), hemisfério sul (S) e hemisfério norte e sul (NS).

| | Atlântico | | | Índico | | | Pacífico | | | Global | | |
|-----------------|-----------|------|------|--------|------|------|----------|-----|------|--------|------|------|
| | N | S | NS | N | S | NS | N | S | NS | N | S | NS |
| $\bar{\eta}$ | 2.6 | 3.0 | 2.8 | 2.4 | 2.5 | 2.5 | 2.8 | 4.1 | 4.0 | 2.5 | 3.2 | 2.9 |
| σ_{η} | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.4 | -0.2 | -0.3 | -0.2 | 0.0 | -0.0 | -0.3 | -0.1 | -0.2 |

e a tendência global é de 2,9 mm/ano. A tabela 1 relaciona as tendências de $\bar{\eta}$ para as principais bacias oceânicas, tanto no hemisfério sul quanto no hemisfério norte.

A evolução temporal do desvio padrão espacial σ_{η} da ASM (figura 17) apresenta um padrão menos regular que o de $\bar{\eta}$. A evolução global do desvio padrão médio possui um padrão semelhante entre os dois hemisférios. Nota-se instantes ao longo da série temporal nos quais o desvio padrão aumenta consideravelmente tanto na média global quanto na média dos Oceanos Índico e Pacífico. Nota-se instantes em que o desvio padrão é bastante elevado, como por exemplo em 1995, 1998 e 2003, que estão ligados a eventos globais do tipo *El Niño/La Niña*. O desvio padrão não apresenta tendências significativas cujos valores estão relacionados na tabela 1. No entanto, é importante notar que no final da série temporal, a partir de 2000, há um declínio no desvio padrão espacial médio. Este declínio, que é mais acentuado no Oceano Atlântico, muito provavelmente está associado à interrupção na transmissão de dados do satélite *Environmental Satellite* (Envisat). A mesma observação também pode-se aplicar a 1994, quando há uma breve interrupção na série temporal do satélite *European Remote Sensing Satellite* (ERS) 1.

A variância temporal do sinal de ASM não é homogênea no espaço. A figura 18 apresenta um mapa do desvio padrão de ASM durante todo o período da série temporal. Nele observa-se regiões de grande variabilidade, com desvio padrão superior a 150 mm. As regiões com maior variabilidade temporal estão localizadas principalmente nas bordas oeste dos Oceanos Atlântico e Pacífico, nas regiões equatoriais, ao longo da Corrente Circumpolar Antártica e ao sul do continente africano, na região conhecida como região do Vazamento das Agulhas. Em latitudes médias, estas regiões de grande variância são caracterizadas por grande atividade de meso-escala, como também pode ser observado

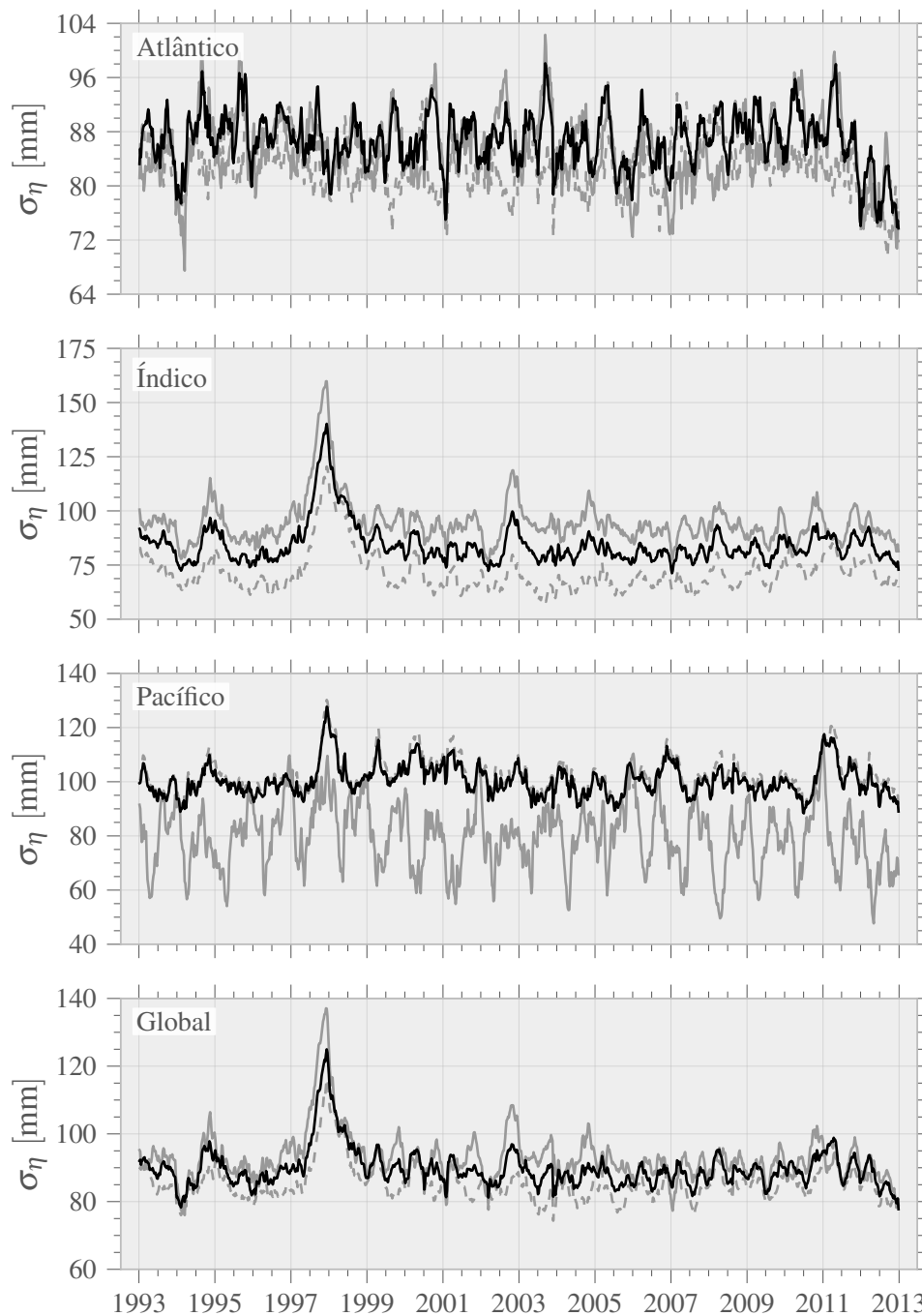


Figura 17 – Variação temporal do desvio padrão espacial da anomalia da altura da superfície do mar (σ_{η}) entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 a partir de medidas de altimetria por satélites distribuídas pela Aviso por bacia oceânica e global (linha contínua preta), no hemisfério norte (linha contínua cinza) e no hemisfério sul (linha tracejada cinza).

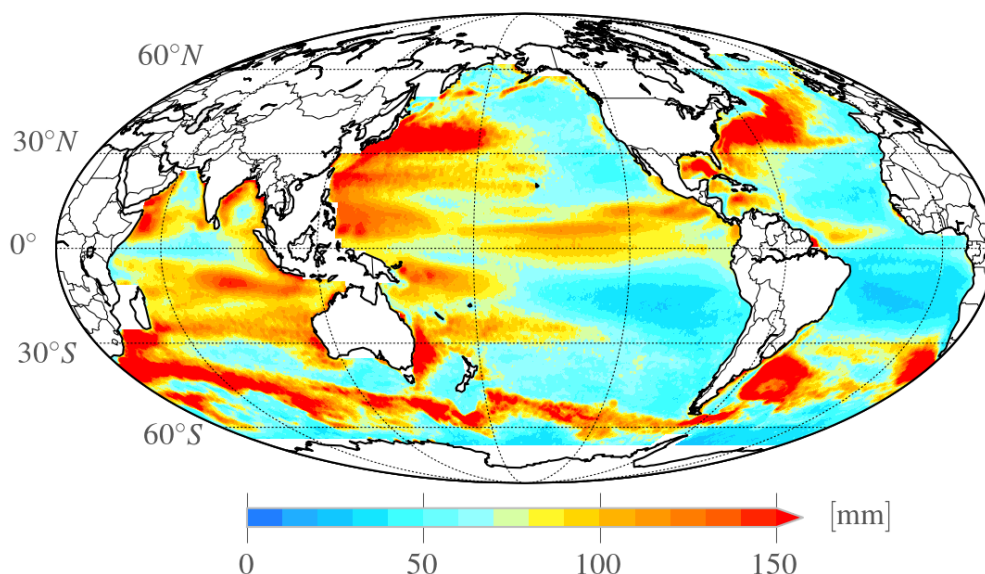


Figura 18 – Mapa de desvio padrão da altura da superfície do mar global para o período entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 a partir de medidas de altimetria por satélites distribuídas pela Aviso.

no mapa do topo da figura 10. Na região equatorial, a variabilidade é dominada pela ação de ondas planetárias. No Oceano Índico, o desvio padrão é alto em praticamente toda a bacia.

Apesar de, em média, o sinal da ASM possuir tendência de aumento em todo o globo, as tendências não são homogêneas no espaço. A figura 19 apresenta as tendências calculadas em cada ponto da grade interpolada para os 20 anos da série temporal utilizada no presente trabalho. Apesar de, em média a tendência global ser 2,9 mm/ano, há regiões que ela passa de 15 mm/ano, como por exemplo na borda oeste do oceano Pacífico, ao sul da Corrente de Kuroshio, na região da confluência das Correntes Brasil–Malvinas ou em regiões localizadas ao longo da Corrente Circumpolar Antártica. Por outro lado, também observa-se áreas com tendência negativa, apesar de menos acentuada, como na borda leste do Oceano Pacífico, ao sul da Corrente do Golfo ou na porção da Corrente Circumpolar Antártica localizada no centro do Oceano Pacífico. Estas tendências podem sugerir que os ventos sobre o Oceano Pacífico estejam mais intensos, promovendo o empilhamento de água na borda oeste aumentando assim a inclinação da

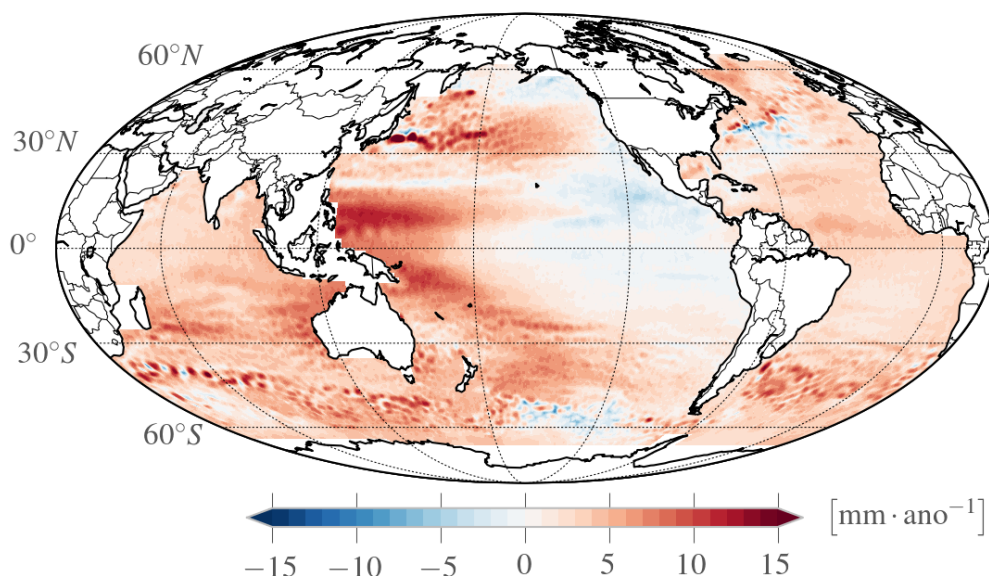


Figura 19 – Mapa de tendências da altura da superfície do mar globais para o período entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 a partir de medidas de altimetria por satélites distribuídas pela Aviso.

superfície livre do mar, que por sua vez poderia afetar gradientes de pressão. Também pode-se especular que as correntes de Kuroshio e do Golfo estejam deslocando-se para o sul e para o norte, respectivamente, em resposta a forçantes climáticas.

O padrão geral de variação sazonal da ASM pode ser visto através dos mapas de climatologia média calculados a partir da série temporal da *Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data* (Aviso), ilustrados na figura 20. Além do padrão de elevação e rebaixamento em larga escala e sem propagação associado ao ciclo sazonal, nota-se um intenso padrão de propagação na região equatorial, principalmente no Oceanos Pacífico e Índico. Entre os meses de julho e agosto ocorrem regiões de η baixo na costa do Panamá e na costa do Peru e da Bolívia que aumentam de intensidade e extensão até que em novembro formam-se duas “línguas” com η da ordem de -100 mm no hemisfério norte e -60 mm no hemisfério sul. Gradualmente estas línguas se deslocam para o equador e entre fevereiro e março elas se encontram. Ao norte desta nova língua, a aproximadamente 10°N , há uma estreita faixa com acúmulo de água mais elevada (~ 110 mm). A língua começa a se propagar então para oeste e perde intensidade

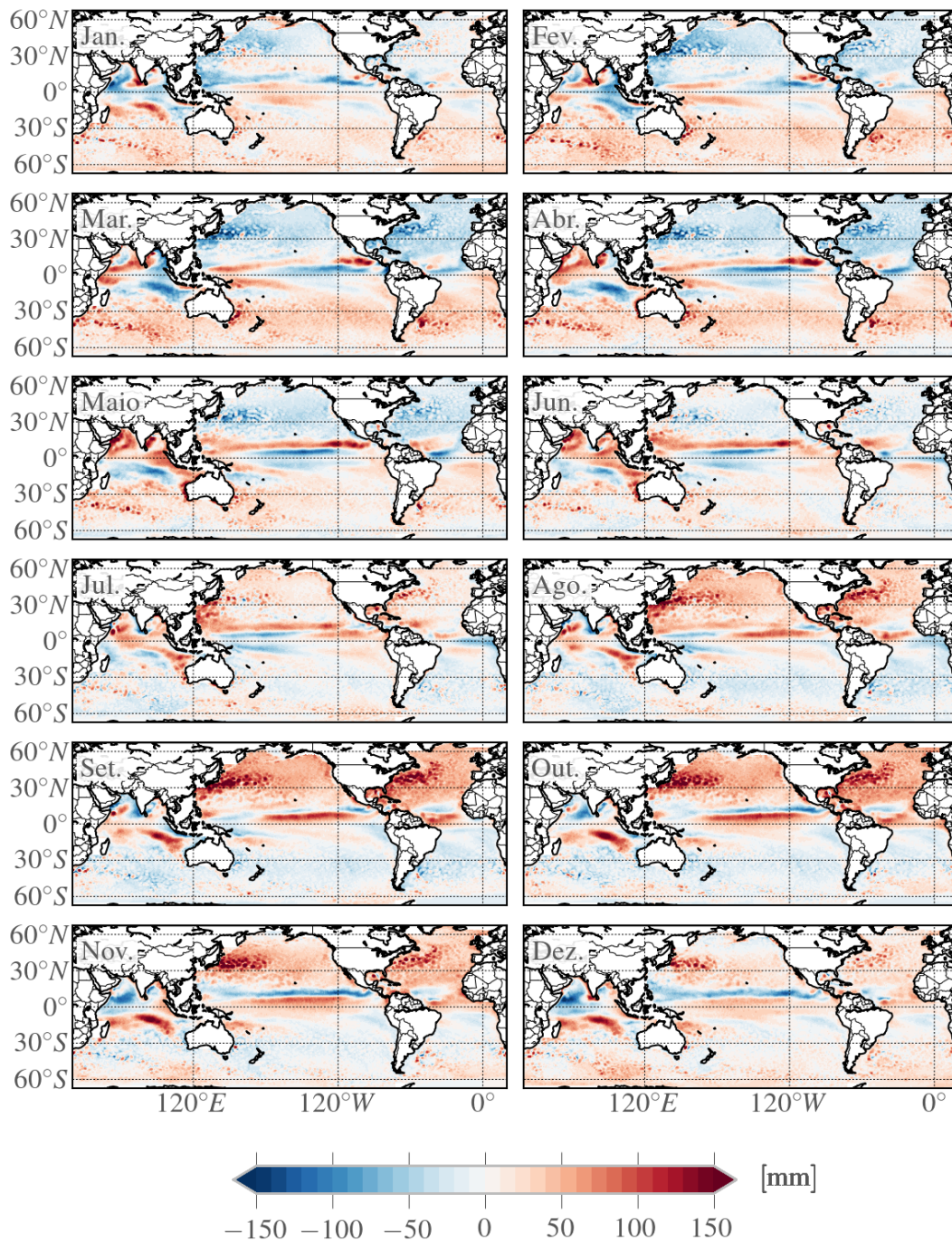


Figura 20 – Mapas da climatologia mensal da anomalia da altura da superfície do mar (anomalia da altura da superfície do mar (η)) calculada para o período entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012. Nota-se o efeito do ciclo sazonal sobre η em cada hemisfério e feições com propagação para oeste na região equatorial das principais bacias oceânicas.

até os meses de agosto e setembro.

No Oceano Índico equatorial também há a nítida presença de um padrão propagante. Assim como no Pacífico, aproximadamente em julho ocorre uma região com η baixo, da ordem de -120 mm, na costa oeste da Índia. Este núcleo começa a aumentar e a propagar-se para o equador e para oeste quando, nos meses de dezembro a janeiro, ele atinge a costa leste africana. Aparentemente este núcleo de água baixa reflete e propaga rapidamente para oeste até atingir o sudeste asiático em março. Também em janeiro, aproximadamente, surge na Índia um novo núcleo, no entanto de água mais elevada, da ordem de 100 mm, que se dirige para a África equatorial quando, em março, reflete e se propaga rapidamente ao longo do equador até atingir a Indonésia entre abril e maio. Aparentemente a intensidade deste segundo núcleo é inferior à do primeiro. No hemisfério sul, na costa noroeste australiana forma-se mais um núcleo elevado, com η em torno de 130 mm, que se propaga para oeste ganhando também mais intensidade. Ao atingir a latitude aproximada de 80° E, longitude de Sri Lanka, entre outubro e novembro o núcleo elevado dissipa ao encontrar a porção refletida do primeiro núcleo baixo formado na costa indiana.

No Oceano Atlântico observa-se a formação de um núcleo de η baixo, da ordem de -30 mm, por volta de janeiro na costa da Guiné. Ele aumenta de intensidade e aparentemente propaga-se em direção à costa do estado do Pará onde é refletido entre os meses de abril e maio e continua propagando-se para leste ao longo do equador. Entre agosto e setembro toda anomalia negativa atinge a costa da África. Em março surge na costa da Nigéria um núcleo de água mais elevada, da ordem de 40 mm, que se propaga zonalmente para oeste e, ao atingir a costa brasileira aproximadamente em outubro, reflete e rapidamente volta a atingir a costa africana. Aparentemente, este núcleo de anomalia elevada, ao propagar-se para oeste, encontra o núcleo de anomalia baixa formada na costa da Guiné forçando parte do segundo para uma latitude mais alta onde continua sua propagação para oeste. Por volta de setembro e outubro, observa-se a formação de outro núcleo na costa da Guiné, também de anomalia alta, com elevação de aproximadamente 90 mm e propagação praticamente zonal para oeste. Estes dois últimos núcleos, ao aproximarem-se da costa sul-americana, próximo à latitude da Guiana Francesa, eles defletem parcialmente em direção ao Caribe e ao equador.

Estes padrões propagantes levam a crer na ocorrência de ondas planetárias tro-

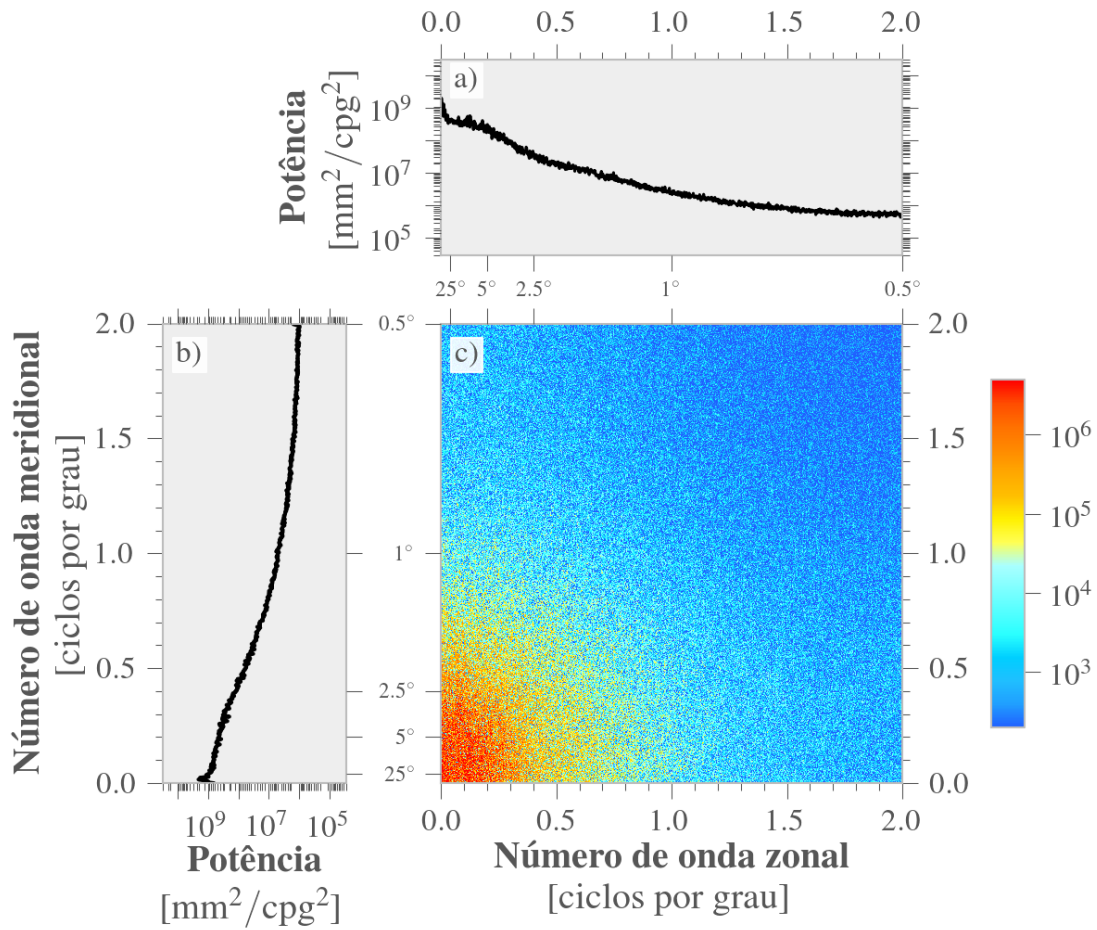


Figura 21 – Densidade de potência espectral bidimensional (em mm^2/cpg^2) em função dos números de onda zonal e meridional (em ciclos por grau, cpg) da anomalia da altura da superfície do mar (η) para o mapa do dia 21 de junho de 2006. O comprimento de onda equivalente (em graus) está indicado entre os eixos em fonte menor.

picais persistentes e recorrentes. As ondas geradas nas costas leste com propagação para oeste podem ser associadas a ondas de Rossby com período anual, semi-anual ou trimestral. Por outro lado as ondas refletidas observadas no Oceano Índico e Atlântico são associadas a ondas de Kelvin com propagação para leste.

4.3 Espectro espacial

Uma forma de caracterização espacial do sinal de ASM é através da densidade de PSD equação (3.2). A PSD do mapa global de 21 de junho de 2006 da figura 21 (c) mostra a distribuição de potência em função dos números de onda zonal e meridional. Com a PSD é possível estimar quantitativamente a relevância de uma determinada banda de números de onda no sinal total. Neste caso, nota-se que o espectro é radialmente uniforme, indicando que não há preferência por um tipo de forma específica para as feições na ASM. A potência está concentrada em comprimentos de onda longos, característico de um espectro “vermelho”. Como, segundo o teorema de Parseval, a FFT preserva a energia do sinal original, pode-se integrar a PSD bidimensional no eixo dos números de onda zonal e meridional sem perda de conteúdo espectral. Os espectros de potência integrados ilustrados na figura 21 sugerem que há três regimes de decaimento na direção zonal, nos intervalos limitados pelos comprimentos de onda 25° , 5° e $0,5^\circ$, aproximadamente.

Calculando-se a PSD para todos os mapas da série temporal e somando-a no eixo dos números de onda meridional, pode-se criar uma sequência de espectros e apresentá-los em forma de diagrama de Hovmoller, como mostra a figura 22. Ela apresenta a evolução da PSD em função do número de onda zonal e do tempo dos mapas globais de η_0 , interpolados pelo método de curvatura contínua mínima (SMITH; WESSEL, 1990), os mapas pré-filtrados contendo o sinal coerente η_C e os mapas da “série de referência” η_{Aviso} interpolados por análise objetiva e distribuídos pela Aviso. Nos três casos, o espectro mantém feições similares àsquelas encontradas no exemplo da figura 22. Comparado ao espectro de η_0 , o espectro de η_C possui potência menor, especialmente para comprimentos de onda inferiores a 1° , aproximadamente. Nesta região do espectro observa-se também pequenas oscilações, provavelmente causados por descontinuidades introduzidas pelo filtro de ondaletas, sugerindo a ocorrência do fenômeno de Gibbs. Tanto as séries do espectro de η_0 quanto de η_C sofrem perda de potência nos instantes em que há medidas de apenas um satélite caracterizados pelos degraus no espectro em 1994, 2000, 2001, 2004, 2007 e a partir de 2012. O espectro dos mapas distribuídos pela Aviso (η_{Aviso}) também são mais atenuados e apresentam decaimento mais acentuado para comprimentos de onda entre 5° e 1° tornando-se mais nivelado para comprimentos de onda inferiores a 1° , onde η_{Aviso} também apresenta pequenas ondulações. Somando-se os espectros ao longo do eixo dos números de onda zonal, obtém-se a variação do

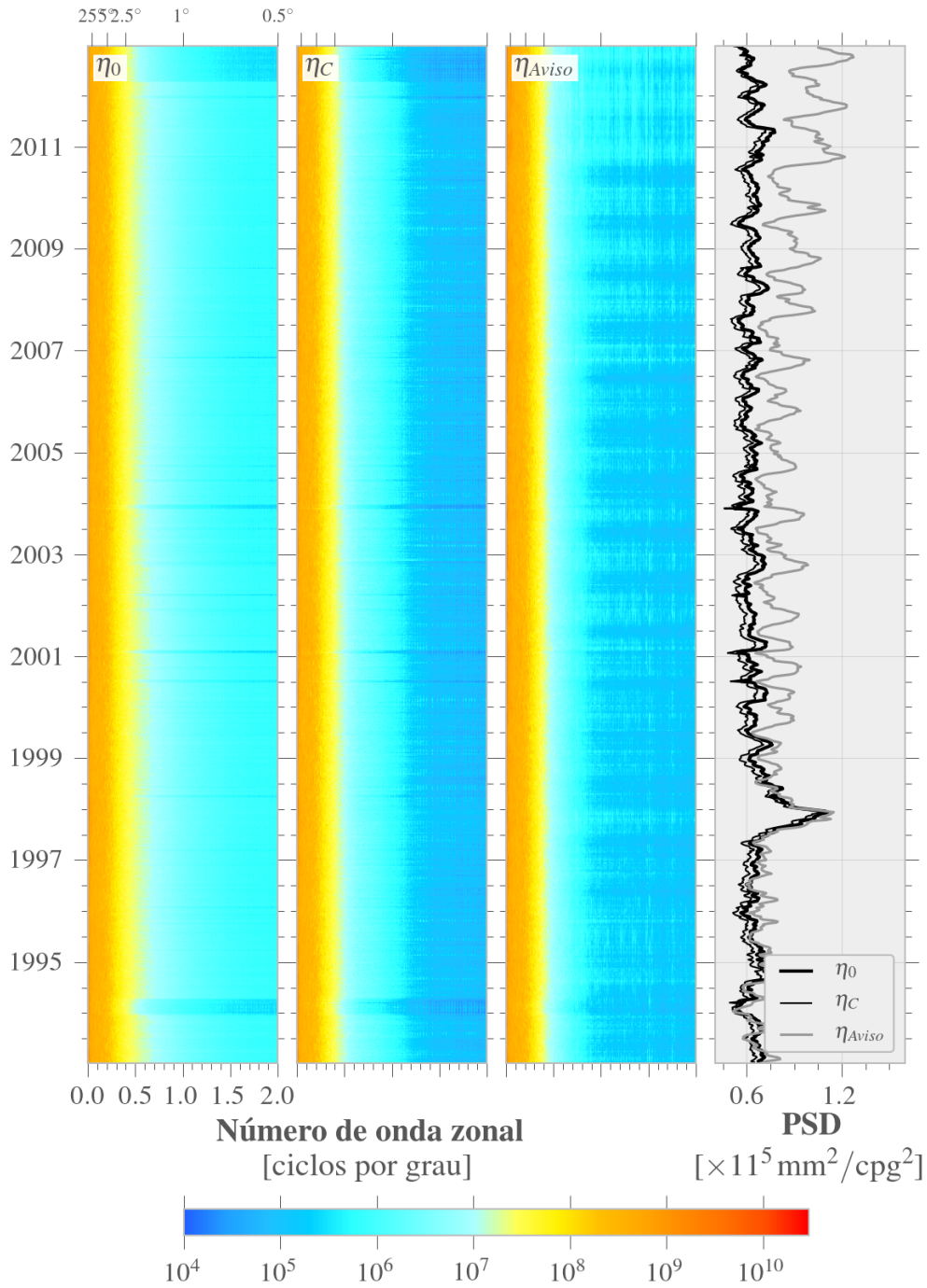


Figura 22 – Diagramas zonais–temporais das densidades de potência espectral bidimensionais global (em $\text{mm}^2/\text{cpg}/\text{cpkm}$) dos mapas η_0 interpolados pelo método da curvatura contínua mínima (SMITH; WESSEL, 1990), os mapas de altura coerente η_C pré-filtrados e os mapas da “série de referência” interpolados por análise objetiva η_{Aviso} (DUCET *et al.*, 2000) e distribuídos pela Aviso. O painel à direita é a soma zonal dos sinais.

espectro total em função do tempo. Nota-se que o espectro total de η_0 é proporcional à série temporal do desvio padrão σ_η ilustrado na figura 17. O espectro da série temporal de η_{Aviso} apresenta tendência constante de aumento, indicando que o sistema está se tornando mais energético.

4.4 Espectro zonal-temporal

Os padrões com propagação zonal para oeste, observados na sequência de mapas de ASM, tornam-se evidentes em diagramas zonais-temporais como ilustrados nas figuras 23 e 24, por exemplo. As figuras apresentam a evolução temporal de ASM nas latitudes 15,375 °N e 22,375 °S respectivamente e mostram dois principais padrões de variabilidade em larga-escala: padrões de elevação e rebaixamento ao longo das bacias, associados ao ciclo sazonal; e sinais de com propagação para oeste e com velocidade de propagação dependente da latitude, associados a ondas planetárias e vórtices de meso-escala. Nota-se que a intensidade do sinal propagante não é longitudinalmente constante e, em geral, observa-se a intensificação do sinal nas bordas oeste das bacias, como pode ser observado no Oceano Atlântico a 15,375 °N, e no Oceano Pacífico a 22,375 °S. Anomalias de ASM com origem na borda leste do Oceano Pacífico podem levar até 4 anos para atravessar toda a bacia e atingir a borda oeste. Na latitude 15,375 °N note-se uma tendência de aumento no sinal de ASM principalmente na borda oeste do Oceano Pacífico a partir de 1998, como também mostra o mapa de tendências da figura 19. Na latitude 22,375 °S também há tendência de aumento, principalmente na borda oeste do Oceano Pacífico e no Oceano Índico.

A PSD zonal-temporal dos diagramas de Hovmoller (figuras 25 e 26) mostra que a variabilidade do sinal está confinada a uma região localizada no espaço de comprimentos de onda zonal e de frequência. O espectro apresenta um sinal de alta potência na banda referente a períodos de 360 dias, aproximadamente, ao longo de uma larga faixa de comprimentos de onda em todas as latitudes. Além disso, também observa-se grande potência com períodos de 180 dias, principalmente nas regiões tropicais. Ao espectro de potência sobrepõe-se a relação de dispersão de ondas de Rossby linear da equação (1.3) e a relação de dispersão de ondas de Rossby considerando-se o efeito de uma corrente zonal média segundo a equação (1.4). O Raio de deformação utilizado no cálculo da

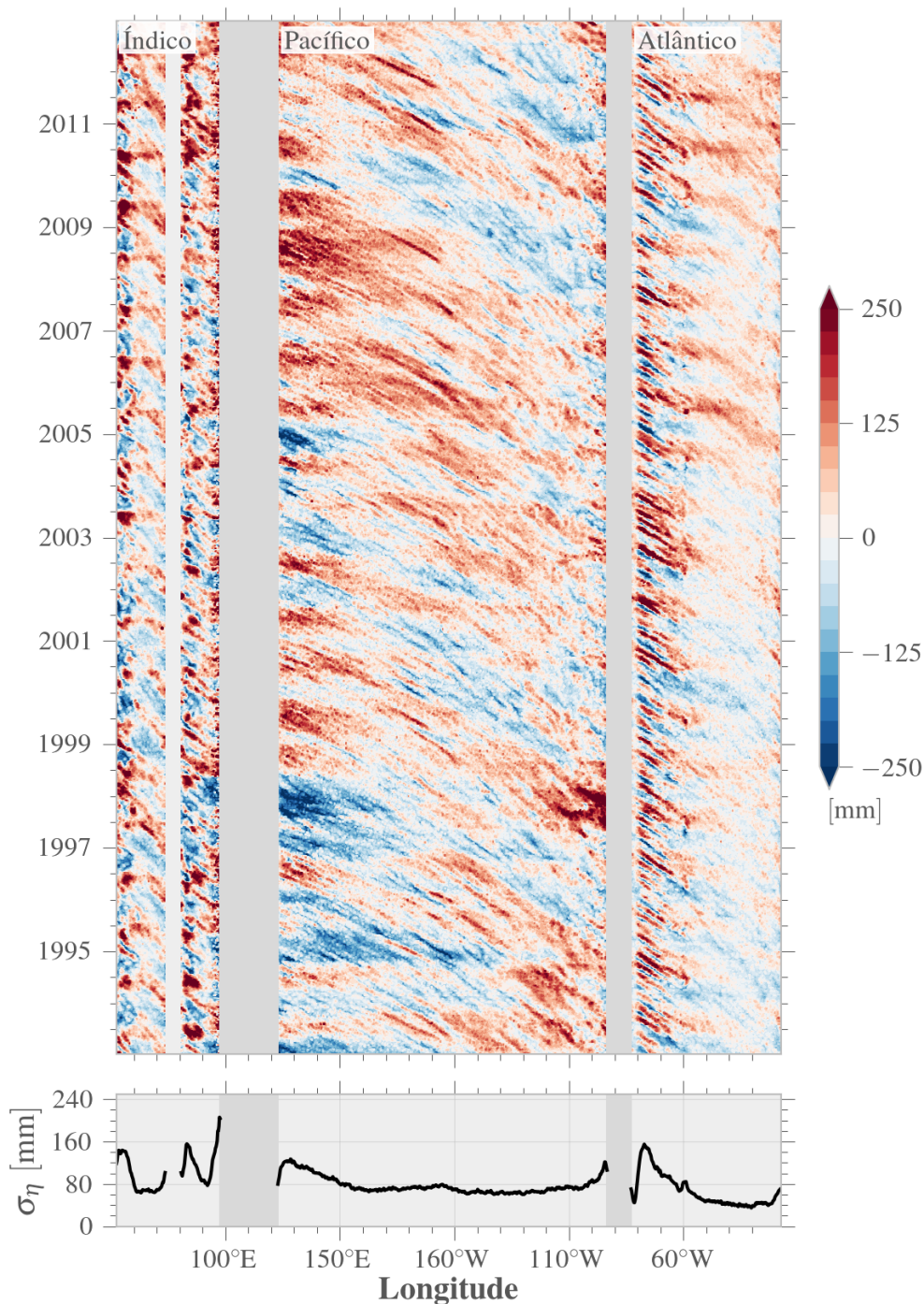


Figura 23 – Diagrama zonal–temporal da anomalia da altura da superfície do mar e a variância em função da longitude (σ_η) na latitude 15,375 °N. Nota-se a presença de feições com propagação para oeste em todas as bacias e um ciclo sazonal menos pronunciado.

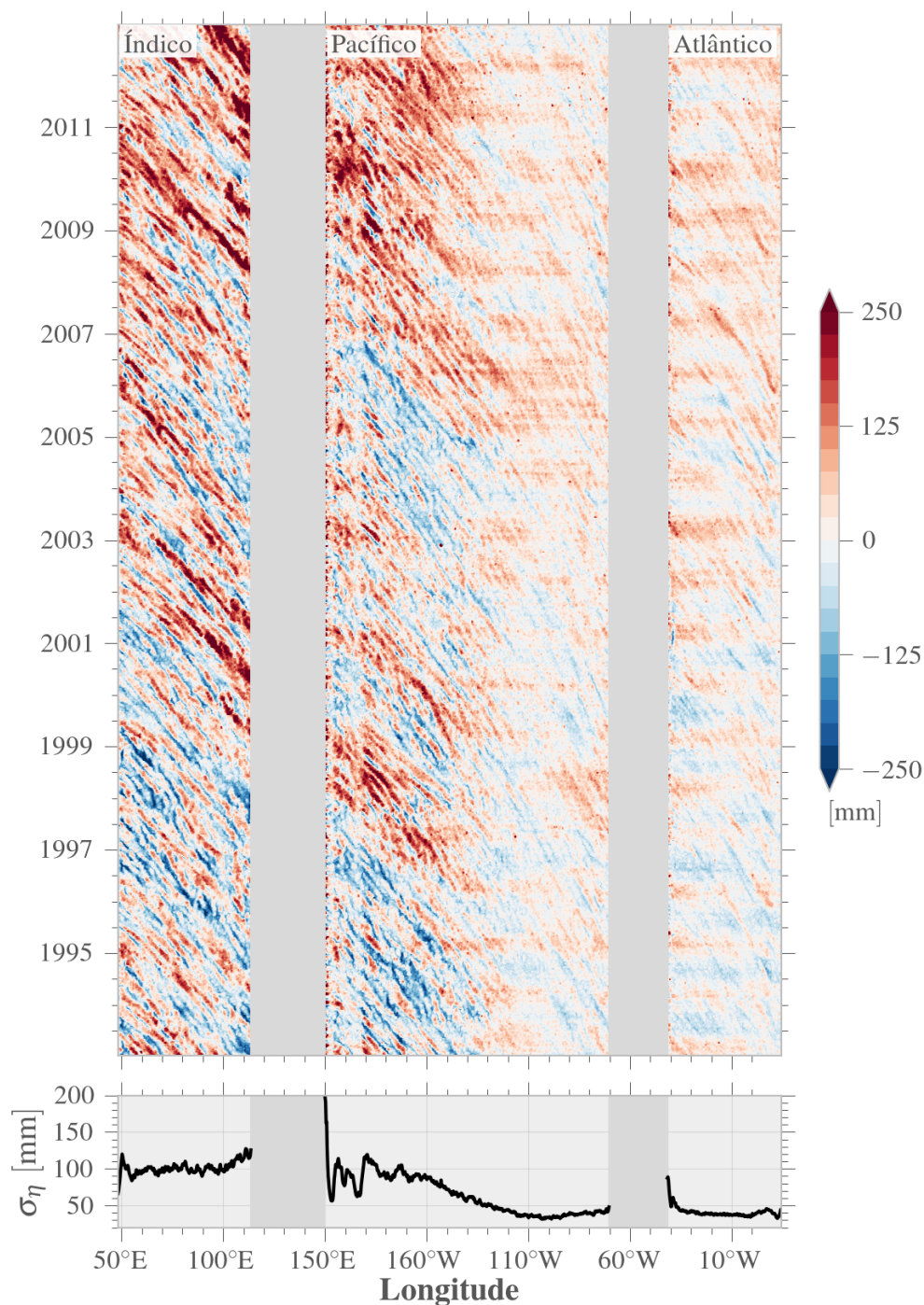


Figura 24 – Diagrama zonal–temporal da anomalia da altura da superfície do mar e o desvio padrão em função da longitude (σ_η) na latitude 22,375 °S. Nota-se a presença de feições com propagação para oeste em todas as bacias e a presença do ciclo sazonal, principalmente nos Oceanos Pacífico e Atlântico.

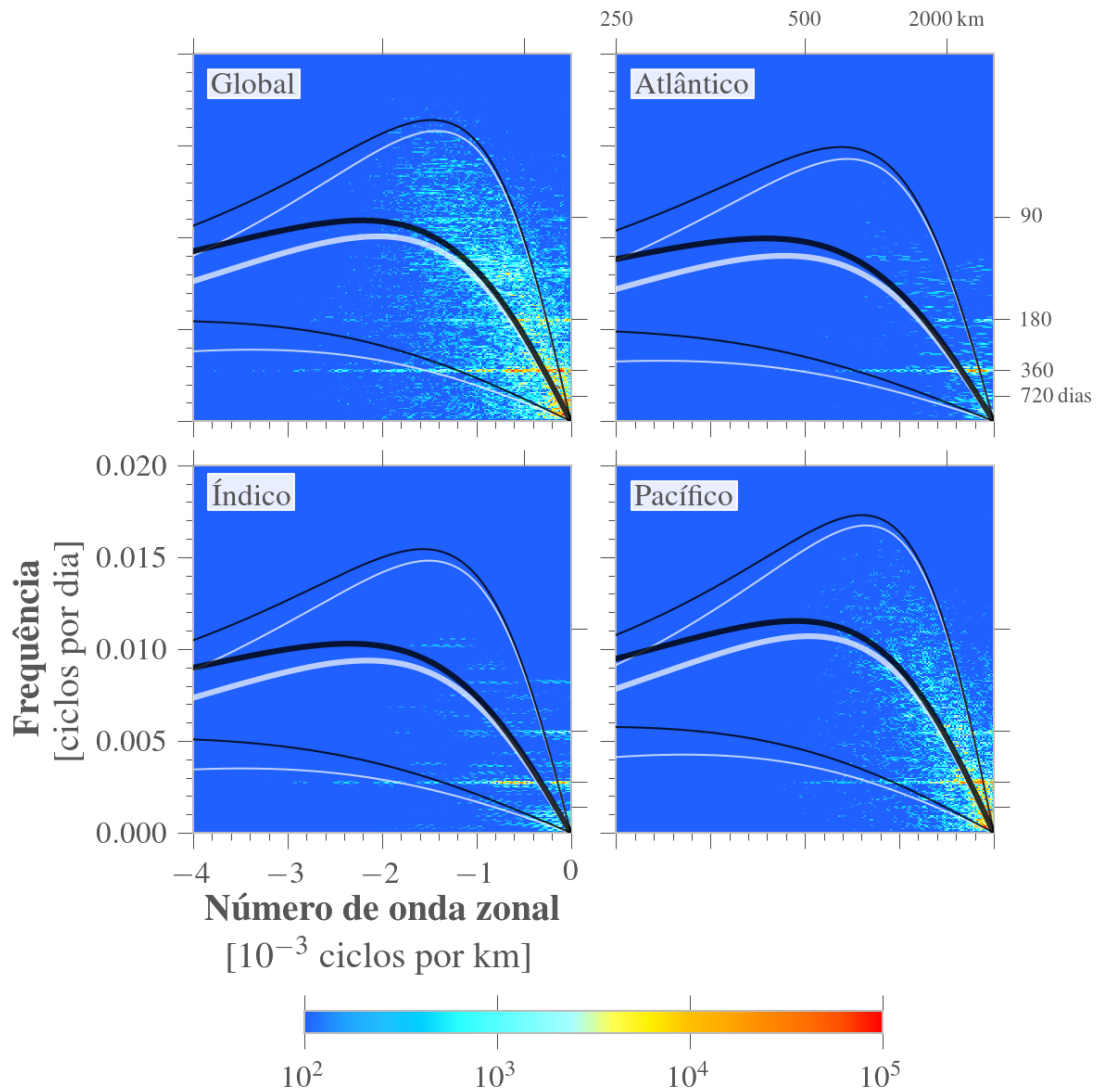


Figura 25 – Densidade de potência espectral bidimensional (em mm²/cpd/cpkm) em função dos números de onda zonal (em ciclos por km, cpkm) e frequência (em ciclos por dia, cpd) da anomalia da altura da superfície do mar (η) global e por bacia oceânica na latitude 15,375°N. As linhas sobrepostas correspondem às relações de dispersão de ondas de Rossby lineares da teoria clássica, sem o efeito de correntes médias (linha preta); e com efeito de correntes médias (linha branca), assumindo número de onda meridional nulo. As linhas espessas são as relações de dispersão calculadas utilizando o raio de deformação de Rossby (L_{Ro}) estimado por Chelton *et al.* (1998), enquanto que as linhas finas inferior e superior são calculadas utilizando $0.5 \cdot L_{Ro}$ e $1.5 \cdot L_{Ro}$, respectivamente. Nesta latitude, os raios de deformação médio são 71,99 km, 65,53 km, 67,81 km e 75,94 km globalmente e nos Oceanos Atlântico, Índico e Pacífico.

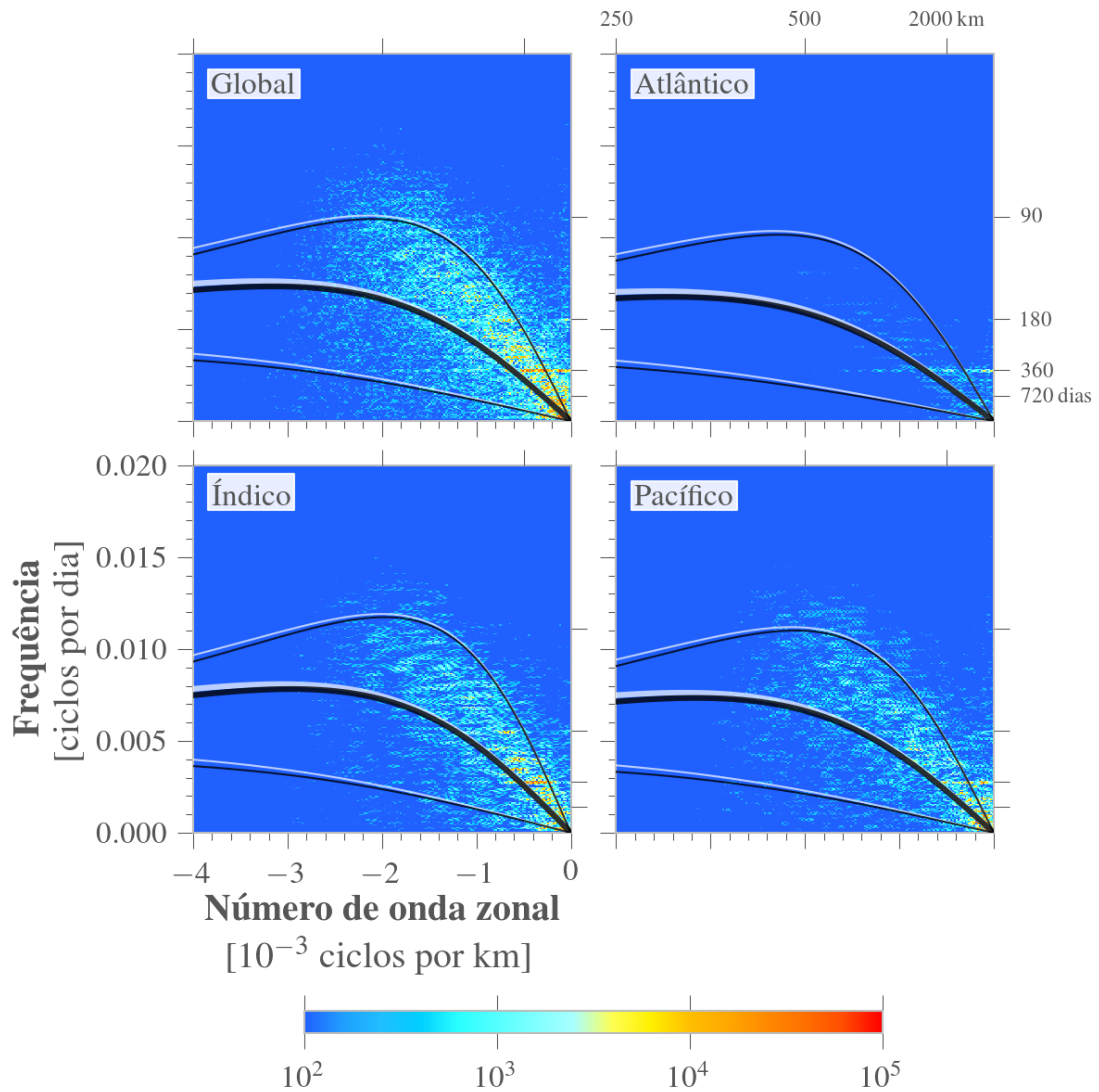


Figura 26 – Densidade de potência espectral bidimensional (em mm²/cpd/cpkm) em função dos números de onda zonal (em ciclos por km, cpkm) e frequência (em ciclos por dia, cpd) da anomalia da altura da superfície do mar (η) global e por bacia oceânica na latitude 22,375°S. As linhas sobrepostas correspondem às relações de dispersão de ondas de Rossby lineares da teoria clássica, sem o efeito de correntes médias (linha preta); e com efeito de correntes médias (linha branca), assumindo número de onda meridional nulo. As linhas espessas são as relações de dispersão calculadas utilizando o raio de deformação de Rossby (L_{Ro}) estimado por Chelton *et al.* (1998), enquanto que as linhas finas inferior e superior são calculadas utilizando $0.5 \cdot L_{Ro}$ e $1.5 \cdot L_{Ro}$, respectivamente. Nesta latitude, os raios de deformação médio são 50,40 km, 46,48 km, 53,74 km e 50,41 km globalmente e nos Oceanos Atlântico, Índico e Pacífico.

relação de dispersão está ilustrado no mapa da figura 8 e é baseado nos resultados de Chelton *et al.* (1998). Considera-se apenas o efeito de uma velocidade zonal constante \vec{U} , calculada a partir da média dos mapas de velocidade geostrófica disponibilizados pela Aviso, ilustrada na figura 9. Para avaliar a sensibilidade das relações de dispersão ao raio de deformação de Rossby L_{Ro} , o cálculo também foi realizado adotando-se $0.5 \cdot L_{Ro}$ e $1.5 \cdot L_{Ro}$. Os resultados da análise espectral mostram que grande porção do espectro zonal-temporal observado encontra-se dentro deste intervalo, independente da latitude. Além disso, os potências estão concentradas na região do espectro associada às ondas de Rossby longas, que, segundo a teoria linear, são não-dispersivas.

Chelton *et al.* (2011) afirmam que as características não-lineares de vórtices implicariam em estes possuírem variância espectral linear localizada sobre uma linha reta no espectro no espaço dos números de onda e frequência. No entanto os espectros zonal-temporal calculados no presente trabalho não mostram de forma inequívoca a existência de uma relação linear como os autores sugerem. O que se observa são bandas de frequência e número de onda bastante dispersas com picos que poderiam ajustar-se à relação de dispersão linear de ondas de Rossby como pode-se observar nos espectros ilustrados nas figuras 25 e 26.

4.5 Contribuições e tendências espectrais

Como complemento à análise de Fourier, também pode-se adotar a análise de ondaletas e os testes de significância sugeridos por Torrence e Compo (1998). A principal vantagem da análise de ondaletas sobre a análise de Fourier é fornecer informação espectral localizada no tempo (ou no espaço). A figura 27 apresenta o espectro de ondaletas de ASM média global utilizando-se a ondaleta de Morlet ($\omega_0 = 6$). A partir do espectro de ondaletas pode-se verificar que o sinal anual é dominante, mas ele varia no tempo, apresentando períodos menos intensos em 1995, 2004 e 2006, por exemplo. Assim como a análise de Fourier, pode-se selecionar bandas espectrais para avaliar sua contribuição no espectro total. Selecionando-se a faixa centrada em 12 meses, por exemplo, pode-se integrar o espectro ao longo do tempo e compará-lo ao espectro integrado total. O espectro de ondaletas também permite integrar nas frequências a potência desta mesma banda e criar séries temporais como ilustrada na figura 27 (iv). Esta série temporal de

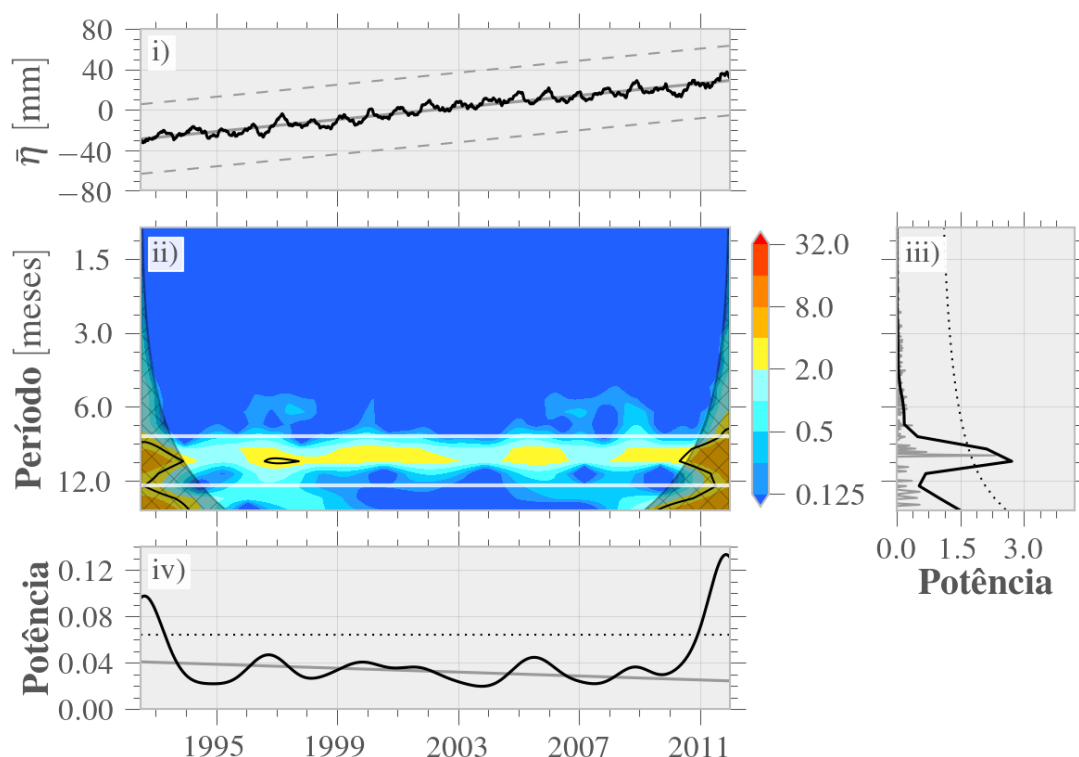


Figura 27 – Análise de ondaletas do sinal da anomalia da altura da superfície do mar média global ($\bar{\eta}$). (i) Série temporal de $\bar{\eta}$ (linha contínua preta), tendência linear (linha contínua cinza), intervalo de duas vezes o desvio padrão de $\bar{\eta}$ (linha tracejada cinza). (ii) Espectro de ondaletas normalizado de $\bar{\eta}$ utilizando-se a ondaleta de Morlet ($\omega_0 = 6$) em função do tempo e dos períodos de onda de Fourier equivalentes (em meses). As linhas de contorno pretas indicam regiões com pelo menos 95 % de confiança em relação a um espectro teórico de ruído vermelho. A área hachurada e sombreada indica a região na qual o cone de influência vai além do domínio da série temporal. (iii) Espectro de ondaleta global (linha contínua preta) e espectro de potência de Fourier (linha contínua cinza). A linha pontilhada indica o nível de confiança de 95 %. (iv) Média por período do espectro de ondaleta na banda de 12 meses (linha contínua preta), tendência espectral (linha cinza contínua) e nível de confiança de 95 % (linha tracejada preta).

potência média pode ser utilizada para determinar possíveis tendências observadas no espectro. No entanto, para o cálculo das tendências é importante desconsiderar-se as regiões no espectro sob efeito do cone de influência da ondaleta.

Aplicando-se a análise de ondaleta em todos os pontos da série temporal de

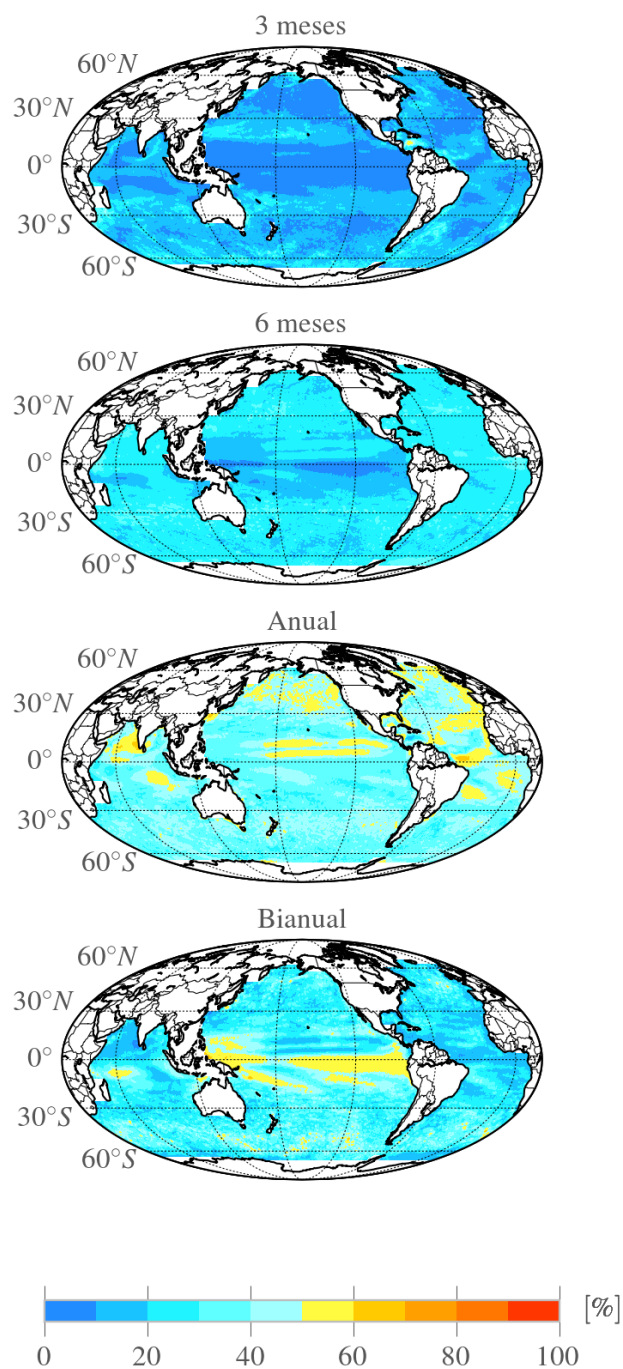


Figura 28 – Mapas de contribuição espectral relativa em relação ao espectro de ondaletas global com período de onda inferior a dois anos.

Tabela 2 – Contribuição relativa média (em %) de cada faixa de períodos do sinal em relação ao espectro de ondaletas global com período de onda inferior a dois anos, por bacia oceânica e global.

| | 3 meses | 6 meses | Anual | Bianual |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Atlântico | 12.5 (25.3) | 23.4 (22.4) | 40.3 (40.3) | 21.7 (9.5) |
| Índico | 13.9 (27.6) | 22.8 (25.7) | 36.2 (32.4) | 25.2 (12.1) |
| Pacífico | 10.4 (22.9) | 19.6 (21.5) | 37.2 (36.1) | 31.3 (17.5) |
| Golfo do Mexico | 9.7 (18.0) | 25.5 (23.4) | 44.9 (48.1) | 18.8 (9.1) |
| Caribe | 23.5 (43.6) | 24.5 (18.3) | 35.2 (32.0) | 14.4 (4.3) |
| Baía de Bengala | 13.9 (26.5) | 24.5 (25.5) | 39.2 (35.2) | 20.8 (11.0) |
| Mar da Tasmânia | 11.6 (23.4) | 23.4 (24.7) | 38.8 (38.2) | 24.6 (11.7) |
| Global | 11.8 (24.6) | 21.4 (22.7) | 37.9 (36.4) | 27.2 (14.0) |

η e calculando tanto a contribuição relativa e tendências por banda espectral pode-se construir mapas de contribuição relativa e tendências espectrais como ilustrados nas figuras 28 e 29, respectivamente. Como esperado, eventos com períodos anuais dominam o espectro de ASM. Parte da variabilidade anual está associada ao ciclo sazonal. No entanto, a variabilidade espectral relativa de ASM global não é homogênea e eventos com períodos centrados em 3, 6 e 24 meses também são significativas. No Oceano Atlântico, eventos anuais contribuem com 40,3 % da variância de ASM. O conteúdo espectral tende a ser zonalmente distribuído. No Pacífico equatorial, o espectro bianual contribui com 31,3 % do espectro de ondaleta global. A tabela 2 relaciona a contribuição relativa média para as principais bacias oceânicas e mares abertos.

Lin *et al.* (2008) observam, através da análise espectral de Fourier, a ocorrência de picos de potência no espectro da ASM em determinadas frequências zonalmente distribuídas para cada latitude. Eles associam essa distribuição zonal à frequência crítica de ondas de Rossby e sugerem que, como na latitude crítica não há ondas de Rossby, a energia transmitida ao oceano por forçantes atmosféricas fica acumulada.

As tendências no espectro também não são homogêneas no espaço e apresentam padrões distintos nas diferentes bandas espectrais. Tendências são particularmente elevadas em todos os períodos nas bordas oeste dos grandes giros subtropicais, onde as correntes de borda oeste viram em direção ao interior dos oceanos. No Pacífico equatorial observa-se tendências negativas intensas nos períodos de 3 e 6 meses. A tabela 3 relaciona

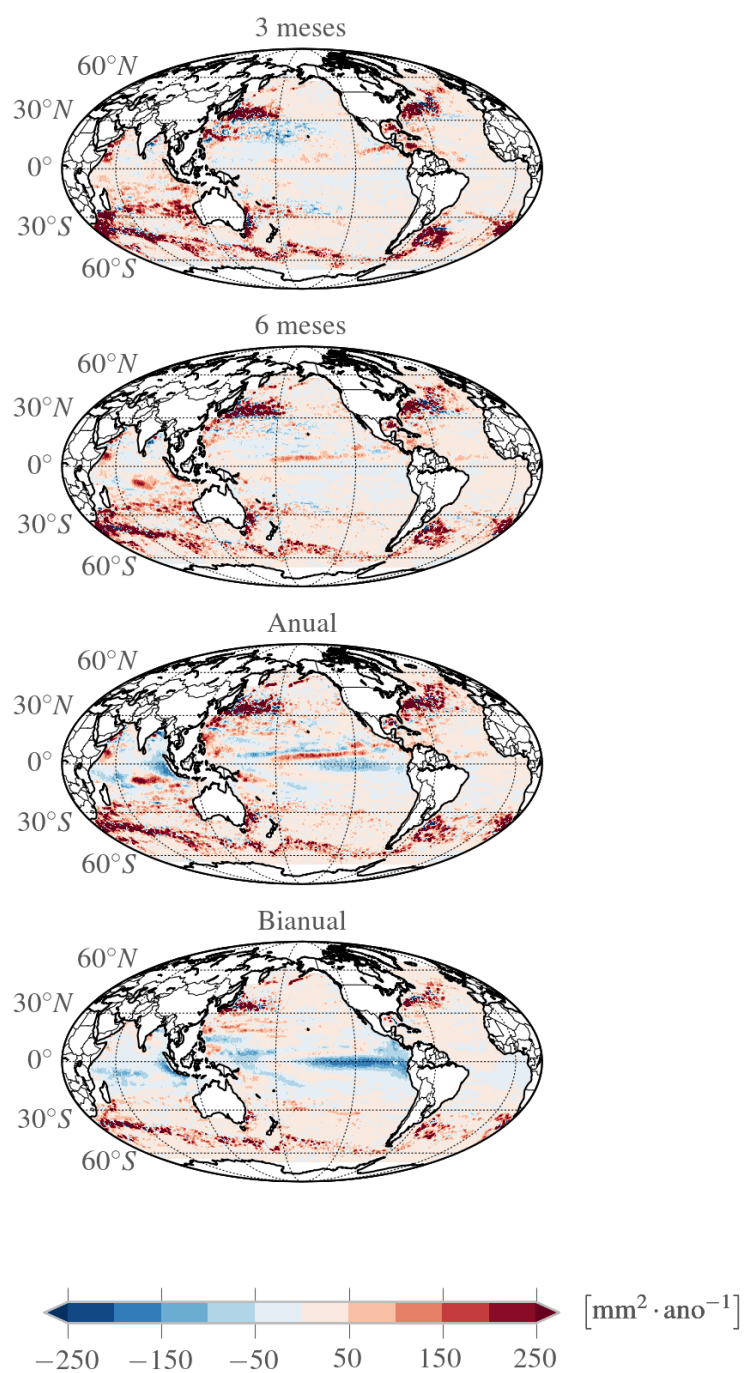


Figura 29 – Mapas de tendências espectrais para as faixas de períodos de 3, 6, 12 e 24 meses.

Tabela 3 – Tendências espectrais médias (em mm²/ano) para cada faixa de períodos por bacia oceânica e global.

| | 3 meses | 6 meses | Anual | Bianual |
|-----------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| Atlântico | -0.5 (-0.2) | -1.0 (2.5) | 3.0 (-81.8) | 1.4 (-48.3) |
| Índico | 3.2 (-13.5) | 6.6 (-42.1) | 1.0 (71.9) | -6.8 (-159.8) |
| Pacífico | -10.1 (-21.3) | -3.2 (-81.0) | -4.5 (-71.5) | -10.8 (-13.2) |
| Golfo do Mexico | 31.7 (8.2) | 31.3 (229.6) | -35.4 (-670.0) | -34.1 (848.7) |
| Caribe | 45.5 (-34.8) | 28.8 (378.2) | 12.2 (242.3) | 0.2 (326.2) |
| Baia de Bengal | -41.3 (-37.7) | -38.8 (-182.8) | -53.7 (-6.6) | -17.5 (-1794.3) |
| Mar da Tasmania | 24.1 (3.6) | 12.1 (160.1) | 14.7 (113.5) | 13.0 (256.1) |
| Global | -4.2 (-13.9) | -0.3 (-46.3) | -1.6 (-41.2) | -6.6 (-60.7) |

as tendências espectrais médias para as principais bacias oceânicas e mares abertos.

5 Separação de sinais de meso-escala

O método de detecção de vórtices é dividido em três partes. A primeira parte consiste em filtrar os mapas de altura da superfície do mar (ASM) para remover sinais não coerentes (η_I) e em seguida separar sinais de larga-escala (η_L) de sinais de meso-escala (η_M) através da análise de ondaletas. Um algoritmo busca identificar nos mapas de η_M estruturas com assinatura de vórtices e os separa gerando o sinal basal η_B . Os vórtices identificados através deste sistema podem ser classificados quanto à sua excentricidade entre anéis η_R e vórtices η_E .

5.1 Filtragem e identificação de estruturas

O método da transformada de ondaletas separa o sinal original de η_0 nos componentes coerente η_C , de larga-escala η_L , de meso-escala η_M e não-coerente η_I . A figura 30 mostra detalhe no Oceano Atlântico Sul da decomposição do mapa de ASM nestes componentes. Como a transformada de ondaletas utilizada garante ortogonalidade do sinal decomposto, a soma dos componentes $\eta_L + \eta_M$ é idêntica ao componente η_C . Observa-se intensa atividade de meso escala no componente η_M , como esperado, e também padrões de larga-escala, principalmente próximo ao equador.

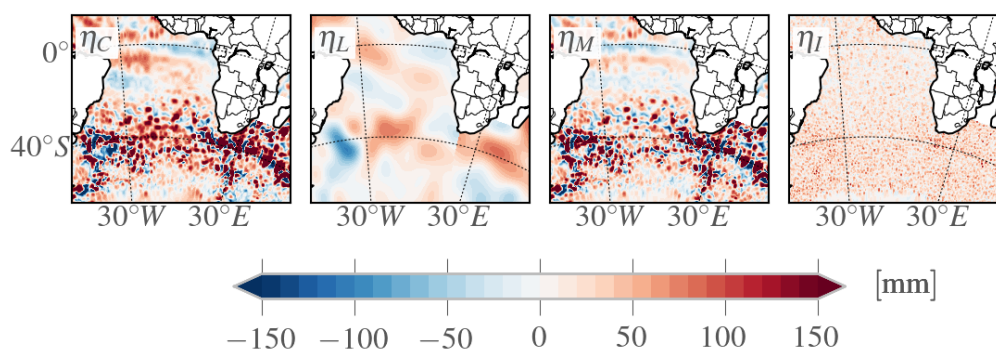


Figura 30 – Detalhe de componentes do mapa de anomalia da altura da superfície do mar para o dia 21 de junho de 2006 no Oceano Atlântico Sul: sinal coerente (η_C), sinal de larga-escala (η_L), sinal de meso-escala (η_M) e sinal não-coerente (η_I).

Em cada mapa de η_M da série temporal, localiza-se os pontos de mínimos e máximos, associados à presença de vórtices e procura-se nos pontos vizinhos pela borda dos mesmos. Definida a borda, procura-se ajustar o parabolóide elíptico descrito pela equação (3.9). A figura 31 apresenta o ajuste de dois vórtices, um anti-ciclônico e um ciclônico, ao mapa de η_M . Ambos os vórtices estão localizados no Oceano Atlântico Sul. O erro quadrático médio (*root-mean-square error*) (RMSE) entre o mapa e a função ajustada é 23 mm para o vórtice anti-ciclônico, e 34 mm para o vórtice ciclônico. Uma vez que os limites laterais e a altura basal do vórtice são determinados, o sinal de η_M pode ser decomposto em mapas do sinal basal η_B , sinal de vórtices η_E e sinal de anéis vorticais η_R . Lembrando que a diferenciação entre vórtices e anéis vorticais é feita através da excentricidade e da função ajustada. No presente trabalho adotou-se como critério para $e < 0,866$ os vórtices seriam considerados anéis vorticais. Este é um critério para a excentricidade bastante relaxado e equivale à razão dos parâmetros satisfazer $0,5 < \frac{a}{b} < 2$.

Após aplicar o filtro de separação de estruturas vorticais a toda série temporal, pode-se construir uma sequência de mapas para verificar a evolução temporal de todos os componentes. As figuras 32 e 33 apresentam a sequência dos componentes com início em 21 de junho de 2006 e duração de 8 semanas no Oceano Atlântico Sul e no Pacífico Norte, respectivamente. A análise da evolução de toda a série temporal mostra que as estruturas vorticais localizadas tendem a saltar entre os componentes η_E e η_R . Isto provavelmente é devido ao critério de excentricidade relativamente relaxado ou a ruído persistente no sinal, que, por sua vez, são fatores que limitam o algoritmo de detecção do contorno da estrutura vortical. Em situações menos comuns pode haver vazamento de estruturas entre os componentes η_B e η_E ou η_R . Todos os componentes apresentam feições com propagação para oeste.

Observando-se os mapas em detalhe, nota-se à primeira vista que o filtro tende a favorecer a separação de estruturas vorticais anti-ciclônicas em todas as bacias. Isso levanta questões a respeito da confiabilidade do algoritmo. No entanto, observando-se os mapas de η_C , nota-se que as feições com anomalia positiva de ASM aparentam ter diâmetro maior do que as feições de anomalia negativa. Isso sugere que o algoritmo de detecção dos contornos de candidatos a vórtices é eficiente na separação das feições. A utilização do critério de excentricidade apresenta bons resultados e separa de maneira

eficiente as feições mais circulares. Como resultado da separação, o componente basal tende a apresentar anomalias mais negativas. Vale lembrar que o algoritmo garante a reconstrução completa do sinal de η_C somando-se cada um dos componentes sem introduzir erros.

Analisando-se a sequência de mapas de η_C , nota-se que os vórtices anti-ciclônicos identificados pelo sistema aparecem, na maioria dos casos, como estruturas isoladas circundadas por regiões alongadas com ASM negativa. Feições alongadas de anomalia negativa também aparecem em certos instantes no sinal basal η_B , sugerindo a possibilidade de tratar-se de frentes de onda com velocidade de propagação semelhante às dos vórtices.

A evolução temporal dos componentes pode ser avaliada através dos diagramas zonais-temporais para o Oceano Atlântico a $22,375^\circ\text{S}$ (figura 34). O principal padrão de variabilidade encontrado na componente de larga-escala η_L está associado ao ciclo sazonal não propagante. Ele é o sinal com maior variância nesta latitude e apresenta uma tendência de aumento pronunciada, consistente com as tendências ilustradas no mapa da figura 19. Os componentes η_B , η_E e η_R apresentam padrões de propagação para oeste. O componente basal η_B apresenta um padrão bastante semelhante a um sinal ondulatório com alternância entre cristas de cavados. Os componentes vorticiais η_E e η_R tendem a concentrar vórtices anti-ciclônicos, como observado avaliando-se os mapas individuais. Vórtices ciclônicos aparecem em instantes isolados da série temporal. Nota-se que o sinal propagante tende a manter sua velocidade de propagação constante, salvo na componente η_B que, a partir de 2005 em aproximadamente 10°W apresenta uma aceleração do sinal, indicados por linhas mais inclinadas. Em todos os componentes observa-se um padrão de intensificação do sinal em direção à borda oeste, no entanto, para o componente η_L há um rápido declínio da variância do sinal próximo da borda continental a oeste de 35°W aproximadamente.

No Oceano Pacífico a $15,375^\circ\text{N}$ (figura 35) observa-se essencialmente padrões de propagação zonal em todos os componentes. No componente de larga-escala η_L nota-se a presença de um sinal não propagante ao longo de toda a bacia, associado ao ciclo sazonal, com interferência de um sinal propagante. Os componentes η_E e η_R apresentam essencialmente vórtices anti-ciclônicos. A variância dos componentes possui mesma ordem de grandeza. É importante notar, o método de extração das estruturas vorticiais

não garante preservação da variância, como é o caso do filtro de ondaletas.

5.2 Espectro

A densidade de potência espectral (*power spectral density*) (PSD) dos diagramas zonais–temporais dos componentes de larga-escala η_L , basal η_B , de vórtices η_E e de anéis vorticais η_R mostra o efeito do processo de filtragem sob o espectro da ASM. As figuras 36 e 37 mostram a PSD dos diagramas zonais–temporais globais nas latitudes $15,375^\circ\text{N}$ e $22,375^\circ\text{S}$, respectivamente. O espectro do componente η_L é limitado a eventos com comprimento de onda superiores a aproximadamente 1000 km no espaço. No tempo ele apresenta variabilidade com períodos superiores a 90 dias. Tanto na latitude $15,375^\circ\text{N}$ quanto na latitude $22,135^\circ\text{S}$, o espectro de η_L preserva os picos nos períodos de 180 dias e 360 dias presentes no espectro do sinal não filtrado (figuras 25 e 26).

No caso do componente basal η_B , o espectro na latitude $15,375^\circ\text{N}$ preserva parte do espalhamento do sinal original e fica mais restrito à banda delimitada pelos limites inferiores e superiores do espectro de ondas de Rossby teórico sobrepostos à PSD, mas tende a apresentar períodos um pouco superiores ao espectro teórico de referência. Os picos com períodos de 360 dias também são preservados. Na latitude $22,375^\circ\text{S}$ o espectro de η_B apresenta picos com períodos de 360 dias menos pronunciados.

O espectro do componente η_E apresenta características semelhantes às do espectro de η_B , porém menos intensos. Na latitude $15,375^\circ\text{N}$ há sinal intenso de período anual. Na latitude $22,375^\circ\text{S}$ este componente possui um espalhamento maior comparado ao espectro do componente η_B e de intensidade semelhante. Os espectros de η_E também tendem a permanecer na banda limitada pelos espectros teóricos.

No caso dos anéis vorticais, o espectro é fraco e menos espalhado comparado aos demais espectros. Na latitude $15,375^\circ\text{N}$ sinais com períodos anuais são dominantes, enquanto que em $22,375^\circ\text{S}$ não há frequências predominantes.

5.3 Características dos vórtices

A figura 38 apresenta os mapas de desvio padrão para cada uma das componentes do filtro. A variabilidade do sinal de larga-escala η_L apresenta uma distribuição relativamente

Tabela 4 – Desvio padrão médio (em mm) das componentes de sinal coerente (η_C), larga-escala (η_L), basal (η_B), vórtices (η_E) e anéis (η_R) entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012 para cada bacia oceânica e para todo o globo, separados em hemisfério norte (N), hemisfério sul (S) e hemisfério norte e sul (NS).

| | Atlântico | | | Índico | | | Pacífico | | |
|----------|-----------|------|------|--------|------|------|----------|------|------|
| | N | S | NS | N | S | NS | N | S | NS |
| η_L | 44,5 | 34,1 | 38,9 | 55,8 | 48,4 | 49,3 | 57,3 | 42,8 | 49,4 |
| η_B | 43,6 | 41,5 | 42,5 | 40,1 | 55,9 | 54,0 | 45,6 | 35,7 | 40,2 |
| η_E | 47,1 | 43,4 | 45,1 | 30,1 | 57,9 | 54,5 | 38,7 | 36,0 | 37,3 |
| η_R | 26,3 | 24,1 | 25,1 | 15,5 | 32,1 | 30,1 | 21,6 | 19,4 | 20,4 |

homogênea (≈ 50 mm) por todo o globo, salvo em algumas regiões isoladas no Oceano Atlântico (próximo da confluência das Correntes Brasil–Malvinas e da Corrente do Golfo), no Oceano Pacífico (na região equatorial e na borda oeste) e no Oceano Índico tropical. As componentes basal η_B , de vórtices η_E e de anéis vorticiais η_R apresentam uma distribuição geográfica da variabilidade semelhante, mas com intensidades distintas, sendo a componente η_R a menos intensa. A variabilidade nestas componentes é bastante pronunciada nas regiões das principais correntes oceânicas. A distribuição espacial do desvio padrão de cada uma das componentes é compatível com a distribuição do desvio padrão de η_0 ilustrado na figura 18. É importante notar, no entanto, que o filtro de detecção de vórtices não preserva a variância do sinal original.

A variação do raio médio dos anéis (figura 39) identificados é bastante distinta para anéis ciclônicos e anéis anti-ciclônicos. Para o caso anti-ciclônico, o raio médio varia de aproximadamente 100 km em altas latitudes e aumenta em direção a latitudes mais baixas, chegando a aproximadamente 200 km em aproximadamente 23° latitude nos dois hemisférios e decresce até atingir aproximadamente 130 km no equador. Os anéis ciclônicos seguem um padrão de distribuição similar, no entanto o raio é 30 % menor.

Os resultados do filtro proposto no presente trabalho sugere que vórtices anti-ciclônicos são mais frequentes que vórtices ciclônicos. A distribuição espacial da frequência de observações dos vórtices identificados está ilustrada na figura 40. Nota-se que as regiões de maior ocorrência tanto de de vórtices ciclônicos como anti-ciclônicos está localizada em médias e altas latitudes. No hemisfério sul, a frequência máxima localiza-se a aproximadamente 36° S e no hemisfério norte a aproximadamente 25° N.

A frequência de vórtices ciclônicos possui distribuição espacial similar, é praticamente metade da frequência observada de vórtices anti-ciclônicos. Apesar da quantidade de anéis identificados ciclônicos e anti-ciclônicos ser semelhante ao longo do tempo (figura 42) o diâmetro de vórtices anti-ciclônicos é maior, o que por sua vez aumenta sua frequência. Existem regiões onde a frequência de ocorrência de vórtices anti-ciclônicos é bem alta, como por exemplo: no Oceano Atlântico sudeste, próximo à costa da Namíbia; no Pacífico tropical leste, próximo ao Golfo da Califórnia; no Golfo do México; e ao norte da Guiana, região da retroflexão da Corrente Norte do Brasil. As regiões das principais correntes oceânicas possuem alta frequência de observações de vórtices ciclônicos.

Considerando-se um ponto no interior de um vórtice, a polaridade p de vórtices representa a probabilidade deste ponto estar ocupado por um vórtice ciclônico ($p < 0$) ou um vórtice anti-ciclônico ($p > 0$). A distribuição de polaridade média é calculada a partir das frequências de ocorrência de vórtices anti-ciclônicos (f_A) e ciclônicos (f_C) pela relação $p = \frac{f_A - f_C}{f_A + f_C}$ (CHAIGNEAU *et al.*, 2009). O mapa de polaridade média (figura 41) confirma a predominância de vórtices anti-ciclônicos, no entanto há regiões localizadas onde vórtices anti-ciclônicos são predominantes e regiões sem predominância definida. Nas principais correntes oceânicas, como por exemplo a Corrente de Kuroshio, a Corrente do Golfo e a Corrente Circumpolar Antártica, nota-se as intensas regiões com desprendimento de vórtices ciclônicos, em direção ao equador, e de vórtices anti-ciclônicos, em direção aos polos.

As características médias apresentadas a seguir consideram apenas o sinal associado aos anéis vorticais, selecionados pelo critério da excentricidade $e < 0,866$. Espera-se que os vórtices selecionados através deste critério sejam mais estáveis e que eles mantenham suas propriedades por mais tempo. A figura 42 mostra a quantidade de vórtices encontrados segundo este critério ao longo do tempo. A quantidade de anéis vorticais identificados permanece relativamente constante ao longo do tempo e o sistema encontra praticamente a mesma quantidade de vórtices anti-ciclônicos e ciclônicos.

Tanto os anéis vorticais ciclônicos quanto anti-ciclônicos possuem distribuição espacial de altura similares (figura 43). As alturas dos vórtices variam entre 50 mm na região equatorial e aumentam em função da latitude. As maiores alturas são observadas nas latitudes 40 °N e 43 °S, aproximadamente. As alturas máximas variam entre 150 mm e 200 mm, e podem chegar a mais 300 mm em algumas regiões. A partir destas latitudes,

as alturas voltam a diminuir.

A distribuição de altura de vórtices é semelhante aos resultados obtidos por Chelton *et al.* (2011). É importante lembrar que estes autores classificam os vórtices por tempo de vida, enquanto que no presente trabalho os vórtices são classificados pela excentricidade.

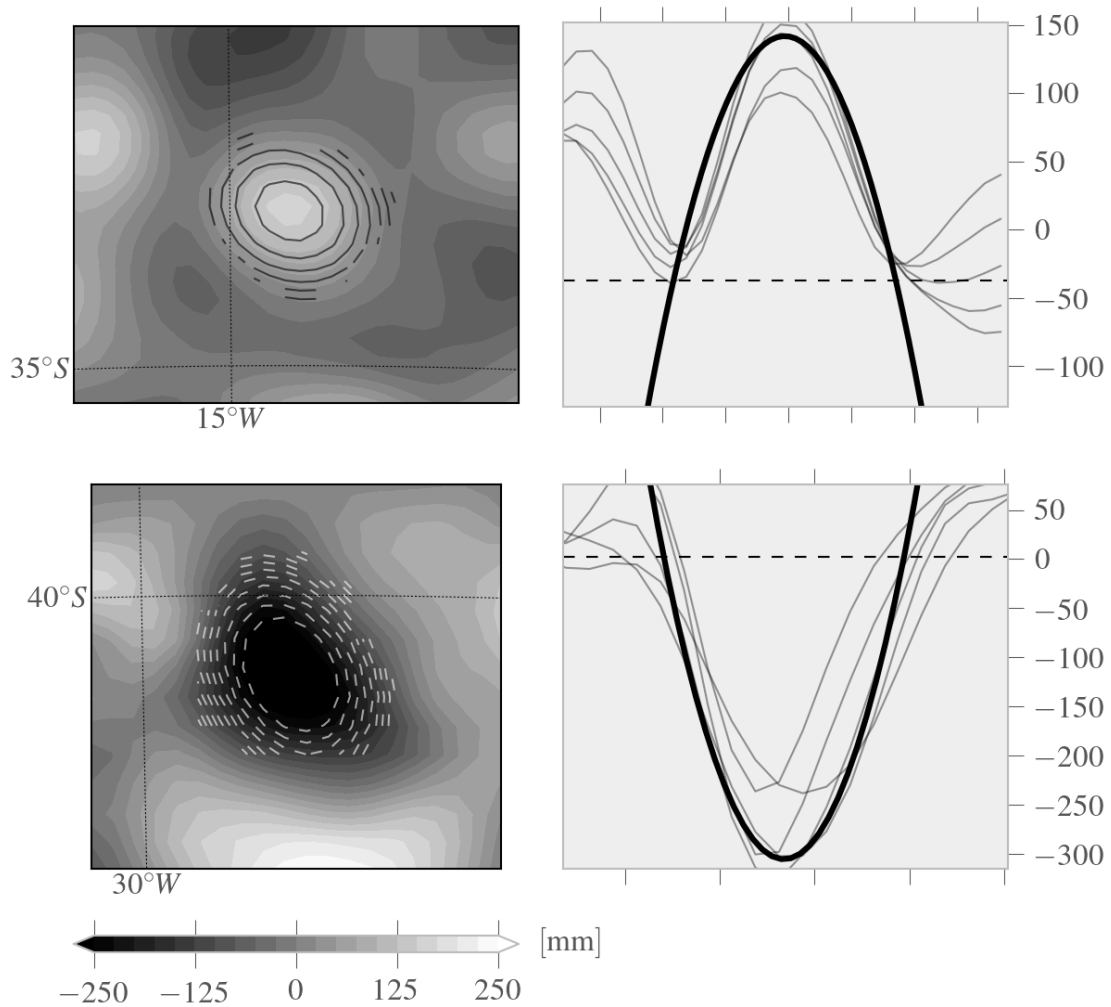


Figura 31 – Exemplo de ajuste de parabolóide elíptico a um vórtice anti-ciclônico (topo) e ciclônico (inferior) identificado pelo sistema automático. (Esquerda) Mapas de altura e sobrepostas às linhas de contorno. (Direita) Cortes zonais ao longo do centro dos vórtices com as linhas de η_M (linha fina) e o parabolóide elíptico ajustado (linha grossa). A altura basal de cada vórtice está indicada pela linha tracejada. Os parâmetros do vórtice anti-ciclônico são: $x_0 = 14,05^\circ\text{W}$, $y_0 = 32,9^\circ\text{S}$, $a = 172\text{ km}$, $b = 142\text{ km}$, $\theta = 13,8^\circ$, $\eta_B = -38\text{ mm}$, $h = 180\text{ mm}$, $RMSE = 23\text{ mm}$. Os parâmetros do vórtice ciclônico são: $x_0 = 28,3^\circ\text{W}$, $y_0 = 40,7^\circ\text{S}$, $a = 134\text{ km}$, $b = 109\text{ km}$, $\theta = 34,8^\circ$, $\eta_B = 2\text{ mm}$, $h = 308\text{ mm}$, $RMSE = 34\text{ mm}$

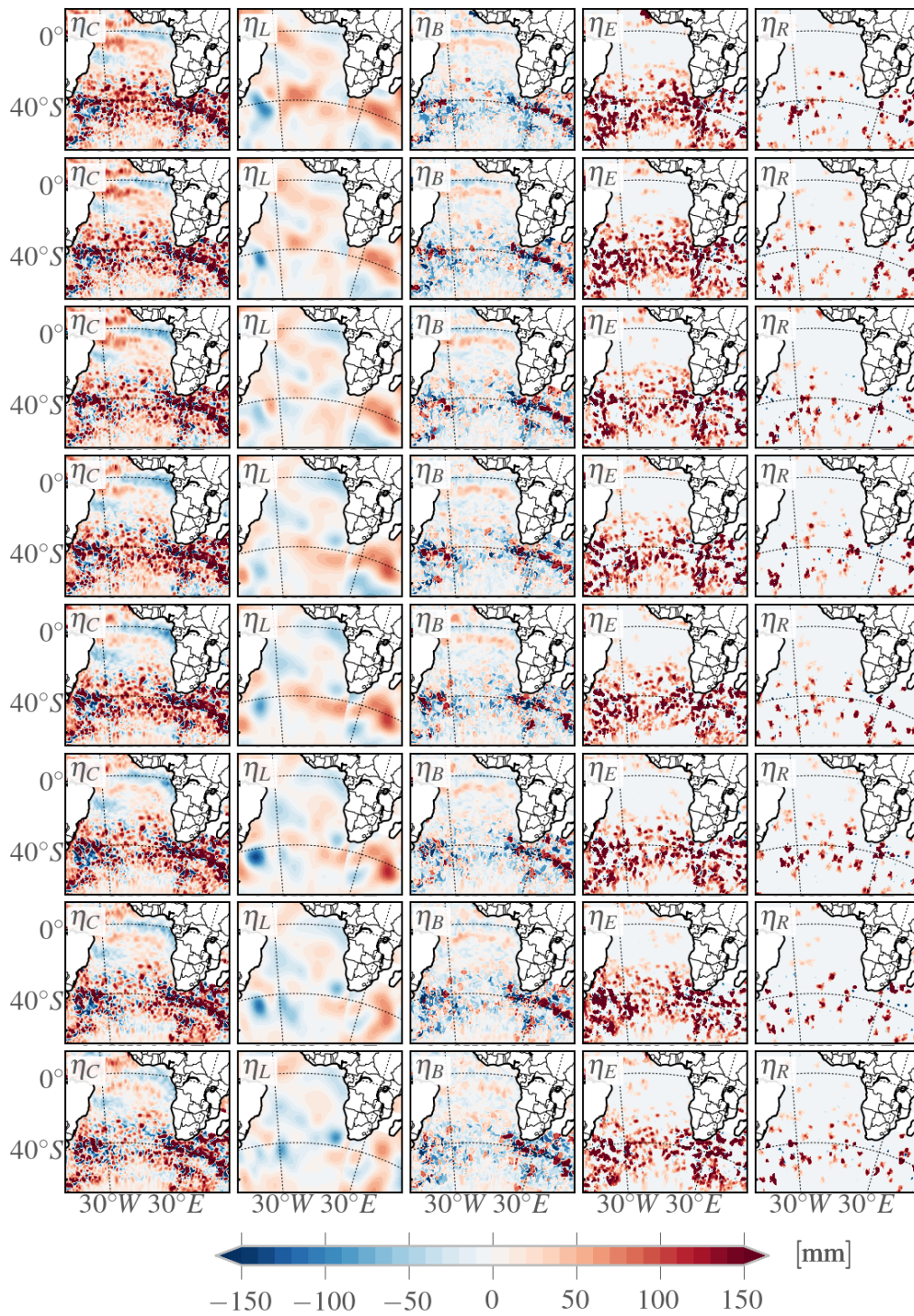


Figura 32 – Sequência de mapas dos componentes do filtro no Oceano Atlântico Sul. O sinal coerente (η_C) foi decomposto em sinal de larga-escala (η_L), sinal basal (η_B), sinal de vórtices (η_E) e anéis (η_R). O período da sequência vai de 21 de junho a 9 de agosto de 2006.

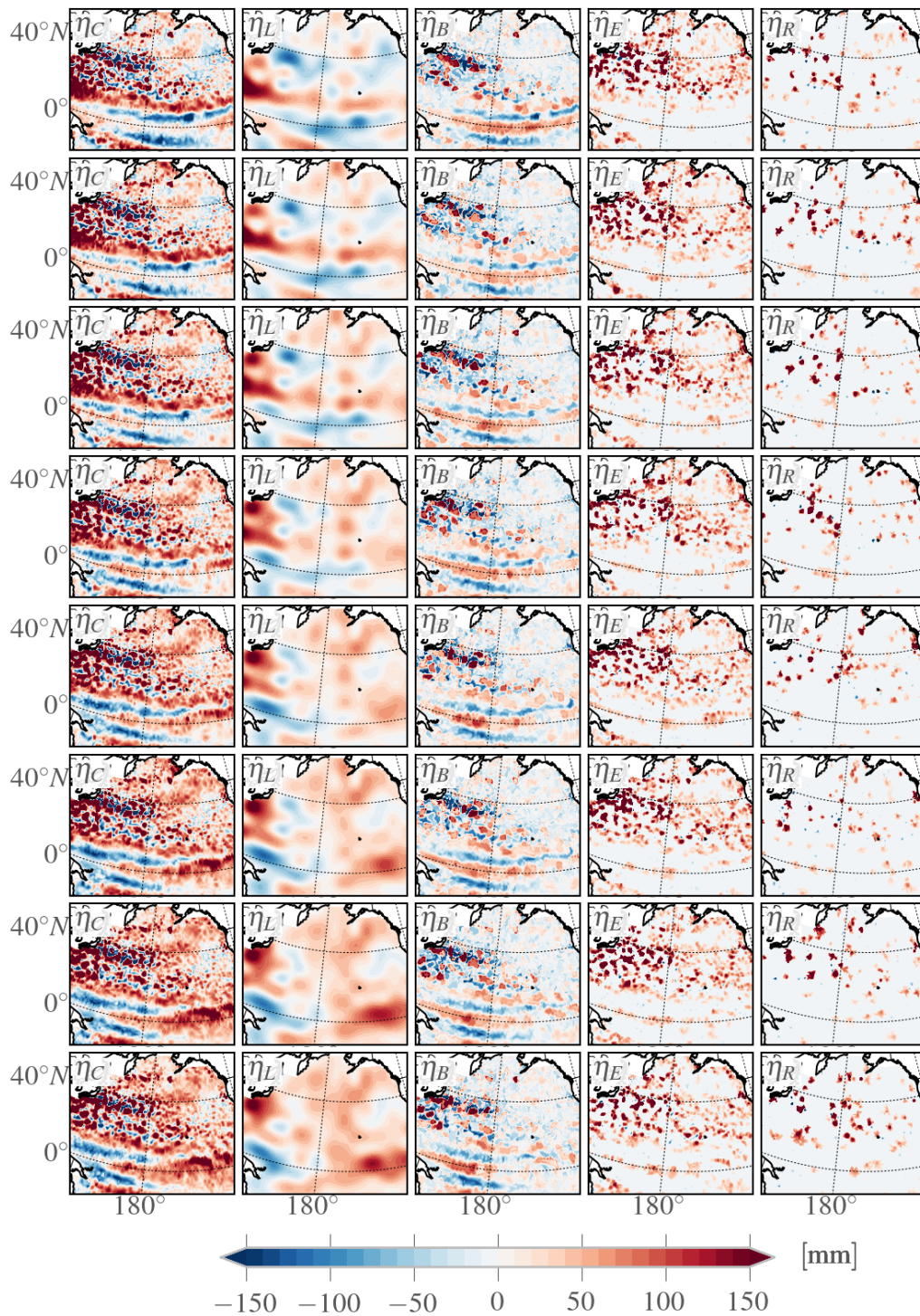


Figura 33 – Sequência de mapas dos componentes do filtro no Oceano Pacífico Norte. O sinal coerente (η_C) foi decomposto em sinal de larga-escala (η_L), sinal basal (η_B), sinal de vórtices (η_E) e anéis (η_R). O período da sequência vai de 21 de junho a 9 de agosto de 2006.

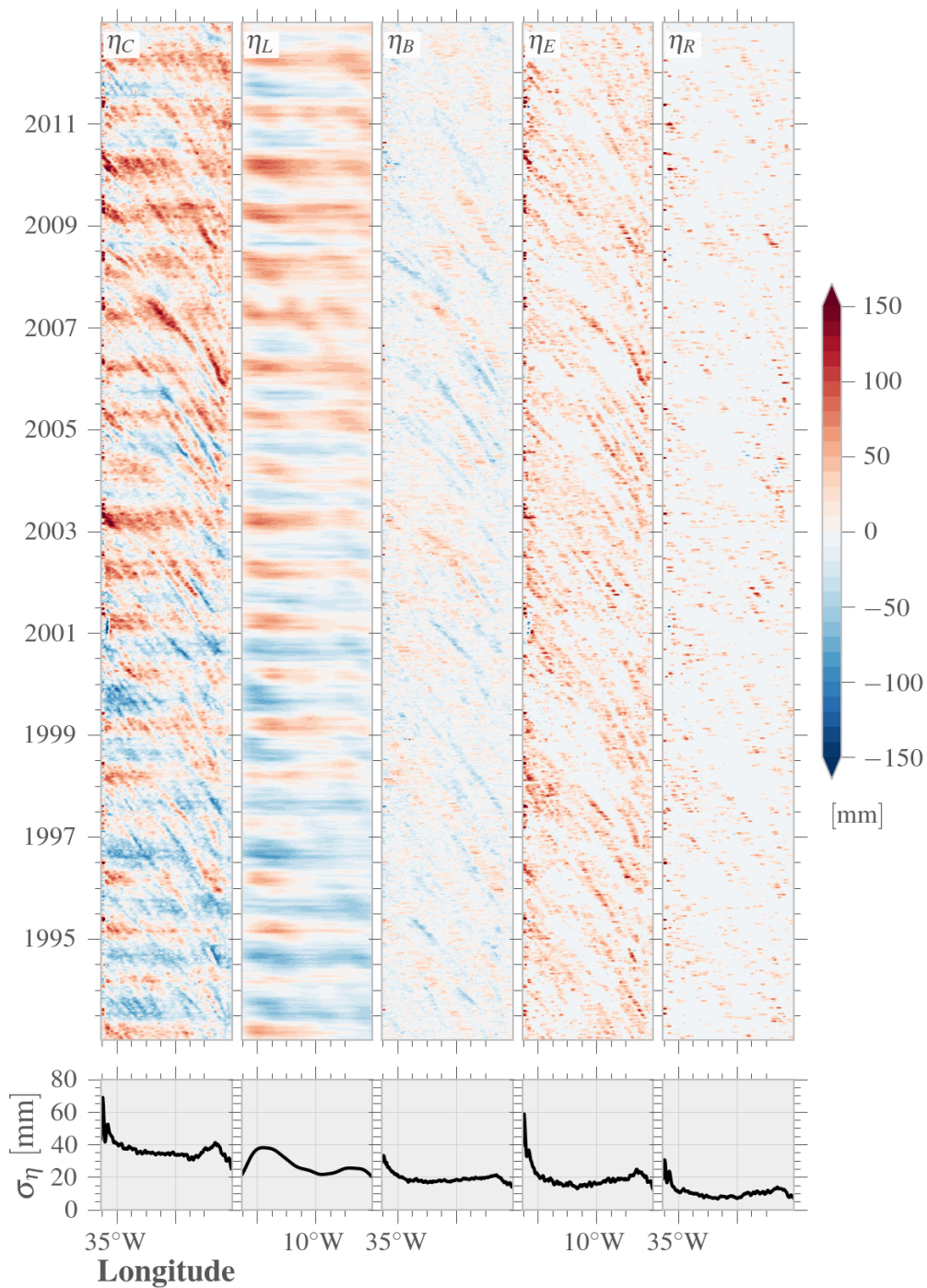


Figura 34 – Diagrama zonal-temporal dos componentes do filtro no Oceano Atlântico a 22,375°S. O sinal coerente (η_C) foi decomposto em sinal de larga-escala (η_L), sinal basal (η_B), sinal de vórtices (η_E) e anéis (η_R).

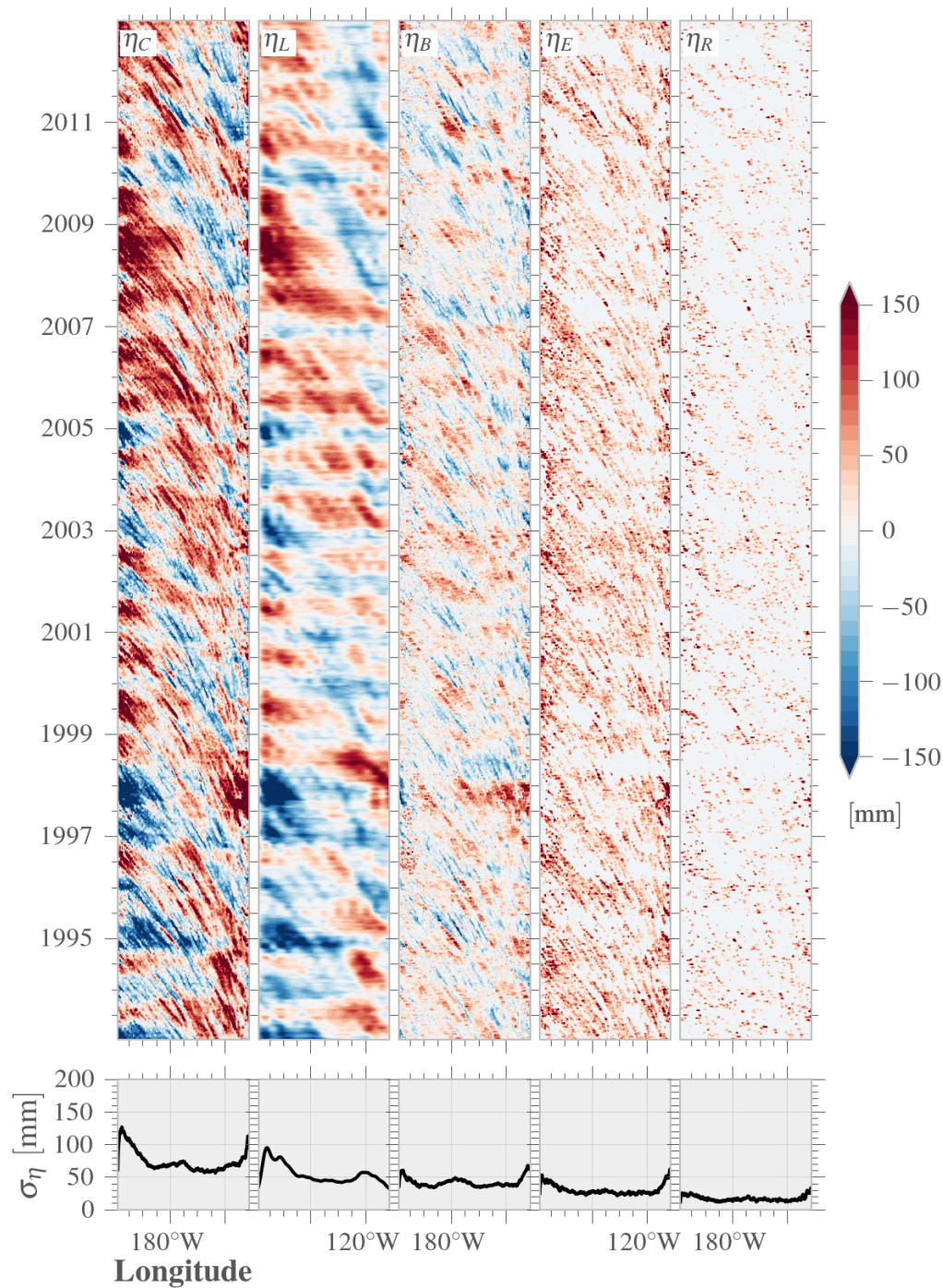


Figura 35 – Diagrama zonal-temporal dos componentes do filtro no Oceano Pacífico a 15,375 °N. O sinal coerente (η_C) foi decomposto em sinal de larga-escala (η_L), sinal basal (η_B), sinal de vórtices (η_E) e anéis (η_R).

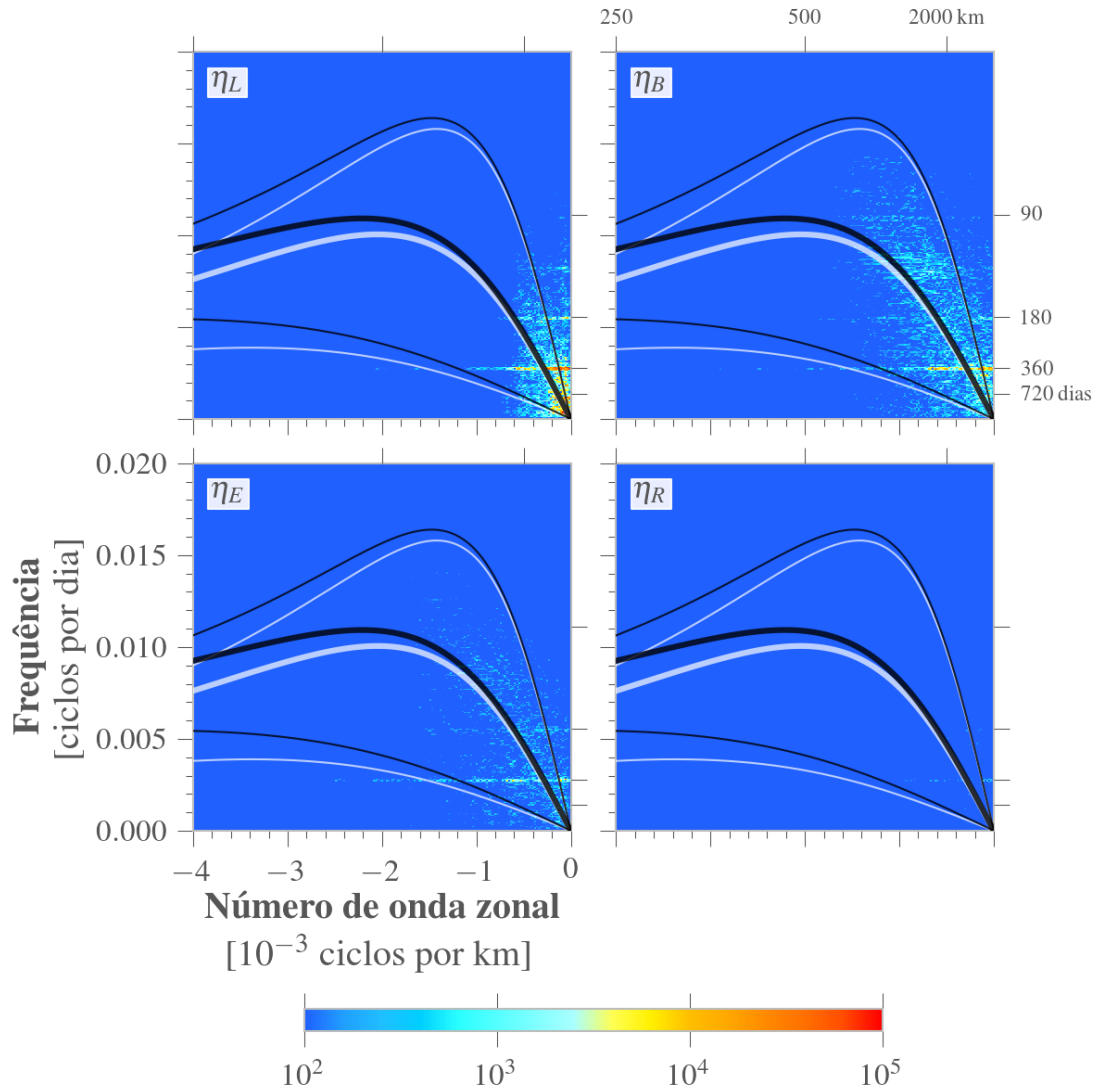


Figura 36 – Densidade de potência espectral bidimensional (em $\text{mm}^2/\text{cpd}/\text{cpkm}$) em função dos números de onda zonal (em ciclos por km, cpkm) e frequência (em ciclos por dia, cpd) dos componentes de larga-escala η_L , basal η_B , de vórtices η_E e de anéis vorticais η_R globais na latitude $15,375^\circ\text{N}$. As linhas sobrepostas correspondem às relações de dispersão de ondas de Rossby lineares da teoria clássica, sem o efeito de correntes médias (linha preta); e com efeito de correntes médias (linha branca), assumindo número de onda meridional nulo. As linhas espessas são as relações de dispersão calculadas utilizando o raio de deformação de Rossby (L_{Ro}) estimado por Chelton *et al.* (1998), enquanto que as linhas finas inferior e superior são calculadas utilizando $0.5 \cdot L_{Ro}$ e $1.5 \cdot L_{Ro}$, respectivamente.

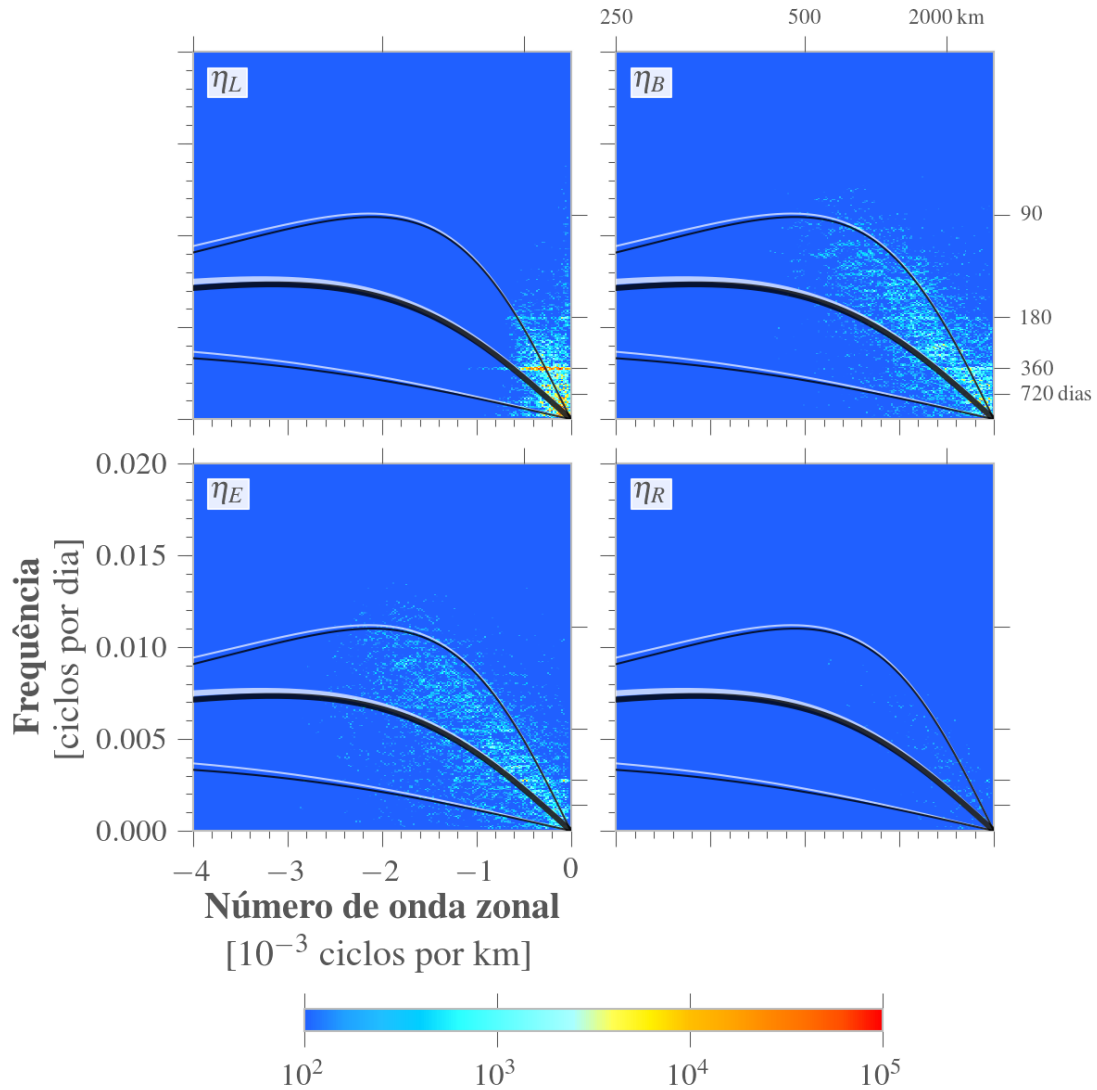


Figura 37 – Densidade de potência espectral bidimensional (em mm²/cpd/cpkm) em função dos números de onda zonal (em ciclos por km, cpkm) e frequência (em ciclos por dia, cpd) dos componentes de larga-escala η_L , basal η_B , de vórtices η_E e de anéis vorticais η_R globais na latitude 22,375°S. As linhas sobrepostas correspondem às relações de dispersão de ondas de Rossby lineares da teoria clássica, sem o efeito de correntes médias (linha preta); e com efeito de correntes médias (linha branca), assumindo número de onda meridional nulo. As linhas espessas são as relações de dispersão calculadas utilizando o raio de deformação de Rossby (L_{Ro}) estimado por Chelton *et al.* (1998), enquanto que as linhas finas inferior e superior são calculadas utilizando $0.5 \cdot L_{Ro}$ e $1.5 \cdot L_{Ro}$, respectivamente.

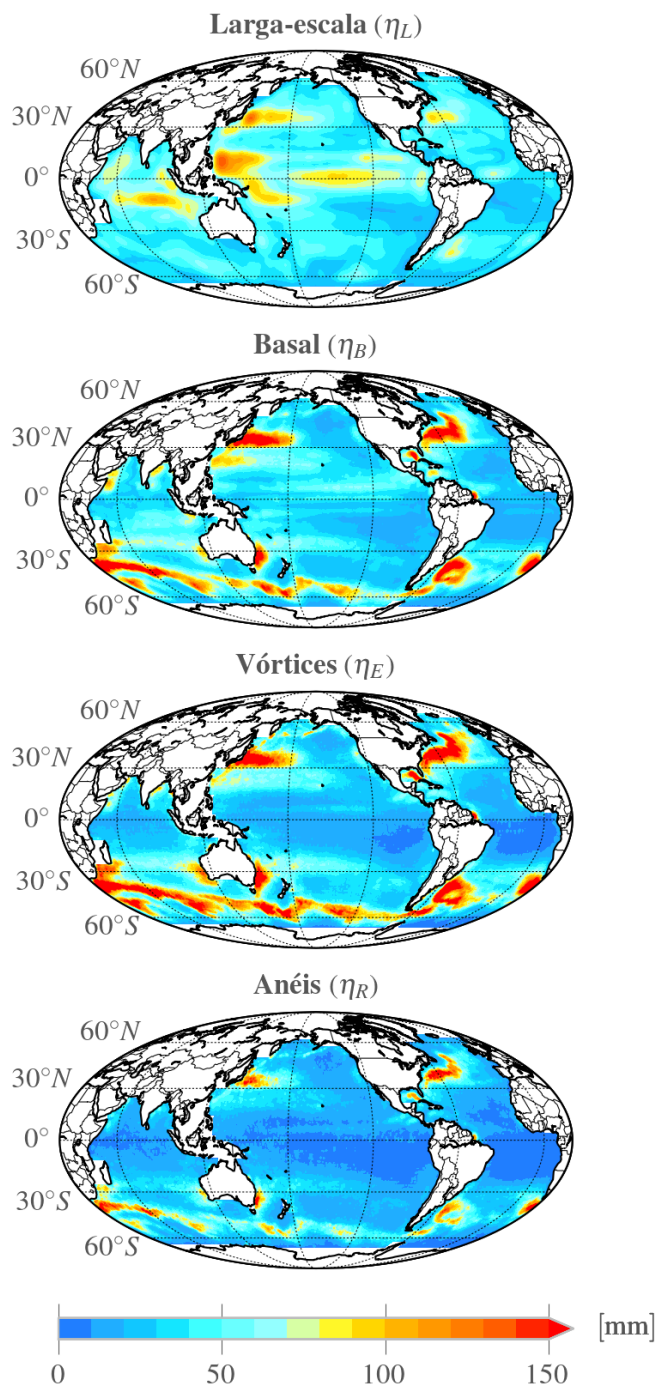


Figura 38 – Mapas de desvio padrão para cada componente do filtro: larga-escala (η_L), basal (η_B), vórtices (η_E) e anéis vorticais (η_R).

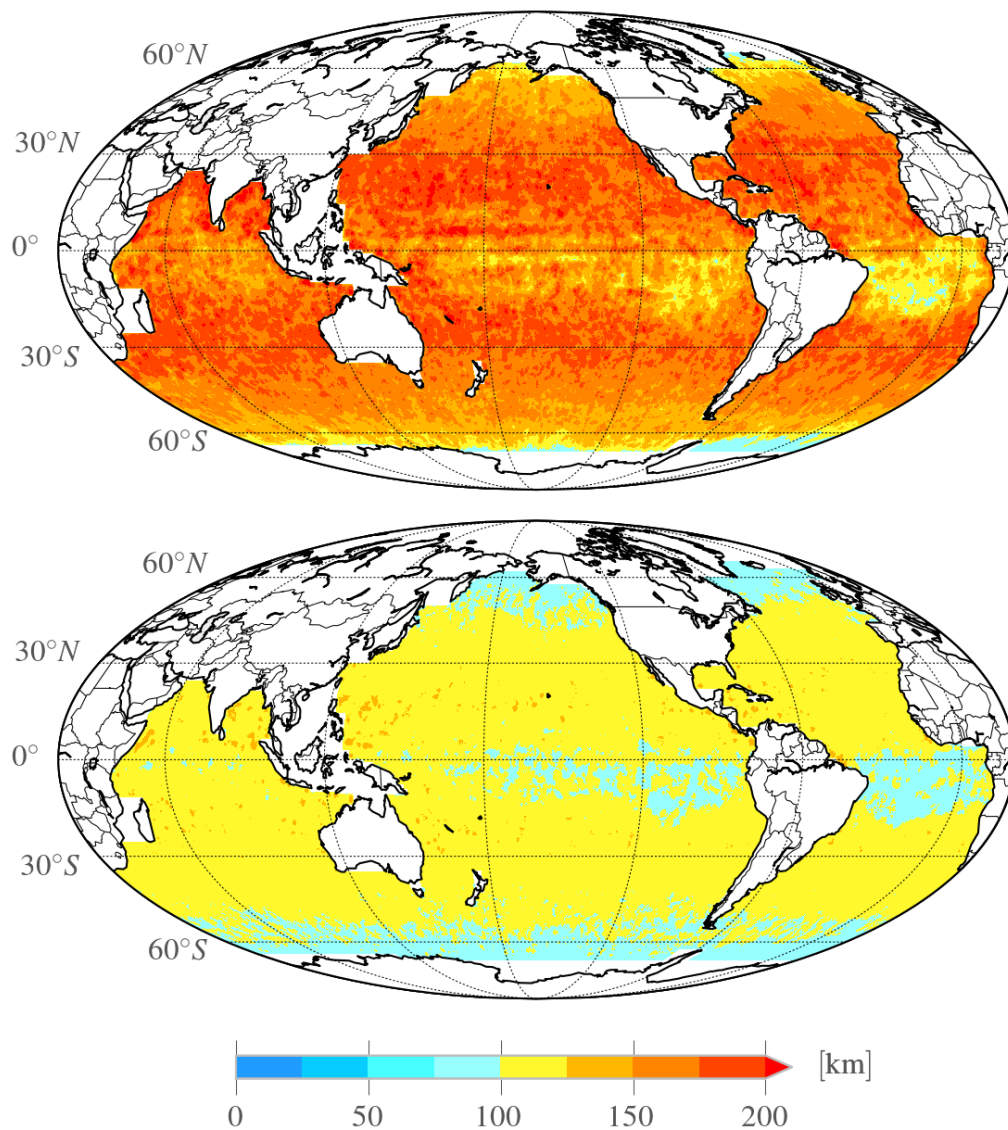


Figura 39 – Raio médio de anéis vorticiais anti-ciclônicos (topo) e ciclônicos (inferior).

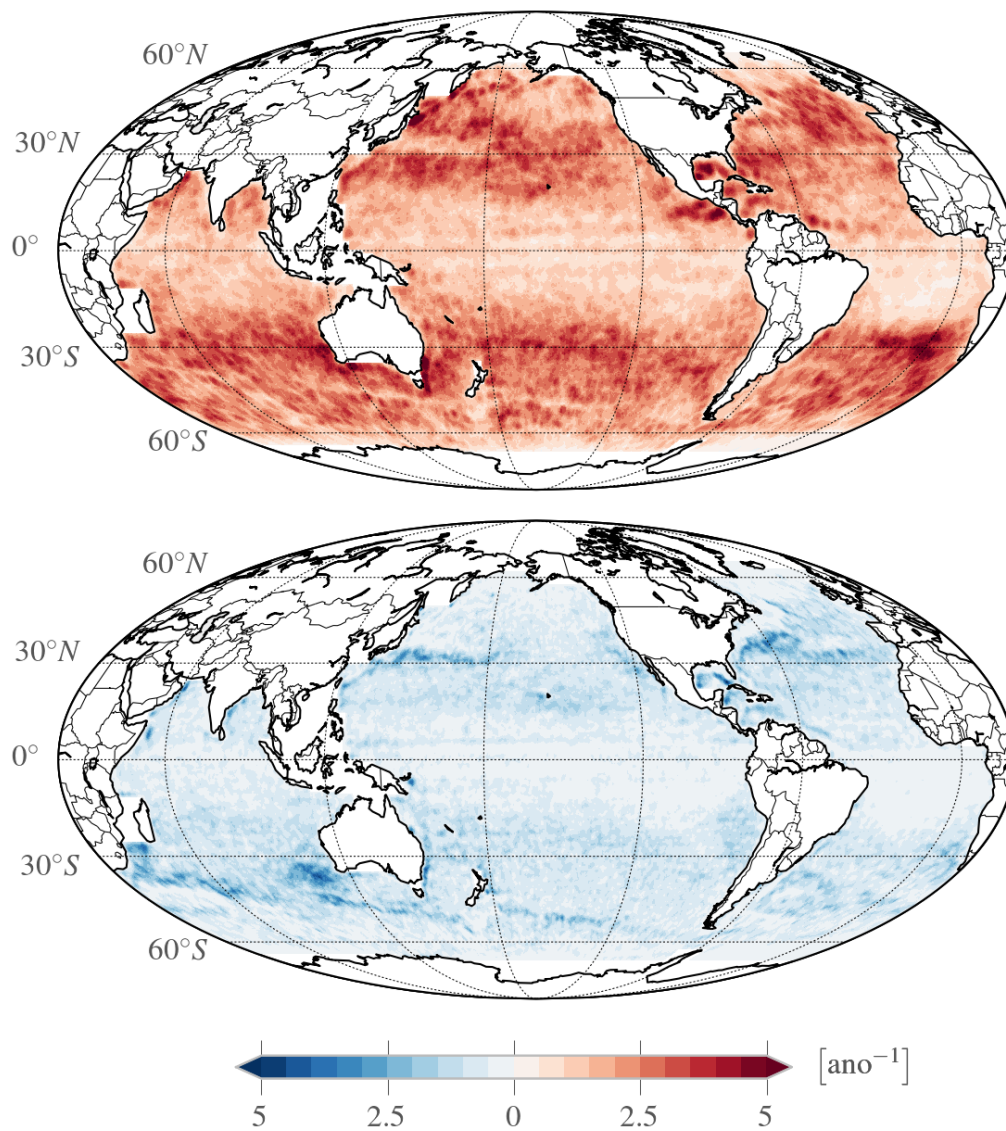


Figura 40 – Frequência média de observação de vórtices anti-ciclônicos (topo) e ciclônicos (inferior).

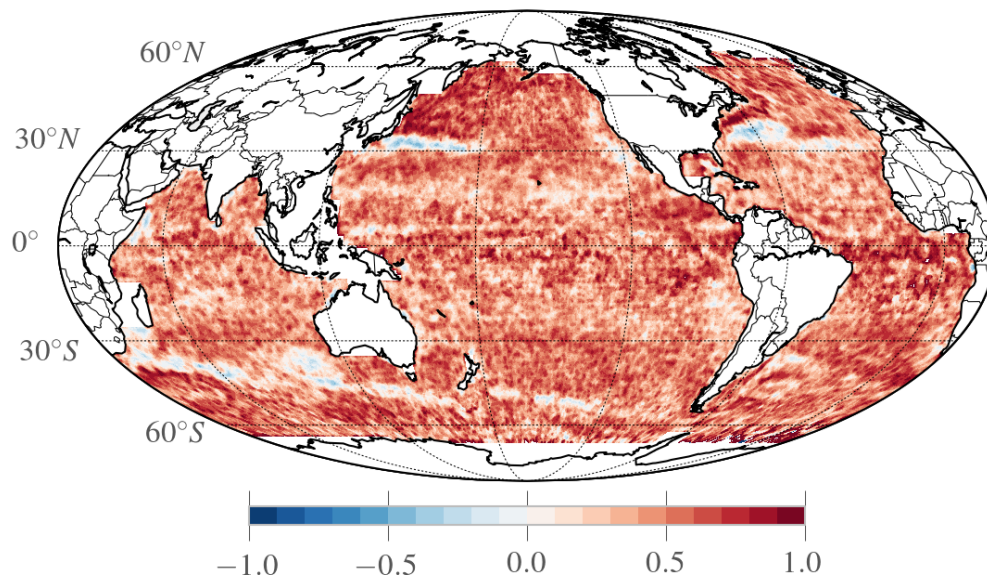


Figura 41 – Polaridade média dos anéis vorticais detectados entre janeiro de 1993 e dezembro de 2012.

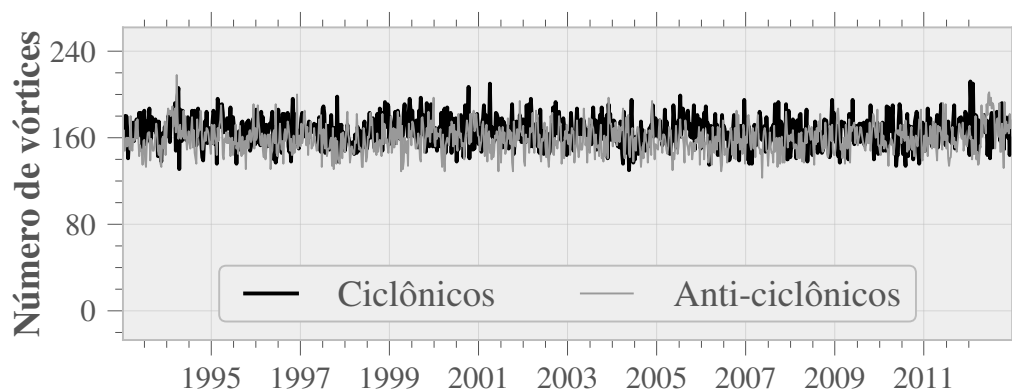


Figura 42 – Número de vórtices detectados através do sistema de identificação para excentricidade $e < 0,866$.

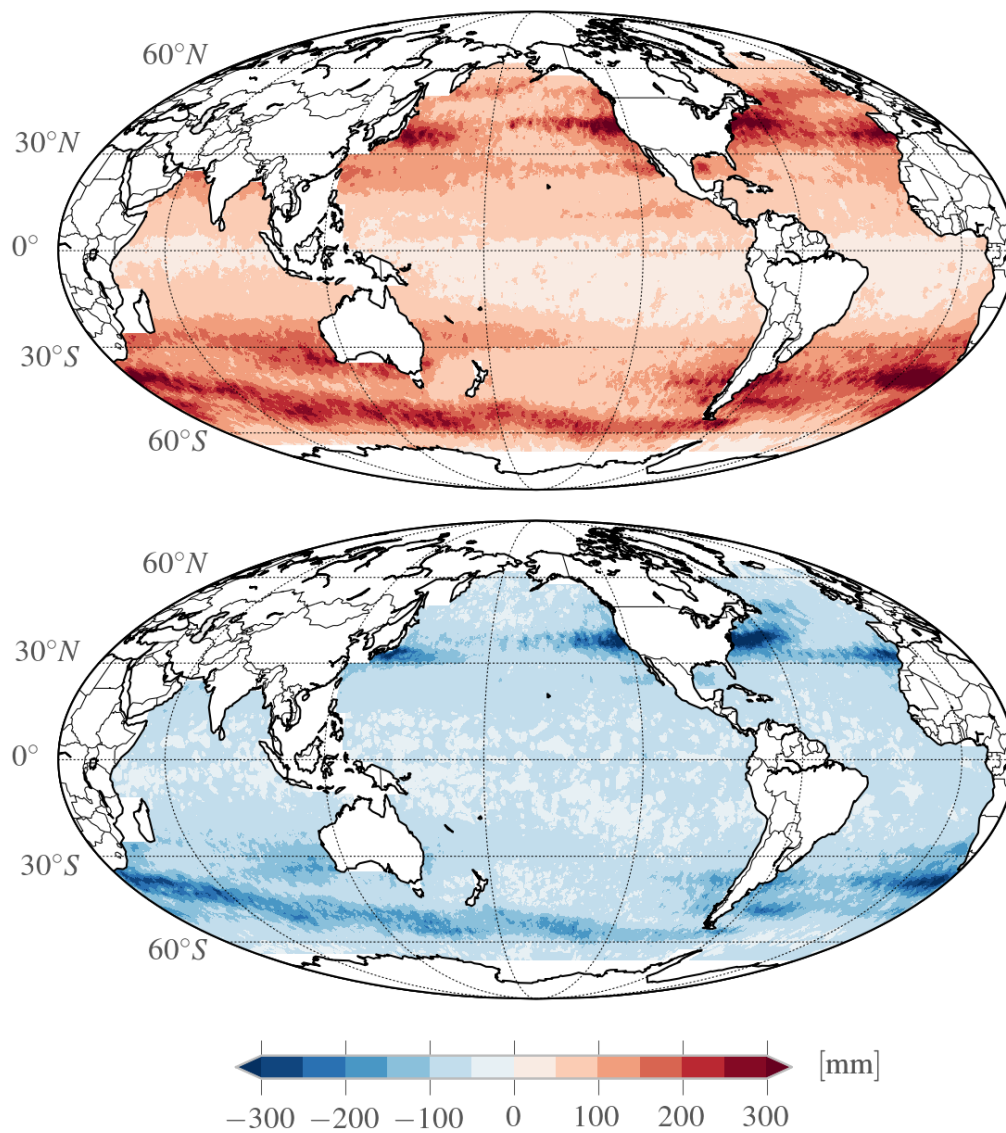


Figura 43 – Mapas da altura média dos anéis vorticais anti-ciclônicos (topo) e ciclônicos (inferior).

6 Conclusões

O algoritmo para detecção de estruturas vorticiais desenvolvido utiliza a combinação de dois métodos distintos para a filtragem dos dados: um baseado na transformada de ondaletas discreta bidimensional e outro baseado em linhas de contorno de altura da superfície do mar (ASM) fechadas (CHAIGNEAU *et al.*, 2008) com o ajuste de uma função parabolóide elíptica para caracterizar e classificar as propriedades da estrutura identificada. O algoritmo demonstrou a capacidade de identificar e extrair as estruturas associadas a vórtices de meso-escala.

A transformada de ondaletas permitiu a separação entre ruído e sinal utilizando-se um limiar aplicado aos coeficientes de ondaleta coerentes e não-coerentes. Após isso o filtro para extração do sinal de larga-escala baseado na transformada de ondaletas separa tanto sinais não propagantes associados ao ciclo sazonal quanto sinais propagantes. O algoritmo de identificação e extração de vórtices é sensível a ruídos, fazendo com que estruturas identificadas pulem de um componente para outro esporadicamente com o passar do tempo (figuras 32 e 33).

Os espectros zonais-temporais ilustrados nas figuras 25 e 26 indicam que a maior parte da potência se distribui entre as regiões não-dispersivas das curvas correspondentes às relações de dispersão cuja velocidade de fase fica entre $\pm 50\%$ da curva obtida a partir do raio de deformação obtido por Chelton *et al.* (1998). Cabe notar que a inclinação da parte mais próxima à origem dessas relações de dispersão é estritamente dependente do raio de deformação, que por sua vez depende da estratificação. A quantificação da estratificação, quer seja no modelo de camadas ou continuamente estratificado, não é trivial e pode causar mudanças significativas no valor do raio de deformação.

As climatologias mensais determinadas a partir do conjunto de 20 anos de ASM dão indícios da existência de ondas de Rossby persistentes e de períodos predominantemente anuais e semi-anuais em todas as bacias. Estas ondas manifestam-se principalmente na região equatorial (figura 20).

Após a aplicação do filtro, como ilustram as figuras 36 e 37, há uma quantidade significativa de potência no diagrama de η_B distribuída ao longo da curva de dispersão

central. η_B contém os sinais que não são identificados como sendo de larga-escala pelo filtro de ondaleta, nem tampouco aqueles identificados como estruturas vorticais pelo processo de extração por ajuste de parabolóide. Por exclusão o sinal remanescente é identificado como ondas de Rossby, uma vez que se encaixa na relação de dispersão delas.

Uma vez identificados os anéis, a análise estatística indica que o raio médio de anéis anti-ciclônicos é aproximadamente duas vezes maior que o raio médio de anéis ciclônicos (figura 39). A frequência média de ocorrência de vórtices por unidade de área é influenciada pelo maior tamanho médio dos vórtices anti-ciclônicos e portanto, há um viés que favorece tais vórtices (figura 40). A distribuição espacial da polaridade média por unidade de área também é afetada pelo tamanho. Além disso essa distribuição espacial mostra uma maior ocorrência de vórtices ciclônicos sobre a extensão leste das correntes de borda oeste. e ao longo da Frente Subtropical Sul (figura 41).

Os resultados mostram que há co-propagação dos componentes η_B , η_E e η_R , indicando coexistência de ondas de Rossby lineares e vórtices de meso-escala, e comprovando a hipótese científica estabelecida para este trabalho.

Por fim, dos objetivos específicos pode-se afirmar que:

- A análise espectral permitiu caracterizar o sinal de ASM e testar a eficiência do algoritmo de pré-filtragem e de extração de estruturas vorticais;
- O filtro de ondaletas utilizado extrai o sinal de meso-escala que contém tanto sinais propagantes e não-propagantes;
- O algoritmo de identificação e extração de estruturas candidatas a vórtices foi capaz de isolar sinais;
- Os resultados da análise estatística dos vórtices identificados mostra predominância de anéis anti-ciclônicos.

Sugestões para trabalhos futuros

- Incorporar um sistema de rastreamento para acompanhar a evolução temporal de cada uma das estruturas identificadas;

- Aplicar a metodologia a outros conjuntos de dados (*i.e.* imagens de temperatura da superfície do mar, clorofila-*a*), inclusive resultados de modelos numéricos ou perfiladores Argo;
- Comparar a performance da técnica com outros métodos de identificação e rastreamento de vórtices;

APÊNDICE A – Análise de Fourier

A análise de Fourier, ou análise harmônica, tem por objetivo aproximar uma função periódica $f(t)$ de período $P = 2L$ por uma combinação linear de funções harmônicas de frequências distintas. Desta forma, $f(t + P) = f(t)$, e, para qualquer f e primeira derivada f' seccionalmente contínuas no intervalo $[-L, L]$, a função pode ser expressa pela série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad (\text{A.2})$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt. \quad (\text{A.3})$$

Note que, nos pontos de descontinuidade, a série de Fourier converge para

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

A função $f(t)$ dada por (A.1) é a soma ponderada das funções harmônicas cujos pesos são dados por a_n e b_n . Para $n = 0$,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

é o valor médio de $f(t)$ no intervalo $[-L, L]$.

A.1 Transformada de Fourier

Utilizando-se a notação exponencial para as funções harmônicas e seja a função $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, a integral de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{A.4})$$

dá a medida da intensidade das oscilações $e^{i\omega t}$ de frequência angular ω na função f . Se \hat{f} for integrável, então a transformada inversa de Fourier é dada pelo teorema a seguir,

Teorema A.1 (Transformada inversa de Fourier). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ então, em quase todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.5})$$

A transformada inversa (A.5) decompõe f em uma soma de funções harmônicas $e^{i\omega t}$ de amplitude $\hat{f}(\omega)$. A hipótese de $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ implica que f deve ser contínua, motivando a extensão da transformada de Fourier para o espaço $L^2(\mathbb{R})$ de funções f de energia finita $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$. Lembrando que no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ o produto interno de $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$ é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt, \quad (\text{A.6})$$

onde $g^*(t)$ é o complexo conjugado de $g(t)$. A norma em $L^2(\mathbb{R})$ é

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (\text{A.7})$$

O teorema a seguir indica que o produto interno e a norma no espaço $L^2(\mathbb{R})$ são conservados pela transformada de Fourier, salvo por um fator $\frac{1}{2\pi}$.

Teorema A.2. *Seja f e $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a identidade de Parseval é*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}^*(\omega) d\omega. \quad (\text{A.8})$$

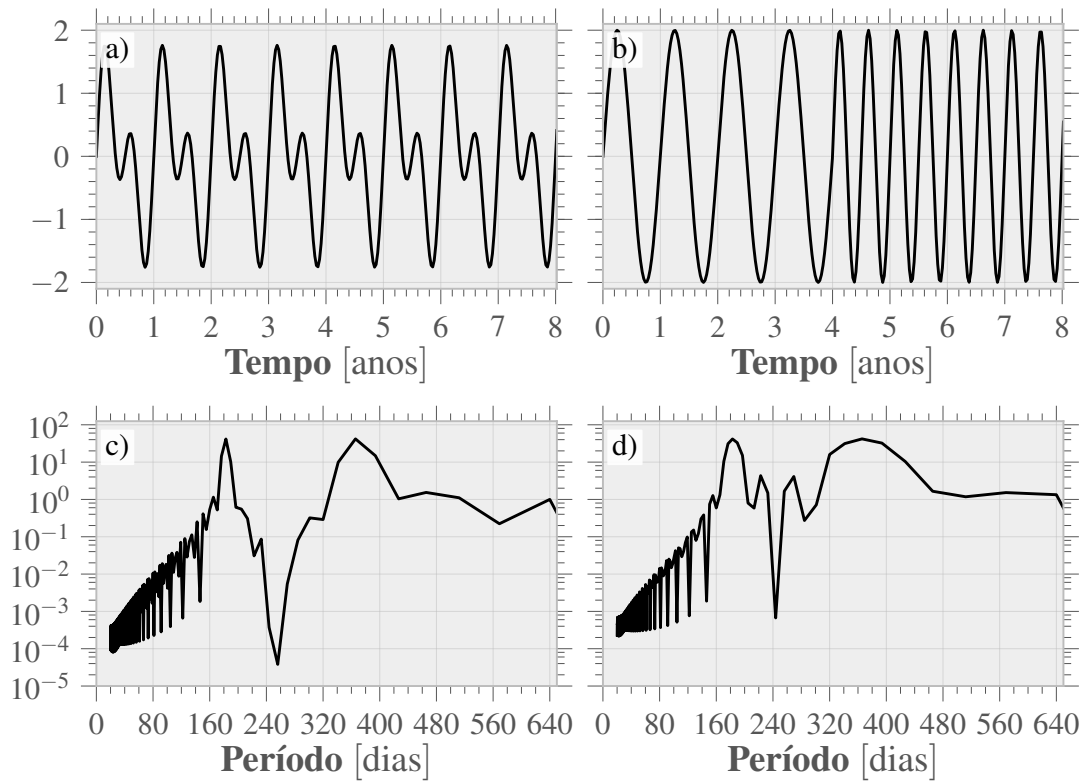


Figura 44 – Comparação entre a análise espectral de dois sinais periódicos com mesmas frequências. O sinal em (a) é composto pela soma de dois sinais harmônicos representando um fenômeno com um ciclo anual e um ciclo semi-anual, e em (b) pelos mesmos sinais harmônicos mas com ocorrência em intervalos distintos e o dobro da amplitude. Em (c) e (d) os respectivos espectros de potência normalizados.

Para o caso particular $g = f$ obtém-se a fórmula de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega . \quad (\text{A.9})$$

A figura 44 ilustra dois exemplos nos quais a análise de Fourier obtém espectros de potência praticamente idênticos para séries temporais distintas. No primeiro caso, o sinal é composto pela soma de dois sinais harmônicos de período anual e semi-anual defasados por π . No segundo caso, o sinal é composto pelos mesmos sinais harmônicos, no entanto o primeiro ocorre na primeira metade do intervalo e o segundo na segunda metade e com amplitudes duas vezes maiores. As potências espectrais das

duas séries são praticamente idênticas, salvo a observação de frequências espúrias no segundo caso, provavelmente decorrentes devido à abrupta mudança de regime. Este exemplo simplificado mostra como a transformada de Fourier possui limitações para a caracterização de eventos variantes no tempo.

A.1.1 Convolução

Em análise funcional, a convolução é um operador sobre duas funções f e g definida por

$$(f \star g)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(u-t) dt . \quad (\text{A.10})$$

A convolução retorna uma terceira função que, de certo modo, quantifica a sobreposição entre f e uma versão de g invertida e transladada por u . Este operador é amplamente utilizado em análise de sinais e aplicação de filtros.

Teorema A.3 (Convolução). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^1(\mathbb{R})$. A função $g = f \star h \in L^1(\mathbb{R})$ então*

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega) . \quad (\text{A.11})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(v) e^{-i\omega u} e^{-i\omega v} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(v) e^{-i\omega(u+v)} du dv \\ &\quad u = x, u + v = y, du = dx, dv = dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(y-x) e^{-i\omega y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(y-x) dx \right) e^{-i\omega y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star h) e^{-i\omega y} dy \\ &= \widehat{f \star h}(\omega) . \end{aligned}$$

□

Esta é uma propriedade importante para o cálculo da convolução de duas séries pois o processamento numérico de séries longas pode ser acelerado com a adoção do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT, *fast Fourier transform*) e da transformada inversa rápida de Fourier (IFFT, *inverse fast Fourier transform*).

A.1.2 Filtro de resposta impulsiva

Operações de processamento de sinais como remoção de ruído estacionário ou transmissão por exemplo, são implementados através de operadores lineares temporalmente invariantes. Seja o operador invariante no tempo denotado por L aplicado a uma função de entrada $f(t)$ cujo resultado é dado pela saída $g(t)$, então para um atraso τ tem-se

$$g(t) = Lf(t) \Rightarrow g(t - \tau) = Lf(t - \tau) . \quad (\text{A.12})$$

Sistemas invariantes no tempo são caracterizados por sua resposta a um impulso de Dirac. Um impulso de Dirac é definido pelas seguintes relações:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 , \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 .$$

A integração simbólica sobre um impulso de Dirac é uma notação bastante útil pois possui as mesmas propriedades de uma integral usual, como mudança de variáveis e integração por partes. Assim, um delta de Dirac transladado $\delta(t - u)$ possui conteúdo centrado em u e para uma função $f(t)$ real e contínua

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta(t - u) du . \quad (\text{A.13})$$

A continuidade e linearidade do operador L implica em

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) L\delta(t - u) du = g(t) . \quad (\text{A.14})$$

Seja h a resposta a um impulso de L , então

$$h(t) = L\delta(t) .$$

A invariância temporal mostra que $L\delta(t-u) = h(t-u)$ e portanto

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) f(t-u) du = h \star f(t) . \quad (\text{A.15})$$

Assim, um filtro linear temporalmente invariante é equivalente a uma convolução com a função resposta de impulso $h(t)$.

No espaço das frequências, um *filtro passa-baixa ideal* pode ser construído multiplicando-se $\hat{f}(\omega)$ pela função indicadora $\mathbf{1}_{[-\xi, \xi]}(\omega)$, onde ξ é a frequência de operação do filtro. Relembrando que a função indicadora é definida por

$$\mathbf{1}_{[-\xi, \xi]} = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-\xi, \xi] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-\xi, \xi] . \end{cases}$$

O espectro de saída filtrado é então

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) = \mathbf{1}_{[-\xi, \xi]} \hat{f}(\omega)$$

e, pelo teorema da convolução (A.11) e pela equação (A.15), a saída do filtro é

$$g(t) = h \star f(t) .$$

Portanto, a função resposta de impulso para um filtro de passa-baixa é calculado através da transformada inversa de Fourier (A.5):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{+\xi} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin(\xi t)}{\pi t} . \quad (\text{A.16})$$

A.1.3 Propriedades importantes

A tabela 5 apresenta um resumo das principais propriedades da transformada de Fourier (MALLAT, 2008). A maioria destas fórmulas é demonstrada por mudança de variáveis na integral de Fourier.

A.1.4 Análise espectral através da transformada de Fourier

Tabela 5 – Propriedades importantes da transformada de Fourier.

| Propriedade | Função | Transformada de Fourier |
|------------------------|-----------------------------|--|
| | $f(t)$ | $\hat{f}(\omega)$ |
| Inversa | $\hat{f}(\omega)$ | $2\pi f(-\omega)$ |
| Convolução | $f_1 \star f_2(t)$ | $\hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$ |
| Multiplicação | $f_1(t) f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi} \hat{f}_1 \star \hat{f}_2(\omega)$ |
| Translação | $f(t - t_0)$ | $e^{it_0\omega} \hat{f}(\omega)$ |
| Modulação | $e^{i\omega_0 t} f(t)$ | $\hat{f}(\omega - \omega_0)$ |
| Escalonamento | $f\left(\frac{t}{s}\right)$ | $ s \hat{f}(s\omega)$ |
| Derivadas temporais | $f^{(p)}(t)$ | $(i\omega)^p \hat{f}(\omega)$ |
| Derivadas frequenciais | $(-it)^p f(t)$ | $\hat{f}^{(p)}(\omega)$ |
| Complexo conjugado | $f^*(t)$ | $\hat{f}^*(-\omega)$ |

APÊNDICE B – Ondaletas

De maneira análoga à análise de Fourier, procura-se aproximar uma função $f(t)$ por uma combinação linear de funções localizadas e em diferentes escalas, chamadas ondaletas. A ondaleta-mãe é uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de média nula,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{B.1})$$

e norma um,

$$\|\psi(t)\| = \langle \psi, \psi \rangle^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi^*(t) dt \right)^{1/2} = 1, \quad (\text{B.2})$$

centralizada na vizinhança de $t = 0$. O sinal original pode ser expandido por funções periódicas com propriedades temporais e de frequência adaptadas à estrutura local do sinal através de um conjunto de funções transladadas e escalonadas da ondaleta-mãe,

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad s > 0, \quad (\text{B.3})$$

que também são normalizadas ($\|\psi_{u,s}\| = 1$). Ondaletas $\psi_{u,s}$ dilatadas possuem $s > 1$ enquanto que ondaletas contraídas possuem $s < 1$. A transformada de ondaleta contínua (CWT, *continuous wavelet transform*) de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ na escala s e no tempo u é

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt. \quad (\text{B.4})$$

A transformada de ondaleta pode ser reescrita na forma de produto de convolução

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = f \star \bar{\psi}_s(u) \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(-\frac{t}{s}\right), \quad (\text{B.6})$$

cuja transformada de Fourier é

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{\psi}^*(s\omega) . \quad (\text{B.7})$$

Utilizando-se o teorema da convolução (A.11) e a definição da transformada inversa de Fourier (A.5), a expressão (B.5) pode ser reescrita na forma

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_s(\omega) e^{i\omega u} d\omega . \quad (\text{B.8})$$

A transformada expressa por (B.5) e (B.8) mostra que as ondaletas operam como filtros de passa-banda dilatados sobre o sinal original.

Uma transformada de ondaletas real é completa e conserva a energia contanto que a ondaleta satisfaça uma condição fraca segundo o teorema a seguir.

Teorema B.1 (Calderon (1964), Grossmann e Morlet (1984)). *Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma função real de modo que*

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty . \quad (\text{B.9})$$

Qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{1}{s^2} ds \quad (\text{B.10})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{1}{s^2} ds . \quad (\text{B.11})$$

A hipótese (B.9) é chamada de *condição de admissibilidade*. Para garantir que esta integral seja finita, $\hat{\psi}(0) = 0$. A condição de ondaleta de média nula é quase suficiente. Se $\hat{\psi}(\omega)$ também for continuamente diferenciável, então a condição de admissibilidade é satisfeita. A equação (B.11) mostra que a condição de admissibilidade também garante a conservação de energia da transformada. Qualquer função f pode ser bem aproximada por uma superposição de ondaletas como indica a equação (B.10).

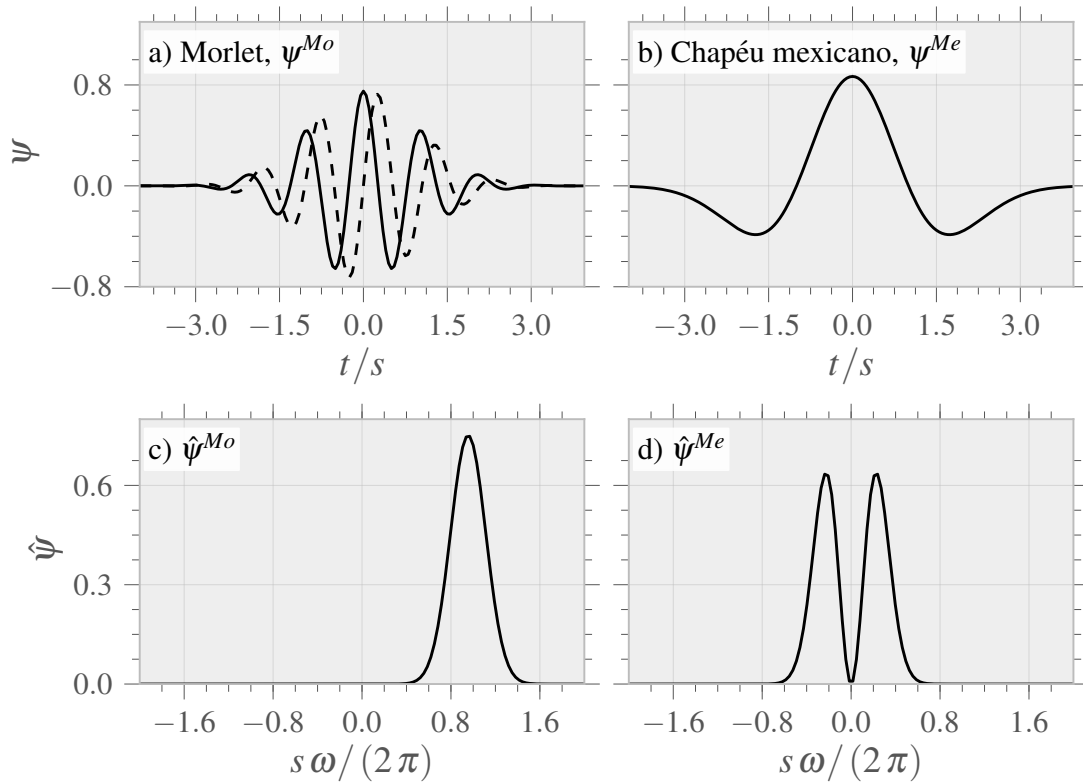


Figura 45 – (a) Parte real (linha contínua) e imaginária (linha tracejada) da ondaleta de Morlet ψ^{Mo} com $\omega_0 = 6$, e (b) ondaleta chapéu mexicano ψ^{Me} com $\sigma = 1$. Nos painéis (c) e (d) as respectivas transformadas de Fourier $\hat{\psi}^{Mo}$ e $\hat{\psi}^{Me}$.

A escolha da ondaleta-mãe $\psi(t)$ não é única tampouco arbitrária. Além de possuir média nula e norma um, a ondaleta-mãe deve ser de suporte compacto ou de decaimento suficientemente rápido para garantir localização temporal adequada. Duas ondaletas populares são a *Morlet* e a *chapéu mexicano* ilustradas na figura 45. A ondaleta de Morlet e sua transformada de Fourier são expressas por:

$$\psi^{Mo}(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (\text{B.12})$$

$$\hat{\psi}^{Mo}(\omega) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}}. \quad (\text{B.13})$$

Esta ondaleta é complexa e, apesar da maioria das aplicações envolverem funções reais, ela é capaz de extrair informação sobre a amplitude e a fase de processos. A ondaleta chapéu mexicano é a segunda derivada da função Gaussiana normalizada. Ela e sua

transformada de Fourier são dadas por:

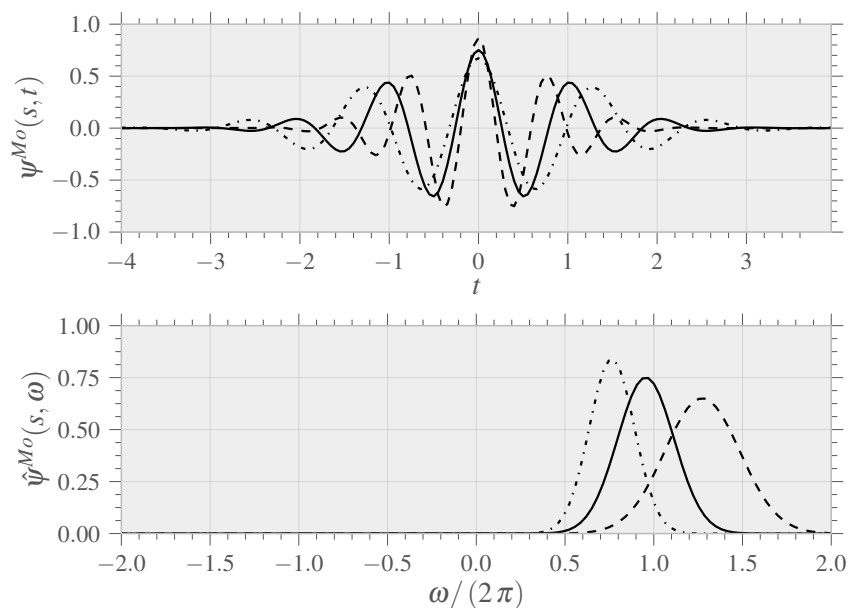
$$\psi^{Me}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma} \pi^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\psi}^{Me}(\omega) = \sqrt{\frac{8}{3}} \sigma^{\frac{5}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \omega^2 e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}. \quad (\text{B.15})$$

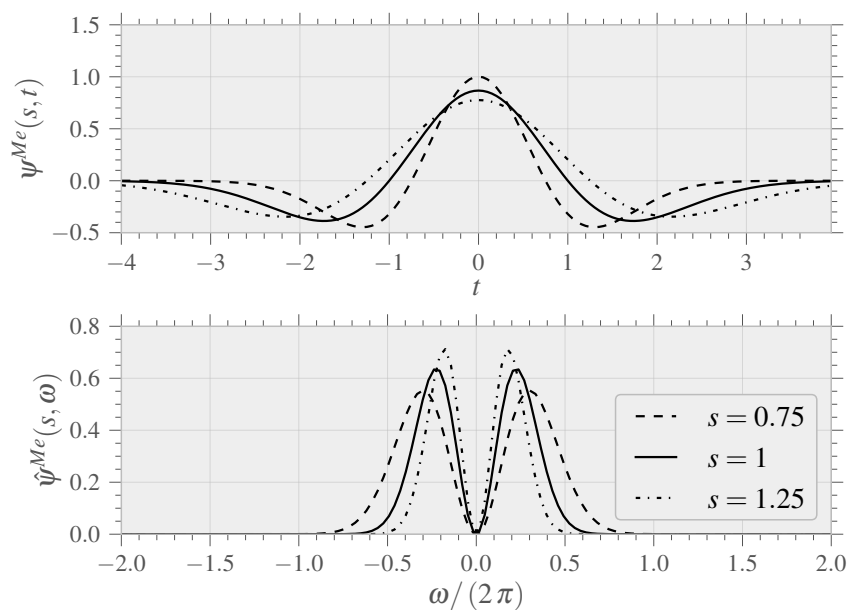
B.1 Frequência e escala

Frequência é uma propriedade física de um processo ou de um sinal bem definida e dada pela quantidade de observações durante um certo período de tempo. No entanto, a escala de um processo deve ser tratada de forma diferente. A escala indica uma faixa temporal (ou espacial), a resolução nos quais determinados processos de um fenômeno ocorrem. Escala e frequência são conceitos independentes e estão relacionadas pelo fato de a escala fornecer limites para o comprimento de onda. Portanto, em uma escala específica por exemplo, pode haver ocorrência de bandas de frequências limitadas pela dimensão da escala. Nota-se pela figura 45 que as transformadas de Fourier das ondaletas Morlet e chapéu mexicano são bastante diferentes. A ondaleta de Morlet possui espectro apenas nas frequências positivas ($\omega > 0$), característica de uma *ondaleta analítica*. Por outro lado, a ondaleta chapéu mexicano possui tanto frequências positivas quanto negativas. Os picos de frequência são diferentes para cada ondaleta e, em ambos os casos apresentados, o valor máximo do espectro $\hat{\psi}$ não está em $s\omega / (2\pi) = 1$, o que seria esperado caso a escala s fosse equivalente à frequência angular ω .

A figura 46 ilustra o comportamento das ondaletas de Morlet e chapéu mexicano em diferentes escalas. O pico do espectro de Fourier das ondaletas é deslocado conforme a escala s muda. Nota-se que o espectro da ondaleta de Morlet responde mais rapidamente a mudanças de escala que a ondaleta chapéu mexicano. A dilatação da ondaleta age como um filtro de frequências mais baixas e banda de frequências mais estreita e vice-versa. Esta observação ilustra um aspecto importante da análise de ondaletas: a incerteza entre localização temporal (ou espacial) e determinação de frequências. Eventos de alta frequência podem ser bem localizados no tempo, pois a ondaleta é contraída, no entanto, com grande incerteza de frequência, pois a banda de frequências é mais larga. Eventos de pequena-escala, como regiões de descontinuidade, são bem resolvidos no domínio do



(a) Morlet



(b) Chapéu mexicano

Figura 46 – (a) Parte real da ondaleta de Morlet ($\omega_0 = 6$) e sua transformada de Fourier e (b) ondaleta chapéu mexicano ($\sigma = 1$) e sua transformada de Fourier em diferentes escalas: $s < 1$ (linha tracejada), $s = 1$ (linha contínua), $s > 1$ (linha traço-ponto). Note o efeito da dilatação e contração da ondaleta sob seu espectro de Fourier.

tempo e com grande incerteza no domínio das frequências. Por outro lado, eventos de larga-escala são bem resolvidos no espaço de frequências, mas com grande incerteza na localização.

A resolução de tempo e frequência depende da distribuição temporal e frequencial da ondaleta $\psi_{u,s}$. Supondo que a ondaleta ψ seja analítica e centrada em 0, então $\psi_{u,s}$ está centrada em $t = u$. Seja

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 d\omega, \quad (\text{B.16})$$

verifica-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - u)^2 |\psi_{u,s}(t)|^2 d\omega = s^2 \sigma_t^2. \quad (\text{B.17})$$

Seja η a frequência central de $\hat{\psi}$,

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.18})$$

e a transformada de Fourier de $\psi_{u,s}$ igual a

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s} e^{-iu\omega} \hat{\psi}(s\omega), \quad (\text{B.19})$$

sua frequência central é portanto η/s . A distribuição de energia de $\hat{\psi}_{u,s}$ em torno de η/s é

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2}, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{B.21})$$

A distribuição de energia da ondaleta $\psi_{u,s}$ corresponde a uma caixa de Heisenberg centrada em $(u, \frac{\eta}{s})$ com tamanho $s\sigma_t$ ao longo do tempo e $\frac{\sigma_\omega}{s}$ ao longo da frequência. Assim, a área do retângulo é $\sigma_t\sigma_\omega$ para qualquer escala mas, tanto a resolução no tempo quanto na frequência dependem da escala s como ilustra a figura 47a. A relação entre as

incertezas nos domínios do tempo e da escala (ou frequência) é regulada pelo princípio da incerteza de Heisenberg, oriundo da mecânica quântica. Assim, não é possível determinar-se localização temporal e frequência com resolução arbitrária.

O efeito de um evento local sob a ondaleta $\psi_{u,s}$ em função da escala s é limitado pelo chamado *cone de influência*. O cone de influência pode ser interpretado como a região em que um evento local se estende nos planos da escala e do tempo (ou espaço) da transformada de ondaletas. Supondo que o suporte da ondaleta ψ é limitado no intervalo $[-C, C]$ então o cone de influência em $t = v$ no plano da escala e do tempo (ou espaço) é um conjunto de pontos (u, s) de modo que v esteja dentro do suporte de $\psi_{u,s}(t)$. Como o suporte de $\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ é igual a $[u - Cs, u + Cs]$, o cone de influência em v é definido por

$$|u - v| \leq Cs \quad (\text{B.22})$$

e ilustrado na figura 47b. Como u está contido no cone de influência de v , $Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle$ depende do valor de f na vizinhança de v . Assim, toda transformada em v cujo cone de influência estiver fora do domínio da função possui erros devido aos efeitos de borda.

É usual limitar o suporte de uma ondaleta contínua no intervalo dado pelo decaimento exponencial de sua amplitude. Ou seja, C é tal que $\psi(C) = \frac{1}{e}\psi(0)$. No caso das ondaletas de Morlet e chapéu Mexicano os limites são respectivamente $C^{Mo} = \sqrt{2}$ e $C^{Me} \approx \sqrt{2}\sigma$.

B.2 Função Escala

Seja a transformada $Wf(u, s)$ conhecida apenas para $s < s_0$. Para recuperar f completamente é preciso informação complementar correspondente a $Wf(u, s)$ para $s > s_0$. Este complemento obtém-se com a introdução da *função escala* ϕ . O módulo de sua transformada de Fourier é definido por:

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \int_1^{+\infty} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{1}{s} ds = \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi, \quad (\text{B.23})$$

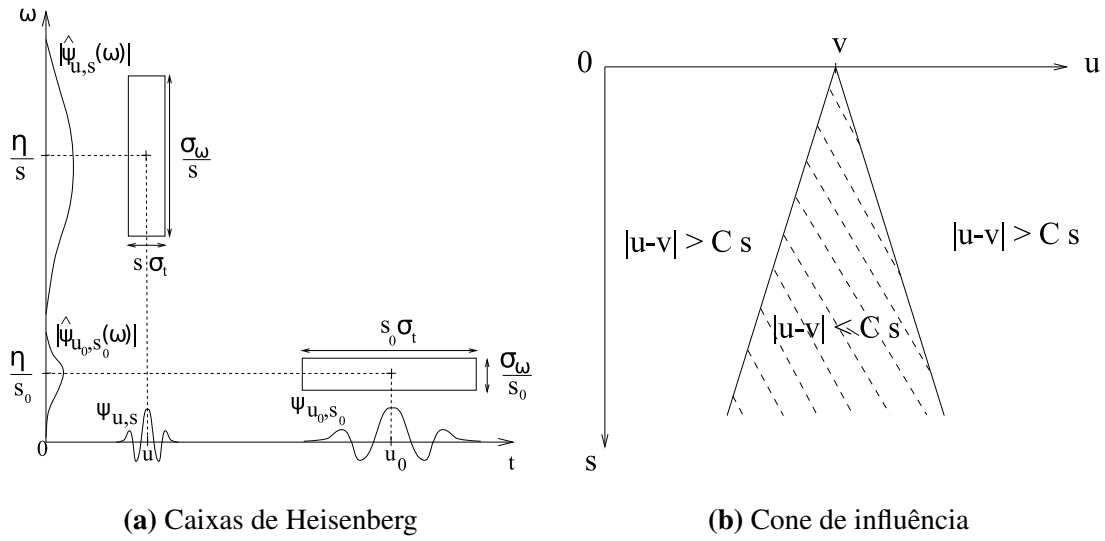


Figura 47 – (a) Caixas de Heisenberg de duas ondasletas. Note como em escalas menores (ondaleta contraída) a extensão temporal diminui mas a extensão das frequências aumenta e desloca-se para frequências mais altas. (b) O Cone de influência de v é o conjunto de pontos (u, s) no espaço das escalas cujo suporte de $\psi_{u,s}$ intersecta $t = v$. Por Mallat (2008).

e a fase complexa de $\hat{\phi}(\omega)$ pode ser escolhida arbitrariamente. Verifica-se que $\|\phi\| = 1$ e que da condição de admissibilidade (B.9) tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 = C_\psi . \quad (\text{B.24})$$

A função escala pode então ser interpretada como a resposta de impulso de um filtro de passa-baixa. Seja

$$\phi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t}{s}\right) \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_s = \phi_s^*(-t) .$$

A aproximação em baixa frequência de f na escala s é

$$Lf(u, s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right\rangle = f \star \bar{\phi}_s(u) .$$

Então, de forma equivalente ao teorema B.1,

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} Wf(\cdot, s) \star \psi_s(t) \frac{1}{s^2} ds + \frac{1}{C_\psi s_0} Lf(\cdot, s_0) \star \phi_{s_0}(t) . \quad (\text{B.25})$$

A função escala pode ser utilizada para obter-se uma aproximação da função f para escalas maiores que s_0 . Este conceito torna-se mais importante com na aplicação de filtros de ondaletas ortogonais como é abordado mais adiante.

B.3 Transformada de ondaletas discreta

Para implementar a transformada de ondaletas em sinais amostrados é necessário discretizar os parâmetros de localização u e escala s . A discretização da escala pode ser feita ao longo de uma sequência exponencial $\{a^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ com um passo de dilatação suficientemente pequeno $a > 1$. A translação temporal (ou espacial) é amostrada uniformemente em intervalos proporcionais à escala a^j de modo que $u = nu_0 a^j$, onde u_0 depende da ondaleta $\psi(t)$ e n é um número inteiro. Seja

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{t - nu_0 a^j}{a^j}\right) = a^{-\frac{j}{2}} \psi(a^{-j}t - nu_0) , \quad (\text{B.26})$$

a transformada de ondaleta discreta é

$$Wf(j, n) = a^{-\frac{j}{2}} \int f(t) \psi^*(a^{-j}t - nu_0) dt . \quad (\text{B.27})$$

Utilizando a ondaleta discreta $\psi_{j,n}$ e escolhendo os coeficientes a e u_0 apropriadamente é possível caracterizar completamente $f(t)$. Sob certas condições amplas da ondaleta-mãe $\psi(t)$ e dos incrementos de discretização a e u_0 , é possível reescrever $f(t)$ como uma expansão em série na forma

$$f(t) = \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_n Wf(j, n) \psi_{j,n} + \gamma .$$

As constantes A e B são características da ondaleta e das escolhas de a e u_0 e γ é o termo de erro na expansão. Maiores detalhes podem ser encontrados em Daubechies (1992, capítulo 3).

B.4 Escalograma

Uma transformada de ondaleta analítica determina a densidade de energia local $P_W f$ que é uma medida para a energia de f na caixa de Heisenberg de cada ondaleta $\psi_{u,s}$ centrada

em $(u, \frac{\eta}{s})$. Seja $\xi = \frac{\eta}{s}$, esta densidade de energia, chamada *escalograma*, é dada por

$$P_{Wf}(u, \xi) = |Wf(u, s)|^2 = \left| Wf\left(u, \frac{\eta}{\xi}\right) \right|^2. \quad (\text{B.28})$$

Um escalograma desdobra as características de um processo no plano da escala (ou frequência) e do tempo (ou espaço). Ele pode revelar a estrutura de um processo em particular ou sobre a interação entre processos.

As figuras 48 (a) e (b) apresentam o escalograma para as funções periódicas ilustrativas introduzidas na apresentação da análise de Fourier e ilustradas na figura 44. O algoritmo utilizado faz uso do produto de convolução para o cálculo da transformada de ondaletas dado pela equação (B.8). Fica clara a presença de estruturas multi-escalares e sua localização temporal. No primeiro caso observa-se os ciclos anual e semi-anual durante todo o intervalo. No segundo caso observa-se um espectro mais intenso, devido à amplitude mais elevada do sinal. A descontinuidade no espectro é evidente na metade do intervalo. Nas escalas de maior período nota-se o maior detalhamento no gradiente na transformada de ondaleta quando comparado às escalas de período menor. Relembrando que a frequência é o inverso do período, isto ilustra a menor incerteza no espaço das frequências de escalas maiores. Por outro lado, nota-se no segundo caso que a localização temporal em escalas menores é mais evidente que em escalas maiores, onde no domínio do tempo ocorre um gradiente que se estende por aproximadamente dois anos devido ao efeito do cone de influência.

Para o caso de ondaletas complexas, é possível determinar-se a fase de processos através do arco tangente da razão entre a parte imaginária e a parte real da transformada de ondaletas:

$$\theta(u, s) = \arctan\left(\frac{\Im(Wf(u, s))}{\Re(Wf(u, s))}\right). \quad (\text{B.29})$$

As figuras 48 (c) e (d) mostram a fase nas séries adotadas para ilustração. Nota-se nitidamente, no primeiro caso, a diferença de fase entre as escalas e como, dentro da mesma escala, as fases alternam-se periodicamente entre $-\pi$ e π . Ao longo das escalas, as linhas de fase constante convergem para singularidades em particular. A presença de descontinuidade espectral fica bastante clara no segundo caso, onde as linhas de fase convergem para um ponto na metade do intervalo, instante em que o sinal periódico muda de frequência. O efeito das bordas também fica evidente nas linhas

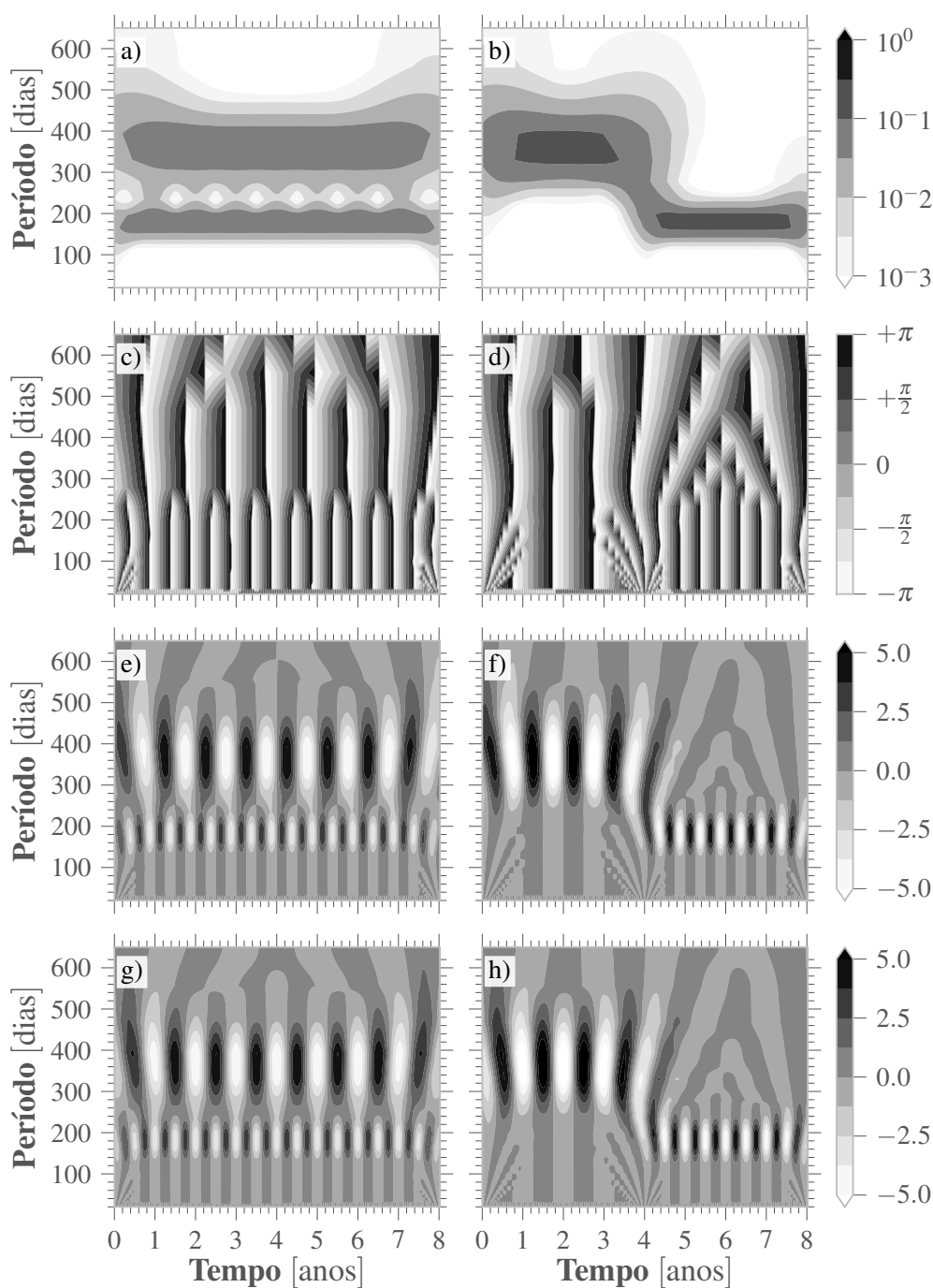


Figura 48 – (a) e (b) escalogramas normalizados $\frac{1}{s} P_{Wf}(u, \xi^{-1})$ dos mesmos sinais periódicos da figura 44 adotando a ondaleta Morlet ($\omega_0 = 6$). Em (a) as frequências dominantes ocorrem durante todo o intervalo e em (b) as frequências ocorrem em intervalos distintos. Em (c) e (d) os respectivos diagramas de fase. Note em (d) como, na metade do intervalo, as fases convergem, observa-se um ponto de descontinuidade. Em (e) e (f) a parte real $\Re(Wf(u, \xi^{-1}))$ e em (g) e (h) a parte imaginária $\Im(Wf(u, \xi^{-1}))$ das transformadas de ondaleta dos sinais.

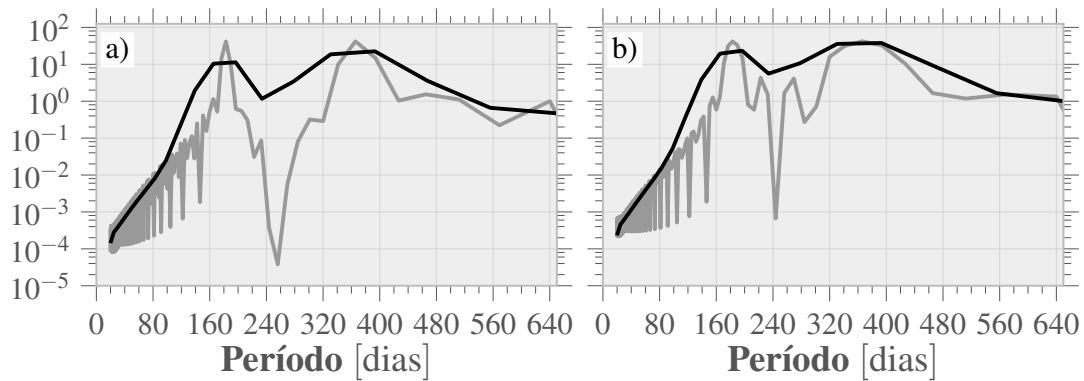


Figura 49 – Espectro de ondaleta global (linha contínua) e espectro de potência de Fourier (linha tracejada) normalizados dos sinais periódicos ilustrados na figura 44. Note na ausência de frequências espúrias no espectro de ondaleta global no segundo caso.

de fase convergentes no início e no final do intervalo. Além disso, também é possível determinar o comprimento de onda de cada componente a partir destes diagramas de forma bastante intuitiva.

As partes real e imaginária das transformadas são ilustradas nas figuras 48 (e) a (h). No caso da segunda série, tanto na parte real quanto na imaginária, nota-se na metade do intervalo o efeito do cone de influência entre os níveis. Nesta região destaca-se o aumento da incerteza sobre a localização em função da escala. O efeito do sinal harmônico anual é observado para além da metade do intervalo devido à dilatação da ondaleta. Assim como no escalograma, ocorre distorção da transformada nas bordas, causada pelo efeito dos cones de influência que se estendem para fora do domínio da função. Nestas regiões, a transformada de ondaletas pode induzir periodicidade nos espectros, introduzindo eventos com períodos que não estão presentes no sinal original.

Integrando-se o espectrograma ao longo do tempo para cada escala determina-se o espectro de ondaleta global

$$G_W f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_W f(u, \xi) du . \tag{B.30}$$

Ele pode ser comparado ao espectro de Fourier como ilustra a figura 49. Nota-se que ambos os espectros para cada caso são bastante semelhantes, podendo-se dizer que os espectros são equivalentes no segundo caso.

B.5 Ondaletas ortogonais

As ondaletas tratadas até o momento trazem representações redundantes de eventos, principalmente nas escalas mais altas, onde há alta correlação nos espectros de ondaleta adjacentes. Isto motiva a construção de um conjunto de ondaletas ψ discretizadas, dilatadas e transladadas

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{t - 2^j n}{2^j} \right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (\text{B.31})$$

que formem uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Assim qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada pela seguinte combinação linear

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(t), \psi_{j,n}(t) \rangle \psi_{j,n}(t) . \quad (\text{B.32})$$

Ondaletas ortogonais dilatadas por 2^j possuem informação a respeito da projeção do sinal original no espaço de resolução 2^{-j} . Assim a construção destas bases pode ser relacionada a aproximações de multi-resolução de sinais.

B.5.1 Análise de multi-resolução

A aproximação de uma função a uma resolução 2^{-j} é definida como a projeção ortogonal $P_V f$ sob um espaço $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$. Para que o conjunto fechado $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespaços de $L^2(\mathbb{R})$ seja uma aproximação de multi-resolução, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas (MALLAT, 1989a):

- Invariância em relação a qualquer translação proporcional à escala 2^j ,

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j .$$

- Uma aproximação na resolução 2^{-j} possui toda informação necessária para determinar uma aproximação de menor resolução 2^{-j-1} ,

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j .$$

- Dilatando-se funções em V_j por 2 equivale a aumentar os detalhes por 2 e deve ser garantida a definição de uma aproximação na menor resolução 2^{-j-1} ,

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} .$$

- Quando a resolução 2^{-j} tende a zero não existem mais detalhes em f ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} .$$

- No entanto, quando a resolução 2^{-j} tende ao infinito, o sinal aproximado converge para o sinal original

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}) .$$

Para calcular a projeção é preciso definir uma base ortonormal de V_j . Uma base ortonormal pode ser obtida por dilatação e translação de uma única função $\phi(t)$, a *função escala*, de modo que o conjunto $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, onde

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right) ,$$

seja base ortonormal de V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo a projeção ortogonal de f em V_j é obtida através da expansão na base ortogonal

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} . \quad (\text{B.33})$$

Seja, por exemplo, a função escala dada pela função indicadora, $\phi(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}$, a aproximação de multi-resolução de um sinal em diferentes escalas é ilustrada na figura 51 a).

Calculando-se a aproximação de $f(t)$ na resolução 2^{-j} informação é perdida. Da equação (B.32), a soma parcial $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ pode ser interpretada como a diferença entre as aproximações de f nas resoluções 2^{-j+1} e 2^{-j} . Esta observação abre espaço para introduzir os espaços W_j para todo $j \in \mathbb{Z}$ como o complemento de V_j em V_{j-1} . Assim,

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j . \quad (\text{B.34})$$

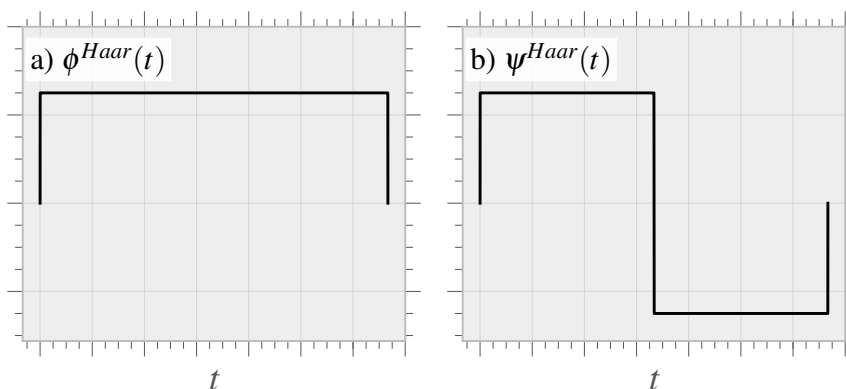


Figura 50 – Ondaleta de Haar: função escala ϕ e ondaleta-mãe ψ .

Desta forma, a projeção ortogonal de f em V_{j-1} pode ser decomposta como a soma de projeções em V_j e W_j ortogonais,

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f.$$

O complemento $P_{W_j}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ dá os detalhes de f que ocorrem na escala 2^{j-1} , mas que desaparecem na escala grosseira 2^j . Portanto a função escala ϕ e a ondaleta-mãe ψ estão intimamente ligadas. A ondaleta-mãe correspondente à função escala $\phi(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}$ é a ondaleta de Haar que é definida por

$$\psi^{Haar}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

A ondaleta de Haar é o exemplo mais simples de uma ondaleta ortogonal. A ondaleta de Haar e sua respectiva função escala estão ilustradas na figura 50. Por não ser contínua tampouco diferenciável, a ondaleta de Haar possui uma gama de aplicações reduzida, sendo principalmente utilizada para fins ilustrativos.

B.5.2 Filtros conjugados

Talvez a forma mais simples de ilustrar como um sinal discreto é decomposto seja através de um exemplo. Utilizando a ondaleta de Haar, uma série com quatro elementos $x(0)$,

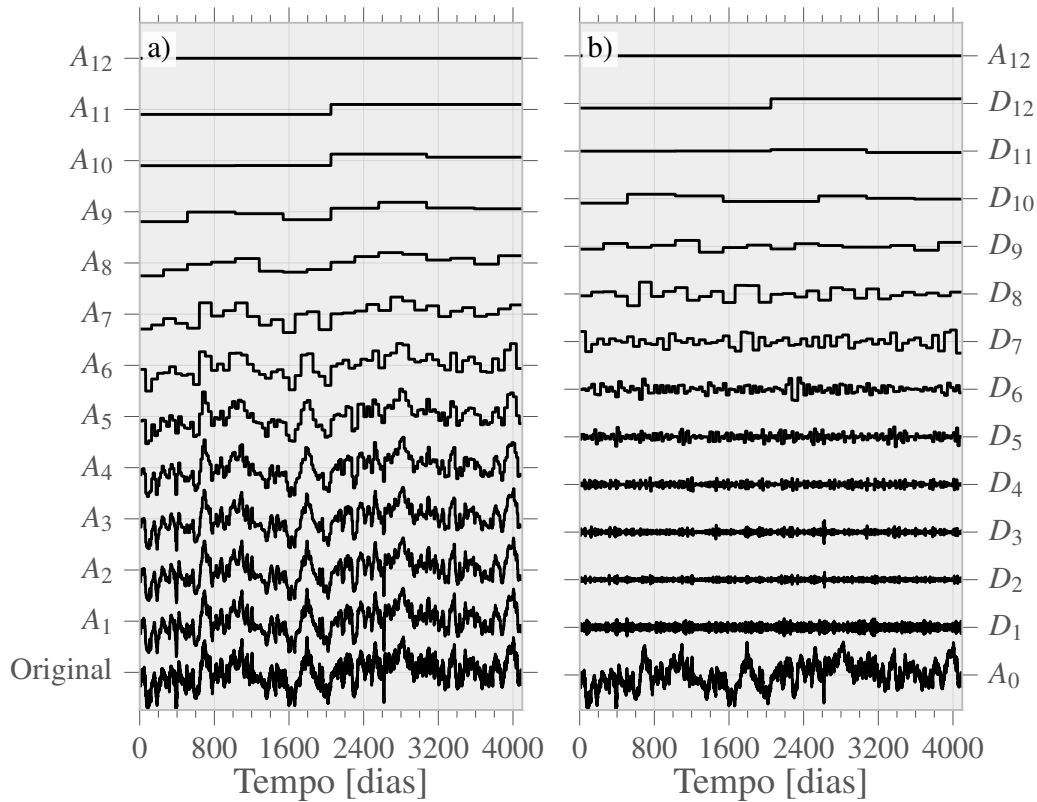


Figura 51 – Sinal decomposto pela ondaleta de Haar segundo a análise de multi-resolução. (a) Sinal original e aproximações A_j nas escalas $s = 2^{-j}$. (b) Componentes de aproximação A_8 e detalhes D_j do sinal original através da análise de multi-resolução. Note que $A_j = A_{j+1} + D_{j+1}$ e que A_0 é equivalente ao sinal original.

$x(1), x(2), x(3)$ é filtrado por um filtro decimador, de modo que dois novos sinais sejam criados, o sinal de aproximação A_j e de detalhe D_j . Neste caso,

$$A_1(0) = \frac{1}{2}(x(0) + x(1)), \quad A_1(1) = \frac{1}{2}(x(2) + x(3)),$$

$$D_1(0) = \frac{1}{2}(x(0) - x(1)), \quad D_1(1) = \frac{1}{2}(x(2) - x(3)).$$

O conceito de aproximação e detalhe neste contexto é bastante intuitivo pois a aproximação é a média de dois pontos consecutivos na série e o detalhe é a metade da diferença entre dois pontos consecutivos na série. Um sinal decomposto pela ondaleta de Haar utilizando o conceito de multi-resolução é ilustrado na figura 51 b).

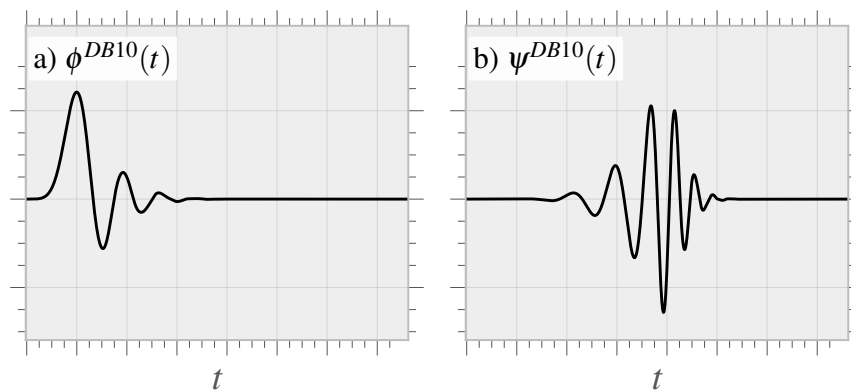


Figura 52 – Ondaleta de Daubechies DB10: função escala ϕ e ondaleta-mãe ψ .

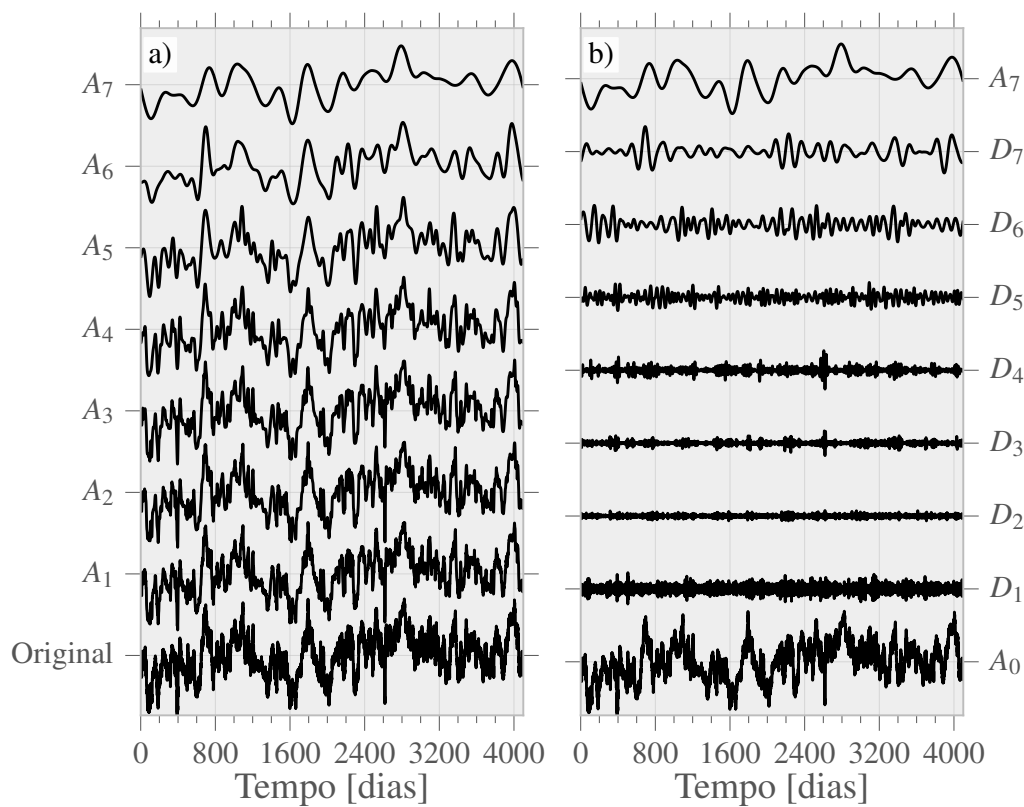


Figura 53 – Sinal decomposto pela ondaleta de Daubechies DB10 segundo a análise de multi-resolução. (a) Sinal original e aproximações A_j nas escalas $s = 2^{-j}$. (b) Componentes de aproximação A_8 e detalhes D_j do sinal original através da análise de multi-resolução. Note que $A_j = A_{j+1} + D_{j+1}$ e que A_0 é equivalente ao sinal original.

B.5.3 Ondaleta de Daubechies

A ondaleta de Daubechies DB10 pertence a uma classe de ondaletas discretas bastante utilizada em análise de sinais. Ela e sua função de escala estão ilustradas na figura 52. A forma para determinação das aproximações e dos detalhes é análoga à da ondaleta de Haar. Uma descrição completa de suas propriedades é dada por Daubechies (1988). O mesmo sinal anterior decomposto pela ondaleta de Haar é decomposto pela ondaleta de Daubechies DB10 e ilustrado na figura 53.

Referências

- ANDERSON, D. L. T.; GILL, A. E. Spin-up of a stratified ocean, with applications to upwelling. *Deep-Sea Research*, v. 22, p. 583–596, 1975.
- aO, G. P. C.; JOHNS, W. E. Sea surface structure of north brazil current rings derived from shipboard and moored acoustic doppler current profiler observations. *Journal of Geophysical Research*, v. 116, p. C01010, 2011.
- BERON-VERA, F. J.; WANG, Y.; OLASCOAGA, M. J.; GONI, G. J.; HALLER, G. Objective detection of oceanic eddies and the agulhas leakage. *Journal of Physical Oceanography*, v. 43, n. 7, p. 1426–1438, 2013.
- CALDERON, A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Mathematica*, v. 24, n. 1, p. 13–190, 1964.
- CHAIGNEAU, A.; ELDIN, G.; DEWITTE, B. Eddy activity in the four major upwelling systems from satellite altimetry (1992–2007). *Progress in Oceanography*, v. 83, p. 117–123, 2009.
- CHAIGNEAU, A.; GIZOLME, A.; GRADOS, C. Mesoscale eddies off Peru in altimeter records: Identification algorithms and eddy spatio-temporal patterns. *Progress in Oceanography*, v. 79, p. 106–119, 2008.
- CHELTON, D. B.; DESZOEKE, R. A.; SCHLAX, M. G.; NAGGAR, K. E.; SIWERTZ, N. Geographical variability of the first baroclinic Rossby radius of deformation. *Journal of Physical Oceanography*, American Meteorological Society, v. 28, n. 3, p. 433–460, mar 1998.
- CHELTON, D. B.; GAUBE, P.; SCHLAX, M. G.; EARLY, J. J.; SAMELSON, R. M. The influence of nonlinear mesoscale eddies on near-surface oceanic chlorophyll. *Science*, v. 334, n. 6054, p. 328–332, 2011.
- CHELTON, D. B.; SCHLAX, M. G. Global observations of oceanic Rossby waves. *Science*, v. 272, p. 234–238, 1996.
- CHELTON, D. B.; SCHLAX, M. G.; SAMELSON, R. M. Global observations of nonlinear mesoscale eddies. *Progress in Oceanography*, v. 91, p. 167–216, 2011.
- CHELTON, D. B.; SCHLAX, M. G.; SAMELSON, R. M.; SZOEKE, R. A. de. Global observations of large oceanic eddies. *Geophysical Research Letters*, v. 34, p. L15606, 2007.

CIPOLLINI, P.; CROMWELL, D.; JONES, M. S.; QUARTLY, G. D.; CHALLENGOR, P. G. Concurrent altimeter and infrared observations of Rossby wave propagation near 34°N in the Northeast Atlantic. *Geophysical Research Letters*, v. 24, p. 889–892, 1997.

DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 41, n. 7, p. 909–996, oct 1988.

DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992. 357 p. (CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, v. 61).

DOGLIOLI, A. M.; BLANKE, B.; SPEICH, S.; LAPEYRE, G. Tracking coherent structures in a regional ocean model with wavelet analysis: Application to cape basin eddies. *Journal of Geophysical Research*, v. 112, n. C5, p. C05043.1–12, may 2007.

DUCET, N.; TRAON, P.-Y. L.; REVERDIN, G. Global high resolution mapping of ocean circulation from TOPEX/Poseidon and ERS-1 and -2. *Journal of Geophysical Research*, v. 105, p. 19477–19498, 2000.

EMERY, W. J.; THOMSON, R. E. *Data analysis methods in physical oceanography*. 2. ed. Amsterdam: Elsevier, 2001. 638 p. ISBN 978-0-444-50756-6.

FARGE, M.; SCHNEIDER, K.; KEVLAHAN, N. Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Physics of Fluids*, v. 11, n. 8, p. 2187–2201, 1999.

GILL, A. E. *Atmosphere-ocean dynamics*. San Diego, CA: Academic Press Inc., 1982. 662 p. (International Geophysics Series, v. 30). ISBN 0-12-283520-4.

GOUPILLAUD, P.; GROSSMANN, A.; MORLET, J. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 85–102, 1984.

GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984.

KILLWORTH, P. D.; CHELTON, D. B.; SZOEKE, R. A. de. The speed of observed and theoretical long extratropical planetary waves. *Journal of Physical Oceanography*, American Meteorological Society, v. 27, n. 9, p. 1946–1966, 1997.

KUMAR, P.; FOUFOULA-GEORGIU, E. Wavelet analysis for geophysical applications. *Reviews of Geophysics*, v. 35, n. 4, p. 385–412, 1997.

LIN, X.; YANG, J.; WU, D.; ZHAI, P. Explaining the global distribution of peak-spectrum variability of sea surface height. *Geophysical Research Letters*, v. 35, p. L14602, 2008.

MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing: The sparse way*. 3. ed. Burlington, MA: Academic Press, 2008. 805 p. ISBN 978-0-12-374370-1.

MALLAT, S. G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $l^2(r)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 315, n. 1, p. 69–87, 1989.

MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. ISSN 0162-8828.

MORETTIN, P. A. *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999. 272 p.

MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; GLARD, D. Wave propagation and sampling theory—part i: Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 47, n. 2, p. 203–221, feb 1982.

MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; GIARD, D. Wave propagation and sampling theory—Part II: Sampling theory and complex waves. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 47, n. 2, p. 222–236, feb 1982.

OKUBO, A. Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep Sea Research*, v. 17, p. 445–454, 1970.

PASCUAL, A.; FAUGÈRE, Y.; LARNICOL, G.; TRAON, P.-Y. L. Improved description of the ocean mesoscale variability by combining four satellite altimeters. *Geophysical Research Letters*, v. 33, n. 2, 2006.

PEDLOSKY, J. *Geophysical fluid dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1987. 710 p. ISBN 0-387-96387-1.

POLITO, P. S.; CORNILLON, P. Long baroclinic Rossby waves detected by TOPEX/Poseidon. *Journal of Geophysical Research*, v. 102, p. 3215–3235, 1997.

POLITO, P. S.; LIU, W. T. Global characterization of Rossby waves at several spectral bands. *Journal of Geophysical Research*, v. 108, n. C1, p. 18–1, 2003.

ROBINSON, A. R. (Ed.). *Eddies in marine science*. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 609 p. (Topics in atmospheric and oceanographic sciences). ISBN 3-540-12253-2.

- ROBINSON, I. S. *Discovering the Ocean from Space: The unique applications of satellite oceanography*. Heidelberg: Springer Praxis Books, 2010. 638 p.
- ROSSBY, C.-G. *et al.* Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *Journal of Marine Research*, v. 2, n. 1, p. 38–55, 1939.
- SIEGEL, A.; WEISS, J. B. A wavelet-packet census algorithm for calculating vortex statistics. *Physics of Fluids*, v. 9, n. 7, p. 1988–1999, 1997.
- SMITH, W. H. F.; WESSEL, P. Gridding with continuous curvature splines in tension. *Geophysics*, SEG, v. 55, n. 3, p. 293–305, 1990.
- SOUZA, J. M. A. C. S.; MONTÉGUT, C. de B.; TRAON, P. Y. L. Comparison between three implementations of automatic identification algorithms for the quantification and characterization of mesoscale eddies in the South Atlantic Ocean. *Ocean Science*, v. 7, p. 317–334, 2011. Disponível em: <<http://www.ocean-sci.net/7/317/2011/>>.
- STAMMER, D. Global characteristics of ocean variability estimated from regional TOPEX/Poseidon altimeter measurements. *Journal of Physical Oceanography*, v. 27, n. 8, p. 1743–1769, 1997. ISSN 1520-0485.
- TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, American Meteorological Society, v. 79, n. 1, p. 61–78, 1998.
- TRAON, P. Y. L.; DIBARBOURE, G. Mesoscale mapping capabilities of multiple-satellite altimeter missions. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 16, n. 9, p. 1208–1223, 1999.
- TRAON, P. Y. L.; DIBARBOURE, G.; DUCET, N. Use of a high-resolution model to analyze the mapping capabilities of multiple-altimeter missions. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 18, n. 7, p. 1277–1288, 2001.
- TRAON, P. Y. L.; FAUGÈRE, Y.; HERNANDEZ, F.; DORANDEU, J.; MERTZ, F.; ABLAIN, M. Can we merge GEOSAT follow-on with TOPEX/Poseidon and ERS-2 for an improved description of the ocean circulation? *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 20, n. 6, p. 889–895, 2003.
- TRAON, P. Y. L.; OGOR, F. ERS-1/2 orbit improvement using TOPEX/Poseidon: The 2 cm challenge. *Journal of Geophysical Research*, v. 103, n. C4, p. 8045–8057, 1998.
- VALLIS, G. K. *Atmospheric and ocean fluid dynamics: Fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 745 p. ISBN 978-0-511-34879-2.

WEISS, J. The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 48, n. 2–3, p. 273–294, 1991.