

II Workshop do PPG-SCX

Resumo: Autômatos Celulares em Dinâmica de Populações

Mauri Antonio Gauer Junior^a, José Ricardo Gonçalves Mendonça (Orientador)^a

^a*Universidade de São Paulo - Escola de Artes, Ciências e Humanidades - Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos*

^b*Autor para correspondência: maurigauer@usp.br*

Resumo

Resumo do projeto de dissertação de mestrado em andamento no programa de pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos - EACH/USP, apresentado no contexto do II Workshop do PPG-SCX.

Palavras-chaves: Autômatos Celulares, dinâmica de populações, transições de fase, sistemas dinâmicos discretos

1. Introdução

Autômatos celulares (CA, da sigla em inglês) são sistemas dinâmicos completamente discretos introduzidos no final da década de 1940 e no início da década de 1950 como modelos para dispositivos e algoritmos de processamento paralelo, armazenamento em memória e organismos artificiais capazes de se auto-reproduzir [1, 2]. Um CA cujas regras dependem de uma variável aleatória torna-se um CA probabilístico (PCA, da sigla em inglês). PCA foram introduzidos pela escola russa de processos estocásticos nos anos 1960–1970 como modelos para “neurônios” com ruído e sistemas de votantes, mas principalmente com relação à conjectura das probabilidades positivas, segundo a qual sistemas unidimensionais com interações de curto alcance e probabilidades de transição positivas são sempre ergódicos [3, 4]. Essa conjectura está profundamente enraizada na teoria dos processos de Markov e possui uma contrapartida na física estatística: sistemas unidimensionais não exibem transições de fase em temperatura finita ($T > 0$). Eventualmente, CA e PCA se tornaram temas fundamentais na mecânica estatística de equilíbrio e fora do equilíbrio, tais como na teoria das transições de fase, irreversibilidade, caos, percolação e cinética física, entre outros [5, 6, 7, 8]. Além de servir como modelos para a análise de computação, aplicada e teórica, digital ou biológica, CA e PCA também têm desempenhado papel significativo na modelagem de sistemas ecológicos complexos, particularmente processos espaciais, e da interação entre dispersão e competição na determinação da estrutura e escala de ecossistemas [9, 10, 11, 12].

Neste projeto de pesquisa propomos e investigamos um PCA para modelar a dinâmica de populações de uma ou mais espécies levando em consideração os efeitos logístico e Allee conjuntamente, em última instância com o objetivo de desenvolver modelos bidimensionais capazes de descrever a dinâmica de invasões de espécies. Alguns desses modelos apresentam transições de fases contínuas que pretendemos caracterizar (em termos de seus expoentes críticos) através de simulações numéricas, enquanto outros dão origem a mapas (sistemas dinâmicos discretos) cúbicos cuja investigação possui interesse independente. O trabalho pretende estender parte dos modelos e resultados obtidos anteriormente nessas áreas pelo Prof. Dr. José Ricardo G. Mendonça, docente vinculado ao PPG-SCX, publicados em [13, 14].

2. Autômatos Celulares Probabilísticos

Neste projeto de pesquisa interessa-nos o estudo das propriedades de PCA compostos de dois CA elementares A e B , dados por uma regra do tipo $\Phi_{PCA} = p\Phi_A - (1-p)\Phi_B$, que denominamos PCA diploides e cujo formalismo é descrito a seguir. Esses PCA foram introduzidos na literatura a partir da década de 1980 mas passaram a ser estudados sistematicamente a partir do final da década de 2000 [15, 16, 17].

Em um PCA unidimensional de dois estados, a probabilidade $P_t(x)$ de observar o estado $x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t) \in \Omega = \{0, 1\}^L$ no instante $t = 0, 1, \dots$, dada uma distribuição inicial de estados $P_0(x)$, é dada por

$$P_{t+1}(x') = \sum_{x \in \Omega} \Phi(x'|x)P_t(x) \quad (1)$$

onde $0 \leq \Phi(x'|x) \leq 1$ é a probabilidade condicional da transição $x \rightarrow x'$ ocorrer em um passo. Para CA ditos elementares, as regras que mapeiam o estado x_i^t no novo estado x_i^{t+1} dependem somente de x_i^t e de seus vizinhos mais próximos $x_{i\pm 1}^t$, e como as células do PCA são atualizadas independente e simultaneamente, podemos escrever

$$\Phi(x'|x) = \prod_{x \in \Omega} \phi(x'_i|x_{i-1}, x_i, x_{i+1}). \quad (2)$$

As equações 1-2 fornecem o arcabouço matemático para o estudo dos PCA, enquanto as regras locais $\phi(x'_i|x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ definem o modelo específico de interesse.

3. Aplicações em dinâmica de populações

O PCA unidimensional elementar de dois estados com simetria especular mais geral possui transições dadas pela Tabela 1 com $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 1$. A equação de campo médio para um tal PCA é dada por [13, 14].

$$x_{t+1} = a(1 - x_t)^3 + (2b + c)x_t(1 - x_t)^2 + (2d + e)x_t^2(1 - x_t) + fx_t^3 \quad (3)$$

onde identificamos a probabilidade $P_t(x = 1)$ de observar uma célula qualquer do PCA (são todas equivalentes nesta aproximação) no estado “1” com a variável x_t .

Em alguns casos, a equação de campo médio (3), que em sua forma geral descreve um sistema dinâmico discreto com não-linearidade cúbica, pode ser usada para descrever a dinâmica de uma população não-estruturada que evolui sujeita à ação de duas forças opostas: o efeito logístico, que limita o crescimento da população devido a efeitos de competição intraespecífica ou limitação de recursos, e o efeito Allee, que descreve uma correlação positiva entre a taxa de crescimento e a densidade da população, a saber, que em baixas densidades populacionais a reprodução e sobrevivência de indivíduos podem diminuir [18, 19]. O efeito Allee contraria o princípio clássico da dinâmica de populações segundo o qual a aptidão individual (fitness) é maior em baixas densidades devido à menor competição intraespecífica. Evidências sugerem que o efeito Allee é causado principalmente pela limitação de parceiros, defesa cooperativa deficitária, baixa saciedade de predadores, dispersão e alteração de habitat.

Tabela 1: **Tabela de transições para o PCA elementar unidimensional com simetria esquerda-direita mais geral. A primeira linha lista a vizinhança inicial e as outras duas linhas fornecem a probabilidade segundo a qual a célula central atinge o estado indicado na coluna mais à esquerda.**

	111	110	101	100	011	010	001	000
0	$1 - f$	$1 - d$	$1 - e$	$1 - b$	$1 - d$	$1 - c$	$1 - b$	$1 - a$
1	f	d	e	b	d	c	b	a

Para descrever a dinâmica de uma população (não estruturada) precisamos colocar $a = 0$, que corresponde à ausência de criação espontânea de indivíduos ($000 \nrightarrow 010$). Com isso podemos reescrever a equação (3) na forma $x_{t+1} = x_t g(x_t)$ com

$$g(x_t) = (2b + c) + [(2d + e) - 2(2b + c)]x_t + [(2b + c) - (2d + e) + f]x_t^2 \quad (4)$$

Denotando os coeficientes das potências de x_t em $g(x_t)$ de $[1]$ (constante), $[x]$ (linear) e $[x^2]$ (quadrático), temos a seguinte situação:

1. Quando $g(x_t)$ é linear com $[1] > 0$, $[x] < 0$ e $[x^2] = 0$, a equação (3) descreve a dinâmica de uma população sujeita somente ao efeito logístico;
2. Quando $g(x_t)$ é quadrática com $[1] > 0$, $[x] > 0$ e $[x^2] < 0$, a equação (3) descreve a dinâmica de uma população sujeita tanto ao efeito logístico quanto ao efeito Allee.

Os modelos encontrados dessa forma possuem 3 parâmetros livres, $u = 2b + c$, $v = 2d + e$ e f . É possível, no entanto, elaborar PCA contendo somente um parâmetro livre que no entanto reflete a competição entre os efeitos logístico e Allee (e, naturalmente, recaem em algum dos modelos encontrados anteriormente) baseado somente nos seguintes princípios:

1. A transição $000 \rightarrow 010$ é proibida com base em que a geração espontânea de indivíduos não é natural;
2. Limitação logística ao crescimento: taxas de natalidade $0 \rightarrow 1$ e sobrevivência $1 \rightarrow 1$ diminuem com o aumento da densidade local dos indivíduos;
3. Efeito Allee demográfico: taxas de natalidade $0 \rightarrow 1$ e sobrevivência $1 \rightarrow 1$ são prejudicadas pela baixa densidade de indivíduos;
4. Indivíduos que não estão nem sozinhos nem em uma vizinhança muito populosa podem sobreviver indefinidamente.

Os interesses e objetivos desta pesquisa concentram-se em:

1. Estender os modelos para conter dois parâmetros independentes, um (digamos, λ) descrevendo a limitação logística ao crescimento e outro (digamos, α) descrevendo o efeito Allee. Assim, por exemplo, poderíamos usar as taxas $\phi(1|101) = 1 - \lambda$ mas $\phi(1|010) = 1 - \alpha$ possivelmente dando origem a diagramas de fases mais ricos;
2. Elaborar uma versão bidimensional dos PCA e sua possível relação com a dinâmica de invasões de espécies [20]. A interpretação ecológica das eventuais fases e leis de escala encontradas oferecem interessantes oportunidades de investigação.

Referências

- [1] von Neumann J., Theory of self-reproducing automata, UMI Reprint University Illinois 1966 Ed, 2002.
- [2] J. Kari, Theory of cellular automata: A survey, Theoretical Computer Science 334 (2005) 3–33.
- [3] R. Dobrushin, V. I. Kryukov, A. Toom, Stochastic cellular systems : ergodicity, memory, morphogenesis, 1990.
- [4] P.-Y. Louis, F. R. Nardi (Eds.), Probabilistic Cellular Automata: theory, applications and future perspectives, volume 27 of *Emergence, Complexity and Computation*, 1 ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.
- [5] E. Domany, W. Kinzel, Equivalence of cellular automata to ising models and directed percolation, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 311–314. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.311>. doi:10.1103/PhysRevLett.53.311.
- [6] G. Grinstein, C. Jayaprakash, Y. He, Statistical mechanics of probabilistic cellular automata, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 2527–2530. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.2527>. doi:10.1103/PhysRevLett.55.2527.

- [7] J. Lebowitz, C. Maes, E. Speer, Statistical mechanics of probabilistic cellular automata, *Journal of Statistical Physics* 59 (1990) 117–170. doi:10.1007/BF01015566.
- [8] J. A. Cuesta, A. Sánchez, General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions, *Journal of Statistical Physics* 115 (2004) 869–893. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/B:JOSS.0000022373.63640.4e>. doi:10.1023/b:joss.0000022373.63640.4e.
- [9] P. Hogeweg, Cellular automata as a paradigm for ecological modeling, *Applied Mathematics and Computation* 27 (1988) 81–100. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0096300388901002>. doi:[https://doi.org/10.1016/0096-3003\(88\)90100-2](https://doi.org/10.1016/0096-3003(88)90100-2).
- [10] J. Silvertown, S. Holtier, J. Johnson, P. Dale, Cellular automaton models of interspecific competition for space—the effect of pattern on process, *Journal of Ecology* 80 (1992) 527–533. URL: <http://www.jstor.org/stable/2260696>.
- [11] R. Durrett, S. Levin, Stochastic spatial models: A user’s guide to ecological applications, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B* 343 (1994) 329–350. doi:10.1098/rstb.1994.0028.
- [12] C. Neuhauser, Mathematical challenges in spatial ecology, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001).
- [13] J. R. G. Mendonça, Y. Gevorgyan, Approximate probabilistic cellular automata for the dynamics of single-species populations under discrete logistic-like growth with and without weak allee effects, *Phys. Rev. E* 95 (2017) 052131. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.052131>. doi:10.1103/PhysRevE.95.052131.
- [14] J. R. G. Mendonça, A probabilistic cellular automata model for the dynamics of a population driven by logistic growth and weak allee effect, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 51 (2018) 145601. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aab165>. doi:10.1088/1751-8121/aab165.
- [15] J. R. G. Mendonça, M. J. de Oliveira, An extinction-survival-type phase transition in the probabilistic cellular automaton p182–q200, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44 (2011) 155001. URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/15/155001>. doi:10.1088/1751-8113/44/15/155001.
- [16] H. Fukś, N. Fatès, Local structure approximation as a predictor of second order phase transitions in asynchronous cellular automata, *Natural Computing* 14 (2015). doi:10.1007/s11047-015-9521-6.

- [17] N. A. Fatès, A tutorial on Elementary cellular automata with fully asynchronous updating - General properties and convergence dynamics, *Natural Computing* 19 (2020) 179–197. URL: <https://hal.inria.fr/hal-02400792>. doi:10.1007/s11047-020-09782-7.
- [18] D. S. BOUKAL, L. BEREK, Single-species models of the allee effect: Extinction boundaries, sex ratios and mate encounters, *Journal of Theoretical Biology* 218 (2002) 375–394. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519302930845>. doi:<https://doi.org/10.1006/jtbi.2002.3084>.
- [19] J. G. Franck Courchamp, Ludek Berek, *Allee Effects in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, 2008.
- [20] C. M. Taylor, A. Hastings, Allee effects in biological invasions, *Ecology Letters* 8 (2005) 895–908.