APOSTILA DE GEOMETRIA ANALÍTICA
5950165 e 5952035

Tiago Carvalho

28 de Julho de 2022

Tiago Carvalho

Conteúdo

1 Programa do Curso	5
2 Matrizes e Determinantes	7
2.1 Matrizes	7
2.1.1 Matrizes Especiais	7
2.1.2 Operações com matrizes	8
2.1.3 Transposição de matrizes	10
2.1.4 Inversão de matrizes através de operações elementares	11
2.2 Determinantes	12
2.2.1 Inversão de matrizes através da matriz adjunta	14
2.3 Exercícios	15
3 Sistemas Lineares	17
3.1 Sistemas equivalentes e escalonados	18
3.2 Exercícios	21
4 Vetores e equações da reta e plano no espaço	23
4.1 Operações com vetores	24
4.1.1 Adição de vetores	24
4.1.2 Multiplicação de um número por um vetor	25
4.1.3 Soma de ponto com vetor	26
4.2 Dependência e Independência linear	27
4.3 Base	28
4.3.1 Mudança de base	30
4.4 Comprimento de vetores e distância entre pontos	31
4.5 Exercícios	32
5 Produtos entre vetores	33
5.1 Produto Escalar	33
5.1.1 Projeção Ortogonal	34
5.2 Produto Vetorial	35
5.3 Duplo Produto Vetorial	37
5.4 Produto Misto	38
5.5 Exercícios	40
6 Retas e Planos	41
6.1 Retas	41
6.2 Planos	42

6.3	Exercícios	44
7	Curvas planas	45
7.1	Coordenadas - cartesianas, polares, esféricas	45
7.1.1	Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^2$	45
7.1.2	Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^3$	46
7.1.3	Coordenadas Esféricas	46
7.2	Cônicas	46
7.2.1	Elipse	47
7.2.2	Hipérbole	48
7.2.3	Parábola	49
7.3	Reconhecimento de Cônicas	50
7.4	Exercícios	52

1 Programa do Curso

- **Matrizes e Determinantes:** Operações com matrizes, determinante, caracterização de matrizes invertíveis.
- **Sistema de Equações Lineares:** Operações elementares, escalonamento (eliminação gaussiana).
- **Vetores:** Segmentos orientados e equipolentes; vetores; soma de ponto com vetor; adição de vetores; comprimento, direção e sentido do vetor; multiplicação de número por vetor; dependência linear; bases; matriz de mudança de base; bases ortogonais e ortonormais.
- **Produtos:** Produto escalar; projeção de um vetor; orientação do espaço; produto vetorial; produto misto; duplo produto vetorial.
- **Retas e planos:** sistemas de coordenadas cartesianas; transformação de coordenadas; equações vetoriais; paramétricas e simétricas da reta; equações vetoriais, paramétricas e geral do plano; vetor normal a um plano.
- **Curvas planas:** Coordenadas polares no plano e no espaço; coordenadas esféricas; curva plana; equações reduzidas das cônicas, elipse, hipérbole e parábola; estudo de cônicas (decomponíveis em retas ou não).

Bibliografia:

1. SANTOS, F. J. dos; FERREIRA, S.F.. Geometria Analítica. Editora Bookman, 2009.
2. STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.. Geometria analítica. Editora McGraw-Hill Ltda., 1987
3. CAROLI, A.; CALLIOLI, C.A.; FEITOSA, M.O.. Matrizes, vetores e geometria analítica. 9a ed., Nobel, S.Paulo, 1980.
4. NATHAN MOREIRA DOS SANTOS. Vetores e Matrizes. Livros Técnicos e Científicos. Ed. S. A., Rio de Janeiro, 3.^a edição, 1988.

2 Matrizes e Determinantes

2.1 Matrizes

Chamamos de **matriz** a uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Exemplo 1. Ao recolhermos os dados referentes à produção de grãos (em toneladas) de uma fazenda, nos últimos 3 anos, obtemos a seguinte tabela:

	2019	2020	2021
Milho	60	70	72
Soja	114	120	105

Associada a esta tabela, temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 60 & 70 & 72 \\ 114 & 120 & 105 \end{pmatrix}$$

Vamos representar uma matriz de m linhas e n colunas por

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

onde cada elemento é indicado por a_{ij} , sendo que o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna às quais o elemento pertence. Nesta caso, diremos que a matriz é de ordem $m \times n$.

Exemplo 2. Note que:

$$\begin{pmatrix} 60 & 70 & 72 \\ 114 & 120 & 105 \end{pmatrix} \text{ é matriz de ordem } 2 \times 3 \text{ e } a_{22} = 120.$$

$$(0) \text{ é matriz de ordem } 1 \times 1 \text{ e } a_{11} = 0.$$

2.1.1 Matrizes Especiais

Algumas matrizes apresentam propriedades especiais e por isso recebem nomes apropriados. Algumas destas matrizes são as seguintes:

2 Matrizes e Determinantes

- **Matriz linha:** é uma matriz de ordem $1 \times n$ (tem uma única linha).

Por exemplo, $A = (1 \ 2 \ 3)$.

- **Matriz coluna:** é uma matriz de ordem $m \times 1$ (tem uma única coluna).

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- **Matriz nula:** é uma matriz que tem todos os seus elementos iguais a zero.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Neste caso, usaremos a notação $A = 0_{m \times n}$.

- **Matriz quadrada:** é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pi \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Neste caso, podemos dizer que A tem ordem m .

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

É comum chamarmos a diagonal não nula do exemplo anterior de *diagonal principal*; a outra diagonal é a *diagonal secundária*.

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal onde $a_{ii} = 1$ para $i = 1, \dots, n$, onde n é a ordem da matriz.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Neste caso, usaremos a notação $A = I_n$.

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal (principal) são nulos.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal (principal) são nulos.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Operações com matrizes

Adição de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $n \times m$ (as duas matrizes de mesma ordem). A soma destas duas matrizes é uma matriz $C = A + B$, de ordem $n \times m$, tal

que

$$C = (c_{ij}) \text{ com } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemplo 3. Calcule $C = A + B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Multiplicação de escalar por matriz

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})$ matriz de ordem $n \times m$. O produto do escalar (número) α pela matriz A é a matriz $C = \alpha.A$, de ordem $n \times m$, tal que

$$C = (c_{ij}) \text{ com } c_{ij} = \alpha.a_{ij} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemplo 4. Calcule $C = 5.A$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5. Calcule $C = A - B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Produto de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{n \times m}$ e $B = (b_{js})_{m \times p}$ matrizes de ordem $n \times m$ e $m \times p$, respectivamente. O produto destas duas matrizes é uma matriz $C = A.B$, de ordem $n \times p$, tal que

$$C = (c_{is}) \text{ com } c_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij}.b_{js} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } s \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemplo 6. Calcule $C = A.B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Propriedades

- (i) $A_{m \times n}.I_n = A_{m \times n}$
- (ii) $A_{m \times n}.(B_{n \times p} + C_{n \times p}) = A_{m \times n}.B_{n \times p} + A_{m \times n}.C_{n \times p}$

2 Matrizes e Determinantes

$$(iii) (A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times p} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$$

$$(iv) (A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times r} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times r})$$

Exemplo 7. A multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, não vale que $A \cdot B = B \cdot A$ para quaisquer matrizes A e B . De fato, sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B \cdot A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, se A tem ordem $m \times n$ e B tem ordem $n \times p$, com $p \neq m$, o produto $A \cdot B$ está bem definido enquanto $B \cdot A$ não está.

Exemplo 8. Temos que $0_{m \times n} \cdot A_{n \times p} = 0_{m \times p}$. Entretanto, é possível que $A \cdot B = 0$ sem que $A = 0$ ou $B = 0$, como o exemplo anterior mostra.

Observação 1. Se as matrizes A e B forem tais que $A \cdot B = B \cdot A$, então dizemos que A e B comutam.

2.1.3 Transposição de matrizes

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, definimos a **transposta** de A como sendo a matriz $B = (b_{ji})_{n \times m}$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$ para todo i e todo j , ou seja, as linhas de A são as colunas de B . Usaremos a notação $B = A^t$.

Exemplo 9. Temos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 21 & 3\pi \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -11 \\ 21 \\ 3\pi \end{pmatrix}.$$

Propriedades

(i) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

(ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$.

(iii) $(c.A)^t = c.A^t$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e todo $c \in \mathbb{R}$.

(iv) $(A.B)^t = B^t.A^t$ para quaisquer matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$.

Definição 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n , Dizemos que A é **simétrica** se $A = A^t$. Dizemos que A é **anti-simétrica** se $A = -A^t$.*

Segue da definição anterior que se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é anti-simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2.1.4 Inversão de matrizes através de operações elementares

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , definimos a **inversa** de A como sendo uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Teorema 1. *Se A é invertível, então a inversa de A é única.*

Demonstração. Sejam B e C tais que

$$A.C = C.A = I_n \text{ e } A.B = B.A = I_n.$$

Temos

$$C = I_n.C = (B.A).C = B.(A.C) = B.I_n = B.$$

□

Denotaremos a inversa de A por A^{-1} .

São operações elementares nas linhas e colunas de uma matriz:

- somar duas linhas (ou colunas) da matriz e colocar no lugar de uma delas,
- multiplicar uma linha (ou coluna) por uma constante não nula e colocar no lugar desta linha (ou coluna) e
- trocar de posição duas linhas (ou colunas) de uma matriz.

Teorema 2. *Se uma matriz quadrada A pode ser transformada na matriz identidade através de uma sequência de operações elementares nas suas linhas (ou colunas), então A é invertível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações elementares em suas linhas (ou colunas).*

Exemplo 10. *Obtenha a inversa da matriz abaixo usando operações elementares:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Determinantes

O **determinante** de uma matriz quadrada A de ordem n é o número $\det A$, ou $|A|$, que associamos a esta matriz da seguinte forma:

- Se $n = 1$ então

$$\det A = a_{11}.$$

- Se $n = 2$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Se $n = 3$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Definição 2. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Definimos o **menor complementar** do elemento a_{ij} , e indicamos por A_{ij} , como sendo o determinante que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A .

Exemplo 11. Obtenha A_{22} onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solução: ...

Definição 3. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Definimos o **cofator** do elemento a_{ij} , e indicamos por Δ_{ij} , como sendo o número

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Exemplo 12. Obtenha Δ_{32} onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solução: ...

Com o conceito de cofator, podemos definir determinante para matrizes de ordem $n \geq 4$.

- Se $n \geq 4$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot \Delta_{i1}.$$

O próximo teorema, cuja demonstração não faremos aqui, diz que podemos tomar qualquer coluna (ou linha) da matriz A para calcularmos o determinante como acima.

Teorema 3 (de Laplace). *Seja A uma matriz de ordem n . Então $\det A$ é a soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos respectivos cofatores.*

Exemplo 13. *Obtenha o determinante de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solução: ...

Propriedades

Seja A uma matriz de ordem n .

- (i) Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) são nulos, então $\det A = 0$.
- (ii) $\det A = \det A^t$.
- (iii) Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de A por uma constante, então o determinante fica multiplicado por essa constante.
- (iv) Se trocarmos duas linhas (ou colunas) de posição, o determinante troca de sinal.
- (v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é zero.
- (vi) Vale que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogamente para uma coluna ao invés de uma linha.

- (vi) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, onde B é uma matriz de ordem n .

Exemplo 14. *Não vale que $\det(A + B) = \det A + \det B$. De fato, tome*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Inversão de matrizes através da matriz adjunta

Sejam A uma matriz de ordem n e $\bar{A}$ a matriz dos cofatores de A . Chamamos de **matriz adjunta** de A , e denotamos $\text{adj } A$, à matriz

$$\text{adj } A = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Exemplo 15. Calcule a $\text{adj } A$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solução: ...

O seguinte teorema será muito útil na sequência, porém não faremos aqui sua demonstração.

Teorema 4. Seja A uma matriz de ordem n . Temos que:

$$A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = \det A \cdot I_n.$$

Observação 2. Note que, se $\det A \neq 0$ então A é inversível com

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A.$$

Exemplo 16. Calcule a inversa da matriz A abaixo, utilizando o método da matriz adjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solução: ...

2.3 Exercícios

1. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . Prove que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ e que } (A^{-1})^{-1} = A.$$

2. Verifique se a matriz abaixo é inversível e determine a sua inversa através do método da matriz cofatora e também por operações elementares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Usando o método de Laplace, visto em aula, calcule o determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Dizemos que uma matriz quadrada A , de ordem n , é **simétrica** se $A = A^t$. Caso $A = -A^t$, dizemos que A é **anti-simétrica**. Prove que os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são todos iguais a zero.
5. Pesquise na bibliografia a **Regra de Chió** para obtenção do determinante de matrizes. Com esta regra, calcule o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Mostre que toda matriz anti-simétrica de ordem ímpar formada por números reais possui determinante nulo.

7. Encontre todas as matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que comutam com $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e com $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Matrizes e Determinantes

8. Prove que $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $A^t = A^{-1}$.

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

Tiago Carvalho

3 Sistemas Lineares

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \tag{3.1}$$

onde os *coeficientes* $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são números reais e $b_1 \in \mathbb{R}$ é chamado de *termo independente* da equação.

Exemplo 17. A equação $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 100x_4 = 14$ é linear.

A equação $3x_1 \cdot x_3 - 2x_2 + 5x_3 - 100x_4 = 14$ não é linear.

A equação $3x_1 - 2\sqrt{x_2} + 5x_3 - 100x_4 = 14$ não é linear.

Uma n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear (3.1) se for verdadeira a sentença:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1.$$

Exemplo 18. Considere a equação linear $2x - y + z = 1$.

A terna ordenada $(1, 1, 0)$ é solução desta equação pois é verdadeira a sentença:

$$2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1.$$

Um **sistema linear** de m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}, \tag{3.2}$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Uma solução do sistema acima é uma n -upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que satisfaça a todas as m equações simultaneamente.

Definição 4. Dizemos que um sistema linear é **incompatível** se não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado de **compatível e determinado**. Caso o sistema linear admita mais do que uma solução, será chamado de **compatível e indeterminado**.

Observe que podemos escrever o Sistema (3.2) de forma matricial da seguinte forma

$$S : A \cdot X = B$$

3 Sistemas Lineares

com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ em (3.2), ou equivalentemente, a matriz coluna B for nula, o sistema é chamado de **sistema homogêneo**. Caso contrário o sistema é **não-homogêneo**.

A matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

será chamada de **matriz ampliada** do Sistema (3.2).

Exemplo 19. *Obtenha a forma matricial e a matriz ampliada do sistema:*

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -x + 4y - 2z = -3 \\ 4x + 4y - z = 0 \end{cases}.$$

Teorema 5 (de Cramer). *Seja S um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas e, por consequência, a matriz A dos coeficientes é quadrada. Se $\det A \neq 0$ então o sistema é compatível e determinado.*

Demonstração. Considere a representação matricial $A.X = B$. Como $\det A \neq 0$, existe a inversa A^{-1} de A e assim

$$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$$

é a solução do sistema S . □

Exemplo 20. *Usando o Teorema de Cramer, encontre a solução do sistema*

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -x + 4y - 2z = -3 \\ 4x + 4y - z = 0 \end{cases}.$$

3.1 Sistemas equivalentes e escalonados

Dois sistemas lineares são chamados de **equivalentes** se, e somente se, toda solução de um dos sistemas é também solução do outro.

O próximo resultado, cuja demonstração não será feita aqui, será útil no decorrer deste capítulo.

3.1 Sistemas equivalentes e escalonados

Teorema 6. Se ao aplicarmos operações elementares à matriz ampliada A_1 de um sistema S_1 , obtermos uma matriz ampliada A_2 de um novo sistema S_2 , então S_1 e S_2 são equivalentes.

Exemplo 21. Obtenha um sistema S_2 equivalente ao sistema abaixo, de modo que a matriz ampliada A_2 de S_2 seja triangular superior.

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ -x + 4y - 2z & = -3 \\ 4x + 4y - z & = 0 \end{cases} .$$

Um sistema S está na **forma escalonada** se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, aumenta de uma equação para a próxima equação.

Exemplo 22. Obtenha um sistema S_2 equivalente ao sistema abaixo, de modo que a matriz ampliada A_2 de S_2 seja triangular superior.

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ -4y - 2z & = -3 \\ -z & = 0 \end{cases}$$

está escalonado.

O próximo resultado, cuja demonstração também não será feita aqui, será útil na resolução de sistemas lineares.

Teorema 7. Todo sistema linear S_1 é equivalente a um sistema linear escalonado S_2 .

Dado um sistema linear S_1 , para obter um sistema escalonado S_2 equivalente a S_1 , podemos aplicar os seguintes passos na matriz ampliada A_1 de S_1 :

1. Colocamos na primeira linha aquela linha cuja primeira entrada seja não nula;
2. anulamos a primeira entrada de todas as demais linhas;
3. deixamos de lado a primeira linha e aplicamos os 2 passos anteriores às equações restantes;
4. Deixamos de lado as 2 primeiras linhas e aplicamos os passos 1 e 2 nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Exemplo 23. Escalone o sistema

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ -x + 4y - 2z & = -3 \\ 4x + 4y - z & = 0 \end{cases} .$$

Discussão sobre a resolução de um sistema linear

3 Sistemas Lineares

Dado um sistema linear S_1 , suponha que se realizou operações elementares na matriz ampliada A_1 de S_1 obtendo a matriz ampliada A_2 de um sistema S_2 que está escalonado. Pelo que vimos acima, S_1 e S_2 são equivalentes. Mais ainda:

- retire todas as linhas da forma $0 = 0$ de S_2 , restando p equações com n incógnitas;
- se a última das equações é $0 = b_p$ com $b_p \neq 0$, então os sistemas são incompatíveis;
Caso contrário, os sistemas são compatíveis e sobram as alternativas:
- $p = n$ e os sistemas são compatíveis e determinados ou
- $p < n$ e os sistemas são compatíveis e indeterminados.

Exemplo 24. *Resolva o sistema*

$$S : \begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ -x + 4y - 2z & = -3 \\ 4x + 4y - z & = 0 \end{cases} .$$

3.2 Exercícios

1. Determine m de modo que a matriz dos coeficientes do sistema abaixo seja inversível. A seguir, resolvá-o.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ x + 2y + mz = 0. \end{cases}$$

2. Se X_0 é solução de $AX = 0$ e X_1 é solução de $AX = B$, mostre que $X_0 + X_1$ é solução de $AX = B$.

3. Responda se o sistema abaixo é compatível, incompatível, determinado ou indeterminado. A seguir resolva o sistema.

$$\begin{cases} kx - y + kz = k \\ x + kz = 3 \\ kx + ky = 2. \end{cases}$$

4. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2z + t = -1. \end{cases}$$

pela regra de Cramer e também por escalonamento (escalonamento direto do sistema ou da matriz aumentada). Resposta: $(4, 1/2, -11/2, 2)$.

5. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 3t = 1 \\ x - z = 0 \\ -x + 2y + z - t = 1 \\ 2x - y + 2z - t = -2. \end{cases}$$

pela regra de Cramer e também por escalonamento (escalonamento direto do sistema ou da matriz aumentada).

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

4 Vetores e equações da reta e plano no espaço

Muitas grandezas físicas como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente entendidas, precisam, além da magnitude, da direção e sentido em que são aplicadas. Essas grandezas são chamadas de **grandezas vetoriais**.

Definição 5. Um **segmento orientado** é um par ordenado (A, B) de pontos no espaço. O ponto A é chamado **origem** (ou **extremidade inicial**) e B de **extremidade final** do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são chamados de **segmentos nulos**.

Observação 3. Observe que $(A, B) \neq (B, A)$.

Indicamos, geometricamente, o segmento orientado (A, B) através de uma seta.
XXX Figura XXX

Definição 6. A medida do segmento de reta geométrico AB é o **comprimento** (ou **módulo**) do segmento orientado (A, B) .

Definição 7. Dizemos que dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) possuem a mesma direção se $AB \parallel CD$, ou seja, suas retas suporte são paralelas ou coincidentes.

Definição 8. Suponha que (A, B) e (C, D) possuem a mesma direção.

(a) Se as retas por A e B e por C e D são distintas, então (A, B) e (C, D) têm o **mesmo sentido** quando $AC \cap BD = \emptyset$ e terão **sentido contrário** (ou **sentido oposto**) se $AC \cap BD \neq \emptyset$.

XXX Figura XXX

(b) Se as retas por A e B e por C e D coincidem, tome (A', B') tal que A' não pertença à reta coincidente e (A', B') tenha a mesma direção e o mesmo sentido que (A, B) . Neste caso, dizemos que (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido se (A', B') e (C, D) têm o mesmo sentido; caso contrário (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.

Observação 4. Note que (A, B) e (B, A) possuem mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários.

Definição 9. Dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são **equipolentes** se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Usaremos a notação: $AB \sim CD$.

Propriedades

1. $AB \sim AB$ (reflexiva).
2. $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$ (simétrica).
3. $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ (transitiva).

Chamamos de **classe de equipolência** de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B) .

Definição 10. Um **vetor** determinado por um segmento orientado (A, B) é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a (A, B) .

Notação: $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$.

Observação 5. (i) **Vetor nulo** é o representante da classe de equipolência dos segmentos orientados nulos. Notação: $\vec{0}$.

(b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se um segmento orientado representante de $\vec{u}$ é paralelo a um segmento orientado representante de $\vec{v}$. Neste caso, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção. Além disso, o sentido de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também fica caracterizado por um de seus representantes.

(c) A **norma** de um vetor $\vec{v}$ é o comprimento de qualquer de seus segmentos orientados representantes.

Notação: $\|\vec{v}\|$.

Se $\|\vec{v}\| = 1$ então $\vec{v}$ é chamado de **vetor unitário**. O **versor** de um vetor $\vec{u}$ é um vetor unitário que possui mesma direção e sentido que $\vec{u}$.

4.1 Operações com vetores

4.1.1 Adição de vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados por (A, B) e (B, C) respectivamente. O segmento orientado (A, C) determina um vetor $\vec{s}$ que é, por definição, a **soma** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Notação: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriedades

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (associativa).
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \forall \vec{u}, \vec{v}$ (comutativa).
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \forall \vec{u}$ (elemento neutro).
4. Dado um vetor $\vec{u}$, sempre existe um vetor $\vec{v}$ tal que: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ (elemento oposto aditivo). Denotaremos um vetor $\vec{v}$ como acima por $-\vec{u}$.

Regra do paralelogramo: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados por (A, B) e (A, C) respectivamente. Considere o paralelogramo $ABCD$. Temos que:

- $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ é representado pelo segmento orientado (A, D) , que é uma das diagonais do paralelogramo e
- $\vec{t} = \vec{u} + \vec{-v}$ é representado pelo segmento orientado (C, B) , que é a outra diagonal do paralelogramo.

Exemplo 25 (Lei do cancelamento). $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.

De fato, ...

Exemplo 26. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{w} + \vec{-v}$.

De fato, ...

4.1.2 Multiplicação de um número por um vetor

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número $\alpha \neq 0$, o produto do número α pelo vetor $\vec{v}$ é o vetor $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{v}$ tal que:

- módulo: $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$.
- direção: $\alpha \cdot \vec{v} \parallel \vec{v}$ (são paralelos).
- sentido: $\alpha \cdot \vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Observação 6. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Observação 7. Fazendo α variar em $\mathbb{R}$, obteremos todos os vetores que têm mesma direção que $\vec{v}$. Assim, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma direção, sempre existe um número α tal que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$.

Observação 8. O versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

Propriedades

- $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}, \vec{v}$.
- $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}$.
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v}$.
- $(\alpha \cdot \beta) \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{u}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}$.

Exemplo 27. Prove que $(-\alpha) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{-\alpha \cdot \vec{u}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}$.

De fato, ...

4 Vetores e equações da reta e plano no espaço

Exemplo 28. $\alpha \cdot \overrightarrow{(-u)} = \overrightarrow{-\alpha \cdot u} \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u}$.

De fato, ...

Exemplo 29. $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} \text{ e } \vec{v} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

De fato, ...

Exemplo 30. Considere o paralelogramo $ABCD$ determinado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$. Sejam M o ponto médio de DC e N o ponto médio de AB .

Determine: (i) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$; (ii) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$; (iii) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$ e (iv) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$.

4.1.3 Soma de ponto com vetor

Dados um ponto P e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado (P, Q) , representante de $\vec{v}$, com ponto inicial em P . O ponto final Q é a soma de P com $\vec{v}$.

Notação: $Q = P + \vec{v}$.

Neste caso,

$$\vec{v} = P - Q \text{ e } \overrightarrow{PQ} = \vec{v}.$$

Propriedades

1. $P + \vec{0} = P \forall P$.
2. $P + \vec{u} = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \forall P \text{ e } \forall \vec{u}, \vec{v}$.
3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \forall P \text{ e } \forall \vec{u}, \vec{v}$.
4. $A + \vec{u} = B + \vec{u} \Rightarrow A = B \forall A, B \text{ e } \forall \vec{u}$.
5. $(P - \vec{v}) + \vec{v} = P \forall P \text{ e } \forall \vec{v}$.

Exemplo 31. Prove que as diagonais de um paralelogramo possuem o mesmo ponto médio.

De fato, ...

Exemplo 32. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste terceiro lado.

De fato, ...

Exemplo 33. Em um triângulo ABC , sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC, AC respectivamente. Mostre que: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

De fato, ...

4.2 Dependência e Independência linear

Definição 11. Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vetores e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ números reais. Dizemos que o vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Dizemos também que $\vec{u}$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Observação 9. O vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, quaisquer que sejam estes vetores. Para isso, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ e assim,

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n.$$

Mas será que existem outros valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n ?$$

Definição 12. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é **linearmente independente** (L.I.) se a única combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dando o vetor nulo é aquela onde todos os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são nulos.

Caso contrário, o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é **linearmente dependente** (L.D.).

Exemplo 34. O conjunto $\{\vec{v}, -\vec{v}\}$ é l.d. pois

$$1.\vec{v} + 1.(-\vec{v}) = \vec{0}.$$

Exemplo 35. O conjunto $\{\vec{v}, \vec{u}, 2\vec{v} - 3\vec{u}\}$ é l.d. pois

$$(-2)\vec{v} + 3\vec{u} + 1(2\vec{v} - 3\vec{u}) = \vec{0}.$$

Exemplo 36. Todo conjunto $\{\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ que inclua o vetor nulo é l.d. pois

$$\vec{0} = 1.\vec{0} + 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n.$$

Proposição 1. Um conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, algum de seus vetores é combinação linear dos demais.

Demonstração. ... □

Corolário 1. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Ou seja: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Corolário 2. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$.

Ou seja: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\iff \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Observação 10. • Note que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser paralelos a um mesmo plano mas não serem paralelos entre si.

• Um conjunto formado por um único vetor não-nulo sempre é L.I.

Exemplo 37. Mostre que se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I. então $C = \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ também é L.I..

Solução: ...

Proposição 2. Seja $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

B é L.I. $\iff (\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n \Rightarrow \alpha_i = \beta_i, i = \{1, \dots, n\})$.

Ou seja: B é L.I. $\iff$ existe um modo único de se escrever um vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos elementos de B .

Demonstração. ... □

4.3 Base

Dizemos que um conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é uma **base** de $\mathbb{R}^n$ se B é L.I. em $\mathbb{R}^n$.

Diante da Proposição 2, todo vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ é escrito de modo único como combinação linear dos elementos de um conjunto L.I. B . Neste caso, dizemos que a n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ são as **coordenadas de $\vec{u}$ na base B** .

Notação: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B$.

Exemplo 38 (Adição de vetores). Sejam $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B$ e $\vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)_B$. Temos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)_B = \\ &= \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n + \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{v}_n = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)_B. \end{aligned}$$

Exemplo 39. Sejam $\vec{u} = (1, -2, 5)_B$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)_B$. Encontre as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ nesta mesma base B .

Solução: ...

Exemplo 40 (Multiplicação de vetor por escalar). Sejam $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} &= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_B = \lambda(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) \\ &= (\lambda\alpha_1) \vec{v}_1 + \dots + (\lambda\alpha_n) \vec{v}_n = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)_B. \end{aligned}$$

Exemplo 41. Seja $\vec{u} = (1, -2, 5)_B$. Encontre as coordenadas de $(-3)\vec{u}$ nesta mesma base B .

Solução: ...

Exemplo 42. Os vetores $\vec{u} = (1, -2, 5)_B$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)_B$ são L.I. ?

Solução: ...

A base $C = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é chamada de **base canônica** de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 43. Encontre as coordenadas de $(1, 1, 1)_C$ em relação à base $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\}$
 ? Resposta: $(1/2, 1/2, 1/2)_B$

Solução: ...

Proposição 3. Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_B$ são L.I. se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. ...

□

Exemplo 44. Verifique se $D = \{(0, 1, 2); (0, 0, 4); (1, 1, 5)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. E $E = \{(3, 1, 3); (1, 1, 2); (5, 1, 4)\}$?

Solução: ...

Exemplo 45. Para quais valores de a temos que $D = \{(a, 1, a); (1, a, 1); (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

Solução: ...

Definição 13. O vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é **ortogonal** à reta r (ou ao plano π) se existe um representante (A, B) de $\vec{u}$ tal que o segmento AB é ortogonal a r (ou a π). Por convenção, o vetor nulo é ortogonal a toda reta e a todo plano.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se um deles é nulo ou se admitirem segmentos orientados representantes que são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de $\pi/2$ radianos ou 90° graus.

Notação: $\vec{u} \perp r$, $\vec{u} \perp \pi$, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Uma base B é **base ortogonal** se seus vetores são, dois a dois, ortogonais. Uma base B é **base ortonormal** se é base ortogonal e todos seus vetores possuem norma 1.

Proposição 4. Se $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é a base canônica e $\vec{u} = (x, y, z)_C$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Demonstração. ...

□

Exemplo 46. Calcule $\|\vec{u}\|$, onde $\vec{u} = (1, 10, -4)_C$.

Solução: ...

4.3.1 Mudança de base

Seja $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ é outra base de $\mathbb{R}^3$. Como cada vetor de G está em $\mathbb{R}^3$, ele pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de F . Assim,

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + a_{31}\vec{f}_3 \\ \vec{g}_2 = a_{12}\vec{f}_1 + a_{22}\vec{f}_2 + a_{32}\vec{f}_3 \\ \vec{g}_3 = a_{13}\vec{f}_1 + a_{23}\vec{f}_2 + a_{33}\vec{f}_3 \end{cases}$$

Agora, dado $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_G$, como podemos encontrar as coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_F$ de $\vec{v}$ na base F ?

Temos que:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (y_1, y_2, y_3)_G = y_1\vec{g}_1 + y_2\vec{g}_2 + y_3\vec{g}_3 = \\ &= y_1(a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + a_{31}\vec{f}_3) + y_2(a_{12}\vec{f}_1 + a_{22}\vec{f}_2 + a_{32}\vec{f}_3) + y_3(a_{13}\vec{f}_1 + a_{23}\vec{f}_2 + a_{33}\vec{f}_3) = \\ &= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + y_3a_{13})\vec{f}_1 + (y_1a_{21} + y_2a_{22} + y_3a_{23})\vec{f}_2 + (y_1a_{31} + y_2a_{32} + y_3a_{33})\vec{f}_3 = \\ &= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + y_3a_{13}, y_1a_{21} + y_2a_{22} + y_3a_{23}, y_1a_{31} + y_2a_{32} + y_3a_{33})_F. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \\ x_3 = a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Definição 14. A matriz

$$M_F^G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

encontrada acima, é chamada de **matriz de mudança da base F para a base G** .

Com o que fizemos acima, fica provada a seguinte proposição:

Proposição 5. Se F e G são bases de $\mathbb{R}^3$ então

$$U_F = M_F^G \cdot U_G.$$

onde U_F é uma matriz coluna cujas entradas são as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em relação à base F e U_G é uma matriz coluna cujas entradas são as coordenadas do mesmo vetor $\vec{v}$ em relação à base G .

Proposição 6. Sejam F, G, H bases. Então

$$M_F^H = M_F^G \cdot M_G^H.$$

Corolário 3. *Sejam F, G bases. Então*

$$M_F^G = (M_G^F)^{-1}.$$

Exemplo 47. *Considere bases $D = \dots$, $E = \dots$ e $F = \dots$. Obtenha M_E^D , M_F^E e M_F^D . Se $\vec{v} = (1, 2, 3)_D$, obtenha as coordenadas de $\vec{v}$ na base F . Solução: ...*

4.4 Comprimento de vetores e distância entre pontos

A distância entre os pontos P e Q é dada pelo comprimento do segmento de reta unindo P a Q , ou ainda, o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$ (denotado $\|\overrightarrow{PQ}\|$).

Dados $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ em $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

XXXFiguraXXX

Dados os pontos $O = (0, 0, 0)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ em $\mathbb{R}^3$, considere o ponto auxiliar $R = (q_1, q_2, 0)$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = \|\overrightarrow{OR}\|^2 + \|\overrightarrow{RQ}\|^2 = ((q_1 - 0)^2 + (q_2 - 0)^2) + (q_3 - 0)^2 \Rightarrow$$

$$\|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

XXXFiguraXXX

Para um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$, repetindo o argumento anterior, temos

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

Em n variáveis, dados $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, vale que

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}.$$

Exemplo 48. *Encontre o versor do vetor que tem ponto inicial em $A = (1, 4, -2)$ e final em $B = (-2, 0, 3)$.*

4.5 Exercícios

1. Determine o ponto simétrico do ponto $P = (2, 1, 3)$ em relação ao ponto $A = (3, -1, 1)$. Resposta: $(4, -3, -1)$
2. Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.
3. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade da medida deste terceiro lado.
4. Encontre as coordenadas de um ponto $P = (x, y, z)$ que está a uma distância r da origem.
5. Determinar as coordenadas de $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base $B = \{(0, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1)\}$.
6. Obtenha, se possível, um valor de α para o qual os vetores $u = (1, 2, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ e $w = (\alpha, 1, 1)$ não sejam l.i..

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

5 Produtos entre vetores

5.1 Produto Escalar

Suponha que dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ estejam compartilhando o mesmo ponto inicial A . O **ângulo** entre estes vetores é o (menor) ângulo formado pelas semi-retas AB e AC .

XXXFiguraXXX

A unidade de medida de um ângulo θ é o *radiano* (respectivamente, *graus*) e θ varia no intervalo $[0, \pi]$ (resp., $[0, 180^\circ]$).

Definição 15. O *produto escalar* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real definido por:

- Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo 49. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Exemplo 50. Se $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}$, obtenha o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observação 11. Se $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal, considere o triângulo OPQ onde $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (x_1, y_1, z_1)_E$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2, z_2)_E$.

Pela Lei dos Cossenos, temos

$$\|\overrightarrow{QP}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QP}\|^2 &= \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, pode-se mostrar ainda que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

5 Produtos entre vetores

Exemplo 51. Se E é base ortonormal, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que $\vec{u} = (1, -1, 3)_E$ e $\vec{v} = (0, -2, 1)_E$.

Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

$$(PE1) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

$$(PE2) \quad \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

$$(PE3) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

$$(PE4) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \text{ e } (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}).$$

Exemplo 52. Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos $A = (4, -1, 2)$ e $B = (3, 2, -1)$, determine o valor de α tal que

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{BA}) = 5.$$

Proposição 7. Considere $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são ortogonais} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Demonstração. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Exemplo 53 (Desigualdade Triangular). $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

5.1.1 Projeção Ortogonal

Veremos agora como projetar um vetor $\vec{v}$ sobre um outro vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Proposição 8. Seja $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal. Então temos que:

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3.$$

Demonstração. ... $\square$

Definição 16. Dados os vetores $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v}$, existe um único vetor $\vec{d}$ tal que:

- $\vec{d} \parallel \vec{u}$ e
- $(\vec{v} - \vec{d}) \perp \vec{u}$.

O vetor $\vec{d}$ é chamado de **projeção ortogonal** de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e é denotado por $\vec{d} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

XXX

Figura

XXX

Para calcular, efetivamente, o vetor $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ podemos notar que $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \alpha \vec{u}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\begin{aligned} (\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}) \cdot \vec{u} &= 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \end{aligned}$$

e daí,

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}.$$

Com isso, a última proposição pode ser enunciada da seguinte forma:

Proposição 9. *Seja $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal. Então temos que:*

$$\vec{v} = \text{proj}_{\vec{e}_1} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{e}_2} \vec{v} + \text{proj}_{\vec{e}_3} \vec{v}.$$

Demonstração. ... □

Exemplo 54. *Se E é uma base ortonormal, $\vec{u} = (4, 1, -1)_E$ e $\vec{v} = (0, 2, 3)_E$, calcule $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ e decomponha $\vec{v}$ como a soma de dois vetores sendo um deles paralelo a $\vec{u}$ e o outro perpendicular a $\vec{u}$.*

Solução: ...

5.2 Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, definimos o **produto vetorial** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$) da seguinte forma:

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem l.d., então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem l.i., então $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor com as seguintes propriedades:

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.
- o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela *regra da mão direita*, ou seja, o dedo indicador aponta no sentido de $\vec{u}$, o dedo médio aponta do sentido de $\vec{v}$ e o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ será dado pelo polegar.

5 Produtos entre vetores

Inspirados pelo item (i) acima, vamos calcular a área do paralelogramo A determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Temos que:

$$\text{área } A = \text{base} \cdot \text{altura},$$

onde a base é a norma do vetor $\vec{u}$ (respectivamente, $\vec{v}$) e a altura é a norma do vetor $\vec{v}$ (respectivamente, $\vec{u}$) multiplicada pelo seno do ângulo θ entre esses vetores. Assim,

$$\text{área } A = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen}(\theta).$$

Exemplo 55. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, calcule a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: ...

Definição 17. Dizemos que uma base B possui a **mesma orientação** que a base C se $\det(M_B^C) > 0$. Caso contrário, as bases possuem **orientação oposta**.

Observação 12. Sabemos que:

$$\det(M_B^C) = \frac{1}{\det(M_C^B)}.$$

Logo, se B possui a mesma orientação que C , segue que C também possui a mesma orientação que B .

A base $C = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ é a **base canônica** de $\mathbb{R}^3$. Uma base B terá **orientação positiva** (respectivamente, **negativa**), se possui a mesma orientação (respectivamente, orientação oposta) que a base canônica.

Exemplo 56. As bases $B = \{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ e $D = \{\vec{u}; \vec{v}; -\vec{w}\}$ possuem orientação oposta.

Solução: ...

Exemplo 57. A base $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\}$ possui orientação positiva ou negativa?

Solução: ...

Proposição 10. Seja $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ uma base ortonormal com orientação positiva. Então, para $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$, temos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

onde o "determinante" acima é dado por

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Demonstração. ...

□

Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

$$(PV1) \quad \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$$

$$(PV2) \quad \vec{u} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \times \vec{v}_1) + (\vec{u} \times \vec{v}_2).$$

$$(PV3) \quad \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Exemplo 58. Vale que: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$?

Solução: Não. Tome $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$ e encontre um contra-exemplo.

Exemplo 59. Vale que: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$?

Solução: Não. Tome $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 0)$ e $\vec{w} = (3, 0, 0)$ e encontre um contra-exemplo.

Exemplo 60. Determinar um vetor unitário $\vec{w}$ que seja simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e a $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Encontre também um vetor $\vec{t}$ que seja ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, de modo que $\|\vec{t}\| = 11$.

Solução: ...

5.3 Duplo Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, definimos o **duplo produto vetorial** como sendo o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

• Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem l.i., então $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ e também $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$. Logo $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são coplanares (l.d). Portanto: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Além disso, pode-se mostrar (exercício) que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v}. \quad (5.1)$$

• Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem l.d., então $\vec{u} = \mu \vec{v}$ e daí, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ e, por consequência, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0}$.

Por outro lado,

$$-(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{w}) \mu \vec{v} + (\mu \vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v} = \vec{0}.$$

Portanto, a fórmula (5.1) continua valendo para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.d..

Exemplo 61. Sejam $\vec{u} = (3, -2, 6)$, $\vec{v} = (2, -1, 0)$ e $\vec{w} = (1, 3, 4)$. Calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução: ...

5.4 Produto Misto

Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, definimos o **produto misto** como sendo o número real

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Interpretação geométrica: Considere o paralelogramo P determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Temos que o volume V de P é dado pela área da base vezes a altura.

Seja θ o ângulo entre $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim,

$$|\cos(\theta)| = \frac{h}{\|\vec{w}\|}$$

e portanto,

$$V = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\theta).$$

Proposição 11. Sejam $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ uma base ortonormal com orientação positiva, $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_B$. Então

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração. ... □

Exemplo 62. Calcule os volumes do paralelepípedo, pentaedro e tetraedro determinados pelos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, 1)$. Considerando a base determinada pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ quais as alturas destes sólidos? Quais as áreas das bases?

Solução: ...

Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(PM1) $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = -[\vec{v}; \vec{u}; \vec{w}] = [\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}]$, e assim por diante.

(PM2) $[\vec{u}; \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \vec{w}] = [\vec{u}; \vec{v}_1; \vec{w}] + [\vec{u}; \vec{v}_2; \vec{w}]$. Analogamente se a soma for feita na primeira ou na terceira entrada do produto misto.

(PM3) $[\alpha \vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = \alpha [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$. Analogamente se $\alpha \in \mathbb{R}$ estiver multiplicando os vetores na segunda ou na terceira entrada do produto misto.

(PM4) $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = 0$ se, e somente se, ou um dos vetores é nulo ou dois deles são l.d. ou os três vetores são coplanares. Ou seja,

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = 0 \iff \{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\} \text{ não é uma base de } \mathbb{R}^3.$$

Justificativa: ...

Proposição 12. Os sinais de "." e "×" podem ser permutados no produto misto, ou seja: $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

Demonstração. Temos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = [\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}] = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}.$$

□

Exemplo 63. Sabendo que $[\vec{u}; \vec{w}; \vec{x}] = 4$ e $[\vec{v}; \vec{w}; \vec{x}] = -2$, calcule $[3\vec{u} - 4\vec{v}; 4\vec{w}; -\vec{w}]$.

Solução: ...

Exemplo 64. Verifique se os vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$ são coplanares? Calcule $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução: ...

Exemplo 65. Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Calcule o valor de x para que o paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tenha volume $V = 24$.

Solução: ...

Exemplo 66. Calcular o volume do tetraedro cujos vértices estão nos pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (7, 4, 3)$, $C = (4, 6, 2)$ e $D = (3, 3, 3)$.

Solução: ...

Exemplo 67. Para quais valores de m os pontos $A = (m, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ são coplanares?

Solução: ...

5.5 Exercícios

1. É verdadeiro ou falso que: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.
2. Calcule o produto vetorial de $\vec{u} = (1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 0)$.
3. A partir do vértice de um cubo trace uma diagonal do cubo, de lados a , e uma diagonal de uma face; a seguir calcule o ângulo entre essas duas diagonais e a área do triângulo determinado por essas duas diagonais e uma aresta do cubo. Resposta: $\arccos(\sqrt{6}/3)$ e $\sqrt{2}a^2/2$.
4. Sejam os vetores $u = (2, 1, -3)$ e $v = (1, -2, 1)$. Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal a u e a v . Resposta: $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$.
5. Calcule o volume do tetraedro que tem vértices em $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (a, b, c)$ e $D = (d, e, f)$. Sendo que:
 - o ponto C está no plano xy ,
 - o vetor $\vec{AC}$ forma um ângulo de $\pi/4$ com o vetor $\vec{AB}$,
 - o comprimento de $\vec{AC}$ é $\sqrt{10}$,
 - a primeira coordenada de C é maior que a sua segunda coordenada.
 - o ponto D é obtido fazendo $A + [(\vec{AC} \wedge \vec{AB}) + (\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB})]$.
6. Encontre um vetor $\vec{u}$ tal que:

$$\vec{u} \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\langle \vec{u}, (1, 1, 0) \rangle = 2$$
 Depois encontre a projeção $\vec{p}$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = (3, 2, 2)$. Calcule o volume do tetraedro determinado por $\vec{p}$, $\vec{u}$ e o vetor $(0, 1, 0)$.
7. Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$ sobre o plano xy e sobre o plano definido pelos pontos $0 = (0, 0, 0)$, $A = (2, 3, -1)$ e $B = (-3, 2, 0)$. Resposta: $(2, -1, 0)$ e $1/91(142, -151, 13)$.
8. Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 5)$. Resposta: $\frac{\sqrt{325}}{2}$.

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

6 Retas e Planos

6.1 Retas

Considere um ponto $A \in \mathbb{R}^n$ e um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. A reta r é o conjunto dos pontos P tais que

$$P = A + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

A Equação (6.1) é chamada de **equação vetorial da reta** r , o vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor de** r e λ é chamado de **parâmetro**.

Exemplo 68. *Encontre uma equação vetorial da reta r que passa por $A = (1, 2, 1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (0, 1, 3)$.*

Solução: Basta substituir em (6.1). Com essa equação, fica fácil encontrarmos pontos que pertencem a r ; por exemplo, fazendo $\lambda = 1$, obtemos o ponto $B = (1, 3, 4) \in r$ e para $\lambda = -2$ obtemos $C = (1, 0, -5) \in r$.

Note ainda que esta mesma reta r tem por equação vetorial

$$r : P = B + \lambda \vec{v}$$

,

$$r : P = C + \lambda \vec{AB}$$

dentre inúmeras outras. Para tanto, basta tomar um ponto qualquer da reta e um vetor diretor paralelo a $\vec{v}$.

Fazendo $P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, a Equação (6.1) fica

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

As equações (6.2), são chamadas de **equações paramétricas de** r .

Exemplo 69. *Encontre equações paramétricas da reta r que passa por $A = (1, 2, -1)$ e por $B = (0, 1, 0)$.*

Suponha que $a \cdot b \cdot c \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro λ em (6.2). De fato, isolando λ e igualando as 3 equações de (6.2), obtemos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (6.3)$$

que são conhecidas como **equações simétricas de** r .

Exemplo 70. Encontre equações simétricas da reta que passa por $C = (1, 1, 1)$ e que tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 3, 6)$.

Exemplo 71. Os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, -2, 0)$ e $C = (2, 1, -2)$ são colineares?

De modo geral, para que 3 pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ sejam colineares, deveremos ter

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

6.2 Planos

Considere um ponto $A \in \mathbb{R}^3$ e dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O **plano** Π é o conjunto dos pontos X tais que

$$\Pi : X = A + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

A equação (6.4) é chamada de **equação vetorial do plano** Π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de **vetores diretores do plano** Π .

Exemplo 72. Encontre uma equação vetorial do plano que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 3, 2)$.

Agora, considere $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. De (6.4), obtemos

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

As equações (6.2), são chamadas de **equações paramétricas de** Π .

Exemplo 73. Obtenha equações paramétricas do plano Π_1 que é paralelo ao plano Π do exemplo anterior, e que passa pelo ponto $D = (10, -1, 4)$.

Definição 18. Dado um plano Π , qualquer vetor não nulo ortogonal a Π é chamado de **vetor normal a** Π .

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{n} = (a, b, c)$ vetor normal a Π . Dado um ponto $X = (x, y, z) \in \Pi$ ($X \neq A$), obtemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 &\Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow \\ &ax + by + cz = d, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

A equação (6.6) é chamada de **equação geral do plano** Π .

Exemplo 74. Encontre uma equação vetorial de uma reta r perpendicular ao plano $\Pi : x + y - 3z + 4 = 0$.

Exemplo 75. Encontre uma equação geral do plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 2)$, $B = (2, 0, -1)$ e $C = (1, 1, 1)$.

Solução: Estude a respeito de Produto Vetorial para encontrar o vetor normal.

Exemplo 76. Dado o plano $\pi : x - y + z + 1 = 0$, obtenha equações paramétricas de π .

Solução: ...

Exemplo 77. Obtenha a equação geral de um plano π (qualquer) que passa pela origem.

Solução: ...

Tiago Carvalho

6.3 Exercícios

1. Considere a reta de equações simétricas

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}.$$

Obtenha equação vetorial e equações paramétricas de r .

2. Escreva uma equação geral do plano que passa pelo ponto $A = (2, 1, 3)$ e pela intersecção dos planos $2x - y - z = 2$ e xy . Resposta: $6x - 3y - z = 6$.
3. Dados $A = (2, 3, 6)$ e $B = (4, 1, -2)$, escreva uma equação geral de um plano π tal que a distância de um ponto arbitrário de π até A é a mesma distância deste ponto até B . Resposta: $x - y - 4z + 7 = 0$.
4. Determine o ponto do plano $ax + by + cz + d = 0$ mais próximo da origem. Resposta: $(-1/(a^2 + b^2 + c^2))(ad, bd, cd)$.
5. Encontre a equação geral de um plano π (qualquer) paralelo ao eixo z .
6. Encontre a equação geral de um plano π (qualquer) paralelo ao plano xy .
7. Determine o plano que contém as retas $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 0)$ e $s : Y = (3, 3, 3) + \beta(-4, 2, 0)$ com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
8. Determine a reta que está na intersecção dos planos $\pi_1 : x - y - z = 2$ e $\pi_2 : 2x - z = 1$.
9. Obtenha a intersecção dos planos $\pi_1 : x - y + z = 3$, $\pi_2 : -3x + 2y + z = 4$ e $\pi_3 : x - 4y + 2z = 1$.

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

7 Curvas planas

7.1 Coordenadas - cartesianas, polares, esféricas

Dado um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$(x, y) = (0, 0) + x(1, 0) + y(0, 1).$$

neste caso usamos a base canônica C de $\mathbb{R}^2$.

Já vimos anteriormente, que o mesmo ponto passa a ter coordenadas diferentes se considerarmos outra base. Por exemplo, tome a base $B = \{(1, 1); (0, 1)\}$ e daí

$$(x, y)_B = (0, 0) + x(1, 1) + (y - x)(0, 1) = (x, y - x)_C.$$

Agora, considere a seguinte mudança de coordenadas: $x = x$ e $u = y - 1$. No novo sistema de coordenadas xu o ponto $(x, y) = (0, 0)$ passa a ter coordenadas $(x = 0, u = -1)$ e o ponto $(x, y) = (0, 1)$ passa a ter coordenadas $(x = 0, u = 0)$. Ou seja, ocorreu uma translação da origem destes sistemas de coordenadas.

XXX Figura XXX

Da mesma forma, podemos considerar uma translação qualquer dada pela mudança de coordenadas: $x = u + h$ e $y = v + k$, com $h, k \in \mathbb{R}$.

Outra possibilidade é fazermos mudanças de coordenadas não-lineares. Por exemplo, considere a mudança de coordenadas: $u = x^2 + 1$ e $y = y$. Neste caso, o eixo y permanece inalterado mas o novo eixo u corresponde aos pontos (x, y) que estavam sobre a parábola $y = x^2 + 1$.

XXX Figura XXX

Em $\mathbb{R}^3$ podemos fazer algo análogo ao anterior. Por exemplo, considere a mudança de coordenadas: $x = x$, $y = y$ e $u = z - 1$. Neste caso, os eixos x e y permanecem inalterados mas o plano $u = 0$ estará onde estava anteriormente o plano $z = 1$.

XXX Figura XXX

7.1.1 Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^2$

Em $\mathbb{R}^2$, considere a mudança de coordenadas: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, com $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Pode-se mostrar que o raio r é a distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem O do sistema de coordenadas xy e o ângulo θ , medido em radianos e no sentido anti-horário, é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo positivo dos x .

XXX Figura XXX

Neste caso, a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ passa a ter coordenadas $r = 1$, que representa uma reta no plano $r\theta$.

XXX Figura XXX

7 Curvas planas

Exemplo 78. Considere a expressão: $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 2$. Completando quadrados, obtenha a expressão da circunferência que ela representa. A seguir, faça a translação $(x, y) = (u - 1, v + 1)$ e uma mudança de coordenadas polares para obter a reta que esta circunferência (do plano xy) determina no plano $r\theta$.

...

Adiante, veremos como fazer mudanças de coordenadas usando rotações.

7.1.2 Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$, considere a mudança de coordenadas: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ e $z = z$, com $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Pode-se mostrar que o raio r é a distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem O do sistema de coordenadas xy e o ângulo θ , medido em radianos e no sentido anti-horário, é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo positivo dos x . Esta mudança de coordenadas também é chamada de **coordenadas cilíndricas**.

Neste caso, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ passa a ter coordenadas $r = 1$, que representa um plano no espaço $r\theta z$.

XXX Figura XXX

7.1.3 Coordenadas Esféricas

Em $\mathbb{R}^3$, considere a mudança de coordenadas: $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$ e $z = \rho\cos(\varphi)$, com $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Pode-se mostrar que o raio ρ é a distância de um ponto $P = (x, y, z)$ à origem O do sistema de coordenadas xyz , o ângulo φ , medido em radianos, é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo positivo dos z e o ângulo θ , medido em radianos e no sentido anti-horário, é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OQ}$ e o eixo positivo dos x , com Q sendo a projeção ortogonal de P sobre o plano xy .

XXX Figura XXX

Neste caso, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ passa a ter coordenadas $\rho = 1$, que representa um plano no espaço $\rho\varphi\theta$.

XXX Figura XXX

7.2 Conicas

Chama-se **cônica** ao conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (7.1)$$

onde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Geometricamente, uma cônica é a curva obtida fazendo-se a intersecção de um cone $z^2 = x^2 + y^2$ com um plano arbitrário $ax + by + cz = d$. A resolução, em z , do sistema obtido com as equações do cone e do plano gera a Equação (7.1).

7.2.1 Elipse

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , seja $2c$ a distância entre eles. Definimos a **elipse** E como sendo o conjunto dos pontos P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \text{ onde } a > c > 0.$$

Portanto,

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Vamos agora obter a **equação reduzida da elipse**. Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. De acordo com a definição, um ponto $P = (x, y)$ está na elipse se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

Nomenclatura:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse,
- $2c$ é a distância focal,
- O ponto médio entre os focos é o centro da elipse,
- O segmento $\overline{A_1 A_2}$ (ver Figura XXX) é o eixo maior,
- O segmento $\overline{B_1 B_2}$ (ver Figura XXX) é o eixo menor,
- $e = \frac{c}{a} < 1$ é a excentricidade da elipse.

XXX FIGURA XXX

Se os focos estiverem sobre o eixo y , refazendo os cálculos anteriores, obteremos a equação da elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Exemplo 79. *Obtenha a equação reduzida da elipse com focos no eixo x , centro na origem, medida do eixo maior 10 e distância focal 6.*

Solução: ...

Exemplo 80. *Diga em qual eixo se encontram os focos e qual a distância focal da elipse*

$$2x^2 + 4y^2 = 10.$$

Solução: ...

7 Curvas planas

Quando o centro da elipse é um ponto $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ e os focos são paralelos ao eixo x , a equação da elipse é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

e se os focos são paralelos ao eixo y a equação fica

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Em quaisquer destes casos, a forma geral da equação da elipse é

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A e B possuem o mesmo sinal.

Exemplo 81. Dada a elipse

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0,$$

determine seu centro e focos.

Solução: ...

7.2.2 Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , seja $2c$ a distância entre eles. Definimos a **hipérbole** H como sendo o conjunto dos pontos P tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \text{ onde } c > a > 0.$$

Portanto,

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Vamos agora obter a **equação reduzida da hipérbole**. Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. De acordo com a definição, um ponto $P = (x, y)$ está na hipérbole se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = c^2 - a^2$.

Nomenclatura:

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole,
- $2c$ é a distância focal,
- O ponto médio entre os focos é o centro da elipse,
- O segmento $\overline{A_1 A_2}$ (ver Figura XXX) é o eixo real,

- O segmento $\overline{B_1 B_2}$ (ver Figura XXX) é o eixo imaginário,
- $e = \frac{c}{a} > 1$ é a excentricidade da hipérbole.

XXX FIGURA XXX

Se os focos estiverem sobre o eixo y , refazendo os cálculos anteriores, obteremos a equação da hipérbole

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Exemplo 82. *Obtenha a equação reduzida da hipérbole com focos no eixo x , centro na origem, medida do eixo real 6 e distância focal 10.*

Solução: ...

Exemplo 83. *Diga em qual eixo se encontram os focos e qual a distância focal da hipérbole*

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Solução: ...

Quando o centro da hipérbole é um ponto $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ e os focos são paralelos ao eixo x , a equação da hipérbole é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

e se os focos são paralelos ao eixo y a equação fica

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Em quaisquer destes casos, a forma geral da equação da hipérbole é

$$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A e B possuem o mesmo sinal.

Exemplo 84. *Obtenha a equação geral da hipérbole de centro em $(7, 8)$, focos paralelos ao eixo x , medida do eixo real 8 e medida do eixo imaginário 6.*

Solução: ...

7.2.3 Parábola

Dados um ponto F e uma reta r tais que $F \notin r$, definimos a **parábola** P como sendo o conjunto dos pontos Q tais que

$$d(Q, F) = d(Q, r).$$

Portanto,

$$P = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, F) = d(Q, r)\}.$$

7 Curvas planas

Vamos agora obter a **equação reduzida da parábola**. Sejam $F = (p, 0)$ e $2p = d(F, r)$ com $r : x = -p$ (ver Figura XXX). De acordo com a definição, um ponto $Q = (x, y)$ está na parábola se

$$d(Q, F) = d(Q, r) \Rightarrow \dots \Rightarrow y^2 = 4px.$$

Nomenclatura:

- F é o foco da parábola,
- r é a diretriz,
- $2p$ é o parâmetro,
- A reta por F e perpendicular a r é o eixo (de simetria) da parábola,
- V é o vértice da parábola.

XXX FIGURA XXX

Se o vértice não estiver na origem, então a equação da parábola fica

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Se o segmento $\overline{VF}$ for paralelo ao eixo y então a equação fica

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Exemplo 85. *Obtenha a equação reduzida da parábola com vértice em $(1, 0)$ e foco em $(2, 0)$.*

Solução: ...

7.3 Reconhecimento de Cônicas

Para elucidarmos qual o tipo da cônica descrita por uma equação como (7.1), podemos seguir o seguinte roteiro:

1. Procure eliminar, por meio de uma translação, os termos de grau 1.
2. Procure eliminar o termo em xy através de uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{cases} x = u \cos(\theta) - v \sin(\theta) \\ y = u \sin(\theta) + v \cos(\theta) \end{cases} \quad (7.2)$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$.

3. Após as duas etapas anteriores, chega-se a uma equação da forma

$$A'u^2 + C'v^2 + F' = 0,$$

que é de fácil reconhecimento.

Note que ao submetermos a Equação (7.1) à mudança de coordenadas (7.2), ficamos com

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\sin^2(\theta); \\ B' &= (C - A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta); \\ C' &= A\sin^2(\theta) - \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\cos^2(\theta); \\ D' &= D\cos(\theta) + E\sin(\theta); \\ E' &= E\cos(\theta) - D\sin(\theta); \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Dados os valores de A', B', C', D', E', F' obtidos anteriormente, para anular o termo B' , deveremos ter

$$(C - A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0$$

e para isso, faremos as seguintes considerações:

- Se $C = A$ então $\cos(2\theta) = 0$ (pois $B \neq 0$, caso contrário nem faríamos este passo) e assim, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Além disso, como $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, segue que:

$$A' - C' = A\cos(2\theta) + B\sin(2\theta) + C\cos(2\theta) \Rightarrow \sin(2\theta) = \frac{A' - C'}{B}.$$

Portanto, para $\theta = \frac{\pi}{4}$ temos $A' = A + \frac{B}{2}$, $C' = A - \frac{B}{2}$ e para $\theta = \frac{3\pi}{4}$ temos $A' = A - \frac{B}{2}$, $C' = A + \frac{B}{2}$.

- Se $C \neq A$ então $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C}$.

Utilizando Álgebra Linear pode-se provar que A' e C' são raízes de

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B/2 \\ B/2 & C - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e para decidir os valores de A' e C' utilizamos que:

$$A' - C' = A\cos(2\theta) + B\sin(2\theta) - C\cos(2\theta) = B\sin(2\theta) + (A - C)\cos(2\theta).$$

Dividindo as igualdades anteriores por $\cos(2\theta)$ e usando que $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C}$, segue que:

$$\cos(2\theta) = \frac{A - C}{A' - C'}.$$

Exemplo 86. Reconheça a cônica

$$G(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0.$$

Solução: ...

Exemplo 87. Reconheça a cônica

$$G(x, y) = 8x^2 - 2xy + 8y^2 - 46x - 10y + 11 = 0.$$

Solução: ...

Exemplo 88. Reconheça a cônica

$$G(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Solução: ...

7.4 Exercícios

1. Determine a circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 1)$, $B = (1, -2)$ e $C = (2, 3)$. Resposta: $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$.

2. Escreva as equações paramétricas da reta tangente à circunferência

$$\begin{aligned}x &= x_0 + r\cos(t) \\y &= y_0 + r\sin(t)\end{aligned}$$

no ponto (x_1, y_1) .

3. A trajetória de uma partícula é dada por

$$\begin{aligned}x &= 2 + 2\cos(t) \\y &= 1 + 2\sin(t),\end{aligned}$$

onde $t \in [\pi/8, 2\pi]$. Determine o menor valor de t para o qual a partícula se encontra a igual distância dos pontos $A = (0, 4)$ e $B = (1, 5)$.

4. Mostre que, para qualquer valor de t , o ponto $(a\cos(t), b\sin(t))$ pertence à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
5. Determine o ponto da elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ mais próximo da reta $2x - 3y + 25 = 0$.
6. Determine os focos, os vértices e esboce o gráfico da hipérbole $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$.
7. Deduza uma equação da parábola de foco em $(-1, 0)$ e vértice em $(0, 0)$.

8. Reconheça, determine (quando fizer sentido) a posição dos focos, eixo maior, eixo menor, eixo real, eixo imaginário e esboce o gráfico da cônica $x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x - 6y = 0$.
9. Reconheça, determine (quando fizer sentido) a posição dos focos, eixo maior, eixo menor, eixo real, eixo imaginário e esboce o gráfico da cônica $x^2 - 16y^2 - 32y - 32 = 0$.

Observação: Não se limite a estes exercícios. Tente fazer outros exercícios da bibliografia sugerida.

Tiago Carvalho