

# PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DE PROCESSOS

Jorge A. W. Gut

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo, 2021

## ERRATA da 1ª impressão

Versão 23/Set/2024

### Pág. 25

$$C = \begin{bmatrix} (a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}) & (a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}) & (a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3}) \\ (a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}) & (a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}) & (a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3}) \\ (a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1}) & (a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2}) & (a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3}) \end{bmatrix}$$

### Pág. 60 – Exercício 7

c)  $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3$ , para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

### Pág. 61 – Exercício 12

c)  $f(\mathbf{x}) = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 10$ , com  $x_1, x_2 \in [0, 5]$ .

### Pág. 61 – Respostas

3. b)  $\frac{1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 8 & 16 & -4 \\ 8 & 9 & -18 \end{bmatrix}$

### Pág. 82 – Respostas

2. b)  $n_{gl} = 2$

### Pág. 100

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \mu_1((x_1 - 6)^2 - 3 \cdot x_2) + \mu_2(x_1 + 2 \cdot x_2 - 12) + \mu_3(x_1 - 6) + \mu_4(-x_1 - 2 \cdot x_2 + 8),$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3) + 2\mu_1(x_1 - 6) + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 \\ 2(x_2 - 2) - 3\mu_1 + 2\mu_2 - 2\mu_4 \end{bmatrix},$$

**Pág. 106 – Tabela 4.2**

| Opção | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | Solução                          | Verificação                |
|-------|---------|---------|---------|----------------------------------|----------------------------|
| 1     | 0       | 0       | 0       | $\mathbf{x} = [3 \ 2]^T$         | Inviável para $g_1$        |
| 2     | $> 0$   | 0       | 0       | $\mathbf{x}^* = [3,41 \ 2,24]^T$ | Ponto KKT, $\mu_1 = 0,158$ |

**Pág. 106**

$$g_1(\mathbf{x}): (x_1 - 6)^2 - 3x_2 = 3 > 0 \quad \times$$

$$g_2(\mathbf{x}): x_1 + 2x_2 - 12 = -5 < 0 \quad \checkmark$$

$$g_3(\mathbf{x}): x_1 - 6 = -3 < 0 \quad \checkmark$$

O ponto obtido viola a restrição  $g_1$ ; portanto é inviável.

A opção 2 na Tabela 4.2 foi avaliada na Seção 4.6 fornecendo  $\mathbf{x}^* = [3,41 \ 2,24]^T$  e  $\mu_1 = 0,158$ , que é o ponto ótimo obtido por inspeção gráfica (Figura 4.7).

**Pág. 107 – Sistema não linear**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\mu_1x_1 - 12\mu_1 + \mu_2 = 6, \\ 2x_2 - 3\mu_1 + 2\mu_2 = 4, \\ x_1^2 - 12x_1 - 3x_2 = -36, \\ x_1 + 2x_2 = 12, \end{cases}$$

**Pág. 110 – Tabela 4.3**

| Opção | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | Solução                          | Verificação          |
|-------|---------|---------|---------|----------------------------------|----------------------|
| 1     | 0       | 0       | 0       | $\mathbf{x} = [3 \ 2]^T$         | Inviável para $g_1$  |
| 2     | $> 0$   | 0       | 0       | $\mathbf{x}^* = [3,41 \ 2,24]^T$ | $\mu_1 = -0,158 < 0$ |

**Pág. 113 – Exercício 1**

d) verifique a convexidade nos pontos de mínimo por meio do hessiano da função lagrangeana.

d) formule as condições KKT do problema.

e) a partir das condições KKT, determine os multiplicadores de Kuhn-Tucker nos pontos de mínimo e verifique graficamente a dependência linear entre gradientes.

f) verifique a convexidade nos pontos de mínimo por meio do hessiano da função lagrangeana.

**Pág. 115 – Respostas**

1. c) Problema 1:  $\mathbf{x}^* = [2,80 \ 3,43]^T$ .

Problema 2:  $\mathbf{x}^* = [1,32 \ 0,92]^T$ ,  $\mathbf{x}^* = [2,00 \ 0,00]^T$

**Pág. 139 – Tabela 5.4 (b)**

|                  | $x_1 \Leftarrow$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | = | $b'/y$               |
|------------------|------------------|-------|-------|-------|---|----------------------|
| $f$              | 2                | 0     | -1    | 0     | = | -4                   |
| $x_2$            | -1/2             | 1     | 1/2   | 0     | = | 2                    |
| $s_2 \Leftarrow$ | 7/2              | 0     | 1/2   | 1     | = | 14<br>$14/(7/2) = 4$ |

**Pág. 143 – Tabela 5.6 (a)**

|     | $x_1$ | $x_2$ | $x_{3P}$ | $x_{3N}$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | =   |
|-----|-------|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $f$ | -1    | 2     | -3       | 3        | 0     | 0     | -20   | -20   | = 0 |
|     | 1     | 1     | 1        | -1       | 1     | 0     | 0     | 0     | = 7 |
|     | 1     | -1    | 1        | -1       | 0     | -1    | 1     | 0     | = 2 |
|     | -3    | 1     | 2        | -2       | 0     | 0     | 0     | 1     | = 5 |

**Pág. 146**

Ficamos, então, com um sistema de três equações e três variáveis ( $\lambda$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ )

...

Ao final da seção 4.9, foi discutido que um multiplicador de Lagrange

**Pág. 173**

Essa restrição pode ser apresentada em forma linear após uma simples manipulação algébrica, já que as variáveis são não-negativas:

**Pág. 198 – Exercício 1**

$$-x_2 + 2(2 - x_1)^2 - (2 - x_1)^3 \leq 0$$

**Pág. 203 – Exercício 8**

O preço da energia em \$/kWh é  $c_e = 0,20$ .

...

sendo que  $c_{if}$  representa o custo fixo de instalação (500 \$/m linear) e  $c_{iv}$  representa o custo do material (4000 \$/m<sup>3</sup>).

### Pág. 203 – Respostas

4. b)  $f^* = 46,6 \text{ m}^2$

...

8. (b)  $f^* = 1,56 \times 10^4 \text{ \$/ano}$ ,  $e^* = 11,2 \text{ cm}$

### Pág. 275 – Exercício 6

| Modelo  | Planta      |              |             |         |
|---------|-------------|--------------|-------------|---------|
|         | Santo André | São Bernardo | São Caetano | Diadema |
| Pop     | 18          | 26           | –           | 31      |
| Turbo   | –           | 50           | 22          | –       |
| Luxo    | 40          | 29           | 52          | 39      |
| Estrada | –           | –            | 46          | 43      |

### Pág. 278 – Respostas

9. b)  $f^* = 23,2 \text{ mil \$}$ , atrasos =  $[3 \ 0 \ 7 \ 34 \ 3]^T \text{ dias}$

11.  $f^* = 138 \text{ \$ } 240$

12.  $f^* = \$ 240$

### Pág. 279

sujeito a:  $h(x, y) = 0$   $m$  restrições de igualdade

$g(x, y) \leq 0$   $r$  restrições de desigualdade

### Pág. 307

2. Resolva o PROBLEMA 9.1 (p. 292) manualmente

### Pág. 309 – Respostas

5.  $f^* = 1238 \text{ \$/mês}$  com 5,47 tonB/mês de P1 e 4,53 tonB/mês de P3.