

**Escola Politécnica da Universidade De São Paulo**  
Departamento de Engenharia Naval e Oceânica

PNV 3412–Mecânica dos Sólidos II  
Análise Experimental de Colunas I

Aluno

Nº USP

Artur Santos Paixao

10342741

**São Paulo**

**04 de Outubro 2018**

## Sumário

<b>1 Introdução</b> .....	<b>4</b>
1.1 O fenômeno flambagem .....	4
<b>2 Metodologia</b> .....	<b>7</b>
2.1 Carregamento axial.....	7
2.2 Carregamento excêntrico .....	10
<b>3 Resultados Experimentais</b> .....	<b>11</b>
3.1 Materiais e suas características .....	11
3.2 Dados adquiridos .....	13
<b>4 Resultados Teóricos Analíticos</b> .....	<b>16</b>
<b>5 Comparações</b> .....	<b>16</b>
<b>6 Conclusões e Recomendações</b> .....	<b>20</b>
<b>7 Referência Bibliográfica</b> .....	<b>21</b>

## Lista de Símbolos

A	Área da seção
$D_{ext}$	Diâmetro externo da coluna
$\delta_i$	Desvio do valor teórico “i” em relação ao experimental “i”
E	Módulo de elasticidade do material
$E_T$	Módulo de elasticidade a partir da reta tangente
I	Momento de inércia de área
L	Comprimento da coluna
$L_e$	Comprimento efetivo da coluna
P	Carga aplicada
$P_{cr}$	Carga crítica de Euler
$P_{teo}$	Carga teórica
$P_{exp,i}$	Carga crítica experimental da coluna “i”
$P_{teo,i}$	Carga crítica teórica da coluna “i”
$\lambda$	Índice de esbeltez
r	Raio de giração
t	Espessura da coluna
$\sigma$	Tensão
$\sigma_{cr}$	Tensão crítica
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_r$	Limite de Resistência
v	Deflexão
M	Momento fletor
$M_o$	Momento no engaste

## 1 Introdução

Este relatório é um requisito da disciplina PNV3222 – Mecânica dos Sólidos II, cujo objetivo principal é solidificar os conceitos abordados em classe, a partir de uma análise comparativa de resultados experimentais e teóricos observados do fenômeno chamado flambagem. Ensaio experimentais possuem vital importância no processo de aprendizagem à medida que apresentam ao aluno um processo racional e prático do que foi lecionado em sala de aula. Além disso, o experimento também proporciona conhecimento na área de metodologias de ensaio, uso de instrumentação, entre outros, conhecimentos estes afins no âmbito da engenharia. Assim, é inegável a motivação que tal tarefa desperta nos discentes e futuros engenheiros.

### 1.1 O fenômeno flambagem

A Flambagem é um dos modos de falhas que estruturas podem sofrer. Ocorrem quando peças esbeltas, chamadas colunas, são solicitadas axialmente de forma compressiva e acabam apresentando comportamento flexional. Deve-se ter atenção quanto ao correto projeto dos elementos estruturais devido ao fato da instabilidade ocorrer de forma elástica, sendo assim, a estrutura perde sua estabilidade para tensões inferiores a tensão de escoamento do próprio material. Logo, fica claro que a propriedade do material que determina a tensão crítica para ocorrência do fenômeno não é a tensão de escoamento, mas sim sua rigidez flexional. Dentro de diversas áreas da engenharia, a consideração desse modo de falha é primordial para a segurança e integridade das estruturas.

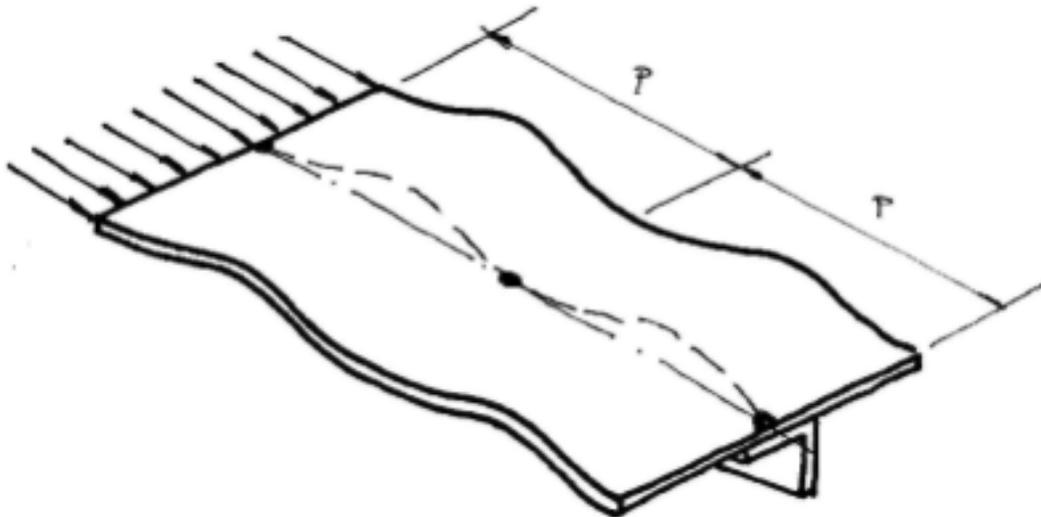


Figura 1.1.1 – Instabilidade de chapa, associadas a elementos reforçadores, causadas por compressão lateral.

O fenômeno da flambagem está presente em todos e quaisquer elementos estruturais. Colunas são os exemplos mais típicos, mas também pode-se constatar que tal comportamento também aparece em componentes de maquinários, cuja dinâmica impõe cargas compressivas relevantes em seus elementos. Adicionalmente, dentro da área de engenharia naval, a estrutura resistente de um navio, por exemplo, apresenta alguns componentes para os quais o fenômeno da flambagem é relevante. Alguns deles são as colunas de suporte de conveses, em termo náutico pé-de-carneiro, e elementos de chapa submetidos a tensões primárias, figura 1.1.1. Esses exemplos de elementos que sofrem desta falha podem ser vistos nas figuras 1.1.2 e 1.1.3.



Figura 1.1.2 - Partes móveis de maquinaria, como este elo curto, estão sujeitos a cargas de compressão e, assim, agem como colunas.

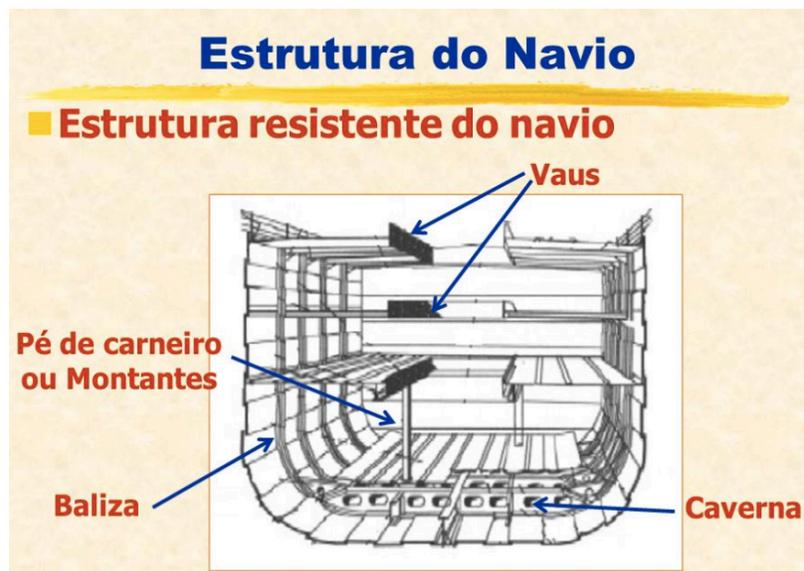


Figura 1.1.3 – Elementos estruturais típicos de uma seção de navio.

Especial atenção deve ser dada ao fato de que colunas costumam ter seção transversal circular ou quadrada de modo que o momento de inércia em relação a qualquer eixo que passa pelo centroide é o mesmo, e a coluna poderá então flambar em qualquer um dos planos.

A validade de valores teóricos para a flambagem somente podem ser considerados quando a coluna é submetida a uma carga compressiva rigorosamente centrada, na sua seção, e contínua, a partir do qual seu estado de equilíbrio passa de estável para instável. Após isso, a menor perturbação fará com a peça se encurve e seja levada rapidamente ao colapso. Mesmo que as condições de carregamento sejam perfeitas e o material seja homogêneo, o fenômeno ocorre por conta da instabilidade de forma a que fica sujeita a peça quando a carga compressiva atinge a um determinado valor.

Entretanto, a realidade, ou seja, os valores experimentais, diferem da abordagem teórica por conta de alguns aspectos tais como:

- a falta de **retilidade** perfeita do eixo da peça, no caso de peças que devam ser retas;
- a existência de uma, pequena que seja, **excentricidade** na atuação da carga compressiva;
- a falta de **homogeneidade** perfeita do material de que se constitui a peça;

Tais aspectos abordados acima podem ser considerados como fontes de erros, pois introduzem uma discrepância nos valores reais quando comparados aos valores teóricos. Alguns outros erros associados à atividade experimental também podem ser observados, sendo eles:

- **Condições não satisfatória nos apoios.** Os vínculos nas extremidades da colunas determinam o tipo de condição de contorno a ser adotado nas formulações matemática, logo, hipóteses que não representam o que de fato acontece acarreta erros teórico que prejudicam ou inviabilizam a comparação dos dados.
- **Medidas da Dimensão da Coluna.** Medições imprecisas de comprimento, largura ou espessura da coluna resultam em estimativas imprecisas da carga crítica, com base na equação de Euler.
- **Teste Prévio e Deformação da Coluna.** A estrutura isotrópica e homogênea da coluna poderia ter sido alterada devido a testes anteriores. A coluna pode ter sofrido fadiga ou possivelmente deformação plástica que pode não ser visível. Muito provavelmente, uma coluna testada com frequência terá uma carga crítica experimental menor do que a carga crítica prevista teoricamente.
- **Erro de paralaxe instrumental.** O erro de paralaxe é um erro de linha de visada que ocorre durante a leitura de qualquer tipo de indicador de medição, como a escala de carga e a observação do nível de bolha. Para reduzir o erro de paralaxe, o espectador deve ser posicionado perpendicularmente ao indicador. Qualquer desvio angular de uma visão perpendicular do indicador contribuirá para o erro de paralaxe.

## 2 Metodologia

### 2.1 Carregamento axial

A carga de início de instabilidade, ou também chamada de carga crítica, é carga axial de compressão máxima que uma coluna pode aguentar antes do início da instabilidade, ou da denominada flambagem. Ao se considerar condições ideais de carregamento, propriedades e confecção da coluna e condições de apoios, existe um valor teórico onde a rigidez flexional da coluna se equipara aos esforços flexionais que aparecem por conta de pequenas deflexões da linha longitudinal da coluna. Basicamente, durante o processo de compressão, à medida que se aumenta a força aplicada, o equilíbrio da barra tende a passar do equilíbrio estável para o neutro, quando se chega à carga crítica, e do neutro para o instável, após tal carga. A figura 2.1.1 ilustra bem este comportamento.

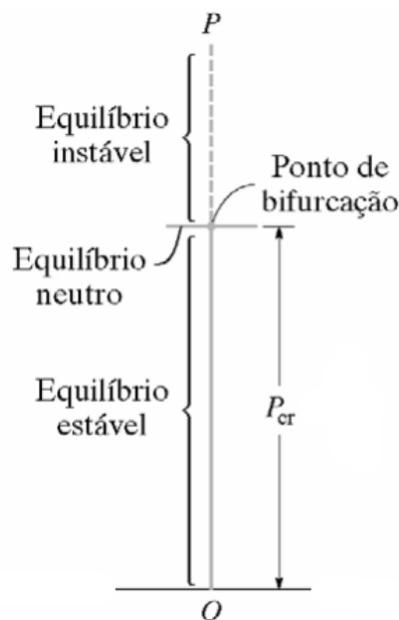


Figura 2.1.1 - Mudança dos estados de equilíbrio.

Será apresentado, de forma sucinta, o procedimento para obtenção da carga crítica em uma coluna engastada-engastada de comprimento L, tendo em vista que esta foi a condição de apoio adotado no experimento.

A condição de carregamento da coluna, bem como seu comportamento em flambagem é representada na figura 2.1.2. Considerando que existe uma força P atuando no seu centroide e efetuando um corte na seção em uma altura x, tem-se para as equações de equilíbrio o seguinte:

$$M = -Pv + M_0 \quad (1)$$

Onde,

$$M = EIV'' \quad (2)$$

Portanto,

$$EIv'' - Pv = M_0 \quad (3)$$

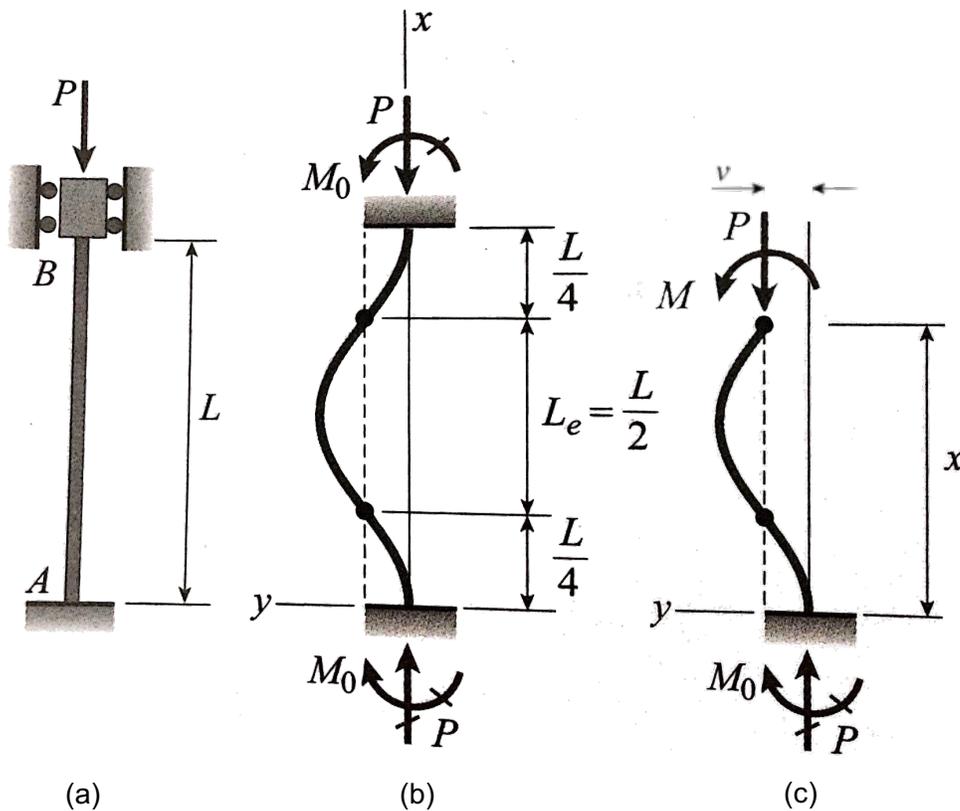


Figura 2.1.2 – Coluna com extremidades engastadas: (a) Representações da coluna real, (b) forma em flambagem e (c) força axial  $P$  e momento fletor  $M$  agindo na seção transversal.

Observa-se que o momento atuante na coluna se equivale a um momento fletor que atua em uma viga, tornando possível utilizar-se a igualdade apresentada na equação (2). Além disso, dependendo da posição de  $x$ , o valor da deflexão  $v$  terá valores distintos. A partir da equação (3), tem-se uma equação diferencial ordinária homogênea, cuja solução geral é:

$$v = C_1 \text{sen}(kx) + C_2 \text{cos}(kx) + M_0/P \quad (4)$$

Onde,

$$k^2 = P/EI \quad (5)$$

Quatro condições de contorno são necessárias para caracterizar o problema, sendo elas as seguintes:

$$v(0) = 0 \quad (6)$$

$$v(L) = 0 \quad (7)$$

$$v'(0) = 0 \quad (8)$$

$$v'(L) = 0 \quad (9)$$

Substituindo o valor da condição apresentado em (6) na equação (4), tem-se que  $C_2 = M_0/P$ . Substituindo (8) em (4), tem-se que  $C_1 = 0$ . E, com as condições (7) e (9) tem-se:

$$E, \quad C_2 \sin(kL) = 0 \quad (10)$$

$$C_2 \cos(kL) = 1 \quad (11)$$

As igualdades (10) e (11) são satisfeitas quando:

$$kL = 2\pi n, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Logo,

$$P_{cr} = 4\pi^2 n^2 EI / L^2 \quad (11)$$

O menor valor de P é obtido quando  $n = 1$ , e a carga crítica para a coluna é portanto:

$$P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2 \quad (13)$$

$$L_e = L/2 \quad (14)$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI / L_e^2 \quad (15)$$

A equação (15) é chamada de carga crítica de Euler. Utilizando-se da fórmula de raio de giração (16), pode-se chegar à equação (17). A tensão crítica também pode ser expressa, conforme a equação (18).

$$r = \sqrt{I/A} \quad (16)$$

$$P_{cr} = 4\pi^2 AE / (L/r)^2 \quad (17)$$

Onde  $\lambda = L/r$  é chamado de índice de esbeltez

$$\sigma_{cr} = 4\pi^2 E / \lambda^2 \quad (18)$$

A carga crítica apresentada em (15) traduz que a flambagem de uma coluna depende somente de sua rigidez flexional "EI" e de seu comprimento efetivo "Le". Nota-se também que a coluna sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal de menor momento de inércia. Logo, para uma coluna com seção retangular tem-se o seguinte comportamento esperado apresentado na figura 2.1.3:



Figura 2.1.3 - Flambagem da coluna em torno do eixo a-a, com menor momento de inércia.

Considerando que a seção transversal de coluna em questão fosse tubular com espessura t, pode-se chegar a uma expressão de carga crítica em função do comprimento efetivo, diâmetro e espessura da coluna. Para tal, considera-se abaixo:

$$I = \pi([D_{ext}^4 - (D_{ext} - 2t)^4]) / 64 \quad (19)$$

Onde I é o momento de inércia da seção tubular e portanto

$$P_{cr} = \pi^3 E ([D_{ext}^4 - (D_{ext} - 2t)^4]) / 64 L_e^2 \quad (20)$$

## 2.2 Carregamento excêntrico

Para a condição de apoio engaste-engaste, não faz sentido falar de carregamento excêntrico tendo em vista que o momento inicial causado pela excentricidade seria anulado pela restrição de rotação do apoio.

### 3 Resultados Experimentais

O experimento consiste em dois ensaios. Em ambos se utiliza um sistema de testes servo-hidráulico controlável chamado MTS 793 que realiza a aplicação de carga nas colunas. No primeiro ensaio se controla o deslocamento, com taxa de aproximadamente 2mm/min, da plataforma do apoio superior em relação ao apoio inferior, e mede-se a carga resultante através de uma célula de carga. O segundo consiste no controle da carga, com taxa de 30kN/min, ao invés do deslocamento. A figura 3.1 ilustra um dos ensaios que foram realizados.



Figura 3.1 – Fotos de um dos ensaios antes da ocorrência da flambagem.

#### 3.1 Materiais e suas características

Para cada ensaio realizado, foi utilizado colunas com comprimentos diferentes, ou seja, no ensaio 1 foi utilizada a coluna 1 e no ensaio 2 a coluna 2. A tabela 3.1 resume as características das colunas utilizadas em cada ensaio, assim como a figura 3.2 apresenta seu formato da seção transversal, que é igual para as duas colunas.

Tabela 3.1.1 – Características das Colunas 1 e 2

Dimensões da coluna 1 (mm)		Dimensões da coluna 2 (mm)	
Comprimento (L)	242	Comprimento (L)	260
Diâmetro ( $D_{ext}$ )	15,58	Diâmetro ( $D_{ext}$ )	15,58
Espessura (t)	1,46	Espessura (t)	1,46
Material	Aço duplex	Material	Aço duplex

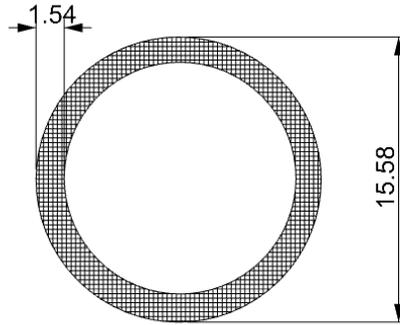


Figura 3.1.2 – Seção transversal das colunas.

Uma tabela de teste de compressão do aço duplex foi fornecida pelo docente. A partir dela é possível encontrar os valores módulos de elasticidade “E” para cada regime de comportamento do material. Isso é possível pois:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (21)$$

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (22)$$

O gráfico tensão x deformação pode ser visto na figura 3.1.3, e a partir dele, para o regime elástico, obteve-se um valor de módulo de elasticidade médio. Os valores de módulo de elasticidade foram calculados ponto a ponto, e os dados considerados foram aqueles que mantiveram os módulos dentro de uma mesma faixa, ou seja, tais que as inclinações da curva tensão x deformação se mantinham constante. O valor médio encontrado foi de  $E = 208,6 \text{ Gpa}$ . A tensão de escoamento do material pode ser encontrada traçando-se a reta com a inclinação do módulo de elasticidade médio defasado de 0,2% no eixo da deformação. A figura 3.1.4 apresenta esta reta e o valor encontrado de tensão de escoamento foi de  $\sigma_y = 715 \text{ Mpa}$ . A tensão de resistência  $\sigma_r$  é identificada como a maior tensão registrada, sendo o seu valor de  $\sigma_r = 965,93 \text{ Mpa}$ .

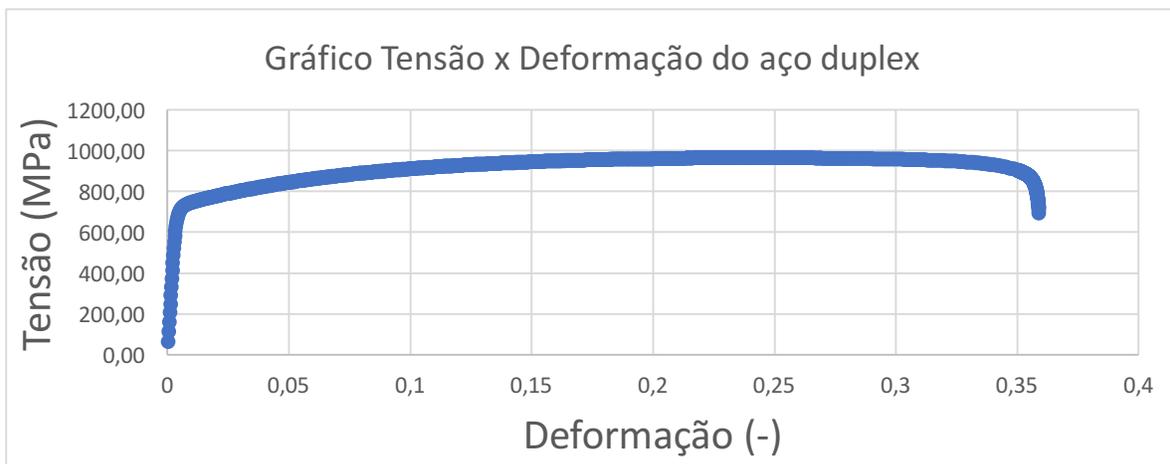


Figura 3.1.3 – Gráfico completo de tensão x deformação do aço duplex.

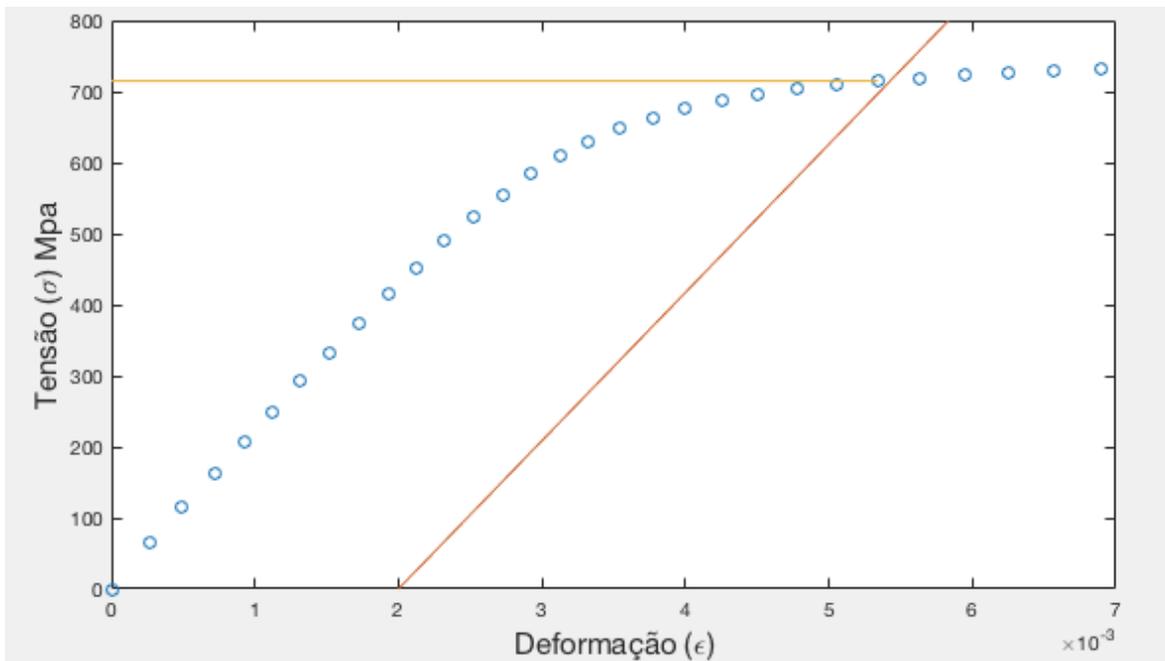


Figura 3.1.4 – Interseção no gráfico tensão x deformação para determinação da tensão de escoamento.

### 3.2 Dados adquiridos

Durante os ensaios, os seguintes dados foram adquiridos:

Tabela 3.2.1 – Dados adquiridos no Ensaio 1

Ensaio 1					
Tempo	Força	Deslocamento	Tempo	Força	Deslocamento
Seg.	kN	mm	Seg.	kN	mm
1,0225	-1,3535	-0,0316	.	.	.
2,0225	-2,7922	-0,0659	.	.	.
3,0225	-4,2069	-0,0978	.	.	.
4,0225	-5,6233	-0,1320	349,0225	-28,0085	-11,6350
5,0225	-6,9677	-0,1643	350,0225	-27,9348	-11,6661
6,0225	-8,3014	-0,1985	351,0225	-27,8644	-11,7017
7,0225	-9,6380	-0,2308	352,0225	-27,7827	-11,7355
8,0225	-10,9697	-0,2663	353,0225	-27,7035	-11,7669
9,0225	-12,2831	-0,2991	354,0225	-27,6239	-11,8021
10,0225	-13,5435	-0,3320	355,0225	-27,5556	-11,8337
11,0225	-14,8017	-0,3657	356,0225	-27,4796	-11,8666
12,0225	-16,0387	-0,3978	357,0225	-27,4251	-11,9012
13,0225	-17,2565	-0,4322	358,0225	-27,3180	-11,9339
14,0225	-18,4567	-0,4653	359,0225	-27,2658	-11,9694

<b>15,0225</b>	-19,6392	-0,4997	<b>360,0225</b>	-27,1867	-12,0007
<b>16,0225</b>	-20,8074	-0,5309	<b>361,0225</b>	-27,1118	-12,0363
<b>17,0225</b>	-21,9555	-0,5658	<b>362,0225</b>	-27,0320	-12,0670
<b>18,0225</b>	-23,0396	-0,5976	<b>363,0225</b>	-26,9602	-12,1007
<b>19,0225</b>	-24,1119	-0,6322	<b>364,0225</b>	-26,8845	-12,1341
<b>20,0225</b>	-24,9179	-0,6657	<b>365,0225</b>	-26,8214	-12,1678
<b>21,0225</b>	-25,0187	-0,6999	<b>366,0225</b>	-26,7346	-12,2012
<b>22,0225</b>	-24,8087	-0,7325	<b>367,0225</b>	-26,6865	-12,2348
<b>23,0225</b>	-24,6361	-0,7649	<b>368,0225</b>	-26,5982	-12,2666
<b>24,0225</b>	-24,6462	-0,7996	<b>369,0225</b>	-26,5349	-12,3010
<b>25,0225</b>	-24,7339	-0,8330	<b>370,0225</b>	-26,4709	-12,3338
<b>26,0225</b>	-24,8350	-0,8655	<b>371,0225</b>	-26,3960	-12,3684
<b>27,0225</b>	-24,9625	-0,9003	<b>372,0225</b>	-26,3126	-12,4008
<b>28,0225</b>	-25,0930	-0,9323	<b>373,0225</b>	-26,2683	-12,4355
<b>29,0225</b>	-25,2691	-0,9668	<b>374,0225</b>	-26,1959	-12,4682
<b>30,0225</b>	-25,4364	-1,0006	<b>375,0225</b>	-26,1334	-12,5024
.	.	.	<b>376,0225</b>	-26,0579	-12,5365
.	.	.	<b>377,0225</b>	-26,0028	-12,5685
.	.	.	<b>378,0225</b>	-25,9252	-12,6014

Tabela 3.2.2 – Dados adquiridos no Ensaio 2

<b>Ensaio 2</b>					
<b>Tempo</b>	<b>Força</b>	<b>Deslocamento</b>	<b>Tempo</b>	<b>Força</b>	<b>Deslocamento</b>
<b>Seg.</b>	<b>kN</b>	<b>mm</b>	<b>Seg.</b>	<b>kN</b>	<b>mm</b>
<b>2,0166</b>	-0,9351	-0,0252	<b>50,0166</b>	-24,9553	-0,7071
<b>4,0166</b>	-1,9321	-0,0492	<b>52,0166</b>	-25,9609	-0,7414
<b>6,0166</b>	-2,9613	-0,0768	<b>54,0166</b>	-26,9495	-0,7770
<b>8,0166</b>	-3,9622	-0,1032	<b>56,0166</b>	-27,9277	-0,8295
<b>10,0166</b>	-4,9592	-0,1307	<b>58,0166</b>	-28,9217	-0,9738
<b>12,0166</b>	-5,9579	-0,1569	<b>60,0166</b>	-29,9366	-1,1169
<b>14,0166</b>	-6,9539	-0,1843	<b>62,0166</b>	-30,9549	-1,2462
<b>16,0166</b>	-7,9453	-0,2109	<b>64,0166</b>	-31,9546	-1,3685
<b>18,0166</b>	-8,9491	-0,2391	<b>66,0166</b>	-32,9511	-1,4871
<b>20,0166</b>	-9,9554	-0,2658	<b>68,0166</b>	-33,9455	-1,6065
<b>22,0166</b>	-10,9540	-0,2963	<b>70,0166</b>	-34,9522	-1,7301
<b>24,0166</b>	-11,9611	-0,3210	<b>72,0166</b>	-35,9502	-1,8560
<b>26,0166</b>	-12,9556	-0,3534	<b>74,0166</b>	-36,9555	-1,9835
<b>28,0166</b>	-13,9541	-0,3801	<b>76,0166</b>	-37,9515	-2,1136
<b>30,0166</b>	-14,9463	-0,4062	<b>78,0166</b>	-38,9436	-2,2468
<b>32,0166</b>	-15,9540	-0,4354	<b>80,0166</b>	-39,9352	-2,3828
<b>34,0166</b>	-16,9553	-0,4649	<b>82,0166</b>	-40,9508	-2,5217

<b>36,0166</b>	-17,9579	-0,4944	<b>84,0166</b>	-41,9490	-2,6661
<b>38,0166</b>	-18,9597	-0,5250	<b>86,0166</b>	-42,9538	-2,8187
<b>40,0166</b>	-19,9575	-0,5550	<b>88,0166</b>	-43,9580	-2,9746
<b>42,0166</b>	-20,9539	-0,5837	<b>90,0166</b>	-44,9465	-3,1450
<b>44,0166</b>	-21,9543	-0,6160	<b>92,0166</b>	-45,9316	-3,3305
<b>46,0166</b>	-22,9366	-0,6456	<b>94,0166</b>	-46,9216	-3,5486
<b>48,0166</b>	-23,9559	-0,6756	<b>96,0166</b>	-46,6319	-4,0669

Por conta do grande volume de dados do ensaio 1, somente foram apresentados os dados referentes ao início e fim do ensaio. Os gráficos das figuras 3.2.1 apresentam de forma completa todos os dados dos ensaios.

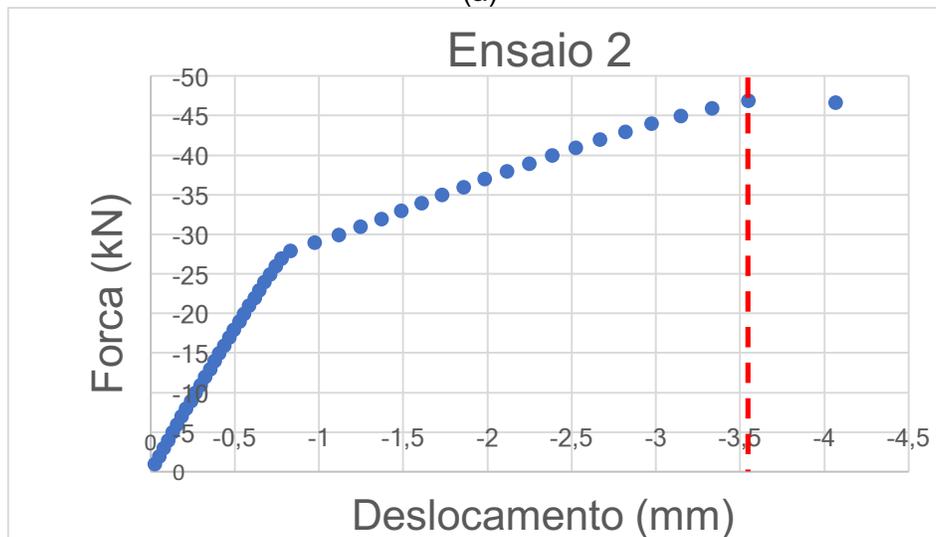
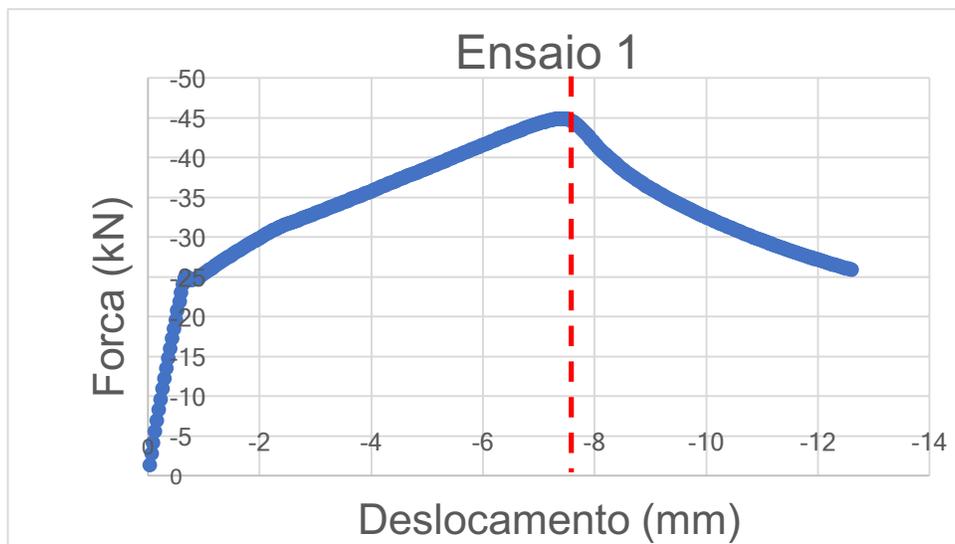


Figura 3.1.1 – Gráfico Carga x deslocamento dos ensaios com seus respectivos pontos de flambagem demarcados em vermelho.

A partir dos gráficos pode-se constatar que as cargas críticas experimentais para as colunas 1 e 2 foram, respectivamente:

$$P_{exp,1} = 44,92 \text{ kN} \quad \text{e} \quad P_{exp,2} = 46,92 \text{ kN} \quad (23)$$

## 4 Resultados Teóricos Analíticos

Utilizando-se da formulação apresentada na equação (15) e substituindo os valores característicos das barras fornecidos na seção 3.1, chega-se a um valor de carga crítica teórica para cada uma das colunas, sendo elas:

$$P_{teo,1} = 229,4 \text{ kN} \quad \text{e} \quad P_{teo,2} = 198,73 \text{ kN} \quad (24)$$

## 5 Comparações

A partir dos resultados obtidos nos experimentos e na parte teórica, pode-se fazer uma análise crítica do comportamento da coluna durante o ensaio, das características dentre as quais o fenômeno da flambagem ocorreu e da congruência dos resultados.

Primeiramente, é de se notar que houve uma grande disparidade entre os valores de carga crítica teórica e experimental. Esta grande diferença pode indicar que talvez a coluna tenha entrado no regime plástico, pois, se comportando desta forma, o material passa a apresentar valores de módulo de elasticidade “E” menores, diminuindo a carga crítica. Para tal, é possível verificar se a flambagem ocorrida saiu ou não da região elástica do material, bastando somente calcular o índice de esbeltez necessário para atingir a tensão de escoamento do material. Portanto:

$$\sigma_y = 4\pi^2 E / \lambda_y^2 \quad (25)$$

E, utilizando os valores  $\sigma_y$  e “E” da seção 3.1.

$$\lambda_y = 107,32 \quad (26)$$

Os índices de esbeltez de cada uma das colunas, utilizando os dados da tabela 3.1.1, são:

$$\lambda_1 = 48,15 \quad (27)$$

$$\lambda_2 = 51,73 \quad (28)$$

Portanto, as colunas possuem índices de esbeltez abaixo do valor mínimo da região de colunas longas, caracterizando a flambagem inelástica. E de fato, conforme observado ao final do ensaio, ambas as colunas flambaram e não voltaram para a posição inicial após a retirada da carga, mostrando que, em ambas, foram introduzidas deformações permanentes no material, comportamento este proveniente de deformações plásticas. A figura 5.1 ilustra como ficou umas das colunas após o ensaio.

O próximo passo deve ser o levantamento dos valores que o módulo de elasticidade ( $E_T$ ) assume em cada ponto do gráfico tensão x deformação. Este vetor com os diversos valores de  $E_T$  já foi calculado na seção 3.1. Calculando-se a nova tensão crítica ( $\sigma_{cr}$ ) para os diversos valores de  $E_T$ , ou seja, utilizando a fórmula (18) substituindo o  $E$  pelo  $E_T$ , tem-se:

$$\sigma_{cr} = 4\pi^2 E_T / \lambda^2 \quad (29)$$

Com isso, pode-se calcular o vetor tensão crítica para cada coluna. A interseção dos gráficos de  $\sigma_{cr} \times E_T$  e  $\sigma \times E_T$ , sendo  $\sigma$  as tensões aplicadas em cada coluna, deverá indicar o verdadeiro valor da tensão crítica sentido durante o ensaio. Para cada uma das colunas estes gráficos foram plotados, e a figura 5.2 ilustra as interseções. Graficamente, encontra-se o novo valor de  $\sigma_{cr}$  e multiplicando-o pela área, tem-se o valor da carga crítica teórica calculada de cada coluna para o ensaio.



Figura 5.1 – Deformação permanente introduzida pelo ensaio.

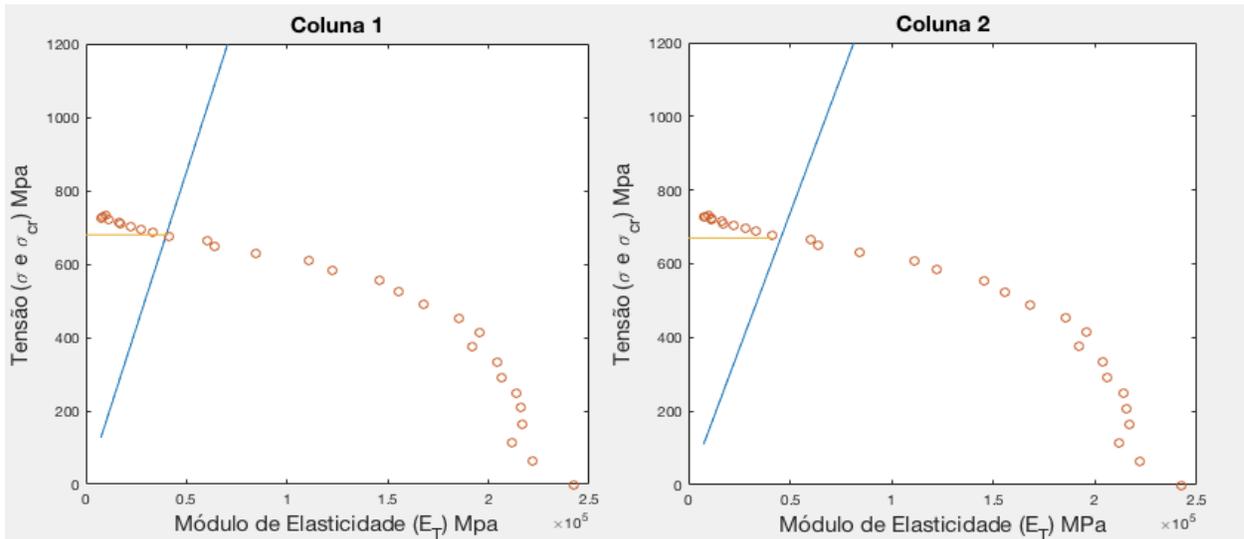


Figura 5.2 – Valores de tensões crítica encontradas para o ensaio das colunas em flambagem plástica.

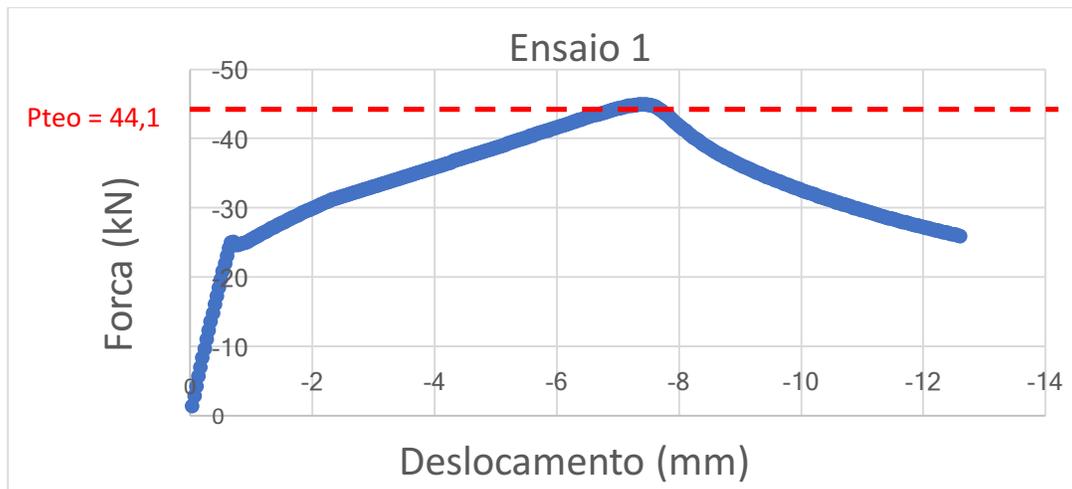
Portanto, tem-se como valores de  $\sigma_{cr,1}$  e  $\sigma_{cr,2}$  o seguinte:

$$\sigma_{cr,1} = 680 \text{ MPa} \text{ e } \sigma_{cr,2} = 670 \text{ MPa} \quad (30)$$

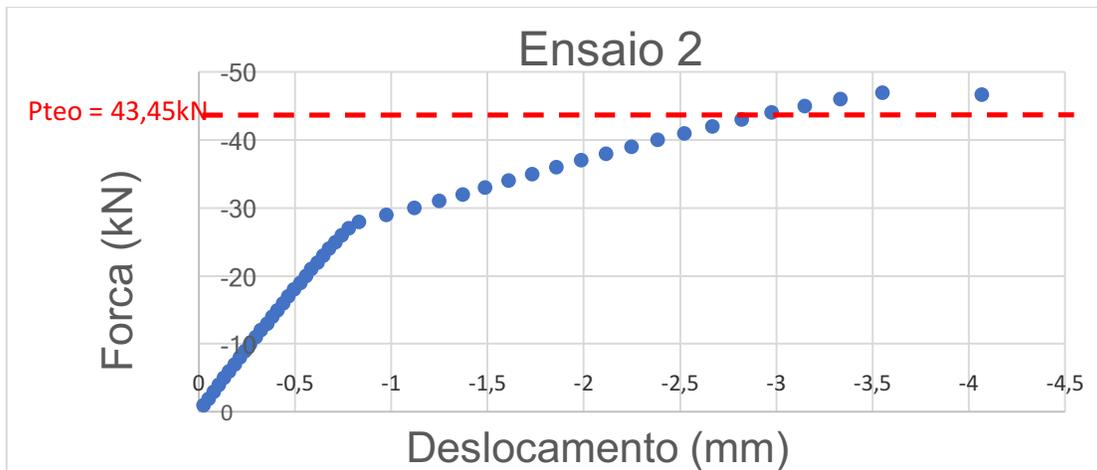
Os valores de  $P_{teo,1}$  e  $P_{teo,2}$  serão

$$P_{teo,1} = 44,1 \text{ kN} \quad \text{e} \quad P_{teo,2} = 43,45 \text{ kN} \quad (31)$$

Comparando-se os gráficos experimentais de carga x deslocamento com os valores de carga teórica encontrados acima, tem-se a figuras 5.3.



(a)



(b)

Figura 5.3 – Gráfico Carga x deslocamento dos ensaios com suas respectivas cargas crítica teórica demarcados em vermelho.

Um outro tipo de gráfico pode ser montado para melhor se verificar o desvio de resultados encontrados pela formulação teórica e pelos dados experimentais. Traça-se uma linha de relação 1:1 e plota-se dois pontos tendo como coordenadas os valores  $[P_{teo1}, P_{exp1}]$  e  $[P_{teo2}, P_{exp2}]$ . O seguinte gráfico pode ser visto na figura 5.4.

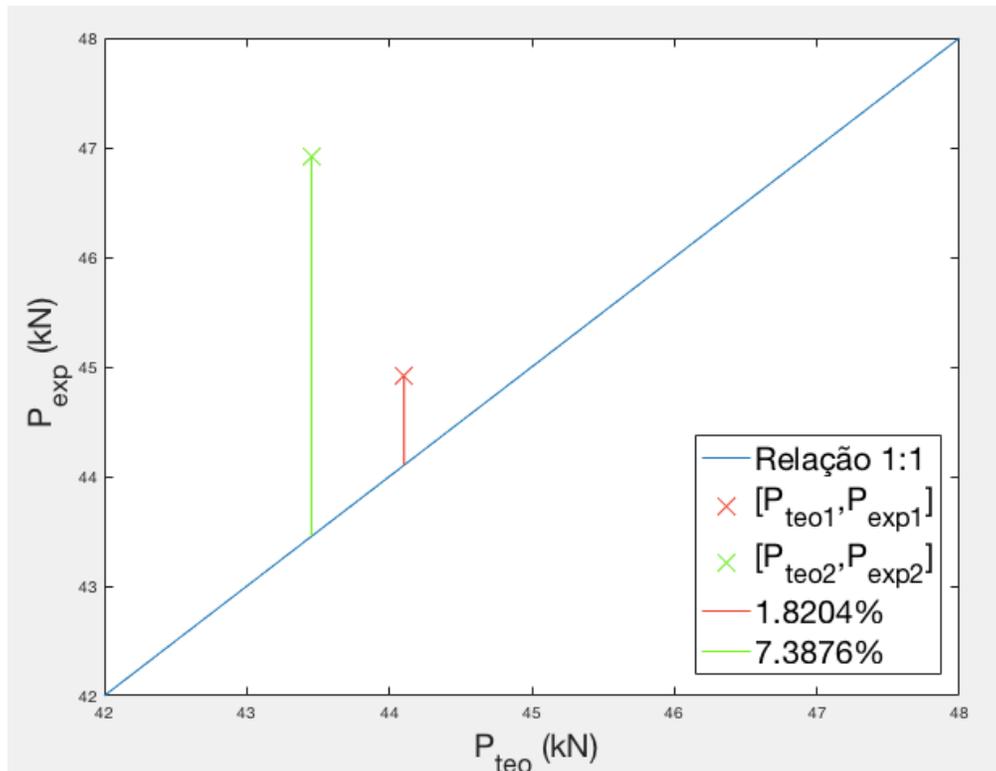


Figura 5.4 – Gráfico  $P_{exp}$  x  $P_{teo}$

Os percentuais de desvio dos valores teóricos em relação aos experimentais também foram expostos na figura 5.4. Portanto, teve-se como desvio os seguintes valores:

$$\delta_1 = 1,8204\% \quad e \quad \delta_2 = 7,3876\% \quad (32)$$

## 6 Conclusões e Recomendações

Após um primeiro cálculo do valor da carga crítica teórica, pode-se perceber que as peças ou colunas apresentaram valores experimentais de carga crítica muito menores. Este foi o fato marcante que propiciou uma melhor análise em cima do problema, gerando uma maior reflexão sobre o fenômeno da flambagem. Após esta análise, foi necessário desenvolver bastante conteúdo para se chegar a novos valores de carga crítica.

Pode-se perceber ao final deste relatório que o método tangente, ou seja, utilizar a fórmula de Euler com valores de módulo de Elasticidade retirados a partir das tangentes da curva tensão x deformação do material, é bastante satisfatório para prever os valores de carga crítica no regime plástico. Os valores de desvios encontrados comprovam esta afirmação.

Entretanto, acredita-se que alguns fatores podem justificar os valores dos desvios. O primeiro deles seria a possível troca dos valores de carga crítica experimentais obtidas para as colunas. Observa-se que a coluna 2, a mais longa, alcançou valores maiores de carga crítica, durante o ensaio, do que a coluna menor. Este comportamento não era esperado, sendo o inverso o que deveria ter ocorrido. Se houvesse ocorrido tal troca, os valores de desvio  $\delta_1$  e  $\delta_2$  estariam mais próximos, apresentando valores mais condizentes. O segundo fator seria possíveis erros na medição das dimensões da barra, tanto por negligência no manuseio do instrumento quanto por descalibração dos mesmos.

Ao final, pode-se concluir que toda a atividade foi de grande valia para formação dos alunos matriculados na disciplina PNV3412, tanto no laboratório, onde se pode ver na prática os procedimentos para ensaios de flambagem, quanto no momento da confecção do relatório, pois pode-se comprovar a efetividade da formulação teórica apresentada em sala.

## 7 Referência Bibliográfica

- [1] Guimarães, H.C.F. e Ávila, J.A. **Peças Comprimidas pelos Topos, Pilares e Escoras – Flambagem**. Notas de Aula. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro. Disponível em: <[http://aquarius.ime.eb.br/~moniz/resmat/CAP\\_IX\\_FLAMBAGEM.pdf](http://aquarius.ime.eb.br/~moniz/resmat/CAP_IX_FLAMBAGEM.pdf)>.
- [2] Gere, J. M. **Mecânica dos Materiais** , Editora Thomson Learning.
- [3] HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**, 3.o Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos, 2000.